对康托关于实数不可数的证明的探讨和一个关于实数可数的证明

唐晓雯*

摘要

本文指出了康托关于实数不可数的两个证明中存在的错误或矛盾，并给出了一个其可数的证明。我还给出了一个自然数集的幂集可数的证明，并指出了康托定理的证明中的矛盾。

实数是不可数的，即不能按照某一种方式和自然数集一一对应。这已经被康托证明并被大家广泛接受，之后，一些新的证明也陆续出现。然而，在我看来，康托的对角线证明似乎隐约存在着漏洞。在仔细的思考后，我发现这个证明的确存在着自相矛盾的地方。

康托的证明的思路是：把开区间$(0,1)$表示成小数的形式，然后先假设它们可数，再构造一个新的小数，并认为这个数不同于之前所列的任何小数。但是，既然你都说它们与自然数集一一对应了，它们就包括了$(0,1)$中的任何小数，也就包括了你以任何方式构造的任何小数。所以，康托构造的小数实际上还是属于$(0,1)$。

康托对实数不可数给出的第一个证明的基本思路是:先证明代数数和自然数集一一对应，然后指出在任意一个区间里除了代数数还有无限多个其它数存在，然后这样就认为实数不能和自然数一一对应。但假如这样的证明是对的，那么自然数也比偶数多了？因为我们可以让偶数和自然数集中的偶数一一对应，然后自然数集其余的无限多的数却没有得到对应。因此康托的这个证明是错误的。

可以以一种简单的方式让$(0,1)$和自然数集的子集对应。方法如下:先把它们表示成小数的形式，然后规定，任何小数对应的那个自然数是把它的小数点和小数点前面的那个0去掉再在这样所得到的那个数（整数）前面

*E-mail：yztsztxw@163.com

加1。比如0.1对应的是11，0.0268对应的是10268，0.856对应1856。对于无穷小数，它们对应的就是具有无穷多位的整数。特别是对于无理数，由于它们的小数位数不断地在后面以一种无规的方式增加，所以它们对应的整数位数也会不断地增加。既然我们已经证明$(0,1)$可以和自然数集的一个子集对应，那么它自然就是可数的了。

康托还认为自然数集的幂集的势大于其本身。然而我们证明:其幂集依然是可数的。

证明:自然数集的幂集可以以下述方式按指标排列，即对于其任意的子集，只要它们所含元素的总和相同，就把它们归属于这个总和下面。如0，其下的子集是$\{0\}$，1，其下的子集是$\{1\}$，$\{0,1\}$。2，其下的子集有$\{2\}$,$\{0,2\}$。6，其下的子集有$\{6\}$, $\{0,6\}$，$\{1,5\}$，$\{2,4\}$，$\{0,1,5\}$,$\{0,2,4\}$,$\{1,2,3\}$,$\{0,1,2,3\}$.我们可以规定以下对应:

$$0:\{0\}\to 0 \tag{1}$$
$$1:\{1\}\to 1,\{0,1\}\to 2 \tag{2}$$
$$2:\{2\}\to 3,\{0,2\}\to 4 \tag{3}$$
$$3:\{3\}\to 5,\{0,3\}\to 6,\{1,2\}\to 7,\{0,1,2\}\to 8 \tag{4}$$
$$... \tag{5}$$

所以，这个幂集是可数的。

这样的话，康托定理（对于任意一个集合A，不存在从A到其幂集$P(A)$的双射）就是错的了。康托定理的证明错在哪呢？这个证明首先假设存在这样的双射，并称它为g。然后定义一个集合$B=\{x \mid x\in A\text{fi}x\notin g(x)\}$。在$g$的映射里$B$对应的那个元素$a$是属于$B$还是不属于$B$呢？这样，矛盾就产生了。然后，大家就说所以不可能存在双射g。实际上，B的集合的存在是依赖于g的。在g映射定义了之后，B集合能存在吗？假设它是存在的，那么它属于$P(A)$。在g下它对应的那个元素b是属于B还是不属于呢？无论哪种都会产生矛盾。所以，B是不存在的。既然这样的B集合都不能存在，自然也就没有后续的证明了。康托定理的证明中的反证法是不成立的。

康托认为，除了自然数集这种可数的无穷，还存在势更大的无穷。实际上，无论是什么无穷集合，它们的元素都是被抽象成一个一个的，也是一个一个地增加的。由此我们断言：

定理：任何无穷集合都是可数的。