

METHODES DE RESOLUTION

**Chapitre Extrait Du Mémoire
De Fin d'Etudes Pour l'Obtention
Du Diplôme d'Ingénieur Géographe Civil
(1980-1982)**

Par

**NOUREDDINE HORRIGUE
Ingénieur Géographe Général**

**Edition Numérique par Abdelmajid
BEN HADJ SALEM
Ingénieur Géographe Général, v1.
août 2024**

Abstract : This paper is the digital version of a chapter taken from his final thesis entitled "Compensation of Geodetic Networks". This is chapter V "Resolution Methods" of the thesis. It concerns the methods for solving the equations of linear systems encountered during compensation calculations for geodetic networks using the least squares method.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Résidence Bousten 8, Av. Mosquée Raoudha, 1181 Soukra-Raoudha,
Tunisia.

E-mail : abenhadsalem@gmail.com



*A La Mémoire de Mon Ami et Collègue
Nouredine HORRIGUE,
Ingénieur Géographe Général,
qui nous a quitté en 2024
Paix à son âme.*

Préface

Ce document est un chapitre extrait du mémoire de fin d'études présenté pour l'obtention du diplôme d'ingénieur géographe à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) par Noureddine HORRIGUE élève ingénieur de la promotion 1980-1982 du cycle A de l'ENSG. Nous nous sommes connus à l'ENSG quand j'étais élève ingénieur au cycle B de l'ENSG à ma troisième année 1980-1981. Depuis, nous étions en contact en Tunisie. Il avait travaillé à la Municipalité de Tunis, puis il avait rejoint le Ministère des Domaines et des Affaires Foncières.

En mémoire de notre amitié, je voudrai présenter la version numérique d'un chapitre extrait de son mémoire de fin d'études intitulé "**Compensation des Réseaux Géodésiques**, 109 pages"[1]. Il s'agit du chapitre "**Méthodes De Résolution**" du mémoire. Il concerne les méthodes de résolution des équations des systèmes linéaires rencontrés lors des calculs de compensation des réseaux géodésiques par la méthode des moindres carrés.

Tunis,
Août 2024

Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe

Table des matières

1 Méthodes de Résolution	1
1.1 Classification des Méthodes de Résolution	2
1.2 Les Méthodes Directes	2
1.2.1 Méthode de la matrice inverse	2
1.2.2 Méthodes de la résolution triangulaire	3
1.3 Méthodes Itératives	7
1.3.1 Méthodes itératives pures	7
1.3.2 Méthodes semi-itératives : gradients et résidus conjugués	8
1.4 Conclusion Générale sur Les Méthodes de Résolution	13
Bibliographie	14

CHAPITRE 1

Méthodes de Résolution

Les méthodes classiques de résolution basées sur les formules de Cramer sont à rejeter même pour de petits systèmes. En effet, en plus du nombre d'opérations arithmétiques normalement élevé, l'accumulation rapide des erreurs d'arrondi fera que la solution finale s'écartera sensiblement de la solution exacte.

C'est pourquoi on a mis au point des méthodes de résolution plus économiques et à la fois plus précises. Il est à noter que le coût est souvent estimé en nombre d'opérations arithmétiques fondamentales (\times , \div , $\sqrt{\quad}$) qui sont en principe les plus longues sur un calculateur électronique. Quand à la précision, elle est directement conditionnée par la stabilité de l'algorithme de calcul.

1.1 Classification des Méthodes de Résolution

Classiquement on distingue les méthodes directes et les méthodes itératives :

- Les méthodes directes sont des algorithmes finis qui sont censés nous donner la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques.

- Les méthodes itératives, d'une façon générale, ont un algorithme infini convergent qui peut donner la solution avec une précision fixée à l'avance. Toutefois, quelques unes de ces méthodes itératives sont des méthodes directes comme la méthode des résidus conjugués ou celle des gradients conjugués.

1.2 Les Méthodes Directes

1.2.1 Méthode de la matrice inverse

C'est la première méthode qui vient à l'esprit pour le calcul de \bar{X} . En effet, ayant le système normal symétrique et défini positif :

$${}_p N {}_{p \cdot p} \bar{X}_1 = {}_p W_1, \quad N = (n_{ij}), 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p$$

$$\text{il vient } \bar{X} = N^{-1} \cdot W$$

- Algorithme de la méthode :

C'est l'algorithme de l'élimination totale de Gauss :

$$n'_{ij} = n_{ij} - n_{i1} n_{11}^{-1} n_{1j}$$

- Nombre d'opérations :

On travaille constamment sur un tableau de p^2 éléments, d'où un nombre de p^3 opérations arithmétiques élémentaires. Ce nombre est important comparé à celui des méthodes de triangularisation. Pour cette raison, la méthode de la matrice inverse ne peut se justifier que si l'on a besoin de N^{-1} . C'est le

cas des moindres carrés où la matrice variance de \bar{X} est :

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \eta^2 \cdot N^{-1}$$

On pourrait avoir besoin de N^{-1} pour l'étude de $\sigma_{\bar{X}}^2$.

Remarques :

- i) - Pour les grands systèmes linéaires, les quantités nécessaires du calcul de N^{-1} ne peuvent s'implanter simultanément en mémoire centrale et le problème se pose de les loger dans des parties distinctes de la mémoire et d'organiser le travail de façon que le transfert de ces quantités ralentisse le moins possible la marche des calculs.
- ii) - Par suite des erreurs d'arrondi, N^{-1} peut ne pas être exacte. Soit N_0^{-1} la matrice trouvée, l'erreur numérique est donnée par :

$$F_0 = Id - N \cdot N_0^{-1}, \quad Id \text{ est la matrice unité}$$

La solution exacte correspondrait à l'annulation de F_0 . On peut toutefois améliorer la solution obtenue en procédant par approximations successives. La méthode serait convergente si le module de F_0 est plus petit que 1 ($\|F_0\| < 1$).

1.2.2 Méthodes de la résolution triangulaire

Elles sont basées sur le théorème suivant :

Théorème 1.2.1. *Tout matrice carrée $A = (a_{ij})$ d'ordre p , aux mineurs diagonaux principaux non nuls :*

$$\Delta_1 = a_{11} \neq 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \dots, \Delta_p = \det(A) \neq 0$$

peut être mise sous la forme d'un produit de deux matrices triangulaires de structures différentes (inférieure ou supérieure) ; cette décomposition sera unique si l'on fixe à l'avance les éléments diagonaux de l'une des matrices triangulaires (si on les pose par exemple égaux à 1).

Or, ce théorème est largement vérifié vu que les mineurs diagonaux de N sont strictement positifs.

Les deux méthodes de résolution par triangularisation les plus connues sont celle de Gauss ou de Cholesky. Elles comportent une phase identique appelée Remontée et une phase propre à chacune d'elles appelée Descente.

L'action de N^{-1} se trouve donc remplacée astucieusement par les deux multiplications descendante et remontante par deux matrices triangulaires. Posons :

$$N = \mathcal{H}^t . H, \quad \mathcal{H} \text{ et } H \text{ deux matrices triangulaires droites}$$

où :

- H : matrice des résolvantes (diagonale formée des résolvantes diagonales),
- \mathcal{H} : matrice des résolvantes réduites (diagonale formée de +1).

Phase commune : remontée (ou multiplication remontante)

Elle consiste à résoudre le système triangulaire suivant :

$$H . \bar{X} = (\mathcal{H}^t)^{-1} . W = U, \quad \text{avec } h_{ij} = 0, \text{ pour } i > j; U = (u_i)$$

On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_p = \frac{u_p}{h_{pp}} \\ X_{p-1} = \frac{u_{p-1} - h_{p-1,p} \cdot X_p}{h_{p-1,p-1}} \\ \vdots \\ X_i = \frac{u_i - \sum_{k=i+1}^p h_{ik} \cdot X_k}{h_{ii}} \\ \vdots \end{array} \right.$$

La remontée nécessite p^2 opérations élémentaires.

Descente (ou multiplication descendante)

- par Gauss-Doolittle : L'algorithme donnant les coefficients de la matrice

des résolvantes h_{ij} , ($j \geq i$) est le suivant :

1er pivot : $h_{11} = u_{11}$	i ème pivot : $h_{ii} = u_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_{ki}^2}{u_{kk}}$
1ère ligne : $h_{1j} = u_{1j}$	i ème ligne de : $h_{ij} = u_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{h_{kj} h_{ki}}{h_{kk}}$
1ère composante de U : $u_1 = w_1$	i ème composante de U : $u_i = w_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{u_k \cdot h_{ki}}{h_{kk}}$

$$\det(N) = \det(\mathcal{H}^t) \cdot \det(H) = h_{11} h_{22} \dots h_{pp}$$

- par Cholesky :

Dans ce cas, on a $\mathcal{H} = H$ et $N = H^t \cdot H$: c'est la factorisation de Cholesky.

L'algorithme donnant H est le suivant :

$$\text{1er pivot : } h_{11} = \sqrt{u_{11}}$$

$$\text{1ère ligne de } H : h_{1j} = \frac{u_{1j}}{h_{11}}$$

$$\text{1ère composante de } U : u_1 = \frac{w_1}{h_{11}}$$

$$\begin{aligned} i\text{ème pivot : } h_{ii} &= \sqrt{u_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{ki}^2} \\ i\text{ème ligne de } H : h_{ij} &= \left(u_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} h_{kj} h_{ki} \right) / h_{kk} \\ i\text{ème composante de } U : u_i &= \left(w_i - \sum_{k=1}^{i-1} w'_k h_{ki} \right) / h_{kk} \end{aligned}$$

$$\det(N) = \det(H)^2 = (h_{11} h_{22} \dots h_{pp})^2$$

Remarque : Au cas où N n'est pas définie positive, il faut prévoir l'extraction de certaines racines carrées des pivots négatifs. Il faut donc mémoriser les lignes affectées de l'imaginaire pur i ($a < 0$, $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$).

Nombre d'opérations arithmétiques :

Environ $p^3/3$ pour Cholesky et $2p^3/3$ pour Gauss [2], [3], d'où un premier avantage de Cholesky par rapport à Gauss.

Stabilité numérique :

Pour des matrices symétriques définies positives, Cholesky est suffisamment stable même si l'on travaille en virgule fixe et avec des pivots variables. Il n'en est pas de même pour Gauss qui doit être employé avec stratégie de pivot soit partiel soit total. Or cette opération détruit la symétrie de la matrice normale. Cet avantage¹ risquerait de disparaître si l'on travaillait en virgule flottante.

1. L'avantage de la méthode de Cholesky par rapport à celle de Gauss.

Encombrement de la mémoire centrale de l'ordinateur :

La méthode de Cholesky est moins encombrante que celle de Gauss dans le cas d'une matrice symétrique définie positive. En effet, il n'opère que sur une seule équation par inconnue au lieu de deux dans le cas de Gauss, puisque seule la résolvante réduite est utilisée.

Toutefois, il ne faut pas perdre de vue l'inconvénient présenté par Cholesky au cas où N n'est plus définie positive et où il faut mémoriser les imaginaires purs.

Résolution en cascade[4]

La méthode de Cholesky par ses notations matricielles assez commodes se prête mieux à la résolution en cascade pour des systèmes symétriques du type :

$$\begin{cases} A.X + B.Y = W \\ B^t.X + C.Y = K \end{cases}$$

1.3 Méthodes Itératives

1.3.1 Méthodes itératives pures

Ces méthodes consistent à construire une suite (*a priori* infinie) de solutions $X_0, X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots$ qui converge vers la solution désirée. Seulement, on maîtrise rarement le processus de convergence vers cette solution. Pour cette raison, ces méthodes sont peu utilisées en Géodésie.

Pour clore ce paragraphe, notons que l'arrêt de la résolution est commandée :

- soit par un test de précision : $|X_p - X_{p-1}| < \epsilon$, ϵ fixé à l'avance.
- soit par un dépassement du nombre maximum d'itérations prévu.

1.3.2 Méthodes semi-itératives : gradients et résidus conjugués

Ces deux méthodes sont des méthodes directes puisqu'on démontre qu'elles convergent en p itérations au plus. La raison est que l'ellipsoïde caractéristique $X^t.N.X = 1$ admet au plus p directions conjuguées [5],[6].

On pratique, on espère obtenir la solution en quelques itérations seulement ceci est possible moyennement un bon choix de la solution approchée. Or cette condition est satisfaite en Géodésie où le réseau approché est assez voisin du réseau définitif.

Critère d'arrêt de la résolution :

L'arrêt de la résolution sera commandé par le test empirique suivant :

$$r^t.r < \epsilon, \quad \text{avec } \epsilon \text{ fixé à l'avance}$$

La fixation de la valeur de ϵ dépend du calculateur électronique utilisé et surtout du nombre de décimales précises dont il permet la représentation. Pour un CDC où l'on a 15 décimales exactes, Mr. H.M. Dufour propose 10^{-15} pour ϵ .

A-Généralités sur les deux algorithmes

Soit le système des moindres carrés $N.X = W$ et X_i une solution approchée. On appelle résidu numérique la quantité :

$$r_i = N.X_i - W \tag{1.1}$$

Résoudre le système initial revient à annuler r_i .

Soit la suite récurrente suivante :

$$X_i = X_{i-1} + \alpha_i.P_i \tag{1.2}$$

Des relations de (1.1) et (1.2), on déduit la relation :

$$r_i = r_{i-1} + \alpha_i \cdot N \cdot P_i \quad (1.3)$$

Les vecteurs P_i , appelés gradients, seront choisis selon un critère qui caractérisera l'algorithme de résolution.

1er Critère : minimisation de $f_1 = r_i^t \cdot r_i = \|r_i\|^2$ ce qui donnera pour α_i la valeur suivante :

$$\alpha_i = - \frac{r_i^t \cdot N \cdot P_i}{(N \cdot P_i)^t \cdot (N \cdot P_i)} \quad (1.4)$$

A chaque itération, la norme $\|r_i\|$ du vecteur résidu diminue, même si la matrice N n'est pas symétrique définie positive : elle peut être quelconque (et même singulière) ; avec ce critère la solution s'améliore au sens des moindres carrés.

2ème Critère : minimisation de $f_2 = r_i^t \cdot N^{-1} \cdot r_i = \|r_i\|^2$ ce qui donnera pour α_i la valeur suivante :

$$\alpha_i = - \frac{r_i^t \cdot P_i}{(P_i)^t \cdot (N \cdot P_i)} \quad (1.5)$$

A chaque itération, on a $r_i^t \cdot N^{-1} \cdot r_i < r_{i-1}^t \cdot N^{-1} \cdot r_{i-1}$. La solution s'améliore selon un autre critère.

B-Etude détaillée des algorithmes des résidus et des gradients conjugués

B-1- Résidus conjugués :

- Critère choisi : celui basé sur la minimisation de $f_1 = r_1^t \cdot r_i$.
- Les résidus (r_i) sont conjugués par rapport à N et les vecteurs ($N \cdot P_i$) sont

orthogonaux 2 à 2, on a donc :

$$\begin{cases} r_i^t \cdot N \cdot r_j = 0, & \forall i \neq j \\ (N \cdot P_i)^t \cdot (N \cdot P_j) = 0, & \forall i \neq j \\ P_i = r_{i-1} + \beta \cdot P_{i-1} \end{cases}$$

- α est donnée par la formule (1.4), alors que le coefficient β est déterminé de manière à "surminimiser" f_1 , ce qui est automatique en tenant compte de l'équation (1.3).

- Algorithme théorique :

Si X_0 est la solution approchée de départ, le premier résidu numérique est $r_0 = N \cdot X_0 - W$, d'où l'algorithme théorique qui a été programmé dans le cas des systèmes pleins et a donné des résultats satisfaisants.

<u>1ère itération</u>	\Rightarrow	<u>ième itération</u>
$\beta = 0$		$\beta = -\frac{(N \cdot P_{i-1})^t \cdot (N \cdot r_{i-1})}{(N \cdot P_{i-1})^t \cdot (N \cdot P_{i-1})}$
$P_1 = r_0$		$P_i = r_{i-1} + \beta \cdot P_{i-1}$
$\alpha = -\frac{P_1^t N^t \cdot r_0}{(N P_1)^t \cdot (N P_1)}$		$\alpha = -\frac{P_i^t N^t \cdot r_{i-1}}{(N P_i)^t \cdot (N P_i)}$
$X_1 = X_0 + \alpha \cdot P_1$		$X_i = X_{i-1} + \alpha \cdot P_i$
$r_1 = r_0 + \alpha N \cdot P_1$		$r_i = r_{i-1} + \alpha N \cdot P_i$

NOTA : Cet algorithme a été programmé en lui ajoutant le test :

$$\sum r_i^2 < \epsilon$$

Il figure en Annexe V du mémoire.

B-2- Gradients conjugués : (N symétrique définie positive)

- Critère choisi : minimisation de $f_2 = r_i^t N^{-1} \cdot r_i$.

- Les résidus (r_i) sont orthogonaux 2 à 2 et les gradients P_i sont conjugués par rapport à la matrice N (d'où leur appellation).

On a donc :

$$\begin{cases} r_i^t \cdot r_j = 0, \forall i \neq j, \\ P_i^t \cdot N \cdot P_j = 0, \forall i \neq j, \\ \text{et } P_i = r_{i-1} - \beta \cdot P_{i-1} \end{cases}$$

Le coefficient α est donné par la formule (1.5), alors que β est obtenu en surminimisant le critère f_2 .

Algorithme théorique

Soit X_0 la solution approchée et soit $r_0 = N \cdot X_0 - W$ le résidu numérique qui lui correspond. L'algorithme numérique est décrit ci-après :

<u>1ère itération</u>	\Rightarrow	<u>ième itération</u>
$\beta = 0$		$\beta = -\frac{P_{i-1}^t \cdot N \cdot r_{i-1}}{P_{i-1}^t \cdot N \cdot P_{i-1}}$
$P_1 = r_0$		$P_i = r_{i-1} + \beta \cdot P_{i-1}$
$\alpha = -\frac{P_1^t \cdot r_0}{P_1^t \cdot N P_1}$		$\alpha = -\frac{P_i^t \cdot r_{i-1}}{P_i^t \cdot N P_i}$
$X_1 = X_0 + \alpha \cdot P_1$		$X_i = X_{i-1} + \alpha \cdot P_i$
$r_1 = r_0 + \alpha N \cdot P_1$		$r_i = r_{i-1} + \alpha N \cdot P_i$

C-Quelques considérations techniques sur les deux algorithmes

C1- Place en mémoire centrale

Les résidus conjugués nécessitent 5 vecteurs d'ordre p alors que les gradients conjugués n'en demandent que 4 d'où un gain énorme en mémoire rapide par rapport aux méthodes de triangularisation.

C2- Nombre d'opérations arithmétiques

Les deux algorithmes demandent plus d'opérations que les méthodes de triangularisation : $2p^3$ contre environ $p^3/3$ pour $N(p, p)$.

C3- Stabilité numérique

Pour des matrices symétriques définies positives, les deux algorithmes sont assez stables. En revanche ils peuvent facilement buter devant un sys-

tème dont les coefficients sont trop disproportionnés du type :

$$\begin{cases} 10^{12}X_1 = a \\ X_2 = b \\ 10^{-6}X_3 = c \end{cases}$$

$\rho = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{10^{12}}{10^{-6}} = 10^{18}$: le système est mal conditionné (les λ sont les valeurs propres de la matrice du système).

C4- Du point de vue programmation informatique

Les résidus et gradients conjugués sont plus faciles à programmer que les algorithmes d'élimination tels que Gauss ou Cholesky.

C5- Propriétés particulières à chacun des deux algorithmes

Résidus conjugués

- S'appliquent aux systèmes indéterminés sans qu'on ait besoin de les modifier. Ils en donnent la solution intrinsèque².

- Si l'on prend part de $N.X = W$, on aura $X = N^{-}.W$ ³ et si l'on part de $A.X = K$ on aura : $X = A^{-}.K$.

- S'appliquent également aux systèmes quasi-singuliers (un petit nombre de valeurs propres très petites) et en donnant une solution qui reste physiquement acceptable.

Toutefois, les spécialistes précisent que ces deux propriétés fort intervenants resteraient valables si l'on n'exigerait pas une très grande précision sur le résultat. Il faut se contenter d'une solution acceptable. Dans le cas contraire, l'accumulation des erreurs d'arrondi risquerait de fausser complètement le résultat.

Gradients conjugués

Par la présence de la matrice inverse dans leur critère ($f_2 = r_i^t N^{-1} r_i$), ils ne peuvent pas s'appliquer aux systèmes indéterminés. En revanche, ils sont

2. Solution de norme minimale.

3. La notation A^{-} est utilisée pour désigner l'inverse intrinsèque d'une matrice. Cet inverse se caractérise par sa norme minimale.

tès élégants à programmer au cas où la matrice du système est symétrique définie positive.

1.4 Conclusion Générale sur Les Méthodes de Résolution

Une méthode de résolution qu'elle soit directe ou itérative est bonne si l'on sait utiliser. Or savoir l'utiliser suppose surtout :

- la connaissance de ses fondements théoriques,
- et la connaissance de ses limites d'application.

Ce n'est qu'en procédant ainsi qu'on peut profiter des avantages de chaque méthode de résolution d'une part et qu'on se débarrasse des préjugés sur une méthode ou une autre d'autre part.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier qu'en géodésie, on calcule ($\dot{X} = \bar{X} - X$) la correction à apporter au réseau approché (généralement bien déterminé) pour avoir le réseau définitif. Par conséquent 2 à 3 décimales précises nous suffisent ce que chacune des méthodes de résolution présentées dans ce chapitre est en mesure d'assurer.

Enfin, si les méthodes d'élimination sont plus rapides et plus performantes en ce qui concerne le résultat final, les méthodes itératives, en revanche, sont plus simples et plus élégantes à programmer d'une part et peu encombrantes en mémoire centrale d'autre part.

Bibliographie

- [1] **Noureddine HOURRIGUE**. 1982. Compensation des Réseaux Géodésiques. Mémoire de fin d'études, cycle A. 109 pages, ENSG, IGN France.
- [2] **Philippe HOTTIER**. 1980. Théorie des Erreurs. Ancienne édition, pages 39 et 42. Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG). IGN France.
- [3] **Philippe HOTTIER, Abdelmajid BEN HADJ SALEM**. 2020. Théorie des Erreurs. Edition numérique. 137 pages. <https://vixra.org/pdf/2008.0065v1.pdf>.
- [4] **Henri Marcel DUFOUR**. 1962. La méthode de Cholesky pour la résolution des systèmes linéaires, manuel de cours ENSG. Pages 16-19. 42 pages, ENSG, IGN France.

- [5] **Henri Marcel DUFOUR**. 1968. Notice "Développements théoriques sur les méthodes des résidus et gradients conjugués". ENSG, IGN France.
- [6] **Jean-Jacques LIONS**. 1978. Cours de l'Analyse Numérique de l'Ecole Polytechnique. Edition 1978, pages 32-36, concernant les gradients conjugués.