

2023-10-22

# 有理表示在欧氏几何中的应用

张波 著

$$\rho := \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$$

# 网络版

编译日期: 2023-10-22

本书正在出版中...

(2020 年 1 月第 1 版)

ISBN: XXX-X-XX-XXXXXX-X

Creasson

张波

个人主页: <https://creasson.github.io/>

(含勘误表等信息)



本作品采用知识共享署名 4.0 国际许可协议进行许可。  
访问 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>  
查看该许可协议。

# 目录

---

简介	1	3.8 第二类特征圆	103
第 1 章 向量与直线	3	3.9 距离极值问题	114
1.1 平面向量	3	3.10 其他类的特征	118
1.2 直线的表示	5	3.11 表示间的关系	124
1.3 直线的交点	6	3.12 表示的深化讨论	129
1.4 直线的交角	7	3.13 三角形不等式	139
1.5 投影与对称	8	第 4 章 四边形	147
第 2 章 圆	11	4.1 四边形的表示	147
2.1 圆的表示	11	4.2 四边形的性质	154
2.2 相交情形	15	4.3 四边形的面积	158
2.3 相切情形	27	4.4 四边形的特征	159
2.4 面积计算	48	4.5 表示间的关系	162
2.5 根式有理化	52	4.6 表示的深化讨论	163
2.6 四阶有理表示	54	第 5 章 多边形	177
2.7 反演变换	58	5.1 多边形的表示	177
2.8 结论延拓	63	5.2 多边形的性质	182
第 3 章 三角形	65	第 6 章 圆锥曲线	185
3.1 三角形的表示	65	6.1 重心坐标表示	186
3.2 三角形的面积	73	6.2 有理表示	188
3.3 第一类特征量	76	6.3 相交情形	197
3.4 第一类特征点	78	6.4 相切情形	210
3.5 第一类特征圆	83	6.5 有理 B 样条曲线	224
3.6 第二类特征量	97	6.6 已知中心的情形	226
3.7 第二类特征点	97	6.7 已知焦点的情形	230

6.8 已知准线的情形 . . . . .	259	第 7 章 一般有理曲线 . . . . .	297
6.9 特征计算 . . . . .	259	7.1 三次有理曲线 . . . . .	297
6.10 综合性命题 . . . . .	268	7.2 四次有理曲线 . . . . .	301
6.11 彭赛列闭合定理 . . . . .	273	7.3 其他有理曲线 . . . . .	303

Creasson

# 简介

古典欧氏平面几何的研究对象, 主要是直线、圆、三角形、四边形、多边形、圆锥曲线以及它们的组合. 本书将说明, 这些对象都可以用适当的有理参数进行表示, 并且通常更适合于计算.

在欧氏几何平面上, 任意一个向量  $\mathbf{b}$  可视作由另一个非零向量  $\mathbf{a}$  经旋转缩放变换而得, 该旋转缩放变换可用复数  $z$  等价表示, 即  $\mathbf{b} = z \circ \mathbf{a}$ . 这种结合了复数与向量的表示, 既有运算上的简便, 又有表示上的直观. 联合有理参数表示, 可对平面几何做一个全新的解构.

在圆的章节, 我们详细讨论了不同情形下圆的表示问题. 例如经过  $A$ 、 $B$  两点的圆, 其上的任意点  $P$  可表示为:

$$\vec{AP} = \frac{1 + is}{1 - it} \vec{AB}$$

其中  $s$  是固定参数,  $t$  是可变参数.

同样的, 三角形、四边形、多边形以及它们与圆的组合, 也存在简单的有理表示. 例如若令  $s = \tan \frac{\angle A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{\angle B}{2}$ , 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

其内切的圆心  $I$  可表示为:

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

内切圆上的任意一点  $P$  可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC}$$

其中  $u$  是可变参数.

应用这些有理表示, 绝大多数非平凡命题如蝴蝶定理、斯坦纳圆链、开世定理、泰博定理、四内心共圆问题等, 都可以获得一个机械式的简明解答.

圆锥曲线也有简单的有理表示. 例如, 若已知焦点  $F$  及曲线上的一点  $A$ , 则圆锥曲

线上的任意一点  $P$  可表示为:

$$\vec{FP} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + 2pu + qu^2} \vec{FA}$$

其中常数  $p$ 、 $q$  为固定常数,  $u$  为自由参量.

应用它可以导出著名的 **Marden** 定理: 复平面上, 若圆锥曲线内切于一个三角形  $\triangle ABC$ , 则圆锥曲线的焦点  $Z$  满足方程:

$$\frac{1}{Z-A} + \frac{\lambda\mu}{Z-B} + \frac{\mu}{Z-C} = 0$$

其中常数  $\lambda$ 、 $\mu$  分是切点划分线段  $BC$ 、 $CA$  的比例.

并且还可以导出一般圆锥曲线的焦点计算: 直角坐标方程  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$  所表示的圆锥曲线, 其焦点  $z$  是如下方程的根:

$$(b^2 - ac)z^2 + 2(be - cd + ibd - iae)z - d^2 + e^2 + af - cf + 2ibf - 2ide = 0$$

一般情况下, 任意的基向量选择都是被允许的, 仅存在有理表示形式上的差异, 这些不同的有理表示形式也是可以相互转化的, 同阶的有理表示之间存在双有理映射的关系. 由此, 我们几乎可以将初等平面几何完全地纳入“双有理几何”的范畴.

# 第 1 章 向量与直线

## 1.1 平面向量

平面上的向量定义为平面上的一条有向线段. 若以  $A$  为起点、 $B$  为终点, 则记为  $\vec{AB}$ , 或以某一加粗的字母  $\mathbf{a}$  简记之. 如果起点和终点重合了, 则向量是一个零向量, 记为  $\mathbf{0}$ .

平面向量可以自由地平移, 如果另一以  $C$  为起点、 $D$  为终点的向量  $\vec{CD}$  与  $\vec{AB}$  具有相同的长度和方向, 那么这两个向量就是相同的.

平面上的任意一个向量  $\mathbf{b}$ , 可以视作是由另一个向量  $\mathbf{a}$  经旋转伸缩变换而得. 前文已指出, 这个旋转伸缩变换, 与一个确定的复数  $z$  是完全等价的, 因而可以表示为  $\mathbf{b} = z \circ \mathbf{a}$ . 为了书写的简洁, 我们省去中间的运算符  $\circ$ , 写作  $\mathbf{b} = z\mathbf{a}$  即可. 并约定总是将复数  $z$  写在向量的前面, 表示由  $z$  确定的一个旋转缩放变换作用于向量.

在平面几何的范围内, 除非特别指出, 一般我们不规定向量的具体表示形式. 它可以取  $(\frac{x}{y})$  的形式, 也可以是  $(x, y)$ , 或者  $x + yi$  的形式.

此种表示的好处是, 它将旋转缩放变换与向量在表示上分离开来, 使得我们可以更直观地看到点与点之间的联系, 以及向量与向量之间的变换关系.

**加法** 加法遵循以下两条规则:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (1.1.1)$$

$$z_1\mathbf{a} + z_2\mathbf{a} = (z_1 + z_2)\mathbf{a} \quad (1.1.2)$$

**共轭乘积** 综合向量的内积与外积运算, 我们定义向量的共轭乘积为:

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta + i|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \quad (1.1.3)$$

其中  $\theta$  为向量  $\mathbf{a}$  逆时针旋转为向量  $\mathbf{b}$  所转过的角度.

共轭乘积的实部  $\operatorname{Re}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$  即为通常的内积值, 虚部  $\operatorname{Im}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})$  即为通常的外积值, 它也是向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  构成的平行四边形的有向面积.

由此定义, 若  $\mathbf{b} = z\mathbf{a}$ , 则有

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} = z|\mathbf{a}|^2 \quad (1.1.4)$$

特别地,  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}$  为向量的模长平方.

另外也可得到: 若  $\mathbf{b} = z_1\mathbf{a}, \mathbf{c} = z_2\mathbf{a}$ , 则

$$\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} = z_1 z_2 \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} \quad (1.1.5)$$

**除法** 对于任意的向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ , 它们之间的旋转缩放变换  $z$  是唯一的, 因此可以定义向量的除法 ( $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ):

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = z \quad (1.1.6)$$

根据 1.1.4 式, 向量的除法也可用共轭乘积来定义:

$$\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2} \quad (1.1.7)$$

**注记 1.1.1** 一般来讲, 两个向量直接乘积的几何意义是不明确的, 我们不对向量的直接乘积做定义, 这也并不影响平面几何的研究.

向量的主要性质有:

**交换性质** 因为向量共轭乘积的实部和虚部分别对应内积和外积, 因而有如下交换性质:

$$\operatorname{Re}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = \operatorname{Re}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \quad (1.1.8)$$

$$\operatorname{Im}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) = -\operatorname{Im}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \quad (1.1.9)$$

须注意的是, 向量的共轭乘积并不满足交换性, 即  $\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ .

**分配性质**

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \otimes \mathbf{a} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \quad (1.1.10)$$

$$\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{c} \quad (1.1.11)$$

**向量平行** 若向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  相互平行, 则它们的外积为 0, 也即

$$\operatorname{Im}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0 \quad \text{或者} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right) = 0 \quad (1.1.12)$$

**向量垂直** 若向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  相互垂直, 则它们的内积为 0, 也即

$$\operatorname{Re}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0 \quad \text{或者} \quad \operatorname{Re}\left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right) = 0 \quad (1.1.13)$$

利用以上定义的运算及性质, 我们可对平面几何作一个新的解构, 以下是具体的探讨.

## 1.2 直线的表示

两点决定一条直线. 直线上, 若给定两点  $A$  和  $B$ , 则其余点  $P$  可表示为这两点的线性组合:

$$P = (1-t)A + tB, (t \in \mathbb{R}) \quad (1.2.1)$$

我们也可以将其改写为向量形式:  $\vec{AP} = t\vec{AB}$ , 其直观的意义即是对向量  $\vec{AB}$  做一个缩放变换。

另一种常见的表示是定比分点表示, 即若  $\lambda = AP : PB$ , 则

$$P = \frac{1}{1+\lambda}A + \frac{\lambda}{1+\lambda}B \quad (1.2.2)$$

若平面上的三点  $A, B, C$  共线, 则向量  $\vec{AB}$  与  $\vec{AC}$  是共线的, 因而有

$$\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC}) = 0 \quad \text{或者} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\vec{AB}}{\vec{AC}}\right) = 0 \quad \text{或者} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{B-A}{B-C}\right) = 0 \quad (1.2.3)$$

而利用向量的加法和分配性质及交换性质, 任意给定平面上的一点  $O$ , 我们还可以将上述式子转化为其他的表示, 例如:

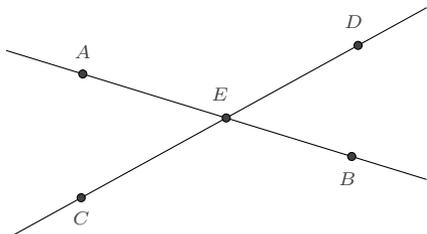
$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC}) &= \operatorname{Im}\left((\vec{OB} - \vec{OA}) \otimes (\vec{OC} - \vec{OA})\right) \\ &= \operatorname{Im}(\vec{OB} \otimes \vec{OC}) - \operatorname{Im}(\vec{OA} \otimes \vec{OC}) - \operatorname{Im}(\vec{OB} \otimes \vec{OA}) + \operatorname{Im}(\vec{OA} \otimes \vec{OA}) \\ &= \operatorname{Im}(\vec{OB} \otimes \vec{OC}) + \operatorname{Im}(\vec{OC} \otimes \vec{OA}) + \operatorname{Im}(\vec{OA} \otimes \vec{OB}) \end{aligned}$$

即有

$$\operatorname{Im}(\vec{OA} \otimes \vec{OB}) + \operatorname{Im}(\vec{OB} \otimes \vec{OC}) + \operatorname{Im}(\vec{OC} \otimes \vec{OA}) = 0 \quad (1.2.4)$$

## 1.3 直线的交点

两直线的交点求解是平面几何的另一项基本内容. 假设经过  $A$ 、 $B$  两点的直线  $l_1$  与经过  $C$ 、 $D$  两点的直线  $l_2$  相交, 求其交点  $E$ .



**解** 我们设  $\vec{AE} = \lambda \vec{AB}$ , 利用 (1.2.4), 即有:

$$\lambda \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC}) + \operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{AD}) + \lambda \operatorname{Im}(\vec{AD} \otimes \vec{AB}) = 0$$

而利用交换性质和向量加法, 我们又知

$$\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC}) + \operatorname{Im}(\vec{AD} \otimes \vec{AB}) = \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes (\vec{AC} - \vec{AD})) = -\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{CD})$$

由此解出  $\lambda$ , 即得交点  $E$  的表示

$$\vec{AE} = \frac{\operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{AD})}{\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{CD})} \vec{AB} \quad (1.3.1) \quad \square$$

**例 1.3.1** 复平面上, 直线  $l_1$  经过  $A = 1 + i$ ,  $B = 3 + 4i$  两点, 直线  $l_2$  经过  $C = 2i$ ,  $D = 1 - 2i$  两点, 则由上式可知  $l_1$  与  $l_2$  的交点为:

$$E = 1 + i + \frac{\operatorname{Im}((i-1) \otimes (-3i))}{\operatorname{Im}((2+3i) \otimes (1-4i))} (2+3i) = \frac{5}{11} + \frac{2i}{11}$$

利用直线交点的表示式 (1.3.1), 我们容易给出三线共点的一个简单判别表示. 设有经过  $A$ 、 $B$  两点的直线  $l_1$ , 经过  $C$ 、 $D$  两点的直线  $l_2$ , 经过  $E$ 、 $F$  两点的直线  $l_3$ , 若这三条直线相交于一点  $P$ , 则

$$\vec{AP} = \frac{\operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{AD})}{\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{CD})} = \frac{\operatorname{Im}(\vec{AE} \otimes \vec{AF})}{\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{EF})} \quad (1.3.2)$$

**例 1.3.2** 复平面上, 直线  $l_1$  经过  $A = 0, B = 1 + i$  两点, 直线  $l_2$  经过  $C = i, D = 1 - i$  两点, 直线  $l_3$  经过  $E = 2 + 3i, F = 7 + 11i$  两点. 则

$$\frac{\operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{AD})}{\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{CD})} = \frac{\operatorname{Im}(i \otimes (1 - i))}{\operatorname{Im}((1 + i) \otimes (1 - 2i))} = \frac{\operatorname{Im}(i(1 + i))}{\operatorname{Im}((1 + i)(1 + 2i))} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\operatorname{Im}(\vec{AE} \otimes \vec{AF})}{\operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{EF})} = \frac{\operatorname{Im}((2 + 3i) \otimes (7 + 11i))}{\operatorname{Im}((1 + i) \otimes (5 + 8i))} = \frac{\operatorname{Im}((2 + 3i)(7 - 11i))}{\operatorname{Im}((1 + i)(5 - 8i))} = \frac{1}{3}$$

根据 (1.3.2) 即知三线共点.

若  $A, B, C, D, E, F$  均为复平面上的点, 则直线  $AB, CD, EF$  三线共点的判别式也可写为行列式的形式:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}(A - B) & \operatorname{Im}(A - B) & \operatorname{Im}(A \otimes B) \\ \operatorname{Re}(C - D) & \operatorname{Im}(C - D) & \operatorname{Im}(C \otimes D) \\ \operatorname{Re}(E - F) & \operatorname{Im}(E - F) & \operatorname{Im}(E \otimes F) \end{vmatrix} = 0 \quad (1.3.3)$$

## 1.4 直线的交角

根据“平面上的任意一个向量  $\mathbf{b}$ , 可以视作是由另一个向量  $\mathbf{a}$  经旋转伸缩变换而得”这一观点, 若已知直线  $l_1$  经过两点  $A, B$ , 直线  $l_2$  经过两点  $C, D$ , 则交角是

$$\theta = k\pi \pm \arg \frac{A - B}{C - D} \quad (1.4.1)$$

式中  $k$  是某个整数, 选择适当的  $k$  和正负号, 以使得  $\theta$  介于  $[0, \frac{\pi}{2}]$  之间.

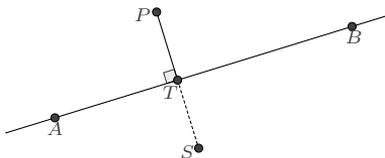
例如, 若直线  $l_1$  经过  $A = 1 + i, B = 3 + 4i$  两点, 直线  $l_2$  经过  $C = 2i, D = 1 - 2i$  两点, 则由

$$\arg \frac{C - D}{A - B} = \arg \frac{1 - 2i - 2i}{3 + 4i - 1 - i} = \arg\left(-\frac{10}{13} - \frac{11i}{13}\right) = -\pi + \arctan \frac{11}{10}$$

知这两直线的交角是  $\arctan \frac{11}{10} \approx 47.73^\circ$ .

## 1.5 投影与对称

求点在一条直线上的投影<sup>①</sup>和关于直线的对称点也是平面几何的一项常见内容: 设直线  $l$  经过  $A$ 、 $B$  两点, 求直线外的一点  $P$  关于  $l$  的投影点  $T$  和对称点  $S$ .



**解** 通常的做法是设  $\vec{AT} = \lambda \vec{AB}$ , 根据  $TP \perp AB$  进行求解.

$$\operatorname{Re}(\vec{TP} \otimes \vec{AB}) = \operatorname{Re}(\vec{AP} \otimes \vec{AB}) - \operatorname{Re}(\vec{AT} \otimes \vec{AB}) = \operatorname{Re}(\vec{AP} \otimes \vec{AB}) - \lambda AB^2 = 0$$

求出  $\lambda$  后, 则知

$$\vec{AT} = \frac{\operatorname{Re}(\vec{AP} \otimes \vec{AB})}{AB^2} \vec{AB}$$

再根据  $T$  是  $PS$  的中点而得

$$\vec{AS} = 2\vec{AT} - \vec{AP} = 2 \frac{\operatorname{Re}(\vec{AP} \otimes \vec{AB})}{AB^2} \vec{AB} - \vec{AP}$$

但事实上, 更简便的做法是将  $\vec{AP}$  视为由  $\vec{AB}$  经由一个复数  $z$  所表示的旋转缩放变换而得, 也即  $\vec{AP} = z \vec{AB}$ , 则  $\vec{AB}$  到  $\vec{AT}$  和  $\vec{AS}$  的旋转缩放变换分别是  $\operatorname{Re}(z)$  和  $\bar{z}$ , 也即

$$\vec{AT} = \operatorname{Re}(z) \vec{AB}, \quad \vec{AS} = \bar{z} \vec{AB}$$

这个关系也可以简写为

$$\frac{T-A}{B-A} = \operatorname{Re}\left(\frac{P-A}{B-A}\right), \quad \frac{S-A}{B-A} = \overline{\left(\frac{P-A}{B-A}\right)} \quad (1.5.1)$$

□

**例 1.5.1** 设直线  $l$  经过  $A = 1 - i$  和  $B = 5 + i$  两点, 求  $P = 2 + 3i$  关于  $l$  的投影点  $T$  和对称点  $S$ .

<sup>①</sup>又称为垂足点或射影点.

**解** 根据 (1.5.1), 有

$$\frac{T - (1 - i)}{(5 + i) - (1 - i)} = \operatorname{Re} \left( \frac{(2 + 3i) - (1 - i)}{(5 + i) - (1 - i)} \right) = \frac{3}{5}$$

$$\frac{S - (1 - i)}{(5 + i) - (1 - i)} = \overline{\left( \frac{(2 + 3i) - (1 - i)}{(5 + i) - (1 - i)} \right)} = \frac{3}{5} - \frac{7i}{10}$$

由此即得

$$T = \frac{17}{5} + \frac{1}{5}i, \quad S = \frac{24}{5} - \frac{13}{5}i \quad \square$$

关系式 (1.5.1) 也易于求曲线  $f(x, y) = 0$  关于直线  $ax + by + c = 0$  的对称曲线.

**解** 假设  $a, b, c$  均不为 0, 则容易选定直线上的两点  $A = -\frac{c}{a}, B = -\frac{c}{b}i$ . 若  $P = x + yi$  在曲线  $f(x, y) = 0, S = x' + y'i$  在对称曲线上, 则

$$\frac{x' + y'i + \frac{c}{a}}{-\frac{c}{b}i + \frac{c}{a}} = \frac{x - yi + \frac{c}{a}}{\frac{c}{b}i + \frac{c}{a}}$$

分离实部和虚部后解出

$$\begin{cases} x = -\frac{(a^2 - b^2)x' + 2aby' + 2ac}{a^2 + b^2} \\ y = -\frac{(b^2 - a^2)y' + 2abx' + 2bc}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

于是对称曲线的表示则为

$$f\left(-\frac{(a^2 - b^2)x' + 2aby' + 2ac}{a^2 + b^2}, -\frac{(b^2 - a^2)y' + 2abx' + 2bc}{a^2 + b^2}\right) = 0$$

这个表示虽然是在限定  $a, b, c$  均不为 0 时求出的, 但易知它也对  $a, b$  不同时为 0 的其余情形成立.  $\square$

Creasson

# 第 2 章 圆

圆是平面几何中另一类最重要的基本对象.

## 2.1 圆的表示

直角坐标系下,圆的标准方程式是:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad (2.1.1)$$

这个方程包含了圆心和半径这两个主要特征. 另一个常用的方程表示是:

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2.1.2)$$

它可看做是一般二次方程在圆时的特化情形. 在一般解析几何应用中, 此二者都是被经常采用的. 但是, 对于许多有关圆的问题, 如果直接使用此二方程之一, 都将导致繁重的计算. 我们有相当的必要对此再做探讨, 而圆的有理表示是非常适合的.

### 2.1.1 有理表示

**定义 2.1.1** 如果一个几何图形所涉及的几何对象可用同一组有理参数进行描述, 则称这组有理参数是几何图形的一个有理表示.

对于 (2.1.1), 它的一个有理表示是大家所熟知的:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \\ y = y_0 + r \frac{2u}{1 + u^2} \end{cases}$$

但对于 (2.1.2), 其有理表示就不是很为人所知了, 这里我们推导一下:

在 (2.1.2) 上任取一点  $(m, n)$ , 即  $m^2 + n^2 + dm + en + f = 0$ , 而后令  $y - n = u(x - m)$  是经过  $(m, n)$  点的一条斜率为  $u$  直线, 将其与 (2.1.2) 联立, 可解出直线与圆的另一交点:

$$\begin{cases} x = \frac{mu^2 - (e + 2n)u - (d + m)}{1 + u^2} \\ y = -\frac{(e + n)u^2 + (d + 2m)u - n}{1 + u^2} \end{cases}$$

随着参数  $u$  的变化, 这个表示在  $u$  值为有限时将给出圆上所有除  $(m, n)$  之外的点. 若  $u \rightarrow \infty$ , 则恰好通过  $(m, n)$  点. 也就是说, 加上  $u$  取极限时的点, 此参数表示可以完整地表示一个圆.

上面的这两个参数表示, 是将  $x, y$  分开进行的, 实际上并不能很好地揭示其内在的表示规律. 我们可以利用复数做一下合并: 对于第一个参数表示, 是为  $x + yi = \frac{r+x_0+iy_0+(y_0+ir-ix_0)u}{1-iu}$ , 对于第二个参数表示, 是为  $x + yi = \frac{-d-m+in+(-e-im-n)u}{1-iu}$ , 不难发现, 二者的一般形式均是  $x + yi = \frac{a+bi+(c+di)u}{1-iu}$ , 这构成了我们以下讨论的基础.

**命题 2.1.2** 复平面上的任意一个圆, 均有如下形式的有理参数表示:

$$z = \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu} \quad (2.1.3)$$

其中  $a, b, c, d$  是常实数. 其所对应圆的直角坐标方程是:

$$\left(x - \frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \quad (2.1.4)$$

更一般地,  $z = \frac{(a+bi) + (c+di)u}{(e+fi) + (h+gi)u}$  (其中  $u$  是实变参数, 其余各量是常实数) 也表示一个圆.

对于表示 (2.1.3),  $u$  取任意有限的实数值时, 都可以唯一地给出一个复数点. 而当  $u \rightarrow \infty$  时, 我们补充定义

$$z(\infty) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu} = -d + ci$$

根据本章开始所述: 平面上的任意一个向量可视作是另一个向量经由复数  $z$  所表示的旋转伸缩变换而得, 可将上述命题改写如下

**命题 2.1.3** 如果已知平面上的两点  $A, B$ , 则该平面上的任意一个圆 (其上的点设为  $P$ ) 均可表示为:

$$\vec{AP} = \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu} \vec{AB} \quad (2.1.5)$$

根据单位圆的参数表示, 一个特别简单的情形是

**推论 2.1.4** 如果已知圆心  $O$  及圆上的一点  $A$ , 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

$$\vec{OP} = \frac{1+iu}{1-iu} \vec{OA} \quad (2.1.6)$$

**2.1.2 圆心与半径** 若已知圆的参数表示, 我们可以将其转化为普通的直角坐标方程而求出圆心和半径, 但是这样做有些麻烦, 事实上, 一个简便的方法是直接利用复数的性质:

设圆的一般有理表示形如  $z = \frac{a+bu}{c+du}$ , 其中  $a, b, c, d$  是常复数. 考虑代换

$$w = \frac{\overline{c+du}}{c+du} = \frac{\bar{c} + \bar{d}u}{c+du}$$

显然,  $w$  即是单位复数:  $|w| = 1$ . 反解出  $u = \frac{\bar{c}-cw}{dw-\bar{d}}$ , 代回原表示则得:

$$z = \frac{b\bar{c} - a\bar{d}}{d\bar{c} - c\bar{d}} - \frac{bc - ad}{d\bar{c} - c\bar{d}} w$$

这就同时给出了圆心和半径.

**例 2.1.5** 对于  $z = \frac{1+is}{1-iu}$  所表示的圆, 做代换  $w = \frac{1+iu}{1-iu}$ , 即  $u = \frac{1-w}{1+w}i$ , 则

$$z = \frac{1+is}{1-iu} = \frac{1+is}{2} + \frac{1+is}{2} w$$

从而知圆心和半径分别为

$$O = \frac{1+is}{2}, \quad R = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2}$$

### 2.1.3 表示的阶

**定义 2.1.6 (有理表示的阶)** 对于一个有理函数  $\chi(u)$ , 若它不为 0,  $\chi(u)$  的阶数定义为  $\chi(u)$  的分子和分母关于变元  $u$  的次数的最大值, 记为  $\deg(\chi(u))$ . 对于  $n$  维空间中的有理曲线  $P(u) = (\chi_1(u), \chi_2(u), \dots, \chi_n(u))$ , 曲线的阶数定义为各分量的阶数的最大值, 即

$$\deg(P(u)) = \max\{\deg(\chi_1(u)), \deg(\chi_2(u)), \dots, \deg(\chi_n(u))\}$$

**注记 2.1.7** 曲线阶数的定义是在实数范畴下定义的, 对于复数的表示, 我们需要将其实部和虚部分离后再计算阶数. 例如

$$z = \frac{a+bi+(c+di)u}{1-iu} = \frac{a-bu+cu-du^2}{1+u^2} + \frac{b+au+du+cu^2}{1+u^2}i$$

它的实部和虚部的分子分母都是关于变量  $u$  的最高次数为 2 的多项式, 故而是二阶的有

理表示.

**2.1.4 表示的适当性** 对于同一个圆来说, 它的有理表示有无穷多种. 例如, 对于单位圆  $x^2 + y^2 = 1$ , 它除了熟知表示  $z(u) = \frac{1+iu}{1-iv}$  外, 还有一些其他的表示:

$$(a) z(v) = \frac{1+i2v}{1-i2v} \quad (b) z(v) = \frac{1-iv}{v-i} \quad (c) z(v) = \frac{(1+iv)^2}{(1-iv)^2} \quad (d) z(v) = \frac{(1+iv)^3}{(1-iv)^3}$$

以上这些表示, (a)、(b) 是 2 阶的, (c) 是 4 阶的, (d) 是 6 阶的.

对于 2 阶的表示, 参数  $v$  的任何一个实数值 (包含  $\infty$ ) 都对应着圆上的一个点, 圆上的任意一个点也对应着参数  $v$  的一个值. 例如对于表示 (b):

$$z = x + yi = \frac{1+2iv}{1-2iv}$$

我们先分离实部和虚部得到:

$$-1 + 4v^2 + x + 4v^2x = 0, \quad -4v + y + 4v^2y = 0$$

再对这二式做关于  $v$  的多项式求余运算, 即得  $2v + 2vx - y = 0$ , 从而解出

$$v = \frac{y}{2(1+x)}$$

这就表明了圆上的任意一点都对应着参数  $v$  的一个值. 这种双向的有理映射关系, 称之为**双有理映射**, 亦称**双有理变换**.

而对于 4 阶的表示 (c) 或 6 阶的表示 (d), 我们是没办法建立起这种双有理映射关系的, 具体地说, 就是不可能找到一个有理函数  $g(x, y)$ , 使得  $v = g(x, y)$ .

**定义 2.1.8 (适当表示)** 如果一条曲线可以被有理地参数化表示, 且参数也可以用曲线上的点有理地表示出来, 则称这种表示是适当的.

**2.1.5 性质和定理** 前面我们简单介绍了有理表示的阶和**适当性**的概念, 这里再叙述一些实用的定理, 它们可见于 [ferrer2008rational].

**定理 2.1.9** 有理曲线是不可约的.

例如,  $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2y - 1 = 0$  不是一条有理曲线, 因为它可以被分解  $f(x, y) = (x - y - 1)(x + y + 1)$ , 因而也就不存在有理表示.

**定理 2.1.10** 对于一条有理曲线  $f(x, y) = 0$ , 及它的一个有理表示  $P(u)$ ,  $P(u)$  是适当的当且仅当  $\deg(P(u)) = \max\{\deg_x(f), \deg_y(f)\}$ .

例如, 对于平面上一般圆的方程  $f(x, y) = x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$ , 它关于  $x$  和  $y$  的阶数分别是  $\deg_x(f) = 2$ 、 $\deg_y(f) = 2$ , 因而其适当表示的阶数也是 2. 前面所叙圆的表示 (2.1.3) 即是一个适当的表示.

**定理 2.1.11** 给定一条有理曲线, 若已知它的一个适当有理表示  $P(u)$ , 则对于它的任意一个有理表示  $Q(v)$ ,  $u$  都是关于  $v$  的一个有理函数. 而如果表示  $Q(v)$  也是适当的, 则  $u$  是关于  $v$  的线性有理函数.

此定理也表明, 曲线的“适当有理表示”的阶数是最低的.

例如, 单位圆的一个适当表示是  $z(u) = \frac{1+iu}{1-iu}$ , 对于前面所述的其他有理表示  $Q(v)$ ,  $u$  与  $v$  的关系如下:

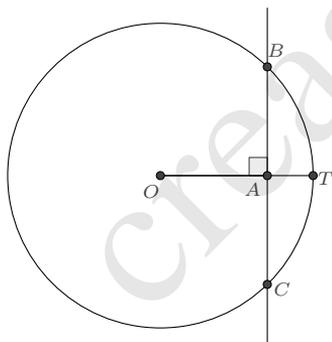
有理表示	$\frac{1+i2v}{1-i2v}$	$\frac{1-iv}{v-i}$	$\frac{(1+iv)^2}{(1-iv)^2}$	$\frac{(1+iv)^3}{(1-iv)^3}$
参数关系	$u = 2v$	$u = \frac{1-v}{1+v}$	$u = \frac{2v}{1-v^2}$	$u = \frac{v(3-v^2)}{1-3v^2}$

根据以上定理可知, (2.1.5) 是圆的一个适当表示, 可以对其中的自由参量  $u$  做任意的线性分式变换而得到其它适当表示.

## 2.2 相交情形

**2.2.1 直线与圆的交点** 关于直线与圆的交点讨论, 在一般解析几何书中已有详尽的讨论. 这里我们应用圆的有理表示来讨论下简单情形即可:

**例 2.2.1** 如图, 半径为  $R$  的圆, 圆心到直线的距离为  $d$ , 讨论直线与圆的交点情况.



**解** 设圆心  $O$ , 它在直线上的垂足为  $A$ ,  $OA$  射线与圆的交点为  $T$ , 根据 (2.1.6), 圆上的任意点  $P$  可表示为

$$\vec{OP} = \frac{1+iu}{1-iu} \vec{OT}$$

而  $O$ 、 $A$ 、 $T$  三点共线, 且  $OA : OT = d : R$ , 故又有  $\vec{OT} = \frac{R}{d} \vec{OA}$ , 于是圆又可表示为

$$\vec{OP} = \frac{R}{d} \frac{1+iu}{1-iu} \vec{OA}$$

若点  $P$  是圆与直线的交点, 则应有  $AP \perp OA$ , 即

$$\operatorname{Re} \frac{P-A}{O-A} = \operatorname{Re} \frac{id - iR + du + Ru}{d(i+u)} = \frac{d - R + du^2 + Ru^2}{d(1+u^2)} = 0$$

也即

$$u^2 = \frac{R-d}{R+d}$$

$u$  的解共有三种情况:

1.  $R > d > 0$ , 则  $u$  有两个实根:  $u = \pm \sqrt{\frac{R-d}{R+d}}$ , 对应的两个交点则是

$$\vec{OB}, \vec{OC} = \left( 1 \pm i \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{d} \right) \vec{OA}$$

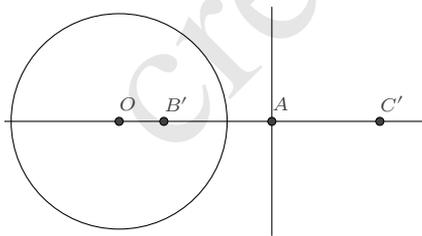
弦  $BC$  的长为  $BC = 2 \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{d} OA$ .

2.  $R = d > 0$ , 则  $u$  仅有一个实根  $u = 0$ , 对应的交点即为  $A$  点.

3.  $d > R > 0$ , 则  $u$  并无实根, 因而也就没有一般意义下的交点. 不过, 令人感兴趣的是, 如果“强行”解出虚根  $u = \pm i \frac{\sqrt{d-R}}{d+R}$ , 并代回计算交点, 则我们仍然可以得到两个“虚交点”:

$$\vec{OB}', \vec{OC}' = \left( 1 \pm \frac{\sqrt{d^2 - R^2}}{d} \right) \vec{OA}$$

它们关于直线是对称的, 一个在圆外, 一个在圆内. 且有长度关系:  $OB' \cdot OC' = R^2$ . 也就是说, 这是一对反演点<sup>①</sup>. 我们将在“结论的延拓”一节中用到这个有趣的事实.



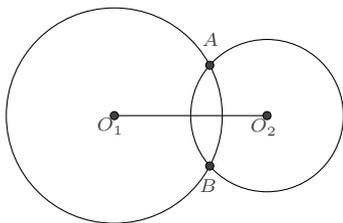
□

<sup>①</sup>圆的反演点对于给定圆, 如果其所在平面上的两点的连线经过圆心, 且位于圆心同一侧, 它们到圆心的距离之积也等于半径的平方, 则称这两点互为反演点.

## 2.2.2 两圆的交点

同上类似地, 我们讨论简化情形下的两圆交点即可.

**例 2.2.2** 如图, 半径为  $r$  的圆  $\odot O_1$  与半径为  $R$  的圆  $\odot O_2$ , 若它们的圆心距离为  $d$ , 讨论两圆的交点情况.



**解** 不难得知, 圆  $\odot O_1$  上的任意点  $P$  可表示为:

$$\vec{O_1P} = \frac{r}{d} \frac{1+iu}{1-iu} \vec{O_1O_2}$$

圆  $\odot O_2$  上的任意点  $Q$  也可表示为:

$$\vec{O_2Q} = \frac{R}{d} \frac{1+iv}{1-iv} \vec{O_2O_1}$$

二者若相交, 也即  $P$  点与  $Q$  点重合, 两式相减, 则得

$$\vec{O_1O_2} = \left( \frac{r}{d} \frac{1+iu}{1-iu} + \frac{R}{d} \frac{1+iv}{1-iv} \right) \vec{O_1O_2}$$

通分化简后有等式

$$-d + r + R + duv + ruv + Ruv + i(du + ru - Ru + dv - rv + Rv) = 0$$

其实部和虚部均等于 0, 消元  $v$  后即得到:

$$u^2 = -\frac{(d-r-R)(d-r+R)}{(d+r-R)(d+r+R)}$$

同前面的例题一样, 应分三种情况讨论, 但这个讨论需要更细致一些, 这里仅叙一下主要结论:

1. 若两圆相交, 则交弦的长为

$$AB = \frac{\sqrt{(d-r-R)(d+r-R)(d-r+R)(d+r+R)}}{d} O_1O_2$$

2. 若两圆相离, 则两个“虚交点”分别为:

$$\vec{O_1A'}, \vec{O_1B'} = \frac{d^2 + r^2 - R^2 \pm \sqrt{(d+r-R)(d+r+R)(d-r-R)(d-r+R)}}{2d^2} \vec{O_1O_2} \quad (2.2.1)$$

这两个点位于两圆圆心的连线上, 且有长度关系:

$$O_1A' \cdot O_1B' = r^2, \quad O_2A' \cdot O_2B' = R^2$$

也就是说, 这两个“虚交点”同时是两圆的一对反演点.  $\square$

**2.2.3 过已知两点的圆** 若圆经过已知的两点  $A, B$ , 以  $\vec{AB}$  为基准向量, 我们已知, 圆上的任意一点  $P$  可表示为

$$\vec{AP} = \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu} \vec{AB}$$

并且根据表示的适当性, 只需给出一个该形式的有理表示即可. 一个简单的取法是令  $a = 1, b = s, c = 0, d = 0$ , 即得如下命题:

**命题 2.2.3** 如果平面上的一个圆经过  $A, B$  两点, 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

$$\vec{AP} = \frac{1 + is}{1 - iu} \vec{AB} \quad (2.2.2)$$

**注记 2.2.4** 选取这个表示的原因是它与单位圆的常用表示  $\frac{1+iu}{1-iu}$  相似, 便于记忆.

根据上节圆心和半径的求解方法, 我们容易得知, 在这个表示下, 圆心  $O$  和半径  $R$  分别为:

$$\vec{AO} = \frac{1 + is}{2} \vec{AB}, \quad R = \frac{\sqrt{1 + s^2}}{2} AB$$

**推论 2.2.5** 若平面上的一个圆以线段  $AB$  为直径, 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

$$\vec{AP} = \frac{1}{1 - iu} \vec{AB} \quad (2.2.3)$$

**例 2.2.6** 经过点  $A = 1 + i$  和  $B = 5 - i$  的圆有参数表示:

$$\vec{AP} = \frac{1 + is}{2} \vec{AB}$$

展开即为

$$P = (1 + i) + \frac{1 + is}{1 - iu} (4 - 2i)$$

这就是经过这两点的圆族的参数表示. 如果将  $P$  以  $x + yi$  代入, 通分化简后则为

$$(1 + 5i) - (4 - 2i)s + (1 + i)u - ix - ux + y - iuy = 0$$

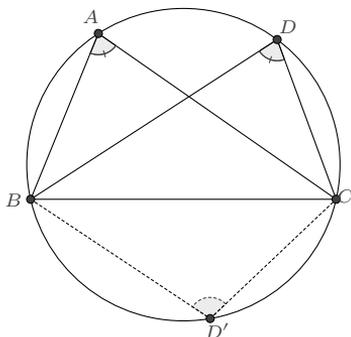
对此分离实部和虚部

$$\begin{cases} 1 - 4s + u - ux + y = 0 \\ 5 + 2s + u - x - uy = 0 \end{cases}$$

消元  $u$ , 即得到经过  $A$ 、 $B$  两点的圆族的直角坐标表示:

$$x^2 + y^2 - 4sy - 2(3 + s)x + 2(2 + 3s) = 0$$

**例 2.2.7 (圆周角定理)** 一条弧所对的任意两个圆周角相等或互补.



**证明** 根据 (2.2.2), 我们可设

$$\vec{BA} = \frac{1 + is}{1 - ia} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1 + is}{1 - id} \vec{BC}$$

再分情况讨论一下点  $A$ 、 $D$  的位置:

若  $A$ 、 $D$  位于线段  $BC$  的同侧, 不妨设二者均位于  $BC$  的上半部分圆弧上, 此时

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1 + is}{1 - ia}\right) = \frac{a + s}{1 + a^2} > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1 + is}{1 - id}\right) = \frac{d + s}{1 + d^2} > 0$$

两个圆周角分别为

$$\begin{aligned} \angle BAC &= \arg \frac{C - A}{B - A} = \arg \frac{i(a + s)}{1 + is} \\ \angle BDC &= \arg \frac{C - D}{B - D} = \arg \frac{i(d + s)}{1 + is} \end{aligned}$$

从而

$$\angle BAC - \angle BDC = \arg \frac{a + s}{d + s} = 0$$

若  $A, D$  位于线段  $BC$  的异侧, 不妨设  $A$  位于  $BC$  的上半部分圆弧上,  $D$  位于  $BC$  的下半部分圆弧上, 此时

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1+is}{1-ia}\right) = \frac{a+s}{1+a^2} > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{1+is}{1-id}\right) = \frac{d+s}{1+d^2} < 0$$

两个圆周角分别为

$$\angle BAC = \arg \frac{C-A}{B-A} = \arg \frac{i(a+s)}{1+is}$$

$$\angle BDC = \arg \frac{B-D}{C-D} = \arg \frac{1+is}{i(d+s)}$$

从而

$$\angle BAC + \angle BDC = \arg \frac{a+s}{d+s} = \arg \frac{a+s}{d+s} = \pi$$

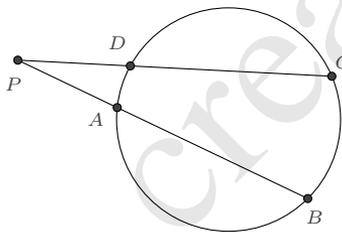
这就证明了命题. □

**注记 2.2.8** 上述两种情况的证明过程都依赖于如下的事实

$$\frac{C-A}{B-A} \frac{B-D}{C-D} \in \mathbb{R}$$

不同之处仅在于对值的正负情况做讨论.

**例 2.2.9 (割线定理)** 对于给定圆及所在平面上的一点  $P$ , 由  $P$  作两条直线, 直线  $l_1$  交圆于点  $A, B$ , 直线  $l_2$  交圆于点  $C, D$ , 那么  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



**证明** 我们选择  $\vec{AB}$  作为基向量, 则可设

$$\vec{AC} = \frac{1+is}{1-ic} \vec{AB}, \quad \vec{AD} = \frac{1+is}{1-id} \vec{AB}$$

$P$  点在  $AB$  直线上, 故又令  $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$ . 根据  $C, D, P$  三点共线

$$\operatorname{Im} \frac{C-P}{D-P} = (c-d)(1+s^2 - \lambda + cd\lambda + cs\lambda + ds\lambda) = 0$$

解出

$$\lambda = \frac{1 + s^2}{1 - cd - cs - ds}$$

然后计算各线段长度:

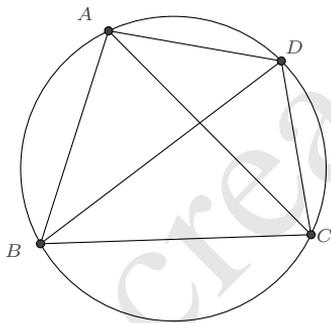
$$\begin{cases} PA = \frac{1 + s^2}{|1 - cd - cs - ds|} AB \\ PB = \frac{(c + s)(d + s)}{|1 - cd - cs - ds|} AB \\ PC = \sqrt{\frac{(1 + d^2)(1 + s^2)}{1 + c^2}} \frac{|c + s|}{|1 - cd - cs - ds|} AB \\ PD = \sqrt{\frac{(1 + c^2)(1 + s^2)}{1 + d^2}} \frac{|d + s|}{|1 - cd - cs - ds|} AB \end{cases}$$

由此即知  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ . □

**定义 2.2.10 (圆幂)** 根据割线定理, 给定圆及所在平面上的一点  $P$ , 经过  $P$  的任意直线若交圆于两点  $A, B$ , 则  $PA \cdot PB$  是一个定值, 该值称为点  $P$  关于圆的圆幂.

不难证明: 若记圆心为  $O$ , 半径为  $R$ , 则圆幂为  $OP^2 - R^2$ .

**例 2.2.11 (托勒密定理)** 若  $A, B, C, D$  四点顺次排列于一圆上, 则  $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ .



**证明** 根据圆的参数表示 (2.2.2), 设

$$\vec{BA} = \frac{1 + is}{1 - ia} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1 + is}{1 - id} \vec{BC}$$

为了使得  $A, B, C, D$  四点为逆时针的, 要求:

$$\operatorname{Im} \frac{A - B}{C - B} > 0, \quad \operatorname{Im} \frac{B - C}{D - C} > 0, \quad \operatorname{Im} \frac{C - D}{A - D} > 0, \quad \operatorname{Im} \frac{D - A}{B - A} > 0$$

约化后的条件为:  $s + d > 0, a > d$ .

然后我们计算各线段之长, 结果如下:

$$AB = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+a^2}}BC, \quad CD = \frac{s+d}{\sqrt{1+d^2}}BC, \quad DA = \frac{(a-d)\sqrt{(1+s^2)}}{\sqrt{(1+a^2)(1+d^2)}}BC$$

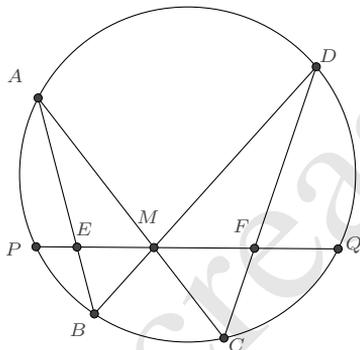
$$AC = \frac{s+a}{\sqrt{1+a^2}}BC, \quad BD = \frac{\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+d^2}}BC$$

因此

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD = \frac{(s+a)\sqrt{1+s^2}}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+d^2}}BC^2 \quad \square$$

**例 2.2.12 (坎迪定理)** 蝴蝶定理是圆的一个极其优美的性质, 因其形状像蝴蝶的翅膀而得名, 它的一般表述是如下的坎迪定理:  $PQ$  是圆内的一段弦,  $M$  是该弦上的任意一点, 点  $A, B, C, D$  在圆上且直线  $AC, BD$  经过点  $M$ .  $AB, CD$  的连线又交直线  $PQ$  于  $E, F$ , 则有如下的线段长度关系

$$\frac{1}{ME} - \frac{1}{MF} = \frac{1}{MP} - \frac{1}{MQ}$$



**证明** 考虑以  $\vec{PQ}$  为基向量, 经过  $P, Q$  两点的圆上的其余四点  $A, B, C, D$  则可表示为

$$\vec{PA} = \frac{1+is}{1-ia}\vec{PQ}, \quad \vec{PB} = \frac{1+is}{1-ib}\vec{PQ}, \quad \vec{PC} = \frac{1+is}{1-ic}\vec{PQ}, \quad \vec{PD} = \frac{1+is}{1-id}\vec{PQ}$$

又设  $\vec{PM} = \lambda\vec{PQ}$ , 分别由  $A, M, C$  三点共线和  $B, M, D$  三点共线, 知

$$\lambda = \frac{1+s^2}{1-ac-as-cs} = \frac{1+s^2}{1-bd-bs-ds}$$

再设  $\vec{PX} = \mu \vec{PQ}$ ,  $\vec{PY} = \nu \vec{PQ}$ , 分别由  $A, X, B$  三点共线和  $B, Y, C$  三点共线, 又有

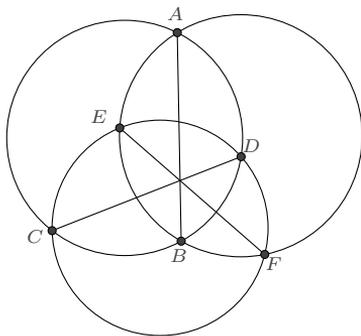
$$\mu = \frac{1+s^2}{1-sa-sb-ab}, \quad \nu = \frac{1+s^2}{1-sc-sd-cd}$$

待证的等式等价于

$$\frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\nu-\lambda} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}$$

将以上关于  $\lambda, \mu, \nu$  的表示代入, 即知是成立的, 于是命题获证.  $\square$

**例 2.2.13** 若三圆两两相交, 则三公弦共点或平行.



**证明** 以其中两圆的公共弦  $\vec{AB}$  作为基向量, 考虑  $ABCD$  所在的圆, 根据 (2.2.2), 可令

$$\vec{AC} = \frac{1+ip}{1-ic} \vec{AB}, \quad \vec{AD} = \frac{1+ip}{1-id} \vec{AB}$$

考虑  $ABEF$  所在的圆, 又可令

$$\vec{AE} = \frac{1+iq}{1-ie} \vec{AB}, \quad \vec{AF} = \frac{1+iq}{1-if} \vec{AB}$$

又根据  $CDEF$  四点共圆, 其交比为实数得到:

$$cd - ef + cp + dp + p^2 - efp^2 - eq - fq - ep^2q - fp^2q - q^2 + cdq^2 + cpq^2 + dpq^2 = 0$$

另一方面, 由三线共点的判别式 (1.3.2)

$$\frac{\text{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{AD})}{\text{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{CD})} = \frac{\text{Im}(\vec{AE} \otimes \vec{AF})}{\text{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{EF})}$$

计算, 也将导出相同的等式. 极限的情况下, 三弦的交点在无穷远处, 此时三弦即为平行.  $\square$

**2.2.4 过已知三点的圆** 前面我们导出了过已知两点的圆的一个有理表示 (2.2.2), 它包含一个待定的常数  $s$ , 若圆再经过一个指定的点, 则可以确定出  $s$ , 也就完全地确定了圆的表示.

**例 2.2.14** 复平面上, 求经过三点  $A = 1 + 3i, B = 2 + 5i, C = 6 + 4i$  的圆.

**解** 选取  $\vec{BC}$  为基向量, 根据 (2.2.2), 经过  $B, C$  两点的圆可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{1 + is}{1 - iu} \vec{BC}$$

若它再经过点  $A$ , 则

$$1 + 3i - 2 - 5i = \frac{1 + is}{1 - iu} (6 + 4i - 2 - 5i)$$

分离实部和虚部, 得到

$$\begin{cases} 5 + s + 2u = 0 \\ 1 + 4s - u = 0 \end{cases}$$

从而解出  $s = -\frac{7}{9}, u = -\frac{19}{9}$ . 将  $s$  代回, 即得到经过这三点的圆的一个表示:

$$P = \frac{(47 + 8i) + (45 - 18i)u}{9(1 - iu)}$$

若转化为直角坐标表示, 则为  $9x^2 + 9y^2 - 65x - 53y + 134 = 0$ , 这只需要将  $P$  以  $x + yi$  代入, 分离实部和虚部后消元参数  $u$  即可得到.  $\square$

一个更直接的计算方式来自于交比.

**定义 2.2.15 (交比)** 相异四点  $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  (计顺序) 的交比定为

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) := \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \in \mathbb{C}$$

当其中一点为  $\infty$  时, 此式按极限来定义, 特例是  $(z, 1; 0, \infty) = z$ .

这个定义是在复数域上进行的. 利用本章所定义的向量的运算法则, 我们也可以类似定义了平面上四点的交比, 即对于平面上的四点  $A, B, C, D$ , 它们的交比

$$(A, B; C, D) := \frac{A - C}{A - D} \frac{B - D}{B - C}$$

**命题 2.2.16 (圆的交比性质)** 圆上任意四点的交比之值是一个实数.

这个性质我们在圆周角定理的注记中已提到过, 应用 (2.2.2) 可以简单地予以证明.

**证明** 对于给定的圆, 任意选取其上的两个定点  $P, Q$ , 则圆上的任意四点  $A, B, C, D$  可分别表示为:

$$\vec{PA} = \frac{1+is}{1-ia} \vec{PQ}, \quad \vec{PB} = \frac{1+is}{1-ib} \vec{PQ}, \quad \vec{PC} = \frac{1+is}{1-ic} \vec{PQ}, \quad \vec{PD} = \frac{1+is}{1-id} \vec{PQ}$$

其中  $s$  为某个固定的实数. 于是  $A, B, C, D$  四点的交比

$$(A, B; C, D) = \frac{A-C}{A-D} \frac{B-D}{B-C} = \frac{\vec{PA}-\vec{PC}}{\vec{PA}-\vec{PD}} \frac{\vec{PB}-\vec{PD}}{\vec{PB}-\vec{PC}} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-d)(b-c)} \in \mathbb{R} \quad \square$$

根据这一性质, 若圆经过  $A, B, C$  三点, 对于其上的任意一点  $P$ , 我们考虑交比  $(B, P; C, A)$ , 它应等于一个实数  $u$ , 由此即得

**命题 2.2.17** 经过  $A, B, C$  三点的圆, 其上的任意一点  $P$  可表示为:

$$P = \frac{A(B-C) + C(A-B)u}{B-C + (A-B)u} \quad (2.2.4)$$

这个表示在  $u = 0, 1, \infty$  时分别对应  $A, B, C$  三点.

**2.2.5 已知反演点对的圆** 如果已知圆的一对反演点  $A$  和  $B$ , 因为圆心  $O$  与反演点共线, 所以可设  $\vec{OA} = \lambda \vec{AB}$ , 根据反演的定义, 圆的半径平方则为:

$$R^2 = OA \cdot OB = \lambda(1+\lambda)AB^2$$

从而圆上的任意一点  $P$  可表示为:

$$\vec{OP} = \sqrt{\lambda(1+\lambda)} \frac{1+it}{1-it} \vec{AB}$$

利用向量加法即得

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA} = \left( \sqrt{\lambda(1+\lambda)} \frac{1+it}{1-it} - \lambda \right) \vec{AB}$$

这个表示含有根式, 不便于应用, 考虑代换  $\frac{\lambda}{1+\lambda} = k^2$ , 可将其改写为

$$\vec{AP} = \frac{k(i-ik-t-kt)}{(1-k^2)(i+t)} \vec{AB}$$

这个表示仍有些复杂, 为进一步简化, 再作代换:  $k \rightarrow \frac{1+s}{1-s}$ ,  $t \rightarrow \frac{s}{u}$ , 则有如下结论:

**命题 2.2.18** 若  $A, B$  是圆的一对反演点, 则圆上的任意一点  $P$  可表示为:

$$\vec{AP} = \frac{(1+s)(1+iu)}{2(s+iu)} \vec{AB} \quad (2.2.5)$$

因为在变换  $s \rightarrow \frac{1}{s}$ , 此表示所对应的圆是不变的, 为了使得表示具有唯一性, 可以限定  $s \in [-1, 1]$ . 而当  $s$  取  $-1, 0$  或  $1$  时, 圆将分别退化为点  $A$ 、 $AB$  的中垂线和点  $B$ .

**定义 2.2.19 (根轴)** 在平面上任给两不同心的圆, 则对两圆圆幂相等的点的集合是一条直线, 这条线称为这两个圆的根轴.

**命题 2.2.20** 若两圆相交, 则根轴为两圆的交点的连线; 若两圆相切, 则根轴为两圆在相交点处的切线; 若两圆相离, 则根轴为两圆的虚交点的中垂线.

**证明** 两圆相交或相切的情形是易知的, 这里我们仅需证明两圆相离的情形. 设两圆的两个虚交点为  $A, B$ , 则两圆可分别表示为:

$$\vec{AP} = \frac{(1+p)(1+iu)}{2(p+iu)} \vec{AB}, \quad \vec{AQ} = \frac{(1+q)(1+iv)}{2(q+iv)} \vec{AB}$$

两圆的圆心和半径表示分别是:

$$\vec{AO}_1 = \frac{(1+p)^2}{4p} \vec{AB}, \quad R_1 = \left| \frac{1-p^2}{4p} \right| |AB|$$

$$\vec{AO}_2 = \frac{(1+q)^2}{4q} \vec{AB}, \quad R_2 = \left| \frac{1-q^2}{4q} \right| |AB|$$

又设根轴上的点  $T$  为  $\vec{AT} = z \vec{AB}$ , 则由

$$O_1 T^2 - R_1^2 = O_2 T^2 - R_2^2$$

计算可知  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ , 即根轴为两圆的虚交点的中垂线. □

某些书上将共根轴 (且共交点/共虚交点) 的圆系称为**共轴圆束**, 而将半径为无穷小的极限情形下的圆心称为该圆系的**极限点** (即两个虚交点).

## 2.3 相切情形

### 2.3.1 切向量

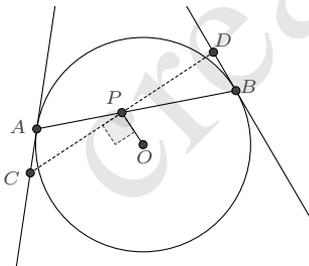
**定义 2.3.1 (切向量)** 曲线在某点处的切向量定义为沿曲线在该点处切线方向的向量.

如果曲线在某点处的一个切向量是  $\mathbf{v}$ , 则  $k\mathbf{v}$  ( $k$  为非 0 实数) 也是曲线在该点处的一个切向量. 对于参数曲线  $P(u) = (\chi_1(u), \chi_2(u), \dots, \chi_n(u))$ , 若它关于  $u$  的导数  $P'(u) = (\chi_1'(u), \chi_2'(u), \dots, \chi_n'(u))$  的模长不为 0 或  $\infty$ , 那么我们将  $P'(u)$  作为它的一个切向量. 否则, 我们需要对  $P'(u)$  乘以一个系数, 以使得它在该点处的模长为非 0 的有限值.

例如, 对于单位圆的一个参数表示  $P(u) = \frac{1+iu}{1-iu}$ , 它关于  $u$  的导数为  $P'(u) = \frac{2i}{(1-iu)^2}$ , 当  $u$  取有限的值时,  $|P'(u)| = \frac{2}{1+u^2}$  为非 0 的有限值, 我们可以将  $P'(u)$  作为一个切向量. 而当  $u \rightarrow \infty$  时 (对应点是  $P(\infty) = -1$ ),  $|P'(\infty)| = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2}{1+u^2} = 0$ , 此时我们可将  $\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 P'(u) = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{2iu^2}{(1-iu)^2} = -2i$  作为它的一个切向量, 不难得知, 该切向量方向与圆在  $-1$  点处的切线方向是一致的.

一个显然的结论是: 若曲线在点  $P$  处的一个切向量是  $\mathbf{v}$ , 则曲线在  $P$  点处切线上的任意点  $Q$  可表示为  $Q = P + \lambda\mathbf{v}$  ( $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

**例 2.3.2 (图说几何 6.4.2)** 如图,  $AB$  是圆  $\odot O$  的一条弦, 点  $P$  在  $AB$  上, 过  $P$  点作直线垂直于  $OP$ , 该直线分别交  $A$ 、 $B$  两点处的切线于点  $C$ 、 $D$ , 则  $PC = PD$ .



**证明** 以  $AB$  为弦的圆, 其上任意点  $Q$  的表示设为

$$\vec{AQ} = \frac{1+is}{1-iu} \vec{AB}$$

圆心  $O$  的表示为

$$\vec{AO} = \frac{1+is}{2} \vec{AB}$$

在  $A$  点处的一个切向量为

$$\mathbf{v}_A = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d\vec{AP}}{du} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{i-s}{(1-iu)^2} \vec{AB} = (-i+s) \vec{AB}$$

因此  $A$  点切线上的点  $C$  可设为

$$\vec{AC} = \mu(-i+s) \vec{AB}$$

在  $B$  点处的一个切向量为

$$\mathbf{v}_B = \lim_{u \rightarrow -s} \frac{d\vec{BP}}{du} = \lim_{u \rightarrow -s} \frac{i-s}{(1-iu)^2} \vec{AB} = \frac{i}{1+is} \vec{AB}$$

因此  $B$  点切线上的点  $D$  可设为

$$\vec{BD} = \vec{AB} + \nu \frac{i}{1+is} \vec{AB}$$

又设  $AB$  上的点  $P$  为  $\vec{AP} = \lambda \vec{AB}$ , 则根据  $PC \perp PO$  知

$$\operatorname{Re} \left( \frac{C-P}{O-P} \right) = -\frac{2\lambda(1-2\lambda+2s\mu)}{1+s^2-4\lambda+4\lambda^2} = 0$$

解出  $\mu$  后即知

$$\vec{AC} = \frac{(1-2\lambda)(i-s)}{2s} \vec{AB}$$

同理, 根据  $PD \perp PO$  可得

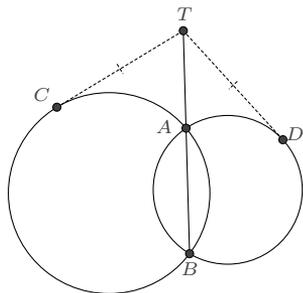
$$\vec{BD} = \frac{s+2s\lambda-i+2i\lambda}{2s} \vec{AB}$$

于是可计算出  $PC$ 、 $PD$  之长的表示:

$$PC = PD = \sqrt{\frac{1+s^2-4\lambda+4\lambda^2}{4s^2}} AB$$

□

**例 2.3.3 (图说几何 6.5.5)** 如图, 在两圆的相交弦  $AB$  的延长线部分有一点  $T$ , 由  $T$  向两圆分别做切线, 切点是  $C$ 、 $D$ , 则  $TC = TD$ .



**证明** 以公共弦为基向量, 则两圆上点的表示可分别设为

$$\vec{BC} = \frac{1+ip}{1-iu} \vec{BA}, \quad \vec{BD} = \frac{1+iq}{1-iv} \vec{BA}$$

在  $C$ 、 $D$  两点处的切向量分别是

$$\mathbf{v}_C = \frac{d}{du} \vec{BC} = \frac{i-p}{(1-iu)^2} \vec{BA}$$

$$\mathbf{v}_D = \frac{d}{dv} \vec{BD} = \frac{i-q}{(1-iv)^2} \vec{BA}$$

又设  $\vec{BT} = \lambda \vec{BA}$  ( $\lambda < 0$  或  $\lambda > 1$ ), 根据  $TC$  连线与圆在  $C$  处的切向量平行即有:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{T-C}{\mathbf{v}_C} \right) = \frac{1+p^2-\lambda+2pu\lambda+u^2\lambda}{1+p^2} = 0$$

这个方程的  $u$  有两个解, 因为由  $T$  点向圆可以引两条切线. 我们任意一解即可, 这对于切线段长的计算并无影响.

$$u = -\frac{p\lambda + \sqrt{(1+p^2)\lambda(\lambda-1)}}{\lambda}$$

相应地

$$\vec{BC} = \frac{(p-i)\lambda}{(p-i)\lambda + \sqrt{(1+p^2)\lambda(\lambda-1)}} \vec{BA}$$

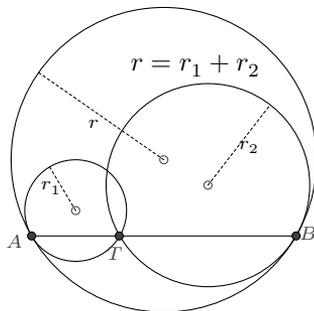
进而可计算出  $TC$  线段之长

$$TC = |\vec{BC} - \vec{BT}| = \lambda(\lambda-1)BA$$

这是与圆的参数  $p$  无关的量, 显然  $TD$  之长也应是如此. □

**例 2.3.4 (图说几何 6.1.19)** 如图, 给定圆  $\odot O$  及它的一条弦  $AB$ ,  $T$  是弦上的一点, 若

圆  $\odot O_1$  以  $AT$  为弦且在  $A$  点处与圆  $\odot O$  相切, 圆  $\odot O_2$  以  $TB$  为弦且在  $B$  点处与圆  $\odot O$  相切, 则三圆的半径有关系:  $r = r_1 + r_2$ .



**证明** 以  $AB$  为弦的圆  $\odot O$  可设为

$$\vec{AP} = \frac{1+is}{1-iu} \vec{AB}$$

令  $\vec{AT} = \lambda \vec{AB}$  ( $0 < \lambda < 1$ ), 则以  $AT$  为弦的圆  $\odot O_1$  可设为

$$\vec{AP} = \frac{1+ip}{1-iv} \vec{AT} = \lambda \frac{1+ip}{1-iv} \vec{AB}$$

以  $TB$  为弦的圆  $\odot O_2$  可设为

$$\vec{AP} = \vec{AT} + \frac{1+iq}{1-iw} \vec{TB} = \left( \lambda + \frac{1+iq}{1-iw} (1-\lambda) \right) \vec{AB}$$

圆  $\odot O$  和圆  $\odot O_1$  在  $A$  点处的切向量分别为:

$$\mathbf{v}_A = (-i+s) \vec{AB}, \quad \mathbf{v}_{1A} = \lambda(-i+p) \vec{AB}$$

二者平行的条件是  $p = s$ . 圆  $\odot O$  和圆  $\odot O_2$  在  $B$  点处的切向量分别为:

$$\mathbf{v}_B = \frac{1}{s-i} \vec{AB}, \quad \mathbf{v}_{2B} = \frac{1-\lambda}{q-i} \vec{AB}$$

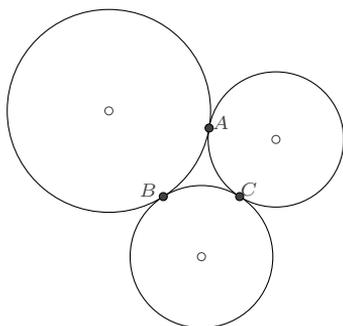
二者平行的条件是  $q = s$ . 于是三圆的半径分别为

$$r = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2} AB, \quad r_1 = \lambda \frac{\sqrt{1+s^2}}{2} AB, \quad r_2 = (1-\lambda) \frac{\sqrt{1+s^2}}{2} AB$$

由此立知  $r = r_1 + r_2$ . □

**例 2.3.5** 已知三个圆两两相切, 切点分别为  $A = 6 + 9i$ 、 $B = 0$ 、 $C = 10$ , 求这三个圆

的圆心位置.



**解** 根据过已知两点的圆的表示 (2.2.2), 我们设这三个圆分别为

$$\begin{cases} \odot O_1 : \vec{AP} = \frac{1+is_1}{1-iu} \vec{AB} \\ \odot O_2 : \vec{BP} = \frac{1+is_2}{1-iu} \vec{BC} \\ \odot O_3 : \vec{CP} = \frac{1+is_3}{1-iu} \vec{CA} \end{cases}$$

则  $\odot O_1$  在  $A$ 、 $B$  两点处的切向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{1A} &= \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \frac{1+is_1}{1-iu} \vec{AB} = (-i+s_1) \vec{AB} = -(-i+s_1)(6+9i) \\ \mathbf{v}_{1B} &= \lim_{u \rightarrow -s_1} \frac{d}{du} \frac{1+is_1}{1-iu} \vec{AB} = \frac{1}{-i+s_1} \vec{AB} = \frac{6+9i}{i-s_1} \end{aligned}$$

$\odot O_2$  在  $B$ 、 $C$  两点处的切向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{2B} &= \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \frac{1+is_2}{1-iu} \vec{BC} = (-i+s_2) \vec{BC} = 10(-i+s_2) \\ \mathbf{v}_{2C} &= \lim_{u \rightarrow -s_2} \frac{d}{du} \frac{1+is_2}{1-iu} \vec{BC} = \frac{1}{-i+s_2} \vec{BC} = \frac{10}{-i+s_2} \end{aligned}$$

$\odot O_3$  在  $C$ 、 $A$  两点处的切向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{3C} &= \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \frac{1+is_3}{1-iu} \vec{CA} = (-i+s_3) \vec{CA} = (-4+9i)(-i+s_3) \\ \mathbf{v}_{3A} &= \lim_{u \rightarrow -s_3} \frac{d}{du} \frac{1+is_3}{1-iu} \vec{CA} = \frac{1}{-i+s_3} \vec{CA} = \frac{-4+9i}{-i+s_3} \end{aligned}$$

根据  $v_{1A}/v_{3A}$ 、 $v_{1B}/v_{2B}$ 、 $v_{2C}/v_{3C}$  即可得到方程组

$$\begin{cases} -30 + 19s_1 + 19s_3 + 30s_1s_3 = 0 \\ -3 + 2s_1 + 2s_2 + 3s_1s_2 = 0 \\ -9 + 4s_2 + 4s_3 + 9s_2s_3 = 0 \end{cases}$$

它有两组解. 第一组解为

$$s_1 = -\frac{9}{4}, \quad s_2 = -\frac{30}{19}, \quad s_3 = -\frac{3}{2}$$

相应地有

$$\begin{cases} \odot O_1 : P = \frac{(6+9i)(-9+4u)}{4(i+u)} = \left(-\frac{57}{8} + \frac{45i}{4}\right) - \left(\frac{105}{8} - \frac{9i}{4}\right)z \\ \odot O_2 : P = \frac{300+190i}{19(i+u)} = \left(5 - \frac{150i}{19}\right) + \left(5 - \frac{150i}{19}\right)z \\ \odot O_3 : P = \frac{(-30+39i)+20u}{2(i+u)} = \left(\frac{59}{4} + \frac{15i}{2}\right) + \left(\frac{19}{4} + \frac{15i}{2}\right)z \end{cases}$$

其中  $z = \frac{-i+u}{i+u}$  是单位复数, 由此即知三圆的圆心分别为:

$$O_1 = -\frac{57}{8} + \frac{45i}{4}, \quad O_2 = 5 - \frac{150i}{19}, \quad O_3 = \frac{59}{4} + \frac{15i}{2}$$

第二组解

$$s_1 = \frac{9}{4}, \quad s_2 = \frac{30}{19}, \quad s_3 = \frac{3}{2}$$

对应的都是经过  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点的同一个圆, 不满足要求. □

**2.3.2 相切于直线的圆** 如果圆与经过  $B$ 、 $C$  两点的直线相切于点  $B$ , 我们考虑形如 (2.1.3) 的有理表示 ( $P$  是圆上的任意点):

$$\vec{BP} = \frac{a+bi+(c+di)u}{1-iu} \vec{BC}$$

这个表示有一个额外的自由度, 允许我们可以任意指定  $u$  取何值时经过点  $B$ . 不妨令  $u \rightarrow \infty$  时  $P = B$ , 则

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{a+bi+(c+di)u}{1-iu} = -d+ci = 0$$

在  $B$  点处的一个切向量

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \vec{BP} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \left( \frac{a + bi + (c + di)u}{1 - iu} \right) \vec{BC} = (-ia + b - c - id) \vec{BC}$$

它应与  $\vec{BC}$  向量平行, 从而又有  $-a - d = 0$ . 由此, 我们即确定出  $a = c = d = 0$ , 从而有如下命题:

**命题 2.3.6** 如果一圆与已知的直线  $BC$  相切于点  $B$ , 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{is}{1 - iu} \vec{BC} \quad (2.3.1)$$

**注记 2.3.7** 若我们指定  $u \rightarrow 0$  时  $P = B$ , 类似可导出: 与已知的直线  $BC$  相切于点  $B$  的圆的一个有理表示是

$$\vec{BP} = \frac{sv}{1 - iv} \vec{BC}$$

它与 (2.3.1) 的变量之间是分式线性关系:  $uv = -1$ .

**例 2.3.8** 求与单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  在  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  处相切的圆的表示.

**解** 单位圆在点  $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$  处的一个切向量是  $\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ , 根据 (2.3.1), 我们即知在该点处与之相切的圆有表示:

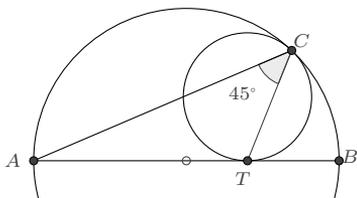
$$P = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) + \frac{is}{1 - iu} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right)$$

若代入  $P = x + yi$ , 分离实部和虚部后消元  $u$  则得直角坐标方程的表示:

$$5x^2 + 5y^2 - 3(2 + s)x - 4(2 + s)y + 5(1 + s) = 0$$

□

**例 2.3.9 (图说几何 6.1.7)** 如图, 已知线段  $AB$  是圆  $\odot O$  的直径,  $T$  是  $AB$  上的任意一点, 若圆  $\odot \Omega$  与  $AB$  相切于  $T$  且与圆  $\odot O$  相切于点  $C$ , 则  $\angle ACT = 45^\circ$ .



**证明** 根据 (2.2.3), 以  $AB$  为直径的圆  $\odot O$  上的任意点  $P$  可表示为

$$\vec{AP} = \frac{1}{1 - iu} \vec{AB}$$

设  $\vec{AT} = \lambda \vec{AB}$ , 则圆  $\odot\Omega$  上的任意点  $Q$  可表示为

$$\vec{AQ} = \left( \lambda + \frac{is}{1-iv} \right) \vec{AB}$$

这二者若在  $C$  点处相切, 则

$$\frac{1}{1-iu} = \lambda + \frac{is}{1-iv}$$

它们在该点处的切向量

$$\mathbf{v}_1 = \frac{i}{(1-iu)^2} \vec{AB}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{s}{(i+v)^2} \vec{AB}$$

方向也是一致的, 即有

$$\operatorname{Im} \frac{\mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_2} = -\frac{(1+u-v+uv)(1-u+v+uv)}{s(1+u^2)^2} = 0$$

由此解出

$$u = \frac{1-\lambda}{\lambda}, \quad v = 1-2\lambda, \quad s = 2\lambda(1-\lambda)$$

或

$$u = \frac{\lambda-1}{\lambda}, \quad v = -1+2\lambda, \quad s = 2\lambda(\lambda-1)$$

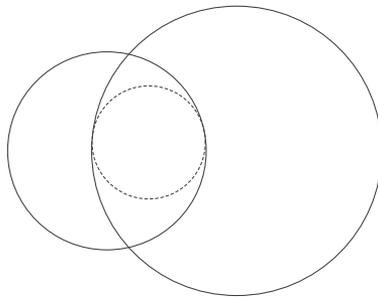
这两组解对应的图形是关于直径  $AB$  对称的. 本题图例所示对应的是第一组解, 此时  $C$  点的表示为

$$\vec{AC} = \frac{\lambda}{-i+(1+i)\lambda} \vec{AB}$$

因而

$$\angle ACT = \arg \frac{T-C}{A-C} = \arg (1-\lambda)(1+i) = 45^\circ \quad \square$$

**例 2.3.10** 求同时与圆  $x^2 + y^2 = r^2$  和圆  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$  相切的圆的表示.



**解** 我们设圆  $x^2 + y^2 = r^2$  的切点是  $r \frac{1+ia}{1-ia}$  ( $a$  不为  $\infty$ ), 则所求圆可表示为

$$P = r \frac{1+ia}{1-ia} + \frac{is}{1-iu} \frac{d}{da} \left( r \frac{1+ia}{1-ia} \right)$$

分离实部和虚部, 得到坐标分量的参数表示

$$\begin{cases} x = \frac{r(1-a^4-2s+2a^2s+4asu+u^2-a^4u^2)}{(1+a^2)^2(1+u^2)} \\ y = \frac{2r(a+a^3-2as-su+a^2su+au^2+a^3u^2)}{(1+a^2)^2(1+u^2)} \end{cases}$$

若它与圆  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$  相切, 将上式代入其方程, 则得关于  $u$  的一个二次方程:

$$\begin{aligned} (1+a^2)(d^2+a^2d^2-2dr+2a^2dr+r^2+a^2r^2-R^2-a^2R^2)u^2 \\ - 8adr su + d^2 + 2a^2d^2 + a^4d^2 - 2dr + 2a^4dr + r^2 + 2a^2r^2 + a^4r^2 - R^2 \\ - 2a^2R^2 - a^4R^2 + 4drs - 4a^2drs - 4r^2s - 4a^2r^2s + 4r^2s^2 = 0 \end{aligned}$$

相切的条件要求关于  $u$  的判别式为 0, 从而可以解出  $s$ . 共有两组解, 一解为

$$s = \frac{(1+a^2)(d^2+a^2d^2-2dr+2a^2dr+r^2+a^2r^2-R^2-a^2R^2)}{2r(-d+a^2d+r+a^2r-R-a^2R)}$$

此时

$$P = \frac{1+ia}{1-ia} \left( r + \frac{d^2+a^2d^2-2dr+2a^2dr+r^2+a^2r^2-R^2-a^2R^2}{(d-a^2d-r-a^2r+R+a^2R)(1-iu)} \right)$$

对应的直角坐标方程表示是

$$\begin{aligned} (d-r+R)(dr-rR-dx-rx+Rx+x^2+y^2) - 2a(d+r-R)(d-r+R)y \\ + a^2(d+r-R)(dr+rR+dx-rx+Rx-x^2-y^2) = 0 \end{aligned}$$

另一组解是

$$s = \frac{(1+a^2)(d^2+a^2d^2-2dr+2a^2dr+r^2+a^2r^2-R^2-a^2R^2)}{2r(-d+a^2d+r+a^2r+R+a^2R)}$$

此时

$$P = \frac{1+ia}{1-ia} \left( r + \frac{d^2+a^2d^2-2dr+2a^2dr+r^2+a^2r^2-R^2-a^2R^2}{(d-a^2d-r-a^2r-R-a^2R)(1-iu)} \right)$$

对应的直角坐标方程表示是

$$(d-r-R)(dr+rR-dx-rx-Rx+x^2+y^2)-2a(d-r-R)(d+r+R)y+a^2(d+r+R)(dr-rR+dx-rx-Rx-x^2-y^2)=0$$

上面的求解过程中,我们限定了参数  $a$  不取  $\infty$ . 事实上,当  $a \rightarrow \infty$  时,简单地通过取极限即可得到圆的表示.

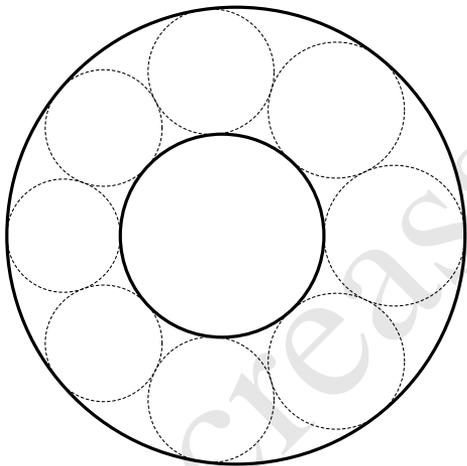
$$\lim_{a \rightarrow \infty} P = \frac{d \pm R + iru}{1 - iu}$$

相应的直角坐标方程是

$$dr + dx - rx \pm R(r+x) - x^2 - y^2 = 0$$

也可由前面的直角坐标方程两端除以  $a^2$  后取极限而得. □

**例 2.3.11 (斯坦纳圆链)** 若一组圆同时与两定圆相切,且组内的每一个圆均与邻近的两个圆相切,那么这组圆称为斯坦纳圆链.



**解** 这里我们考虑常见的一种斯坦纳圆链情形: 圆  $\Gamma_1 : x^2 + y^2 = r^2$  位于圆  $\Gamma_2 : (x-d)^2 + y^2 = R^2$  之内, 圆链外切于  $\Gamma_1$  而内切于  $\Gamma_2$ .

根据上题结论, 对于此圆链中的圆, 若它与  $\Gamma_1$  相切于点  $r \frac{1+ia}{1-ia}$ , 则有参数表示

$$P(a, u) = \frac{1+ia}{1-ia} \left( r + \frac{(d^2 + a^2d^2 - 2dr + 2a^2dr + r^2 + a^2r^2 - R^2 - a^2R^2)}{(d-a^2d-r-a^2r-R-a^2R)(1-iu)} \right)$$

由此容易导出, 圆链中圆  $P(a_k, u)$  与圆  $P(a_{k+1}, u)$  相切的条件为:

$$4Rr(d-r-R)(d+r+R)(a_k + a_{k+1})^2 + (d+r-R)^2(d+r+R)^2(a_k a_{k+1})^2$$

$$+2(d-r-R)(d+r+R)(d^2-r^2-6rR-R^2)(a_k a_{k+1}) + (d-r-R)^2(d-r+R)^2 = 0$$

若作代换

$$\frac{r(R+r-d)}{R(R+r+d)} = s^2$$

其中  $s > 0$ , 也即

$$d = \frac{(r+R)(r-s^2R)}{r+s^2R}$$

则可以得到递推关系式

$$a_{k+1} = \frac{R^2 s^2 (1-s^2) - a_k R s (r + R s^2)}{a_k (r^2 - R^2 s^2) - R s (r + R s^2)}$$

或者

$$a_{k+1} = \frac{R^2 s^2 (1-s^2) + a_k R s (r + R s^2)}{a_k (r^2 - R^2 s^2) + R s (r + R s^2)}$$

这两个递推关系仅有方向选取上的差异, 并不对最终的结论有任何影响, 因此我们任选一个递推关系即可. 这里选取第二个, 根据不动点理论, 若  $\lambda_1, \lambda_2$  是不动点方程

$$\lambda = \frac{R^2 s^2 (1-s^2) + \lambda R s (r + R s^2)}{\lambda (r^2 - R^2 s^2) + R s (r + R s^2)}$$

的两根, 则此分式线性递推数列可改写为

$$\frac{a_{k+1} - \lambda_1}{a_{k+1} - \lambda_2} = \frac{(r R s + R^2 s^3 - r^2 \lambda_1 + R^2 s^2 \lambda_1)(a_k - \lambda_1)}{(r R s + R^2 s^3 - r^2 \lambda_2 + R^2 s^2 \lambda_2)(a_k - \lambda_2)}$$

化简后则是

$$\frac{a_{k+1} - \frac{R s \sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2 - R^2 s^2}}}{a_{k+1} + \frac{R s \sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2 - R^2 s^2}}} = \frac{(r + R s^2) - \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}}{(r + R s^2) + \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} a_k - \frac{R s \sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2 - R^2 s^2}}}{\frac{(r + R s^2) - \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}}{(r + R s^2) + \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} a_k + \frac{R s \sqrt{1-s^2}}{\sqrt{r^2 - R^2 s^2}}}$$

若圆链中圆的个数为  $n$ , 则数列为  $n$ -周期数列, 此时有

$$\frac{(r + R s^2) - \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}}{(r + R s^2) + \sqrt{r^2 - R^2 s^2} \sqrt{1-s^2}} = e^{\pm i \frac{2\pi}{n}} = \frac{1 \pm i \tan \frac{\pi}{n}}{1 \mp i \tan \frac{\pi}{n}}$$

从而知

$$\frac{\sqrt{(R^2 s^2 - r^2)(1-s^2)}}{r + R s^2} = \pm \tan \frac{\pi}{n}$$

替换  $s$  后化简则为

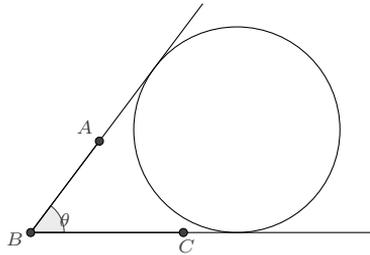
$$\frac{(R-r)^2 - d^2}{4rR} = \tan^2 \frac{\pi}{n}$$

$a_k$  的通项可表示为这样的形式:

$$a_k = \frac{\sqrt{R^2 - (d-r)^2} (c - \tan \frac{k\pi}{n})}{\sqrt{R^2 - (d+r)^2} (1 + c \tan \frac{k\pi}{n})}$$

其中  $c$  为任意常数. □

**2.3.3 相切于一角的圆** 圆内切于一个已知的角也是常见的情形之一, 我们来导出它的一个表示. 如图, 已知  $\angle ABC = \theta$ , 求与角的两边相切且在角度范围内的圆.



设圆与  $BC$  边相切于点  $D$ :  $\vec{BD} = \lambda \vec{BC}$ ; ( $\lambda > 0$ ), 根据 (2.3.1), 圆上的任意点  $P$  均可设为

$$\vec{BP} = \left( \lambda + \frac{ik}{1-iu} \right) \vec{BC}$$

它若与  $AB$  边相切, 则该切点到  $B$  点的距离等于  $\lambda$ , 即有

$$\lambda + \frac{ik}{1-iu} = \lambda e^{i\theta}$$

分离实部和虚部即可解出

$$k = 2\lambda \tan \frac{\theta}{2}, \quad u = \tan \frac{\theta}{2}$$

由此, 则知

**命题 2.3.12** 如果一圆与已知的角  $\angle ABC = \theta$  相切, 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

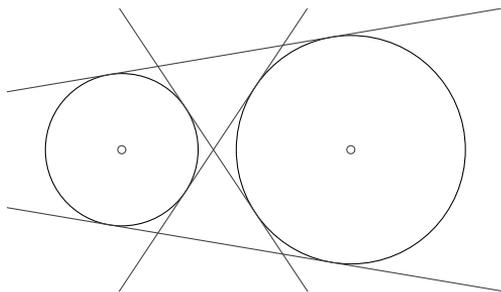
$$\vec{BP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{\theta}{2} \right) \vec{BC} \quad (2.3.2)$$

### 2.3.4 公切线

**定义 2.3.13** 若直线分别与两条曲线均相切, 则称该直线为这两曲线的一条公切线.

对于圆的情形来说, 如果两圆位于相切直线的同一侧, 则称该直线为两圆的外公切线, 反之则称为内公切线.

我们先讨论直角坐标系下两圆公切线的一般求解过程: 求圆  $\odot O_1: x^2 + y^2 = r^2$  与圆  $\odot O_2: (x-d)^2 + y^2 = R^2$  的公切线.



**解** 在已知圆心和半径的情况下, 圆的有理表示是容易给出的: 圆  $\odot O_1$  上的任意点  $P$  可表示为  $P = r \frac{1+iu}{1-iu}$ , 圆  $\odot O_2$  上的任意点  $Q$  可表示为  $Q = d + R \frac{1+iv}{1-iv}$ .

若直线  $PQ$  是圆的公切线, 则  $P$  点处的切向量  $\mathbf{v}_1$ ,  $Q$  点处的切向量  $\mathbf{v}_2$ , 以及向量  $\vec{PQ}$  三者平行, 也即

$$\operatorname{Im} \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 = 0, \quad \operatorname{Im} \vec{PQ} \otimes \mathbf{v}_1 = 0$$

其中

$$\mathbf{v}_1 = \frac{dP}{du} = \frac{2ir}{(1-iu)^2}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{dQ}{dv} = \frac{2iR}{(1-iv)^2}$$

$$\vec{PQ} = d + R \frac{1+iv}{1-iv} - r \frac{1+iu}{1-iu}$$

展开化简即得

$$\begin{cases} (u-v)(1+uv) = 0 \\ d-r+R-du^2-ru^2-Ru^2+4Ruv+dv^2-rv^2-Rv^2-du^2v^2-ru^2v^2+Ru^2v^2 = 0 \end{cases}$$

若  $u = v$ , 简化后  $u$  的方程为

$$u^2 = \frac{d-r+R}{d+r-R}$$

它有实解的充要条件是  $0 < r \leq R \cup d > R - r$  或者  $0 < R < r \cup d \geq r - R$ , 也即一个

圆不能包含另一个圆在其内. 解所对应的是外公切线的切点:

$$\begin{cases} P_{1,2} = \frac{r(r-R)}{d} \pm i \frac{r}{d} \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \\ Q_{1,2} = d + \frac{R(r-R)}{d} \pm i \frac{R}{d} \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \end{cases}$$

上式同时取正号或符号. 两条外公切线的方程表示则是:

$$(d-r+R)y = \pm(dr-rx+Rx)\sqrt{\frac{d-r+R}{d+r-R}}$$

若  $1+uv=0$ , 简化后  $u$  的方程为

$$u^2 = \frac{d-r-R}{d+r+R}$$

它有实解的充要条件是  $0 < R \cup 0 < r \cup d \geq r+R$ , 也即两圆的圆心距大于它们的半径之和. 解所对应的是内公切线的切点:

$$\begin{cases} P_{3,4} = \frac{r(r+R)}{d} \pm i \frac{r}{d} \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \\ Q_{3,4} = d - \frac{R(r+R)}{d} \mp i \frac{R}{d} \sqrt{d^2 - (R-r)^2} \end{cases}$$

上式的取值符号相异. 两条内公切线的方程表示则是:

$$(d-r-R)y = \pm(dr-rx-Rx)\sqrt{\frac{d-r-R}{d+r+R}} \quad \square$$

**注记 2.3.14** 上述方法显然适用于求两条一般曲线的公切线. 即: 给定两条曲线  $P(u)$  和  $Q(v)$ , 若  $PQ$  的连线是二者的公切线, 则  $P$  点处的切向量、 $Q$  点处的切向量、以及两点连线的向量  $\vec{PQ}$  三者平行.

根据公切线的方程, 不难求出两条外公切线的交点  $T_1$  和两条内公切线的交点  $T_2$ :

$$T_1 = \frac{dr}{r-R}, \quad T_2 = \frac{dr}{r+R}$$

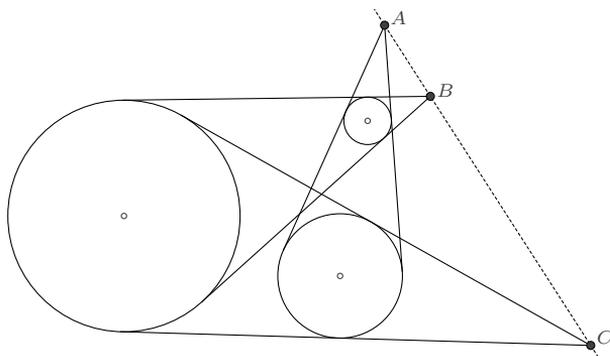
从而易得

$$\frac{T_1 - O_1}{T_1 - O_2} = \frac{r}{R}, \quad \frac{T_2 - O_1}{T_2 - O_2} = -\frac{r}{R}$$

利用这个结论, 又容易证明著名的关于三圆外公切线交点的蒙日定理:

**例 2.3.15 (蒙日定理)** 对于平面上的任意三个圆, 其中没有一个圆包含于另外的圆, 则

每两个圆的外公切线的交点在一直线上.



**证明** 如果其中有两个圆的半径相同, 则它们的公切线是平行的, 其交点为无穷远, 此时命题自然是成立的. 若三圆半径均不相同, 设  $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$ 、 $\odot O_3$  的半径分别为  $r_1$ 、 $r_2$ 、 $r_3$ ,  $A$  是  $\odot O_2$  与  $\odot O_3$  外公切线的交点,  $B$  是  $\odot O_3$  与  $\odot O_1$  外公切线的交点,  $C$  是  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  外公切线的交点, 则

$$\frac{A - O_2}{A - O_3} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{B - O_3}{B - O_1} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{C - O_1}{C - O_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

即有

$$A = \frac{r_2 O_3 - r_3 O_2}{r_2 - r_3}, \quad B = \frac{r_3 O_1 - r_1 O_3}{r_3 - r_1}, \quad C = \frac{r_1 O_2 - r_2 O_1}{r_1 - r_2}$$

于是

$$\frac{A - B}{B - C} = \frac{(r_1 - r_2)r_3}{r_1(r_2 - r_3)} \in \mathbb{R}$$

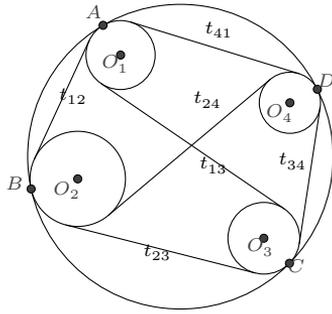
从而知  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点共线. □

根据两圆公切线切点的表示, 又容易得知外公切线段和外公切线段的长度, 它们分别是:

$$l_{\text{外}} = \sqrt{d^2 - (R - r)^2}, \quad l_{\text{内}} = \sqrt{d^2 - (R + r)^2}$$

关于公切线长度, 也有一个著名的命题, 它可看做是托勒密定理的一个推广.

**例 2.3.16 (开世定理)** 四个小圆  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  内切于大圆. 记圆  $O_i$ 、 $O_j$  的外公切线的长度设为  $t_{ij}$ , 则  $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24}$ .



**证明** 设四个小圆与圆  $O$  的切点分别为  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ , 同托勒密定理证明的前半部分一致, 我们设

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-ia} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1+is}{1-id} \vec{BC}$$

$A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四点在圆上逆时针排列要求  $s+d > 0, a > d$ .

大圆的圆心和半径分别为

$$\vec{BO} = \frac{1+is}{2} \vec{BC}, \quad R = \frac{\sqrt{1+s^2}}{2} BC$$

四个小圆的圆心分别在  $OA$ 、 $OB$ 、 $OC$ 、 $OD$  的连线上, 因此可设:

$$\vec{BO}_1 = \lambda_1 \vec{BO} + (1-\lambda_1) \vec{BA} = \left( \lambda_1 \frac{1}{2} (1+is) + (1-\lambda_1) \frac{1+is}{1-ia} \right) \vec{BC}$$

$$\vec{BO}_2 = \lambda_2 \vec{BO} = \lambda_2 \frac{1}{2} (1+is) \vec{BC}$$

$$\vec{BO}_3 = \lambda_3 \vec{BO} + (1-\lambda_3) \vec{BC} = \left( \lambda_3 \frac{1}{2} (1+is) + (1-\lambda_3) \right) \vec{BC}$$

$$\vec{BO}_4 = \lambda_4 \vec{BO} + (1-\lambda_4) \vec{BD} = \left( \lambda_4 \frac{1}{2} (1+is) + (1-\lambda_4) \frac{1+is}{1-id} \right) \vec{BC}$$

其中  $0 < \lambda_k < 1, (k=1, 2, 3, 4)$ , 各圆的半径

$$R_k = \lambda_k R = \frac{\lambda_k}{2} \sqrt{1+s^2} BC, \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

根据外公切线长度的表示:  $t_{kj} = \sqrt{O_k O_j^2 - (R_k - R_j)^2}$ , 计算得到:

$$t_{12} = \sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{1+a^2}} BC$$

$$t_{23} = \sqrt{(1-\lambda_2)(1-\lambda_3)} BC$$

$$t_{34} = (s+d) \sqrt{\frac{(1-\lambda_3)(1-\lambda_4)}{1+d^2}} BC$$

$$t_{41} = (a-d)\sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_4)(1-\lambda_1)}{(1+a^2)(1+d^2)}}BC$$

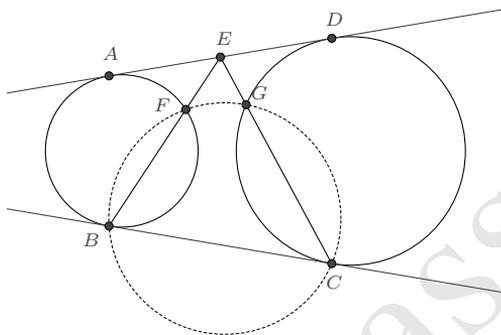
$$t_{13} = (s+a)\sqrt{\frac{(1-\lambda_1)(1-\lambda_3)}{1+a^2}}BC$$

$$t_{24} = \sqrt{\frac{(1+s^2)(1-\lambda_2)(1-\lambda_4)}{1+d^2}}BC$$

由此即知:  $t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24}$ . □

对于许多涉及两圆公切线的命题, 若以公切线段作为基向量, 并利用相切于直线的圆的表示 (2.3.1), 则可极大地简化计算.

**例 2.3.17 (图说几何 6.9.10)** 如图, 给定两个相离的圆, 线段  $AD$ 、 $BC$  是它们的两条外公切线,  $E$  是线段  $AD$  的中点, 连接  $BE$ 、 $CE$ , 它们分别与圆交于点  $F$ 、 $G$ , 则  $F$ 、 $G$ 、 $B$ 、 $C$  四点共圆.



**证明** 我们以一条外公切线的向量  $\vec{BC}$  为基向量, 根据 (2.3.1), 左边圆上的任意点  $P$  可表示为

$$\vec{BP} = \frac{ip}{1-iu} \vec{BC}$$

右边圆上的任意点  $Q$  可表示为

$$\vec{BQ} = \left(1 + \frac{iq}{1-iv}\right) \vec{BC}$$

若  $PQ$  是两圆的公切线, 根据切点处的切向量方向一致, 且与切点连线的方向相同的条件, 将得到两个方程

$$\begin{cases} (u-v)(1+uv) = 0 \\ p-q+2u+qu^2-2quv+pv^2+2uv^2 = 0 \end{cases}$$

由此即知  $u = v = \frac{q-p}{2}$  是另一条外公切线  $AD$  所对应的解.

$$\vec{BA} = \frac{2p}{p-q-2i} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{2+ip+iq}{2+ip-iq} \vec{BC}$$

进而计算得

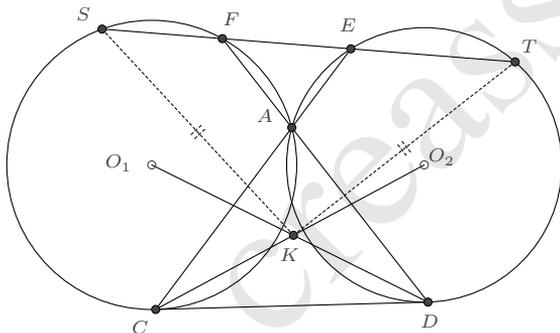
$$\begin{cases} \vec{BE} = \frac{2+3ip+iq}{2(2+ip-iq)} \vec{BC} \\ \vec{BF} = \frac{4p(p+q)}{(2+ip-iq)(2-3ip-iq)} \vec{BC} \\ \vec{BG} = \frac{4-p^2-6pq-q^2+4ip+4iq}{(2+ip-iq)(2+ip+3iq)} \vec{BC} \end{cases}$$

四点的交比

$$\frac{B-C}{B-F} \frac{G-F}{G-C} = -\frac{(4+p^2-2pq+q^2)^2}{16pq(p+q)^2} \in \mathbb{R}$$

故  $F, G, B, C$  共圆. □

**例 2.3.18** 如图,  $A$  是  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  的一个交点,  $CD$  为两圆的一条外公切线, 直线  $CA$  交  $\odot O_2$  于另一点  $E$ , 直线  $DA$  交  $\odot O_1$  于另一点  $F$ ,  $E, F$  的连线又分别交圆  $O_1, O_2$  于点  $S$  和  $T$ . 若  $K$  是  $O_1D$  与  $O_2C$  的交点, 则有  $KT = KS$ .



**证明** 图中虽然画出了两圆的两个交点, 但事实上当两圆相切时结论依旧成立. 因此我们并不考虑以两圆的交点弦为基向量的设法, 而以公切线  $\vec{CD}$  为基向量, 又设两圆的交点  $A$  有表示  $\vec{CA} = (p+iq)\vec{CD}$ . 根据 (2.3.1), 可求得两圆的表示分别为

$$\begin{cases} \odot O_1: \vec{CP} = \frac{is_1}{1-iu} \vec{CD} = \frac{i(p^2+q^2)}{q(1-iu)} \vec{CD} \\ \odot O_2: \vec{CP} = \left(1 + \frac{is_2}{1-iu}\right) \vec{CD} = \left(1 + \frac{i(1-2p+p^2+q^2)}{q(1-iu)}\right) \vec{CD} \end{cases}$$

则两圆圆心的表示是:

$$\vec{CO}_1 = \frac{i(p^2 + q^2)}{2q} \vec{CD}, \quad \vec{CO}_2 = \left(1 + \frac{1 - 2p + p^2 + q^2}{2q} i\right) \vec{CD}$$

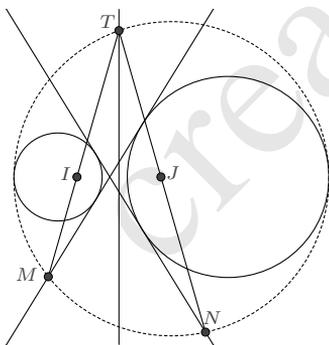
根据共线关系, 不难求出其余点的表示

$$\begin{cases} \vec{CE} = \frac{1}{p - iq} \vec{CD} \\ \vec{CF} = \frac{p - iq}{-1 + p - iq} \vec{CD} \\ \vec{CS} = \frac{(p + iq)(2p - p^2 - q^2)}{(p - iq)(1 - p + p^2 - q^2 - iq + 2ipq)} \vec{CD} \\ \vec{CT} = \frac{p - 3p^2 + 2p^3 - q^2 + 2pq^2 - iq - 2ipq + 2ip^2q + 2iq^3}{(-1 + p - iq)(1 - p + p^2 - q^2 - iq + 2ipq)} \vec{CD} \\ \vec{CK} = \frac{(p^2 + q^2)(2q + i - 2ip + ip^2 + iq^2)}{2q(1 - 2p + 2p^2 + 2q^2)} \vec{CD} \end{cases}$$

进而计算即知  $KS = KT$ . □

也可以考虑两圆的交点 (或虚交点) 为基准点的表示法, 对于诸多公切线问题也是方便的.

**例 2.3.19** 设  $I, J$  是两个相离圆的虚交点,  $T$  是给定两圆根轴上的任意一点,  $TI$  与一条内公切线交点为  $M$ ,  $TJ$  与另一条内公切线交点为  $N$ , 则经过  $T, M, N$  三点的圆必同时两圆相切.



**证明** 根据 (2.2.5), 两圆的表示可分别设为:

$$\vec{IP} = \frac{(1+p)(1+iu)}{2(p+iu)} \vec{IJ}, \quad \vec{IQ} = \frac{(1+q)(1+iv)}{2(q+iv)} \vec{IJ}$$

因两圆存在内公切线, 故二者分别位于根轴的两侧, 不妨设  $p = -a^2, q = b^2$ , 其中  $\{a, b\} \in (0, 1)$ .

若  $PQ$  是两圆的内公切线, 则由  $P$  点处的切向量、 $Q$  点处的切向量、 $PQ$  的连线这三者平行可得

$$u = \pm \frac{a}{b}, \quad v = -\frac{b^2 u}{a^2} = \mp \frac{b}{a}$$

于是一条内公切线在两圆上的切点  $A$ 、 $B$  分别是

$$\vec{IA} = \frac{(1-a^2)(a+ib)}{2a(1-iab)} \vec{IJ}, \quad \vec{IB} = \frac{(a+ib)(1+b^2)}{2b(i+ab)} \vec{IJ}$$

另一条内公切线在两圆上的切点  $C$ 、 $D$  分别是

$$\vec{IC} = \frac{(1-a^2)(a-ib)}{2a(1+iab)} \vec{IJ}, \quad \vec{ID} = \frac{(a-ib)(1+b^2)}{2b(-i+ab)} \vec{IJ}$$

两圆的根轴即是  $IJ$  的中垂线, 因此又可设  $T$  的表示为:

$$\vec{IT} = \left(\frac{1}{2} + it\right) \vec{IJ}$$

若  $M$  是  $TI$  与  $CD$  的交点,  $N$  是  $TJ$  与  $AB$  的交点, 容易求出:

$$\vec{IM} = \frac{(1-a^2)(1+b^2)(1+2it)}{2(1-a^2b^2-4abt)} \vec{IJ}$$

$$\vec{IN} = \frac{(1-a^2+b^2-a^2b^2-8abt) + 2i(1+a^2)(1-b^2)t}{2(1-a^2b^2-4abt)} \vec{IJ}$$

若圆一上的点  $P$  也在  $TMN$  外接圆上, 则由

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-M}{P-N} \frac{T-N}{T-M}\right) = 0 \Rightarrow u = \frac{-1+2abt}{ab+2t}$$

是唯一的解, 也即圆一与  $TMN$  的外接圆相切. 又由

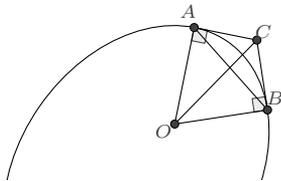
$$\operatorname{Im}\left(\frac{Q-M}{Q-N} \frac{T-N}{T-M}\right) = 0 \Rightarrow v = \frac{-1+2abt}{ab+2t}$$

也是唯一的解, 即圆二也与  $TMN$  的外接圆相切.

其余情形类似可证. □

### 2.3.5 曲率圆

我们先考察任意平面曲线上的两点的法线<sup>①</sup>交点.



如图, 设曲线的参数表示是  $z(t)$ , 在  $A$  点处的参数值是  $t_1$ , 在  $B$  点处的参数值是  $t_2$ .  $A$  点处法线上的点  $O$  可表示为

$$O = z(t_1) + \lambda iz'(t_1)$$

它与  $B$  点的连线垂直于  $B$  点的切向量, 即有

$$\operatorname{Re}((z(t_1) + \lambda iz'(t_1) - z(t_2)) \otimes z'(t_2)) = 0$$

解出  $\lambda$  即得交点  $O$  的表示:

$$O = z(t_1) + i \frac{\operatorname{Re}((z(t_1) - z(t_2)) \otimes z'(t_2))}{\operatorname{Im}(z'(t_1) \otimes z'(t_2))} z'(t_1)$$

若  $B$  点无限接近于  $A$ , 即令  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , 则  $z'(t_2) \approx z'(t_1) + z''(t_1)\Delta t$ , 于是

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} O = z(t_1) + i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(-z'(t_1)\Delta t \otimes (z'(t_1) + z''(t_1)\Delta t))}{\operatorname{Im}(z'(t_1) \otimes (z'(t_1) + z''(t_1)\Delta t))} z'(t_1)$$

利用  $\operatorname{Re}(z'(t_1) \otimes z'(t_1)) = |z'(t_1)|^2$  和  $\operatorname{Im}(z'(t_1) \otimes z'(t_1)) = 0$  化简上式, 即得

$$O = z(t_1) - i \frac{|z'(t_1)|^2}{\operatorname{Im}(z'(t_1) \otimes z''(t_1))} z'(t_1)$$

$OA$  之长称为曲率半径  $R$ ,  $R$  的倒数是曲率  $K$ , 以  $O$  为圆心、 $R$  为半径的圆称为曲率圆.

**命题 2.3.20** 复平面上的曲线  $z(t)$  的曲率为

$$K = \frac{|\operatorname{Im}(z'(t) \otimes z''(t))|}{|z'(t)|^3} \quad (2.3.3)$$

曲率圆的一个参数表示是

$$P(u) = z(t) + \frac{|z'(t)|^2}{\operatorname{Im}(z'(t) \otimes z''(t))} z'(t) \frac{2}{i + u} \quad (2.3.4)$$

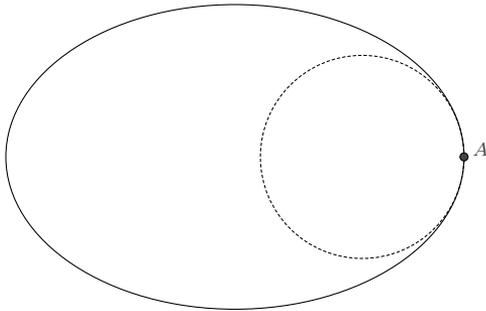
<sup>①</sup>法线是垂直于切线的直线.

**例 2.3.21** 曲线  $z(t) = 3 \cos t + 2i \sin t$  在  $t = 0$  处的曲率圆为

$$P(u) = 3 - \frac{8i}{3(i+u)}$$

若转化为直角坐标方程则是

$$3 - 10x + 3x^2 + 3y^2 = 0$$



## 2.4 面积计算

若  $L$  是平面上的一条分段光滑的闭曲线, 则曲线所围面积为如下沿  $L$  逆时针的积分:

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_L xdy - ydx$$

这个公式是直角坐标系下的, 我们将其改造一下, 使之适用于向量的表示. 注意到积分微元  $x dy - y dx = -\operatorname{Im}((x + yi) \otimes (dx + idy))$ , 即知

**命题 2.4.1 (格林面积公式)** 若  $L$  是平面上的一条分段光滑的闭曲线,  $A$  是平面上的任意一个定点, 则曲线所围面积是曲线上的动点  $P$  沿  $L$  逆时针绕行一周的积分:

$$S = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_L \vec{AP} \otimes d\vec{AP} \quad (2.4.1)$$

它的几何是明确的, 为微元三角形的有向面积之和. 例如, 对于

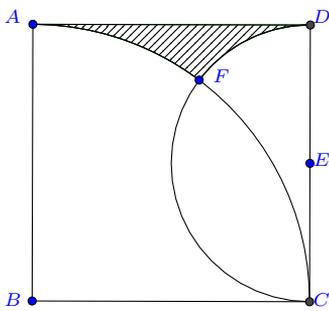
$$\vec{AP} = \frac{2+3u}{1-iu} \vec{AB}$$

所表示的圆, 当  $u$  从  $-\infty$  逐渐变化至  $\infty$  时,  $P$  点绕圆逆时针行进一周, 于是圆的面积

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \oint_L \vec{AP} \otimes d\vec{AP} = -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2+3u}{1-iu} \otimes \frac{(3+2i)}{(1-iu)^2} du \right) \cdot AB^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2+3u)^2}{(1+u^2)^2} du \cdot AB^2 = \frac{13\pi}{4} AB^2
 \end{aligned}$$

根据格林面积公式, 我们既可以利用曲线的参数表示做直接的计算, 也可以利用向量的加法, 将某些复杂的图形分解为简单部分有向面积的累加.

**例 2.4.2** 如图, 已知  $ABCD$  是边长为 1 的正方形,  $E$  是  $CD$  边的中点, 以  $B$  为圆心、 $BA$  为半径的圆交以  $E$  为圆心、 $ED$  为半径的圆于  $F$ , 求阴影部分面积.



**解 (一)** 线段  $AD$  的表示为:

$$P(u) = u + i; (0 < u < 1)$$

圆弧  $AF$  的表示为:

$$P(u) = \frac{1+iu}{1-iu}; \left(\frac{1}{2} < u < 1\right)$$

圆弧  $DF$  的表示为:

$$P(u) = 1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+iu}{1-iu}; (1 < u < 3)$$

根据格林面积公式做直接计算则知阴影部分的面积为:

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_1^0 (u+i) \otimes d(u+i) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{1+iu}{1-iu} \otimes d \frac{1+iu}{1-iu} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_3^1 \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+iu}{1-iu}\right) \otimes d \left(1 + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \frac{1+iu}{1-iu}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \arctan \frac{4}{3} \right) \quad \square$$

**解 (二)** 阴影部分的面积可分为三项进行计算:

$$S = -\frac{1}{2} \int_{DA} \vec{BP} \otimes d\vec{BP} - \frac{1}{2} \int_{AF} \vec{BP} \otimes d\vec{BP} - \frac{1}{2} \int_{FD} \vec{BP} \otimes d\vec{BP}$$

其中第一项实际上就是  $\triangle BDA$  的面积, 而第二项是扇形  $BFA$  面积的负值, 对于第三项, 利用向量加法  $\vec{BP} = \vec{BE} + \vec{EP}$ , 以及  $\vec{BE}$  的微分等于 0, 知

$$-\frac{1}{2} \int_{FD} \text{Im}(\vec{BP} \otimes d\vec{BP}) = -\frac{1}{2} \int_{FD} \text{Im}(\vec{BE} \otimes d\vec{EP}) - \frac{1}{2} \int_{FD} \text{Im}(\vec{EP} \otimes d\vec{EP})$$

其中右方的第一项, 因  $\vec{BE}$  是常向量, 所以

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{FD} \text{Im}(\vec{BE} \otimes d\vec{EP}) &= -\frac{1}{2} \text{Im}(\vec{BE} \otimes \int_{FD} d\vec{EP}) \\ &= -\frac{1}{2} \text{Im}(\vec{BE} \otimes (\vec{ED} - \vec{EF})) = S_{\triangle BED} - S_{\triangle BEF} \end{aligned}$$

而第二项即为扇形  $EDF$  面积的负值. 合并以上结果, 我们就得到了阴影部分面积的一个计算式:

$$S = S_{\triangle BDA} + S_{\triangle BED} - S_{\triangle BEF} - S_{\widehat{BFA}} - S_{\widehat{EDF}}$$

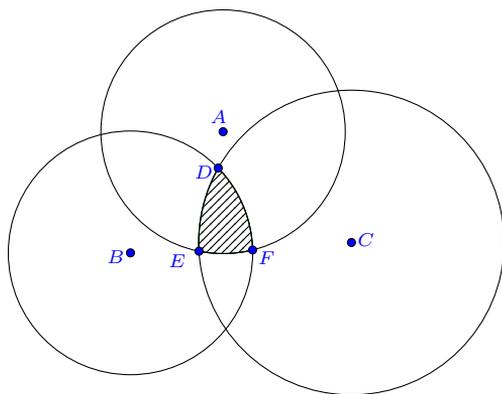
不难根据线段长度计算出, 扇形  $BFA$  和扇形  $EDF$  的圆心角弧度分别为  $\arctan \frac{3}{4}$  和  $\arctan \frac{4}{3}$ , 于是各部分的面积为

$$\begin{aligned} S_{\triangle BDA} &= \frac{1}{2} BC^2, \quad S_{\triangle BED} = \frac{1}{4} BC^2, \quad S_{\triangle BEF} = \frac{1}{4} BC^2, \\ S_{\widehat{BFA}} &= \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4} BC^2, \quad S_{\widehat{EDF}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{4}{3} \left( \frac{BC}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

阴影部分的面积则是

$$S = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{4} - \frac{1}{8} \arctan \frac{4}{3} \right) BC^2 \quad \square$$

**例 2.4.3 (三圆的相交面积)** 类似地, 我们可以得到三圆相交部分面积的计算式.



解 沿相交部分的三段弧线积分:

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\overline{DE}} \operatorname{Im}(\vec{AP} \otimes d\vec{AP}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{EF}} \operatorname{Im}(\vec{AP} \otimes d\vec{AP}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{FD}} \operatorname{Im}(\vec{AP} \otimes d\vec{AP})$$

第一项, 利用  $\vec{AP} = \vec{AC} + \vec{CP}$ , 有

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{\overline{DE}} \operatorname{Im}(\vec{AP} \otimes d\vec{AP}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\overline{DE}} \operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes d\vec{CP}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{DE}} \operatorname{Im}(\vec{CP} \otimes d\vec{CP}) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{CE}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{CD}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{DE}} \operatorname{Im}(\vec{CP} \otimes d\vec{CP}) \end{aligned}$$

第三项, 利用  $\vec{AP} = \vec{AB} + \vec{BP}$ , 又有

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{\overline{FD}} \operatorname{Im}(\vec{AP} \otimes d\vec{AP}) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\overline{FD}} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes d\vec{BP}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{FD}} \operatorname{Im}(\vec{BP} \otimes d\vec{BP}) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{BD}) + \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{BF}) - \frac{1}{2} \int_{\overline{FD}} \operatorname{Im}(\vec{BP} \otimes d\vec{BP}) \end{aligned}$$

合并以上式子, 并利用

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AC} \otimes \vec{CD}) - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{BD}) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{BC} \otimes \vec{BD}) - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC})$$

即得到三圆相交部分面积的一个表示:

$$S = S_{\widehat{AEF}} + S_{\widehat{BFD}} + S_{\widehat{CDE}} + S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABF} - S_{\triangle BCD} - S_{\triangle CAE} \quad \square$$

## 2.5 根式有理化

通过前面几节的内容, 容易看到, 在适当的有理表示之下, 多数命题可以获得一个简短的证明, 这是因为有理代数式的计算是容易的. 但是, 也有部分命题 (例如2.3.3), 证明过程中出现了根式. 是否可以再做代换, 以使得根式有理化呢?

通常来说, 初等平面几何计算涉及的绝大部分根式, 都是一次或二次的, 即  $f(x, \sqrt{ax+b})$  和  $f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$  两种类型 (这里  $f$  为关于  $x, y$  的某个有理函数.), 我们的目的是通过适当的代换  $x = g(t)$  (其中  $g$  是有理函数), 使得  $f$  是关于  $t$  的有理函数.

第一种情形是容易处理的, 令  $ax+b = t^2$ , 则  $f(x, \sqrt{ax+b}) = f(\frac{t^2-b}{a}, \pm t)$  是关于  $t$  的有理函数. 因  $t$  的取值范围尚未被限定, 所以正负号的选取事实上可以任意, 一般来说简单地取正号即可<sup>①</sup>, 即  $f(x, \sqrt{ax+b}) = f(\frac{t^2-b}{a}, t)$ .

第二种情形要麻烦一些, 欧拉曾详细探讨了这个问题, 得到如下几种代换:

**欧拉第一代换** 设  $a > 0$ , 令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{ax} + t \quad (2.5.1)$$

则可使得二次根式有理化表示为:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b-2\sqrt{at}} + t$$

**欧拉第二代换** 设  $c > 0$ , 令

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} \quad (2.5.2)$$

则可使得二次根式有理化表示为:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{t(b-2\sqrt{ct})}{t^2-a} + \sqrt{c}$$

**欧拉第三代换** 设  $ax^2+bx+c = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ , 其中  $\lambda_1, \lambda_2$  为实根且  $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ , 令

$$\sqrt{\frac{a(x-\lambda_1)}{(x-\lambda_2)}} = t \quad (2.5.3)$$

<sup>①</sup>后文中, 除非涉及到值域的讨论, 否则我们一般不再阐述变量替换后正负号的选取问题.

则可使得二次根式有理化表示为:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{at(\lambda_1 - \lambda_2)}{a - t^2}$$

事实上, 这些代换都可以基于对曲线  $y^2 = ax^2 + bx + c$  上有理点的考察而得: 设  $(x_0, y_0)$  是曲线上的一个有理点, 即

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c$$

若考虑代换  $y = y_0 + t(x - x_0)$ , 将其代入原曲线方程, 得到

$$(y_0 + t(x - x_0))^2 = ax^2 + bx + c$$

它与前面的式子相减, 将得到关于  $x$  的一次方程, 从而解出

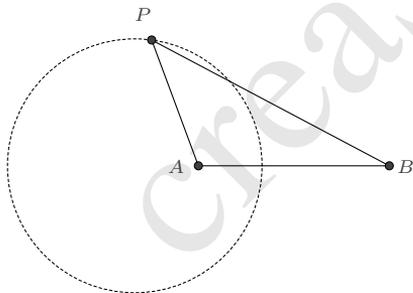
$$x = \frac{x_0(t^2 + a) - 2y_0t + b}{t^2 - a}$$

进而得到

$$y = \frac{-y_0(t^2 + a) + 2ax_0t + bt}{a - t^2}$$

也就实现了根式的有理化表示.

**例 2.5.1 (阿氏圆)** 平面上与两定点  $A$ 、 $B$  的距离之比为定值的所有点  $P$  构成一个圆, 称为阿氏圆.



**解** 先设点  $P$  为一般形式的表示:  $\vec{AP} = (u + iv)\vec{AB}$ , 根据  $\frac{AP}{BP} = k$  得

$$-k^2 + 2k^2u + u^2 - k^2u^2 + v^2 - k^2v^2 = 0$$

左方关于  $u$  的判别式是

$$\Delta = 4(k + v - k^2v)(k - v + k^2v)$$

这是因式可分解的情形, 因而考虑作欧拉第三代换, 令

$$\frac{k+v-k^2v}{k-v+k^2v} = t^2$$

即

$$v = \frac{k(1-t^2)}{(k^2-1)(1+t^2)}$$

将其代入前面关于  $u$ 、 $v$  的二次方程, 得到

$$(-k^2-2kt-k^2t^2-u+k^2u-t^2u+k^2t^2u)(-k^2+2kt-k^2t^2-u+k^2u-t^2u+k^2t^2u) = 0$$

因为我们尚未限定  $t$  的取值范围, 所以任意选取其中一解即可:

$$u = \frac{k(k-2t+kt^2)}{(k^2-1)(1+t^2)}$$

于是就得到了阿氏圆的一个参数表示:

$$\vec{AP} = \frac{k(-1+ik-it+kt)}{(k^2-1)(i+t)} \vec{AB}$$

利用前面求圆心和半径的方法, 若令  $\frac{-i+t}{i+t} = z$ , 则

$$\vec{AP} = \left( \frac{k^2}{k^2-1} - \frac{k}{k^2-1} iz \right) \vec{AB}$$

这清楚地表明了  $P$  的轨迹是以  $A + \frac{k^2}{k^2-1} \vec{AB} = \frac{A-k^2B}{1-k^2}$  为圆心,  $|\frac{k}{k^2-1}|AB$  为半径的圆.  $\square$

## 2.6 四阶有理表示

迄今为止, 我们还没有对圆上两点的距离进行讨论. 前面虽然给出了圆的二阶有理表示

$$z = \frac{(a+bi) + (c+di)u}{1-iu}$$

但若用它来计算距离, 则距离的表示将包含根式

$$|z(u) - z(v)| = \sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2} \frac{|u-v|}{\sqrt{1+u^2}\sqrt{1+v^2}}$$

对于给定的圆来说,  $\sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2}$  始终是一个常量, 可以忽略, 但  $\sqrt{1+u^2}$  和  $\sqrt{1+v^2}$  意味着许多计算均要涉及根式, 这是非常不便的.

容易发现, 如果做代换

$$u \rightarrow \frac{2p}{1-p^2}, v \rightarrow \frac{2q}{1-q^2}$$

那么距离即是关于  $p, q$  的有理表示了:

$$|z(p) - z(q)| = 2\sqrt{(a+d)^2 + (b-c)^2} \frac{|(p-q)(1+pq)|}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

对于圆的一般二阶有理表示 (2.1.3), 在  $u \rightarrow \frac{2u}{1-u^2}$  的代换下, 即有

**命题 2.6.1** 复平面上的任意一个圆, 均有如下形式的四阶有理参数表示:

$$z = \frac{(a+bi)(1-u^2) + 2(c+di)u}{(1-iu)^2} \quad (2.6.1)$$

其中  $a, b, c, d$  是常实数. 这个表示所对应圆的直角坐标方程是:

$$\left(x - \frac{a-d}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 \quad (2.6.2)$$

为使得  $z$  关于  $u$  是单值的, 通常我们限定  $u > 0$ .

特别地, 取  $a = 1, b = 0, c = \frac{1-s^2}{2s}, d = 0$ , 即得到

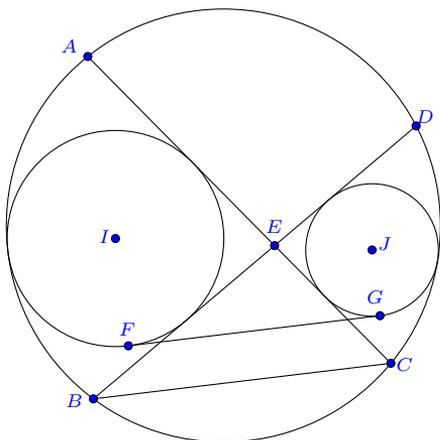
**推论 2.6.2** 如果平面上的一个圆经过  $B, C$  两点, 则圆上的任意点  $P$  均可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2} \vec{BC} \quad (2.6.3)$$

其中参数  $s > 0, u > 0$ .

后文我们将说明参数的几何意义, 这里先看它的一些应用.

**例 2.6.3** 两个不相交的圆  $I, J$  内切于圆  $O$ , 这两圆的内公切线交于点  $E$ , 并与圆  $O$  分别交于  $A, B, C, D$  四点. 证明: 圆  $I, J$  的一条外公切线  $FG$  平行于  $BC$ .



**证明** 考虑以  $BC$  为基向量, 根据 (2.6.3), 设圆上另外两点  $A$ 、 $D$  的表示为:

$$\vec{BA} = \frac{(s+a)(1-sa)}{s(1-ia)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{(s+d)(1-sd)}{s(1-id)^2} \vec{BC}$$

其中  $s > 0, a > 0, d > 0$ . 另外, 根据图形所示, 点  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  在圆上按逆时针顺序排列, 因而又要求

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-B}{C-B}\right) > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{B-C}{D-C}\right) > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{C-D}{A-D}\right) > 0, \quad \operatorname{Im}\left(\frac{D-A}{B-A}\right) > 0$$

约化后, 得各参量的取值范围的完全限定为

$$s > 0, \quad a > d > 0, \quad 1 - sa > 0, \quad 1 - sd > 0$$

直线  $AC$  与  $BD$  的交点  $E$  的表示是

$$\vec{BE} = \frac{(s+a)(1-sa)(1+id)^2}{(1-sa+sd+ad)(s+a-d+sad)} \vec{BC}$$

圆  $I$ 、 $J$  是相切于  $\angle AEB$  和  $\angle CED$  的两圆, 我们先计算这两角 (记为  $\theta$ ) 的正切值, 由

$$\frac{B-E}{A-E} = \frac{(i+a)^2(i-d)^2s}{(a-d)(1+ad)(i-s)^2}$$

此式与其共轭相除, 即得

$$e^{i2\theta} = \frac{(i+a)^2(i-d)^2(i+s)^2}{(i-a)^2(i+d)^2(i-s)^2}$$

根据  $\theta$  的范围限定  $(0, \frac{\pi}{2})$ , 以及各参量的范围限定, 可求出  $\theta$  的半正切值

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} i = \frac{1 + ad - as + ds}{a - d + s + ads}$$

根据 (2.3.2), 设这两个圆的表示为

$$\vec{EP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{\theta}{2} \right) \vec{EC}$$

它们与圆  $O$  相切, 由此解出

$$\lambda_1 = \frac{(a-d)(-1+as)}{(1+a^2)d}, \quad \lambda_2 = \frac{(a-d)(a+s)}{1+a^2}$$

其中  $\lambda_1$  对应的是圆  $I$ :

$$\vec{EP} = \frac{(a-d)(1-as)(2+2ad-2as+2ds-au+du-su-adsu-ia+id-is-iads)}{(1+a^2)d(a-d+s+ads)(i+u)} \vec{EC}$$

$\lambda_2$  对应的是圆  $J$ :

$$\vec{EP} = \frac{(a-d)(a+s)(-2-2ad+2as-2ds+au-du+su+adsu+ia-id+is+iads)}{(1+a^2)(a-d+s+ads)(i+u)} \vec{EC}$$

它们的两条外公切线可有理地表示出来, 图中所示的切点  $F$  和  $G$  分别为

$$\begin{aligned} \vec{EF} &= \frac{(a-d)(1-is)(1-as)(a+d+s-ads+2iad+2ids)}{(1+ia)^2(1+is)d(a-d+s+ads)} \vec{EC} \\ \vec{EG} &= \frac{(a-d)(1-is)(a+s)(2i-2ias-a-d-s+ads)}{(1+ia)^2(1+is)(a-d+s+ads)} \vec{EC} \end{aligned}$$

它们转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\begin{aligned} \vec{BF} &= \frac{(as-1)(ad-d^2-as+ad^2s-s^2+ads^2-2iads-2ids^2)}{(a-d+s+ads)^2} \vec{BC} \\ \vec{BG} &= \frac{(a+s)(a-d+s-d^2s-ds^2+ad^2s^2+2ids-2iads^2)}{(a-d+s+ads)^2} \vec{BC} \end{aligned}$$

由此计算得

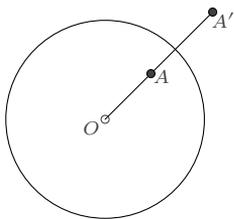
$$\vec{FG} = \frac{(a-d)(a+d+s-ads)(1+s^2)}{(a-d+s+ads)^2} \vec{BC}$$

即知  $FG \parallel BC$ . □

## 2.7 反演变换

给定一个几何图形,若我们对它的每个几何元素都做相同的变换,则所得到的新的几何图形仍将保留原几何图形的一些性质,从而可通过对新的几何图形的观察去断言原几何图形的一些性质.对于圆相关的某些平面几何命题而言,适当的反演变换可以将其转化为简单的图形而得以计算或证明.

**定义 2.7.1** 设在平面内给定一点  $O$  和常数  $k(k$  等于零),对于平面内任意一点  $A$ ,确定  $A'$ ,使  $A'$  为直线  $OA$  上一点,并且有向线段  $OA$  与  $OA'$  满足  $OA \cdot OA' = k$ ,我们称这种变换是以  $O$  为反演中心,以  $k$  为反演幂的反演变换,称  $A'$  为  $A$  关于  $O$  的反演点.



根据定义,容易导出  $A$  关于  $O$  的反演点  $A'$  的表示为:

$$\vec{OA}' = \frac{k}{|OA|^2} \vec{OA} \quad (2.7.1)$$

令  $r = \sqrt{|k|}$ ,则以  $O$  为圆心,  $r$  为半径的圆称为反演圆.特别地,如果点  $A$  位于反演圆上,则其反演点亦在反演圆上.

**命题 2.7.2** 在反演变换下:

- (1). 经过反演中心的直线保持不变;
- (2). 不经过反演中心的直线变为经过反演中心的圆;
- (3). 经过反演中心的圆变为不经过反演中心的直线;
- (4). 不经过反演中心的圆变为不经过反演中心的圆.

**证明**

(1). 若直线经过反演中心,因为直线上的点反演后的点仍在该直线上,且是一一映射的,所以它的反演图像仍是一条直线.

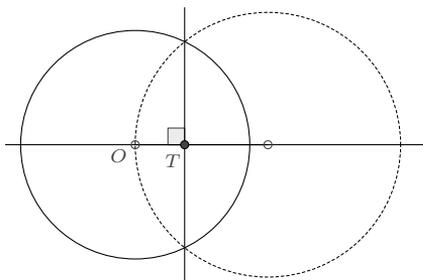
(2). 若直线不经过反演中心,设  $O$  在直线上的投影点为  $T$ ,则该直线上的任意点可表示为  $\vec{OA} = (1 + iu)\vec{OT}$ ,于是反演点  $A'$  的表示是

$$\vec{OA}' = \frac{k}{|OA|^2} \vec{OA} = \frac{k}{(1 - iu)|OT|^2} \vec{OT}$$

这显然是一个圆, 并且当  $u \rightarrow \infty$  时,  $A' = O$ , 即此圆经过反演中心. 若作代换  $\frac{1+iu}{1-iu} = z$ , (其中  $z$  为单位复数), 上式又可化为

$$\vec{OA}' = \frac{k}{2|OT|^2} \vec{OT} + \frac{k}{2|OT|^2} z \vec{OT}$$

表明其圆心位于直线  $OT$  上, 且半径为  $\frac{|k|}{2|OT|}$ .



(3). 若圆经过反演中心, 不妨设其圆心为  $S$ , 则圆上的任意点可表示为

$$\vec{OA} = \vec{OS} + \frac{1+iu}{1-iu} \vec{OS} = \frac{2}{1-iu} \vec{OS}$$

于是反演点  $A'$  的表示是

$$\vec{OA}' = \frac{k}{|OA|^2} \vec{OA} = \frac{k}{2|OS|^2} (1+iu) \vec{OS}$$

表明其反演图像是一条直线. 且该直线到反演中心的距离为

$$\min(|OA'|) = \frac{|k|}{2|OS|}$$

(4). 若圆不经过反演中心, 不妨设其圆心为  $S$ , 其半径为  $r|OS|$ , ( $r \neq 1$ ) 则圆上的任意点可表示为

$$\vec{OA} = \vec{OS} + r \frac{1+iu}{1-iu} \vec{OS} = \left(1 + r \frac{1+iu}{1-iu}\right) \vec{OS}$$

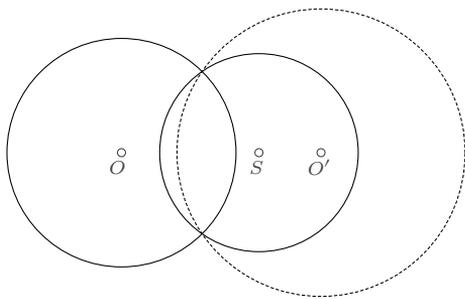
于是反演点  $A'$  的表示是

$$\vec{OA}' = \frac{k}{|OA|^2} \vec{OA} = \frac{k}{|OS|^2} \frac{(1+iu)}{(1+r+iu-iru)} \vec{OS}$$

若作代换  $\frac{1+r-iu+iru}{1+r+iu-iru} = z$ , (其中  $z$  为单位复数), 此式又可化为

$$\vec{OA}' = \frac{k}{|OS|^2(1-r^2)} \vec{OS} + \frac{kr}{|OS|^2(1-r^2)} z \vec{OS}$$

表明其圆心位于直线  $OS$  上, 且半径为  $\frac{|k|r}{|OS||1-r^2|}$ .



□

若将直线视为无穷大的圆, 则上述性质即是圆在反演变换下仍变为圆, 称为**保圆性**. 反演变换的另一个重要性质是保持相交曲线的角度不变, 称为**保角性**.

**命题 2.7.3** 在反演变换下, 两条相交曲线在交点处的交角大小不变, 方向相反.

**证明** 设平面上异于点  $O$  的一个定点为  $T$ , 并设两曲线有参数表示

$$\vec{OA} = z_1(u)\vec{OT}, \quad \vec{OB} = z_2(v)\vec{OT}$$

在交点处 (分别对应参数  $u_0, v_0$ ):  $z_1(u_0) = z_2(v_0)$ , 并且各自的一个切向量分别是

$$\mathbf{v}_A = z_1'(u_0)\vec{OT}, \quad \mathbf{v}_B = z_2'(v_0)\vec{OT}$$

因此交点处的夹角

$$\theta = \arg \frac{\mathbf{v}_A}{\mathbf{v}_B} = \arg \frac{z_1'(u_0)}{z_2'(v_0)}$$

另一方面, 两曲线对应的反演曲线分别有表示:

$$\vec{OP} = \frac{k}{|OA|^2} \vec{OA} = \frac{k}{|OT|^2} \frac{1}{\bar{z}_1(u)} \vec{OT}$$

$$\vec{OQ} = \frac{k}{|OB|^2} \vec{OB} = \frac{k}{|OT|^2} \frac{1}{\bar{z}_2(v)} \vec{OT}$$

显然, 二者仍在参数  $u = u_0$  和  $v = v_0$  时相交. 在交点处, 各自的一个切向量分别为

$$\mathbf{v}_P = -\frac{k}{|OT|^2} \frac{1}{(\bar{z}_1(u_0))^2} \bar{z}_1'(u_0) \vec{OT}$$

$$\mathbf{v}_Q = -\frac{k}{|OT|^2} \frac{1}{(\bar{z}_2(v_0))^2} \bar{z}_2'(v_0) \vec{OT}$$

于是交点处的夹角

$$\varphi = \arg \frac{v_P}{v_Q} = \arg \frac{\bar{z}_1'(u_0) (\bar{z}_2(v_0))^2}{\bar{z}_2'(v_0) (\bar{z}_1(u_0))^2} = \arg \frac{\bar{z}_1'(u_0)}{\bar{z}_2'(v_0)}$$

从而知

$$\theta + \varphi = \arg \frac{z_1'(u_0)}{z_2'(v_0)} + \arg \frac{\bar{z}_1'(u_0)}{\bar{z}_2'(v_0)} = \arg \frac{z_1'(u_0)\bar{z}_1'(u_0)}{z_2'(v_0)\bar{z}_2'(v_0)} = \arg \frac{|z_1'(u_0)|^2}{|z_2'(v_0)|^2} = 0$$

即二者反演后的曲线在交点处的交角大小相等而方向相反。  $\square$

将两个不同的圆变为同心圆是反演变换的一个重要应用。

**例 2.7.4** 平面上给定两个不相交的圆:  $x^2 + y^2 = r^2$  和  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$ , 试求一个反演变换, 使之变为同心圆。

**解** 通常我们所考虑的反演变换, 其反演中心位于两圆的圆心连线上, 因而反演变换可设为

$$A' = \lambda + \frac{k}{|A-\lambda|^2}(A-\lambda)$$

圆  $x^2 + y^2 = r^2$  的一个参数表示是:

$$A = r \frac{1+iu}{1-iu}$$

它的反演即为:

$$A' = \lambda - \frac{k(1-iu)}{\lambda(1-iu) - r(1+iu)}$$

作代换

$$\frac{\lambda(1+iu) - r(1-iu)}{\lambda(1-iu) - r(1+iu)} = z$$

其中  $z$  为单位复数, 则得

$$A' = \lambda \frac{k+r^2-\lambda^2}{r^2-\lambda^2} - \frac{kr}{r^2-\lambda^2} z$$

因此反演后的圆心是

$$O_1' = \lambda \frac{k+r^2-\lambda^2}{r^2-\lambda^2}$$

同理, 根据圆  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$  的一个参数表示

$$A = d + R \frac{1+iv}{1-iv}$$

可得其反演后的圆心表示为

$$O_2' = \frac{dk + d^2\lambda - k\lambda - R^2\lambda - 2d\lambda^2 + \lambda^3}{(d - R - \lambda)(d + R - \lambda)}$$

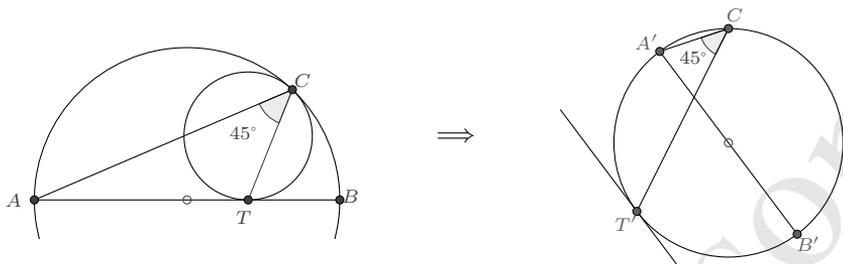
由  $O_1' = O_2'$  即可解出  $\lambda$  (即反演中心):

$$\lambda = \frac{d^2 + r^2 - R^2 \pm \sqrt{(d - r - R)(d + r - R)(d - r + R)(d + r + R)}}{2d}$$

这与我们前面所得两个相离圆的“虚交点”表示 (2.2.1) 是一致的. 也就是说, 以“虚交点”为反演中心, 可将两个相离的圆变换为同心圆.  $\square$

下面我们再来看一个具体的反演示例.

**例 2.7.5** 对于例题 (2.3.9), 若以  $C$  为反演中心,  $CA$  为反演半径, 则图像的反演如下:



反演关系说明:

- (1). 经过反演中心的直线  $CA$ 、 $CT$  反演后保持不变.
- (2). 在反演中心处相切的两圆, 反演后变为两条平行的直线.
- (3). 不经过反演中心的直线  $ATB$ , 反演后变为经过反演中心的圆  $A'T'B'$ .
- (4). 直线  $ATB$  与小圆相切. 根据保角性, 圆  $A'T'B'$  也应与小圆反演所得的直线在  $T$  处相切.
- (5).  $AB$  是圆的直径, 其对应的圆周角  $\angle ACB$  是直角. 反演后, 对应的  $\angle A'CB'$  仍是直角, 因而  $A'B'$  是圆的直径.
- (6).  $\angle ACT$  与对应反演角  $\angle A'CT'$  相等.

反演后的命题可表述为: 已知  $A'B'$  是圆的直径,  $T'$  在圆上且其切线平行于  $A'B'$ , 若  $C$  是圆周上的一点且不在  $\widehat{AT'}$  内, 则  $\angle A'CT' = 45^\circ$ .

这个示例表明, 适当的反演变换可使得命题变得简单, 但反演关系并不容易厘清, 需要仔细地观察. 若要熟练地掌握反演变换, 反复地练习和总结是必要的. 而如果我们利用图形的有理表示进行反演计算, 则图形的关系将变得了然.

平面上一般的几何变换可以用向量的方式表述如下:

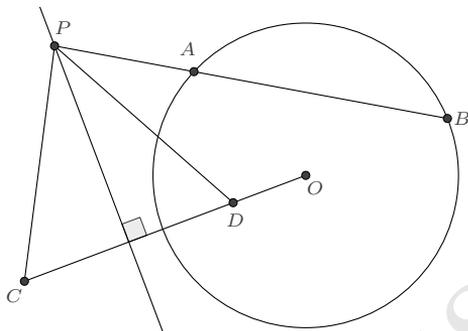
**定义 2.7.6** 设  $O, T$  是平面上的两个相异定点, 若平面上的任意点  $A$  有表示:  $\vec{OA} = z\vec{OT}$ , 则  $\vec{OA'} = f(z)\vec{OT}$  确定了一个从点  $A$  到点  $A'$  的平面几何变换.

对于反演变换, 若  $O$  为反演中心, 则  $f(z) = \frac{k}{z}$ . 如果令  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , 则是莫比乌斯变换, 它也具有保圆性和保角性.

## 2.8 结论延拓

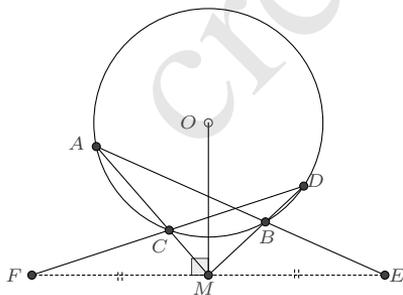
前面我们讨论直线与圆的交点时曾提到, 若直线与圆相离, 则它们存在一对“虚交点”(反演点), 可用于对某些涉及交点的命题进行延拓. 例如, 圆割线定理的一个推广是

**例 2.8.1** 如图, 点  $P$  位于圆  $O$  外,  $PAB$  是圆的割线, 若  $C, D$  是圆的一对反演点且关于经过  $P$  点的一条直线对称, 则  $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ .



又如, 蝴蝶定理 (坎迪定理 (2.2.12) 中  $M$  为弦  $PQ$  的中点情形.) 的一个圆外推广是:

**例 2.8.2** 若直线  $l$  位于圆外,  $M$  是圆心在  $l$  上的垂足点, 点  $A, B, C, D$  在圆上且直线  $AC, BD$  经过点  $M$ .  $AB, CD$  的连线又交直线  $l$  于  $E, F$ , 则  $ME = MF$ .



这里, 点  $M$  是直线  $l$  与圆的两个虚交点的中点.

再如, 三相交圆的公共弦共点命题 (2.2.13), 推广至一般情形即是著名的根心定理: 三个两两不同心的圆, 形成三条根轴, 这三条根轴或者完全重合, 或者两两平行, 或者两两相交 (此时三根轴必交于一点, 该点又称为三圆的根心).

从解析的角度来说, 命题的延拓并没有改变其蕴含的代数关系, 仅在于取值范围的变化. 当然, 并非所有涉及交点的命题都能做如此推广, 仔细地验证是不可或缺的.

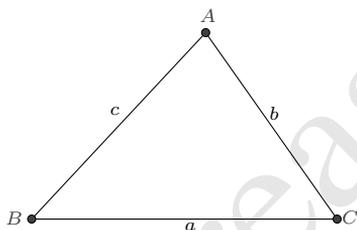
Creasson

# 第3章 三角形

三角形是平面几何最为基本的图形之一, 却是平面几何最为重要的部分. 经过两千多年来人们孜孜不倦的探寻, 有关的论述早已是卷帙浩繁. 本节我们从有理表示的思想出发, 逐渐展开对三角形性质的介绍.

## 3.1 三角形的表示

### 3.1.1 基本表示



三角形的表示有多种形式, 其中被广泛采用的是直角坐标设法:  $A = (x_1, y_1)$ 、 $B = (x_2, y_2)$ 、 $C = (x_3, y_3)$ , 这个表示可以描述平面上任意一个三角形的顶点. 对于多数问题, 固定三角形的两个顶点对结论不造成影响, 此时一般设  $A = (m, n)$ 、 $B = (0, 0)$ 、 $C = (1, 0)$ . 也有设为其他形式的, 例如取  $A = (p, q)$ 、 $B = (-1, 0)$ 、 $C = (1, 0)$ , 或将顶点都设定在单位圆上:  $A = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $B = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ 、 $C = (\cos \phi, \sin \phi)$ .

对于同一个三角形而言, 尽管它可以被设为以上种种不同的表示, 表示的内核却是一致的: 三角形内角的大小不变, 各边的长度比例也是固定的. 这种不变性, 利用复数可以更方便地体现出来:

$$\begin{aligned}(A - B) : (B - C) : (C - A) &= (m + ni) : (-1) : (1 - m - ni) \\ &= (p + 1 + qi) : (-2) : (1 - p - qi) = (e^{i\theta} - e^{i\varphi}) : (e^{i\varphi} - e^{i\phi}) : (e^{i\phi} - e^{i\theta})\end{aligned}$$

并且,这三个比值  $(A-B):(B-C):(C-A)$  并不是相互独立的,若已知其中的一个比值,则另外两个比值亦可知.也就是说,用一个复数表示的比值,能够完全地反映出这种不变性.在我们的体系中,将三角形的一边所在的向量视为另一边所在向量经由一个复数所表示的旋转缩放变换而得,恰好就是这种不变性的体现.

**命题 3.1.1**  $\triangle ABC$  的一个表示是

$$\vec{BA} = z \vec{BC} \quad (3.1.1)$$

若规定其为逆时针三角形<sup>①</sup>,则要求  $\text{Im}(z) > 0$ .

利用向量的加法和除法性质,我们容易将三角形的表示进行任意的转换.例如

$$\begin{aligned} \vec{CA} &= \vec{BA} - \vec{BC} = (z-1)\vec{BC} = (1-z)\vec{CB} \\ \vec{AC} &= \frac{C-A}{B-A} \vec{AB} = \frac{\vec{BC} - \vec{BA}}{\vec{BB} - \vec{BA}} \vec{AB} = \frac{1-z}{0-z} \vec{AB} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \vec{AB} \end{aligned}$$

一些特殊的三角形有更具体的形式:

**等腰三角形** 若  $AB = BC$ , 则  $\vec{BA} = e^{i\theta} \vec{BC}$ .

**等边三角形** 若  $AB = BC = CA$ , 则  $\vec{BA} = e^{i\frac{\pi}{3}} \vec{BC}$ . 利用向量的加法,容易改写此式为:

$$\vec{OA} + \omega \vec{OB} + \omega^2 \vec{OC} = 0 \quad (3.1.2)$$

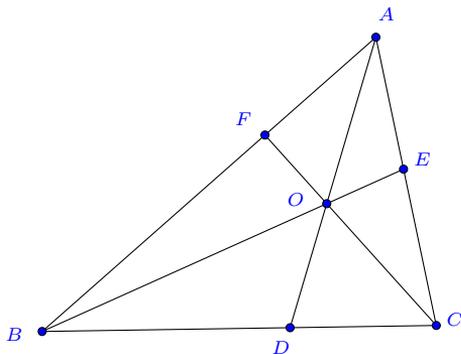
其中  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $O$  为任意一点,这也是等边三角形的常用判别式之一.

**直角三角形** 若  $\angle B = 90^\circ$ , 则  $\vec{BA} = \lambda i \vec{BC} (\lambda \in \mathbb{R})$ .

下面我们举一例来说明上述表示的具体应用.

**例 3.1.2 (Ceva 定理)** 在三角形  $ABC$  内任取一点  $O$ , 延长  $AO$ 、 $BO$ 、 $CO$  分别交对边于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 则  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$ .

<sup>①</sup>一般来说,我们总是这样规定,若非必要,后文中不再提及这一点.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BO} = w\vec{BC}$ . 又设  $BC$  边上的点  $D$  为  $\vec{BD} = \lambda\vec{BC}$ , 根据  $A, O, D$  三点共线, 知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{A-O}{A-D}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{z-w}{z-\lambda}\right) = 0$$

解出  $\lambda$ , 即知

$$\vec{BD} = \frac{-z\bar{w} + w\bar{z}}{w - z - \bar{w} + \bar{z}} \vec{BC}$$

同理, 容易导出

$$\vec{BE} = \frac{w(z - \bar{z})}{w - \bar{w} + z\bar{w} - w\bar{z}} \vec{BC}$$

$$\vec{BF} = \frac{z(w - \bar{w})}{z - \bar{z} + w\bar{z} - z\bar{w}} \vec{BC}$$

代入化简计算即可证明

$$\frac{D-B}{C-D} \cdot \frac{E-C}{A-E} \cdot \frac{F-A}{B-F} = 1 \quad \square$$

为方便后文的叙述, 我们先约定一下三角形的基本记号.

**约定 3.1.3** 对于一个三角形  $\triangle ABC$ , 在不引起歧义的情况下, 通常我们也以  $A, B, C$  表示其内顶角  $A = \angle CAB$ ,  $B = \angle ABC$ ,  $C = \angle BCA$ ; 以小写字母  $a, b, c$  表示其边:  $a = BC$ ,  $b = CA$ ,  $c = AB$ ; 以大写字母  $S$  表示三角形的面积.

**3.1.2 边角边表示** 对于三角形  $\triangle ABC$ , 可以用两边及其夹角来表示出向量的旋转缩放, 称为三角形的边角边表示. 逆时针方向向量的旋转缩放表示:

$$\vec{AC} = \frac{b}{c} e^{iA} \vec{AB}; \quad \vec{BA} = \frac{c}{a} e^{iB} \vec{BC}; \quad \vec{CB} = \frac{a}{b} e^{iC} \vec{CA} \quad (3.1.3)$$

顺时针向量的旋转缩放表示:

$$\vec{AB} = \frac{c}{b} e^{-iA} \vec{AC}; \quad \vec{BC} = \frac{a}{c} e^{-iB} \vec{BA}; \quad \vec{CA} = \frac{b}{a} e^{-iC} \vec{CB} \quad (3.1.4)$$

这些表示是相互等价的, 由此可以简单地证明正弦定理和余弦定理.

**例 3.1.4 (正弦定理)** 我们选择以下两式予以证明

$$\vec{AC} = \frac{b}{c} e^{iA} \vec{AB}; \quad \vec{BA} = \frac{c}{a} e^{iB} \vec{BC}$$

将  $\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}$  代入第一式, 则有

$$\vec{BC} = \left(1 - \frac{b}{c} e^{iA}\right) \vec{BA}$$

联合第二式, 即知

$$\frac{c}{a} e^{iB} \left(1 - \frac{b}{c} e^{iA}\right) = 1 \quad \dots(\star)$$

对此式两端取虚部

$$\frac{c}{a} \sin B - \frac{b}{a} \sin(A+B) = 0$$

于是得  $c \sin B = b \sin C$ . 再改写前式为

$$1 - \frac{b}{c} e^{iA} = \frac{a}{c} e^{-iB}$$

取虚部又得  $b \sin A = a \sin B$ . 合并结果, 即是正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (3.1.5)$$

**例 3.1.5 (余弦定理)** 若对前面  $(\star)$  式两端取模, 即有

$$\frac{c^2}{a^2} \left(1 - 2 \frac{b}{c} \cos A + \frac{b^2}{c^2}\right) = 1$$

于是

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (3.1.6)$$

改写(\*)式为

$$\frac{c}{a}e^{iB} - 1 = \frac{b}{a}e^{i(A+B)}$$

两端取模, 又可得到

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad (3.1.6B)$$

再改写(\*)式为

$$\frac{c}{a}e^{iB} = 1 + \frac{b}{a}e^{i(A+B)}$$

两端取模, 并利用  $A + B + C = \pi$ , 得到

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (3.1.6C)$$

这就证明了全部余弦定理.

**3.1.3 角角边表示** 根据正弦定理, 易知上面三角形的边角边表示是存在变量冗余的, 现在我们来简化一下: 对于表示  $\vec{BA} = \frac{c}{a}e^{iB}\vec{BC}$ , 先将边长的比值转化为角度的复数表示:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A} = \frac{e^{i(A+B)} - e^{-i(A+B)}}{e^{iA} - e^{-iA}} = \frac{1 - e^{i(2A+2B)}}{1 - e^{i2A}} e^{-iB}$$

由此则得三角形的一个角角边表示<sup>①</sup>:

$$\vec{BA} = \frac{1 - e^{i(2A+2B)}}{1 - e^{i2A}} \vec{BC} \quad (3.1.7)$$

将上面表示中的  $\angle A$  或  $\angle B$  换成  $\angle C$ , 又有

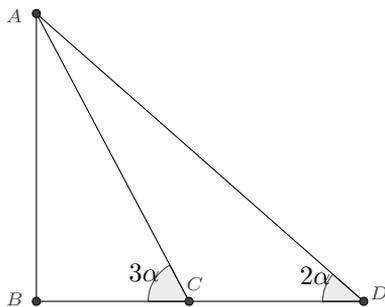
$$\vec{BA} = \frac{e^{i2B}(1 - e^{i2C})}{1 - e^{i2(B+C)}} \vec{BC} \quad (3.1.7II)$$

$$\vec{BA} = \frac{1 - e^{-i2C}}{1 - e^{i2A}} \vec{BC} \quad (3.1.7III)$$

某些涉及角度的问题可通过选用适当的角角边表示而比较容易地解决.

**例 3.1.6** 已知三角形  $ABC$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle C = 3\alpha$ , 延长  $BC$  至  $D$ , 使得  $\angle D = 2\alpha$ . 若已知  $BC = 7$ ,  $CD = 8$ , 求  $AD$  的长度.

<sup>①</sup>亦可见于《点几何纲要》



**解** 令  $w = e^{i2\alpha}$ , 根据 (3.1.7), 对于  $\triangle ABC$  和  $\triangle ABD$ , 分别有

$$\vec{BA} = \frac{w^3 - 1}{1 + w^3} \vec{BC}, \quad \vec{BA} = \frac{1 - w^2}{1 + w^2} \vec{BD}$$

因为  $BD : BC = (7 + 8) : 7$ , 所以

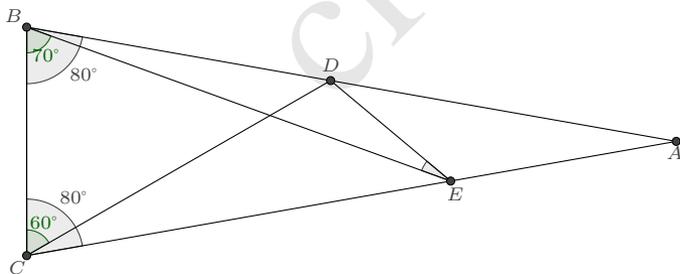
$$7 \frac{w^3 - 1}{1 + w^3} = 15 \frac{1 - w^2}{1 + w^2}$$

化简即为  $2 - 3w + 2w^2 = 0$ , 此式又可写作  $\frac{w}{1+w^2} = \frac{2}{3}$ , 于是

$$AD = |\vec{BA} - \vec{BD}| = \left| \frac{2}{w^2 + 1} \right| |BD| = 30 \left| \frac{w}{1 + w^2} \right| = 20 \quad \square$$

另外, 应用角角边表示可以方便地对著名的**角格点问题**进行计算.

**例 3.1.7** 如图, 已知等腰三角形  $\triangle ABC$  的两个角  $\angle B = \angle C = 80^\circ$ , 点  $D, E$  分别在  $BA, CA$  上,  $\angle BCD = 60^\circ, \angle CBE = 70^\circ$ , 求  $\angle BED$  之值.



**解** 若令  $z_1 = e^{i2B}, z_2 = e^{i2C}, z_3 = e^{i2\angle BCD}, z_4 = e^{i2\angle CBE}$ , 根据 (3.1.7II), 则有

$$\vec{BD} = \frac{z_1(1 - z_3)}{1 - z_1 z_3} \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{z_4(1 - z_2)}{1 - z_4 z_2} \vec{BC}$$

从而

$$\frac{EB}{ED} e^{i\angle BED} = \frac{B-E}{D-E} = \frac{(1-z_2)(1-z_1z_3)z_4}{z_4-z_1+z_1z_3-z_2z_4+z_1z_2z_4-z_1z_3z_4}$$

此式与其共轭相除, 得到

$$e^{i2\angle BED} = \frac{z_4(z_2-z_3+z_1z_3-z_1z_2z_3-z_2z_4+z_2z_3z_4)}{z_1-z_1z_3-z_4+z_2z_4-z_1z_2z_4+z_1z_3z_4}$$

将  $z_1 = (-1)^{8/9}, z_2 = (-1)^{8/9}, z_3 = (-1)^{2/3}, z_4 = (-1)^{7/9}$  代入, 充分化简后为  $e^{i2\angle BED} = (-1)^{2/9}$ , 于是  $\angle BED = 20^\circ$ .  $\square$

**3.1.4 有理表示** 我们可将三角形角角边的表示转化为实参形式的有理表示. 例如对于 (3.1.7), 根据

$$e^{i2\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$$

若令  $s = \tan A, t = \tan B$ , 则

$$\vec{BA} = \frac{i(s+t)}{s(i+t)} \vec{BC} \quad (3.1.8)$$

若令  $s = \cot A, t = \cot C$ , 又有

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it} \vec{BC} \quad (3.1.9)$$

它与过已知两点的圆的一个有理参数表示 (2.2.2) 在形式上是完全一致的, 这实际上也就给出了该参数表示的几何意义.

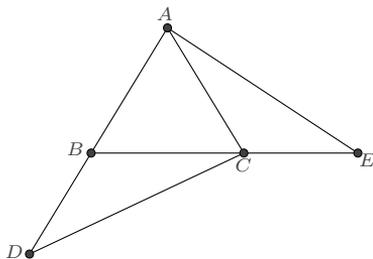
若令  $s = \tan \frac{A}{2}, t = \tan \frac{B}{2}$ , 又可得三角形的一个四阶有理表示

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC} \quad (3.1.10)$$

后文我们将给出这些表示的具体应用.

**3.1.5 相似与全等** 两个三角形相似的定义是它们的对应角和对应边成比例. 在以复数表示的旋转缩放变换下, 相似的判定是简单的: 若  $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ , 则  $\frac{A-B}{C-B} = \frac{D-E}{F-E}$ . 若两三角形全等, 只需再要求它们的其中一条对应边相等即可.

**例 3.1.8** 等腰三角形  $ABC$  的两边  $AB = AC$ ,  $D$  在  $AB$  朝  $B$  方向的延长线上,  $E$  在  $BC$  朝  $C$  方向的延长线上, 且  $\frac{DB}{DC} = \frac{CE}{AE} = \frac{1}{2}$ , 证明  $\triangle BDC$  相似于  $\triangle CEA$ .



**证明** 利用向量的旋转缩放意义, 我们可根据题目所给条件而设  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BDC$ 、 $\triangle CEA$  的表示如下:

$$\vec{AC} = z_1 \vec{AB}, \quad \vec{DC} = 2z_2 \vec{DB}, \quad \vec{EA} = 2z_3 \vec{EC}$$

其中  $z_k$  是单位复数, 即  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ . 为证明  $\triangle BDC \sim \triangle CEA$ , 我们只需证明  $z_2 = z_3$  即可. 考虑第一、二式相减以消点  $C$  而有

$$(1 - z_1) \vec{AB} = (2z_2 - 1) \vec{BD}$$

根据  $A$ 、 $B$ 、 $D$  三点共线, 则知

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2z_2 - 1}{1 - z_1}\right) = 0$$

它可以被进一步化简为

$$2z_1 - z_2 - z_1 z_2 + 2z_2^2 = 0$$

同样地, 第一、三两式相减以消点  $A$ , 又可导出

$$2z_1 - z_3 - z_1 z_3 + 2z_3^2 = 0$$

以上两式相减, 得到

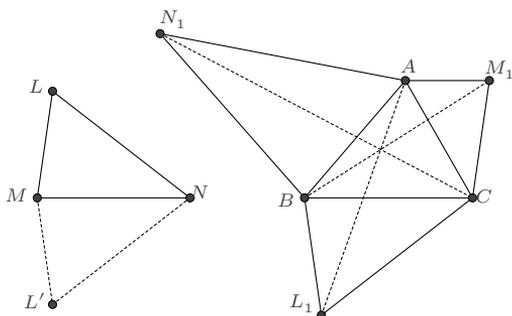
$$(z_2 - z_3)(1 - 2z_2 - 2z_3 + z_2 z_3) = 0$$

显然, 若第一个因式等于 0, 则结论自动成立. 我们需要做的就是根据  $z_2$ 、 $z_3$  的取值范围判定第二个因式不能等于 0. 根据图示,  $\triangle BDC$  和  $\triangle CEA$  是逆时针三角形, 故要求  $\operatorname{Im}(z_2) < 0$ ,  $\operatorname{Im}(z_3) < 0$ . 这两个条件不易直接应用, 若将其转化为实参的表示: 令  $z_2 = \frac{1+iu}{1-iu}$ ,  $z_3 = \frac{1+iv}{1-iv}$ , 则  $u > 0$ ,  $v > 0$ , 于是立知

$$1 - 2z_2 - 2z_3 + z_2 z_3 = \frac{2(1 + 3uv)}{(i + u)(i + v)} \neq 0$$

因而命题成立. □

**例 3.1.9 (复合三角形)** 给定两个三角形  $\triangle ABC$  和  $\triangle LMN$ . 在  $\triangle ABC$  的外侧, 分别作与  $\triangle LMN$  逆相似<sup>①</sup>的三个三角形  $\triangle L_1BC$ 、 $\triangle AM_1C$ 、 $\triangle ABN_1$ , 则  $AL_1$ 、 $BM_1$ 、 $CN_1$  三线共点.



**证明** 设  $\triangle ABC$  和  $\triangle LMN$  的表示分别是  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{ML} = w\vec{MN}$ ,  $\triangle L'MN$  的表示则是  $\vec{ML}' = \bar{w}\vec{MN}$ . 根据  $\triangle L'MN \sim \triangle L_1BC \sim \triangle AM_1C \sim \triangle ABN_1$  即有

$$\bar{w} = \frac{L' - M}{N - M} = \frac{L_1 - B}{C - B} = \frac{A - M_1}{C - M_1} = \frac{A - B}{N_1 - B}$$

从而可得到  $L_1$ 、 $M_1$ 、 $N_1$  三点的表示

$$\vec{BL}_1 = \bar{w}\vec{BC}, \quad \vec{BM}_1 = \frac{\bar{w} - z}{\bar{w} - 1}\vec{BC}, \quad \vec{BN}_1 = \frac{z}{\bar{w}}\vec{BC}$$

计算即知三条直线  $AL_1$ 、 $BM_1$ 、 $CN_1$  交于公共点  $T$ :

$$\vec{BT} = \frac{(w-1)(wz - \bar{w}z)}{(w-\bar{w})(w-\bar{z})}\vec{BC}$$

□

## 3.2 三角形的面积

这里我们主要叙述三角形面积的向量计算方式. 根据向量共轭乘积的定义 (1.1.3), 三角形的面积有如下表示:

$$S = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{AC}) = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{BC} \otimes \vec{BA}) = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{CA} \otimes \vec{CB}) \quad (3.2.1)$$

上述表示又等价于

$$S = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{AB} \otimes \vec{BC}) = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{BC} \otimes \vec{CA}) = -\frac{1}{2}\text{Im}(\vec{CA} \otimes \vec{AB}) \quad (3.2.2)$$

<sup>①</sup> 如图, 设  $L'$  是  $L$  关于直线  $MN$  的对称点, 与  $\triangle LMN$  逆相似则是指与  $\triangle L'MN$  相似.

利用向量的加法,又可导出另一种常用的表示

$$S = -\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{OA} \otimes \vec{OB} + \vec{OB} \otimes \vec{OC} + \vec{OC} \otimes \vec{OA}) \quad (3.2.3)$$

其中  $O$  为  $\triangle ABC$  所在平面上的任意一点. 此式也常被用于判定  $\triangle ABC$  是否退化, 即: 当  $S = 0$  时,  $A$ 、 $B$ 、 $C$  三点共线或其中有两点重合.

如果  $\triangle ABC$  所在平面另有逆时针三角形  $XYZ$ , 那么利用向量加法:

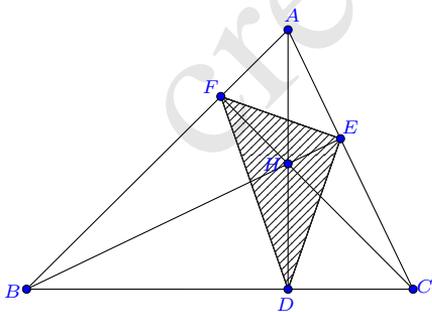
$$\begin{cases} \vec{XY} = \vec{BY} - \vec{AX} + \vec{AB} \\ \vec{YZ} = \vec{CZ} - \vec{BY} + \vec{BC} \\ \vec{ZX} = \vec{AX} - \vec{CZ} + \vec{CA} \end{cases}$$

以及 (3.2.2), 还可导出如下面积的计算式:

$$\begin{aligned} S_{XYZ} &= S_{ABC} - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{BC} \otimes \vec{AX} + \vec{CA} \otimes \vec{BY} + \vec{AB} \otimes \vec{CZ}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\vec{AX} \otimes \vec{BY} + \vec{BY} \otimes \vec{CZ} + \vec{CZ} \otimes \vec{AX}) \quad (3.2.4) \end{aligned}$$

适当地选用面积计算式能够简化计算.

**例 3.2.1 (垂足三角形的面积)**  $\triangle ABC$  各顶点在对边的投影点分别为  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 求  $\triangle DEF$  的面积.



**解**  $\vec{AD}$  可视为由  $\vec{BC}$  顺时针旋转  $\frac{\pi}{2}$  并缩放  $\frac{AD}{BC}$  倍得到, 即

$$\vec{AD} = -\frac{AD}{BC} i \vec{BC}$$

记  $S$  为  $\triangle ABC$  的面积, 根据  $BC \cdot AD = 2S$ , 可改写上式为:

$$\vec{AD} = -\frac{2S}{a^2} i \vec{BC}$$

同理

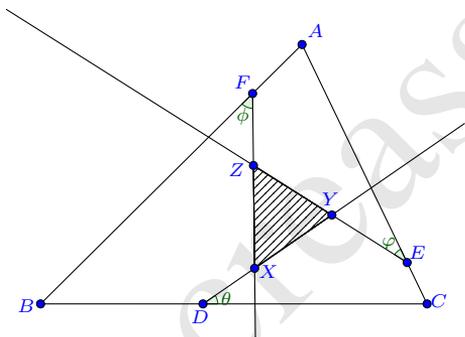
$$\vec{BE} = -\frac{2S}{b^2} i \vec{CA}, \quad \vec{CF} = -\frac{2S}{c^2} i \vec{AB}$$

根据面积计算式 (3.2.4) 则有

$$\begin{aligned} S_{\triangle DEF} &= S - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \vec{BC} \otimes \vec{AD} + \vec{CA} \otimes \vec{BE} + \vec{AB} \otimes \vec{CF} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \vec{AD} \otimes \vec{BE} + \vec{BE} \otimes \vec{CF} + \vec{CF} \otimes \vec{AD} \right) \\ &= S - 3S - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \frac{4S^2}{a^2 b^2} \vec{BC} \otimes \vec{CA} + \frac{4S^2}{b^2 c^2} \vec{CA} \otimes \vec{AB} + \frac{4S^2}{c^2 a^2} \vec{AB} \otimes \vec{BC} \right) \\ &= -2S + \left( \frac{4S^3}{a^2 b^2} + \frac{4S^3}{b^2 c^2} + \frac{4S^3}{c^2 a^2} \right) = S (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2) \end{aligned}$$

□

**例 3.2.2 (交点三角形面积)**  $\triangle ABC$  的三边上分别有点  $D, E, F$ , 并且  $\vec{BD} = \lambda \vec{BC}$ ,  $\vec{CE} = \mu \vec{CA}$ ,  $\vec{AF} = \nu \vec{AB}$ , 过这三点且与三边的夹角分别为  $\theta, \varphi, \phi$  的直线两两相交于  $X, Y, Z$  三点, 求  $\triangle XYZ$  的面积.



**解** 利用向量旋转缩放的几何意义, 可设

$$\vec{DX} = u_1 e^{i\theta} \vec{BC}, \quad \vec{EY} = v_1 e^{i\varphi} \vec{CA}, \quad \vec{FZ} = w_1 e^{i\phi} \vec{AB}$$

$$\vec{DY} = u_2 e^{i\theta} \vec{BC}, \quad \vec{EZ} = v_2 e^{i\varphi} \vec{CA}, \quad \vec{FX} = w_2 e^{i\phi} \vec{AB}$$

由  $\vec{BF} + \vec{FX} = \vec{BD} + \vec{DX}$  联合  $\vec{BD} = \lambda \vec{BC}$ ,  $\vec{AF} = \nu \vec{AB}$ , 即有

$$(1 - \nu - w_2 e^{i\phi}) \vec{BA} = (\lambda + u_1 e^{i\theta}) \vec{BC}$$

而根据三角形的边角边表示 (3.1.3) 以及正弦定理, 有

$$\vec{BA} = \frac{c}{a} e^{iB} \vec{BC} = \frac{\sin C}{\sin A} e^{iB} \vec{BC}$$

于是

$$(1 - \nu - w_2 e^{i\phi}) \sin C e^{iB} = (\lambda + u_1 e^{i\theta}) \sin A$$

分离实部和虚部即可解出

$$u_1 = \frac{(1 - \nu) \sin C \sin \phi - \lambda \sin A \sin(B + \phi)}{\sin A \sin(B + \phi - \theta)}, \quad w_2 = \frac{(1 - \nu) \sin C \sin(B - \theta) + \lambda \sin A \sin \theta}{\sin C \sin(B + \phi - \theta)}$$

$u_1$ 、 $u_2$ 、 $w_1$ 、 $v_2$  可通过变量轮回而得到.

基于对称性的考虑, 我们将 (3.2.2) 的各式做加和平均, 则  $\triangle XYZ$  的面积

$$S_{\triangle XYZ} = -\frac{1}{6} \operatorname{Im}(\vec{XY} \otimes \vec{YZ} + \vec{YZ} \otimes \vec{ZX} + \vec{ZX} \otimes \vec{XY})$$

其中的各项为

$$\begin{cases} \vec{XY} \otimes \vec{YZ} = (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) e^{i(\theta - \varphi)} \vec{BC} \otimes \vec{CA} = -(u_2 - u_1)(v_2 - v_1) e^{i(\theta - \varphi)} ab e^{iC} \\ \vec{YZ} \otimes \vec{ZX} = (v_2 - v_1)(w_2 - w_1) e^{i(\varphi - \phi)} \vec{CA} \otimes \vec{AB} = -(v_2 - v_1)(w_2 - w_1) e^{i(\varphi - \phi)} bc e^{iA} \\ \vec{ZX} \otimes \vec{XY} = (w_2 - w_1)(u_2 - u_1) e^{i(\phi - \theta)} \vec{AB} \otimes \vec{BC} = -(w_2 - w_1)(u_2 - u_1) e^{i(\phi - \theta)} ca e^{iB} \end{cases}$$

利用正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  充分化简计算后得

$$S_{\triangle XYZ} = \frac{R^2}{2} \frac{\left[ \begin{aligned} &2\lambda \sin \theta \sin A \sin(A + \varphi - \phi) + 2\mu \sin \varphi \sin B \sin(B + \phi - \theta) + 2\nu \sin \phi \sin C \sin(C + \theta - \varphi) \\ &+ \sin A \cos(A + \theta + \varphi - \phi) + \sin B \cos(B + \varphi + \phi - \theta) + \sin C \cos(C + \phi + \theta - \varphi) \end{aligned} \right]^2}{\sin(A + \varphi - \phi) \sin(B + \phi - \theta) \sin(C + \theta - \varphi)}$$

□

## 3.3 第一类特征量

**定义 3.3.1** 对于三角形的一阶有理表示  $\vec{BA} = z \vec{BC}$ , 若  $L$  是关于  $\operatorname{Re} z$ 、 $\operatorname{Im} z$ 、 $BC^2$  的有理函数, 则称  $L$  是  $\triangle ABC$  的第一类特征量.

它与如下定义是等价的:

**定义 3.3.2** 对于一个给定的  $\triangle ABC$ , 若  $L$  可表示为关于面积和边长平方的有理函数, 则称其  $L$  为  $\triangle ABC$  的第一类特征量.

**证明** 不妨设  $z = x + yi$ , 则有

$$b^2 = (x-1)^2 a^2 + y^2 a^2, \quad c^2 = x^2 a^2 + y^2 a^2, \quad S = \frac{1}{2} y a^2$$

由此, 若  $L$  是关于  $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$ 、 $S$  的有理函数, 显然也是关于  $x$ 、 $y$ 、 $a^2$  的有理函数. 另一方面, 易由前面的等式求出

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a^2}, \quad y = \frac{2S}{a^2}$$

因此, 若  $L$  是关于  $x$ 、 $y$ 、 $a^2$  的有理函数, 则  $L$  也是关于  $a^2$ 、 $b^2$ 、 $c^2$ 、 $S$  的有理函数.  $\square$

以下是三角形的一些第一类特征量, 若令  $\vec{BA} = z \vec{BC}$ , 则它们的表示为:

$$\begin{aligned} (1) \quad b^2 &= (1-z)(1-\bar{z})a^2 & (2) \quad c^2 &= z\bar{z}a^2 & (3) \quad S &= \frac{1}{4i}(z-\bar{z})a^2 \\ (4) \quad \cos 2A &= \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})} + \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)} \right) & (5) \quad \sin 2A &= \frac{1}{2i} \left( \frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})} - \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)} \right) & (6) \quad \tan A &= \frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}-2z\bar{z}} \\ (7) \quad \cos 2B &= \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z} \right) & (8) \quad \sin 2B &= \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right) & (9) \quad \tan B &= -\frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}} \\ (10) \quad \cos 2C &= \frac{1}{2} \left( \frac{1-\bar{z}}{1-z} + \frac{1-z}{1-\bar{z}} \right) & (11) \quad \sin 2C &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1-\bar{z}}{1-z} - \frac{1-z}{1-\bar{z}} \right) & (12) \quad \tan C &= \frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}-2} \end{aligned}$$

上述表示是不难证明的. 例如: 根据  $\vec{AC} = (1 - \frac{1}{z}) \vec{AB}$  以及  $\vec{AC} = \frac{b}{c} e^{iA} \vec{AB}$ , 知

$$\frac{b}{c} e^{iA} = (1 - \frac{1}{z})$$

取共轭又有

$$\frac{b}{c} e^{-iA} = (1 - \frac{1}{\bar{z}})$$

以上两式相除, 得

$$e^{i2A} = \frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})}$$

分离实部和虚部即知

$$\cos 2A = \frac{1}{2} \left( \frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})} + \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)} \right)$$

$$\sin 2A = \frac{1}{2i} \left( \frac{\bar{z}(1-z)}{z(1-\bar{z})} - \frac{z(1-\bar{z})}{\bar{z}(1-z)} \right)$$

并且

$$\tan A = i \frac{1 - e^{i2A}}{1 + e^{i2A}} = \frac{i(z-\bar{z})}{z+\bar{z}-2z\bar{z}}$$

## 3.4 第一类特征点

关于三角形的特征点,我们熟知的有重心、外心、垂心、内心、旁心等等,它们是三角形的一大重要组成,包含了极为丰富的性质. 在一个专门搜集三角形特征点及其性质的网站<https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>, 现已罗列有5万多个特征点. 它们是以三线坐标/重心坐标的形式给出的.

**定义 3.4.1** 若  $\triangle ABC$  的特征点  $P$  关于顶点的重心坐标分量均是第一类特征量, 则称  $P$  为  $\triangle ABC$  的第一类特征点.

通常来说, 三角形的特征点是保持缩放不变性的: 重心坐标分量之值不因边长的等比例缩放而发生改变. 因此, 我们有如下命题:

**命题 3.4.2** 对于三角形的表示  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ , 若  $P$  是  $\triangle ABC$  的第一类特征点, 则  $P$  可表示为  $\vec{BP} = f(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)\vec{BC}$ , 其中  $f$  是一个复数形式的有理函数.

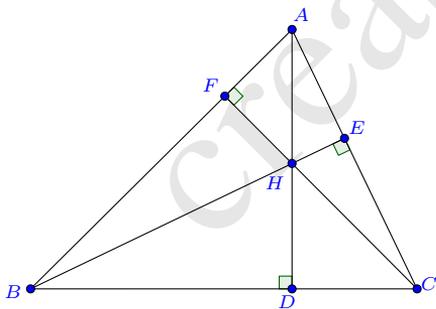
在三角形的表示  $\vec{BA} = z\vec{BC}$  下, 我们给出一些常见的特征点的表示.

**3.4.1 第一类特征点的表示** 下面我们给出一些常见的第一类特征点的表示.

**例 3.4.3 (重心)** 三角形重心是三角形三条中线的交点. 它的重心坐标是易知的:

$$\vec{BG} = \frac{1}{3}(1+z)\vec{BC} \quad (3.4.1)$$

**例 3.4.4 (垂心)** 三角形的三条高线的交点称为三角形的垂心.



**解** 设垂心  $H$  为  $\vec{BH} = w\vec{BC}$ , 因为  $A, H$  在  $BC$  边上的投影是相同的, 所以有

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(w)$$

再改写  $\vec{BC} = \frac{1}{z}\vec{BA}$ , 于是

$$\vec{BH} = w\vec{BC} = \frac{w}{z}\vec{BA}$$

$C, H$  在  $BA$  边上的投影是相同的, 所以又有

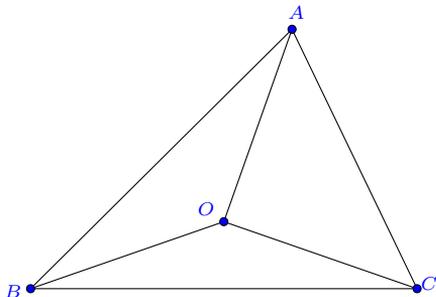
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right)$$

联立解出  $w$ , 即得

$$\vec{BH} = \frac{(z-1)(z+\bar{z})}{z-\bar{z}} \vec{BC} \quad (3.4.2)$$

□

**例 3.4.5 (外心)** 外心是三角形三条边的垂直平分线的交点, 它到各顶点的距离相等.



**解** 设外心  $O$  为  $\vec{BO} = w \vec{BC}$ , 因为它在各边的投影点是各边的中点, 所以

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{1}{2}$$

联立即可解出  $w$ , 即有

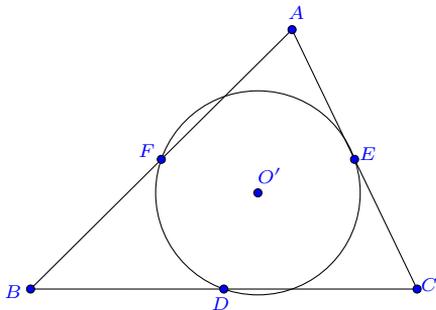
$$\vec{BO} = \frac{z(1-\bar{z})}{z-\bar{z}} \vec{BC} \quad (3.4.3)$$

圆半径为

$$R^2 = \frac{z\bar{z}(1-z)(1-\bar{z})}{(z-\bar{z})^2} a^2$$

□

**例 3.4.6 (九点圆圆心)** 九点圆是经过三角形三边中点的圆, 它也经过三条高的垂足点和三角形顶点与垂心所得线段的中点.



解 三边中点  $D, E, F$  的表示为

$$\vec{BD} = \frac{1}{2}\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{1}{2}(1+z)\vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{1}{2}z\vec{BC}$$

由此三式, 利用向量的加法容易得到:

$$\vec{DF} = \frac{z-1}{z}\vec{DE}$$

再由前面外心的表示式即得九点圆圆心  $O'$  的表示:

$$\vec{DO'} = \frac{z-1}{z-\bar{z}}\vec{DE}$$

转化为基向量  $\vec{BC}$  的表示则为:

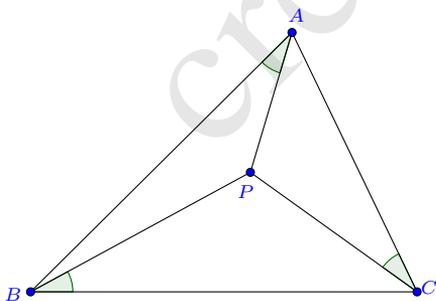
$$\vec{BO'} = \frac{z^2 - \bar{z}}{2(z - \bar{z})}\vec{BC} \quad (3.4.4)$$

其半径平方为

$$R'^2 = \frac{z\bar{z}(1-z)(1-\bar{z})}{4(z-\bar{z})^2}a^2$$

可以看到九点圆半径是外接圆半径的一半  $R' = \frac{R}{2}$ . □

**例 3.4.7 (布洛卡点)** 在近代数学中, 布洛卡点是常被提及的, 共有两个: 正布洛卡点和负布洛卡点. 正布洛卡点  $P$  使得  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \theta$ , 负布洛卡点  $Q$  使得  $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \varphi$ , 它们均属于第一类特征点.



解 设  $\vec{BP} = w\vec{BC}$ , 则

$$\vec{AP} = \vec{BP} - \vec{BA} = (w-z)\vec{BC} = \frac{w-z}{0-z}\vec{BA}$$

因为从  $\vec{BC}$  旋转至  $\vec{BP}$  与从  $\vec{AB}$  旋转至  $\vec{AP}$  是相同的角度, 所以

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w-z}{(0-z)w}\right) = 0$$

同样地, 由

$$\vec{CP} = \vec{BP} - \vec{BC} = (w-1)\vec{BC} = \frac{w-1}{z-1}\vec{CA}$$

得到

$$\operatorname{Im}\left(\frac{w-1}{(z-1)w}\right) = 0$$

两式联立解出  $w$ , 即知

$$\vec{BP} = \frac{z\bar{z}}{1-z+z\bar{z}}\vec{BC} \quad (3.4.5)$$

□

同理可求出负布洛卡点  $Q$ :

$$\vec{BQ} = \frac{z}{1-\bar{z}+z\bar{z}}\vec{BC} \quad (3.4.6)$$

三角形其余的第一类特征点可以类似导出其表示, 但事实上, 可以根据重心坐标和第一类特征量的表示直接导出. 以三角形的**陪位重心**<sup>①</sup> $K$  为例, 从[ETC 网站](#)我们查阅得知, 它是  $X(6)$ , 重心坐标为:

$$K = \frac{a^2A + b^2B + c^2C}{a^2 + b^2 + c^2}$$

将第一类特征量的表示代入, 化简即知

$$\vec{BK} = \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}}\vec{BC} \quad (3.4.7)$$

又如, 三角形的**费马点** $F$  也属于第一类特征点, 它的编号是  $X(13)$ , 类似可导出

$$\vec{BF} = \frac{(1-i\sqrt{3})z + 2\bar{z}}{-2\sqrt{3}i + (3+i\sqrt{3})\bar{z}}\vec{BC} \quad (3.4.8)$$

<sup>①</sup> 又称类似重心、共轭重心.

**3.4.2 第一类特征点的性质** 在上述的表示下, 我们容易验证三角形第一类特征点之间的共线、共圆等几何关系. 例如, 根据 (3.4.1)、(3.4.2)、(3.4.3), 计算知

$$\frac{O-G}{H-G} = -\frac{1}{2}$$

由此即得著名的**欧拉线定理**: 三角形的外心、垂心和重心在一条直线上, 并且外心和重心的距离是垂心和重心的距离一半.

选用适当的三角形表示有助于简化计算. 以正布洛卡点为例, 它的一个性质是:  $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ , 应用 (3.1.9) 我们可以给予一个简单的证明.

**证明** 令  $s = \cot A, t = \cot C$ , 则布洛卡点  $P$  的表示 (3.4.5) 成为

$$\vec{BP} = \frac{1+s^2}{1+s^2+st+t^2-is-it} \vec{BC}$$

记右方的复数为  $\kappa$ , 布洛卡角  $\theta$  的余切值是

$$\cot \theta = \frac{\operatorname{Re}(\kappa)}{\operatorname{Im}(\kappa)} = \frac{1+s^2+st+t^2}{s+t}$$

另一方面, 因为

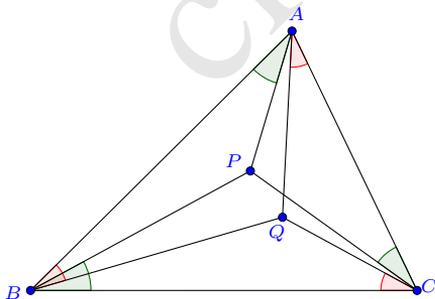
$$\cot B = \frac{1-\cot A \cot C}{\cot A + \cot C} = \frac{1-st}{s+t}$$

所以

$$\cot A + \cot B + \cot C = s + \frac{1-st}{s+t} + t = \frac{1+s^2+st+t^2}{s+t} = \cot \theta \quad \square$$

三角形的某些点对之间存在着特定的几何关系, 其中等角共轭点是经常被提及的.

**例 3.4.8 (等角共轭)** 三角形  $ABC$  所在平面上, 若  $P, Q$  两点使得  $\angle PAB = \angle QAC$ 、 $\angle PBC = \angle QBA$ 、 $\angle PCA = \angle QCB$ <sup>①</sup>, 则  $P, Q$  互为  $\triangle ABC$  的等角共轭点.



<sup>①</sup>注: 关于角度, 传统写法并非严格, 一般总是取大于  $0$  而小于  $\pi$  的那个, 但这样事实上给几何代数化带来了一定的麻烦: 例如对于  $\angle ABC$ , 究竟是由  $\vec{BC}$  逆时针旋转为  $\vec{BA}$  所经历的角度, 还是由  $\vec{BA}$  逆时针旋转为  $\vec{BC}$  所经历的角度? 通常需要根据几何图形来加以判别, 否则只能分情况讨论才能得知.

解 令

$$\vec{BA} = z\vec{BC}, \quad \vec{BP} = w\vec{BC}, \quad \vec{BQ} = s\vec{BC}$$

那么由三个角度关系可知:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \frac{P-A}{B-A} \frac{Q-A}{C-A} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{w-z}{0-z} \frac{s-z}{1-z} \right) = 0 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{P-B}{A-B} \frac{Q-B}{C-B} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{w-0}{z-0} \frac{s-0}{1-0} \right) = 0 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{P-C}{A-C} \frac{Q-C}{B-C} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{w-1}{z-1} \frac{s-1}{0-1} \right) = 0 \end{aligned}$$

由此解出  $s$ , 得:

$$\vec{BQ} = \frac{z\bar{w}(w-z-\bar{w}+z\bar{w}+\bar{z}-w\bar{z})}{-z\bar{w}+wz\bar{w}+w\bar{z}-wz\bar{z}-w\bar{w}\bar{z}+z\bar{w}\bar{z}} \vec{BC} \quad (3.4.9)$$

□

这里所解出的  $Q$  点, 实际上是原始定义的一个扩展, 满足

$$\angle PAB - \angle QAC \equiv 0 \pmod{180^\circ}, \quad \angle PBC - \angle QBA \equiv 0 \pmod{180^\circ}, \quad \angle PCA - \angle QCB \equiv 0 \pmod{180^\circ}$$

读者容易根据 (3.4.2) 和 (3.4.3) 验证: 垂心  $H$  的等角共轭点为外心  $O$ .

关于等角共轭点, 有这样一个关于长度的恒等式:

$$\varepsilon_1 \frac{AP \cdot AQ}{AB \cdot AC} + \varepsilon_2 \frac{BP \cdot BQ}{BC \cdot BA} + \varepsilon_3 \frac{CP \cdot CQ}{CB \cdot CA} = 1$$

其中  $\varepsilon_k = \pm 1 (k = 1, 2, 3)$ , 具体的取值需根据  $P, Q$  所处的区域范围而定. 事实上, 对于平面上互异的任意五个点  $A, B, C, P, Q$ , 存在恒等式:

$$\frac{(P-A)(Q-A)}{(B-A)(C-A)} + \frac{(P-B)(Q-B)}{(C-B)(A-B)} + \frac{(P-C)(Q-C)}{(B-C)(A-C)} = 1$$

而等角共轭条件使得上面的每一项均是实数, 从而可逐项改写为模长的表示.

## 3.5 第一类特征圆

**定义 3.5.1** 对于三角形的表示  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ , 若圆上的任意点  $P$  可用  $\vec{BP} = f(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, u) \vec{BC}$  表示, 其中  $f$  是一个复数形式的有理函数, 则称该圆为  $\triangle ABC$  的第一类特征圆.

在三角形的表示  $\vec{BA} = z\vec{BC}$  下, 我们给出一些常见的特征圆的表示.

### 3.5.1 第一类特征圆的表示

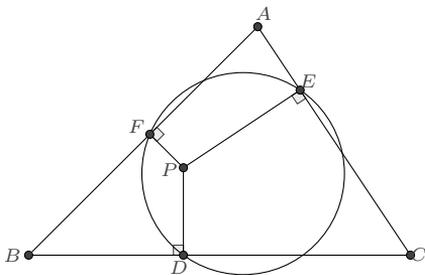
**例 3.5.2 (外接圆)** 前文已经给了经过已知三点的圆的一个表示 (2.2.4), 稍作转化即知, 外接圆上的任意一点  $P$  则可表示为

$$\vec{BP} = \frac{z(1-u)}{1-zu} \vec{BC} \quad (3.5.1)$$

**例 3.5.3 (九点圆)** 九点圆是经过三角形各边中点的圆, 根据 (2.2.4) 易得到, 其上任意一点  $P$  可表示为

$$\vec{BP} = \frac{1-uz^2}{2(1-uz)} \vec{BC} \quad (3.5.2)$$

**例 3.5.4 (垂足圆)**  $\triangle ABC$  所在平面上的一点  $P$ , 分别向边  $BC, CA, AB$  作垂线, 设垂足为  $D, E, F$ , 称  $\triangle DEF$  的外接圆为点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的垂足圆.



**解** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BP} = w\vec{BC}$ , 则  $P$  在三边的垂足分别为:

$$\vec{BD} = \operatorname{Re}(w) \vec{BC}$$

$$\vec{CE} = \operatorname{Re}\left(\frac{w-1}{z-1}\right) \vec{CA} \implies \vec{BE} = \left(1 + (z-1) \operatorname{Re}\left(\frac{w-1}{z-1}\right)\right) \vec{BC}$$

$$\vec{BF} = \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) \vec{BA} \implies \vec{BF} = z \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right) \vec{BC}$$

根据 (2.2.4),  $\triangle DEF$  外接圆上的任意点  $T$  可表示为

$$T = \frac{D(E-F) + u(D-E)F}{(E-F) + u(D-E)}$$

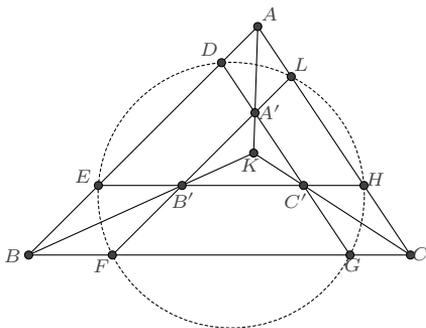
代入前面的式子, 化简即得垂足圆的一个表示

$$\vec{BT} = \frac{(\bar{z} - \bar{w}) \operatorname{Re}(w) - u(1 - \bar{w}) \operatorname{Re}(w\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})\bar{z}} \vec{BC} \quad (3.5.3)$$

□

**例 3.5.5 (塔克圆)** 设  $K$  是  $\triangle ABC$  的陪位重心,  $A'$  是  $AK$  上的点. (1) 若过  $A'$  作  $AB$  的平行线交  $KB$  于  $B'$ , 过  $A'$  作  $AC$  的平行线交  $KC$  于  $C'$ , 则  $B'C' \parallel BC$ . (2)  $\triangle A'B'C'$

与  $\triangle ABC$  的非对应边 (所在直线) 的六个交点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $L$  共圆, 该圆称为  $\triangle ABC$  的塔克圆.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ , 则根据 (3.4.7), 陪位重心  $K$  的表示为

$$\vec{BK} = \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}}\vec{BC}$$

又设  $\vec{AA'} = \lambda\vec{AK}$ , 根据  $A'B' \parallel AB$ 、 $C'A' \parallel CA$  易知

$$\vec{BB'} = \lambda\vec{BK}, \quad \vec{CC'} = \lambda\vec{CK}$$

由此

$$\vec{B'C'} = \vec{CC'} - \vec{BB'} + \vec{BC} = \lambda\vec{CK} - \lambda\vec{BK} + \vec{BC} = (1-\lambda)\vec{BC}$$

即知  $B'C' \parallel BC$ .

为求  $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ 、 $L$ , 我们先将  $A'$ 、 $B'$ 、 $C'$  转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示

$$\begin{cases} \vec{BA'} = \left( \lambda \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} + (1-\lambda)z \right) \vec{BC} \\ \vec{BB'} = \lambda \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \vec{BC} \\ \vec{BC'} = \left( \lambda \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} + (1-\lambda) \right) \vec{BC} \end{cases}$$

设直线  $AB$  上的点  $D$  为  $\vec{BD} = \mu\vec{BA}$ , 则根据  $A'D \parallel AC$ , 知

$$\operatorname{Im} \left( \frac{A' - D}{A - C} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{\lambda \frac{z(1+\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} + (1-\lambda)z - \mu z}{z - 1} \right) = 0$$

解出  $\mu$  即得  $D$  点的表示

$$\vec{BD} = \left( z - \lambda \frac{z(1-z)(1-\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \right) \vec{BC}$$

同理, 解出其余各点的表示如下:

$$\begin{aligned} \vec{BE} &= \frac{\lambda z}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \vec{BC}, & \vec{BF} &= \frac{\lambda z\bar{z}}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \vec{BC}, & \vec{BG} &= \left( 1 - \frac{\lambda(1-z)(1-\bar{z})}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \right) \vec{BC}, \\ \vec{BH} &= \left( 1 - \frac{\lambda(1-z)}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \right) \vec{BC}, & \vec{BL} &= \left( z + \lambda \frac{z\bar{z}(1-z)}{2-z-\bar{z}+2z\bar{z}} \right) \vec{BC} \end{aligned}$$

容易验证:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{F-D}{F-E} \frac{G-E}{G-D} \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left( \frac{F-D}{F-E} \frac{H-E}{H-D} \right) = 0, \quad \operatorname{Im} \left( \frac{F-D}{F-E} \frac{L-E}{L-D} \right) = 0$$

因而六点共圆. 任选其中三点计算, 可得塔克圆的一个表示:

$$\vec{BP} = \frac{kz(1+kz-kz\bar{z}-u\bar{z})}{(1+k)(1+kz-kz\bar{z}-u)} \vec{BC} \quad (3.5.4)$$

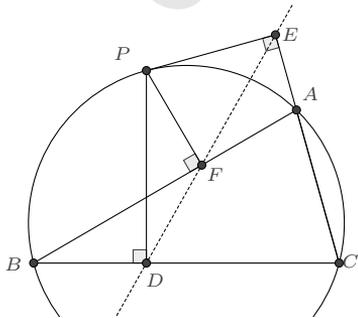
其中

$$k = \frac{\lambda}{2-\lambda-z-\bar{z}+2z\bar{z}} = \frac{BE}{EA} \quad \square$$

**3.5.2 第一类特征圆的性质** 三角形的每一个特征圆都有其独特的性质. 例如, 三角形的外接圆有着如下几个广为人知的定理.

**例 3.5.6 (西姆松定理)** 过三角形外接圆上异于三角形顶点的任意一点作三边或其延长线上的垂线, 则三垂足共线<sup>①</sup>.

它的逆定理也是有名的: 若三角形外任意一点在该三角形三边所在直线上的射影共线, 则该点一定在三角形的外接圆上.



<sup>①</sup>该直线又称为西姆松线.

**证明** 这里, 为了同时证明此定理及其逆定理, 我们令  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BP} = w\vec{BC}$ , 则

$$\begin{cases} \vec{BD} = \operatorname{Re}(w)\vec{BC} \\ \vec{CE} = \operatorname{Re}\left(\frac{w-1}{z-1}\right)\vec{CA} \\ \vec{BF} = \operatorname{Re}\left(\frac{w}{z}\right)\vec{BA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{BD} = \frac{1}{2}(w + \bar{w})\vec{BC} \\ \vec{BE} = \frac{z\bar{w} + \bar{z} + w\bar{z} - w - z - \bar{w}}{2(\bar{z}-1)}\vec{BC} \\ \vec{BF} = \frac{z\bar{w} + w\bar{z}}{2\bar{z}}\vec{BC} \end{cases}$$

若  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点共线, 则有

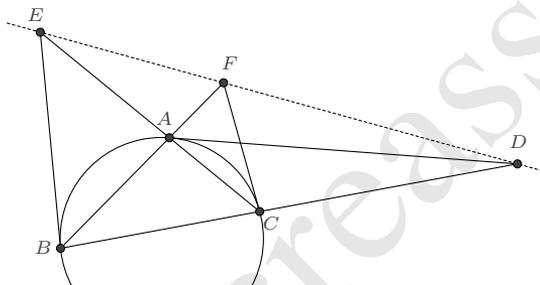
$$\operatorname{Im}\left(\frac{D-F}{D-E}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{\bar{w}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{w}-1)} - \frac{w(z-1)}{z(w-1)}\right) = 0$$

若  $P$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  四点共圆, 则有

$$\operatorname{Im}\left(\frac{P-B}{P-C} \frac{A-C}{A-B}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{w(z-1)}{z(w-1)} - \frac{\bar{w}(\bar{z}-1)}{\bar{z}(\bar{w}-1)}\right) = 0$$

易见二者等价, 故西姆松定理及其逆均成立. □

**例 3.5.7 (莱莫恩定理)** 过  $\triangle ABC$  的三个顶点  $A$ 、 $B$ 、 $C$  作它的外接圆的切线, 分别和  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  所在直线交于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 则  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点共线.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ , 则  $\triangle ABC$  外接圆上的任意点  $P$  有表示 (3.5.1)

$$\vec{BP} = \frac{z(1-u)}{1-zu}\vec{BC}$$

它在  $u = 0, 1, \infty$  时分别对应  $A, B, C$  三点, 故而在这三点处的切向量分别是:

$$\begin{cases} \mathbf{v}_A = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \vec{BP} = z(z-1)\vec{BC} \\ \mathbf{v}_B = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{z}{z-1}\vec{BC} \\ \mathbf{v}_C = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{z-1}{z}\vec{BC} \end{cases}$$

这三个向量是分别平行于直线  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  的, 由此即可求出

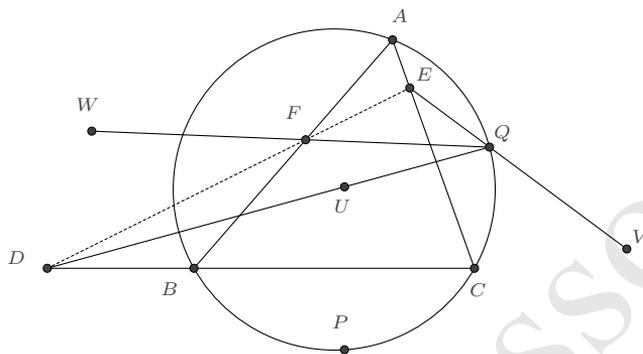
$$\vec{BD} = \frac{z\bar{z}}{z+\bar{z}-1}\vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{z(1-\bar{z})}{1-z\bar{z}}\vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{z}{z+\bar{z}-z\bar{z}}\vec{BC}$$

从而

$$\frac{F-D}{F-E} = \frac{1-z\bar{z}}{1-z-\bar{z}} \in \mathbb{R}$$

这就证明了  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点共线. □

**例 3.5.8 (清宫定理)** 设  $P$ 、 $Q$  为  $\triangle ABC$  的外接圆上异于  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的两点,  $P$  关于三边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  的对称点分别是  $U$ 、 $V$ 、 $W$ , 且  $QU$ 、 $QV$ 、 $QW$  分别交三边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  或其延长线于  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 则  $D$ 、 $E$ 、 $F$  在同一直线上.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ , 则  $\triangle ABC$  外接圆上的两点  $P$ 、 $Q$  可分别表示为

$$\vec{BP} = \frac{(1-u)z}{1-uz}\vec{BC}, \quad \vec{BQ} = \frac{(1-v)z}{1-vz}\vec{BC}$$

首先易知  $P$  关于  $BC$  的对称点  $U$ :

$$\vec{BU} = \frac{(1-u)\bar{z}}{1-u\bar{z}}\vec{BC}$$

为求出  $P$  关于  $CA$  的对称点, 我们先将  $P$  的表示改写为以  $\vec{CA}$  为基向量的表示:

$$\vec{CP} = \frac{1}{1-uz}\vec{CA}$$

则立即可知  $V$  的表示为

$$\vec{CV} = \frac{1}{1-u\bar{z}}\vec{CA}$$

将其转化为以  $BC$  为基向量的表示即为

$$\vec{BV} = \frac{z - u\bar{z}}{1 - u\bar{z}} \vec{BC}$$

同理, 改写  $P$  的表示为以  $BA$  为基向量的表示

$$\vec{BP} = \frac{1 - u}{1 - uz} \vec{BA}$$

又可得到  $P$  关于  $AB$  的对称点  $W$  的表示

$$\vec{BW} = \frac{1 - u}{1 - u\bar{z}} \vec{BA} = \frac{(1 - u)z}{1 - u\bar{z}} \vec{BC}$$

进而不难求出  $QU$ 、 $QV$ 、 $QW$  分别与三边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  或其延长线的交点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 它们的表示较长

$$\begin{cases} \vec{BD} = \frac{(1 - u)(1 - v)(z + \bar{z} - uz\bar{z} - vz\bar{z})}{2 - u - v - uz - vz + 2uvz - u\bar{z} - v\bar{z} + 2uv\bar{z} + u^2z\bar{z} - u^2vz\bar{z} + v^2z\bar{z} - uv^2z\bar{z}} \vec{BC} \\ \vec{BE} = \frac{uz + vz - uvz - uvz^2 - uv\bar{z} - uvz\bar{z} + u^2vz\bar{z} + uv^2z\bar{z}}{u + v - 2uvz - 2uv\bar{z} + u^2vz\bar{z} + uv^2z\bar{z}} \vec{BC} \\ \vec{BF} = \frac{(1 - u)(1 - v)z(u + v - uvz - uv\bar{z})}{u + v - u^2 - v^2 - 2uvz + u^2vz + uv^2z - 2uv\bar{z} + u^2v\bar{z} + uv^2\bar{z} + u^2vz\bar{z} + uv^2z\bar{z} - 2u^2v^2z\bar{z}} \vec{BC} \end{cases}$$

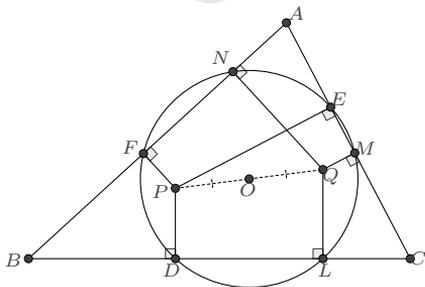
于是

$$\frac{F - D}{F - E} = \frac{(1 - u)(1 - v)(u + v - 2uvz - 2uv\bar{z} + u^2vz\bar{z} + uv^2z\bar{z})}{uv(-2 + u + v + uz + vz - 2uvz + u\bar{z} + v\bar{z} - 2uv\bar{z} - u^2z\bar{z} + u^2vz\bar{z} - v^2z\bar{z} + uv^2z\bar{z})} \in \mathbb{R}$$

因此  $D$ 、 $E$ 、 $F$  在同一直线上.  $\square$

对于垂足圆, 亦有如下著名的性质.

**例 3.5.9** 若  $Q$  是点  $P$  关于  $\triangle ABC$  的等角共轭点, 则它们有着相同的垂足圆, 且垂足圆的圆心是这对等角共轭点连线的中点.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BP} = w\vec{BC}$ ,  $\vec{BQ} = s\vec{BC}$ , 则根据 (3.5.3),  $P$  点和  $Q$  的垂足圆分

别有表示

$$\begin{aligned}\vec{BT} &= \frac{(\bar{z} - \bar{w}) \operatorname{Re}(w) - u(1 - \bar{w}) \operatorname{Re}(w\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})\bar{z}} \vec{BC} \\ \vec{BT}' &= \frac{(\bar{z} - \bar{s}) \operatorname{Re}(s) - v(1 - \bar{s}) \operatorname{Re}(s\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{s}) - v(1 - \bar{s})\bar{z}} \vec{BC}\end{aligned}$$

若二者表示的是同一个圆, 则根据有理表示的定理 (2.1.11), 参变量  $u$ 、 $v$  之间存在分式线性关系, 使得

$$\frac{(\bar{z} - \bar{w}) \operatorname{Re}(w) - u(1 - \bar{w}) \operatorname{Re}(w\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})\bar{z}} = \frac{(\bar{z} - \bar{s}) \operatorname{Re}(s) - v(1 - \bar{s}) \operatorname{Re}(s\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{s}) - v(1 - \bar{s})\bar{z}}$$

由此解出

$$v = \frac{(\bar{z} - \bar{s}) ((\bar{w} - \bar{z})(s + \bar{s} - w - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})(z\bar{w} + w\bar{z} - s\bar{z} - \bar{s}\bar{z}))}{(1 - \bar{s}) ((\bar{w} - \bar{z})(z\bar{s} + s\bar{z} - w\bar{z} - \bar{w}\bar{z}) + u(1 - \bar{w})\bar{z}(z\bar{s} + s\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z}))}$$

因  $v$  是实数, 故右方式子的虚部为 0, 从而得到关于  $u$  的一个二次方程. 又因  $u$  是自由的变量, 所以该方程的每一项系数均应等于 0, 由此得到唯一的有效解为

$$s = \frac{z\bar{w}(w - z - \bar{w} + z\bar{w} + \bar{z} - w\bar{z})}{-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z}}$$

这正是  $Q$  是  $P$  关于  $\triangle ABC$  为等角共轭的表示 (3.4.9).

通过作代换

$$\frac{(z - w) - u(1 - w)z}{(\bar{z} - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})\bar{z}} = \chi$$

圆的表示可改写为

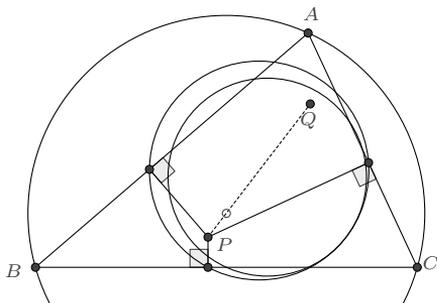
$$\vec{BT} = \left( \frac{w}{2} + \frac{z\bar{w}(w - z - \bar{w} + z\bar{w} + \bar{z} - w\bar{z})}{2(-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z})} + \frac{(1 - \bar{w})\bar{w}(z - \bar{z})(\bar{z} - \bar{w})}{2(-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z})} \chi \right) \vec{BC}$$

由此则知圆心  $O$  的表示为

$$\vec{BO} = \left( \frac{w}{2} + \frac{z\bar{w}(w - z - \bar{w} + z\bar{w} + \bar{z} - w\bar{z})}{2(-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z})} \right) \vec{BC} = \left( \frac{w}{2} + \frac{s}{2} \right) \vec{BC} = \frac{1}{2} \vec{BP} + \frac{1}{2} \vec{BQ}$$

即  $O$  是线段  $PQ$  的中点. 证毕. □

**例 3.5.10 (封腾定理)** 点  $P$  的垂足圆和九点圆相切, 当且仅当  $P$  与其等角共轭点  $Q$  的连线经过外心.



**证明** 设  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BP} = w\vec{BC}$ , 根据 (3.5.3), 垂足圆上的任意点  $T$  有表示

$$\vec{BT} = \frac{(\bar{z} - \bar{w}) \operatorname{Re}(w) - u(1 - \bar{w}) \operatorname{Re}(w\bar{z})}{(\bar{z} - \bar{w}) - u(1 - \bar{w})\bar{z}} \vec{BC}$$

考察垂足圆与九点圆的交点情况: 此时  $T$  与各边的中点共圆, 即有

$$\operatorname{Im} \left( \frac{T - \frac{A+B}{2} - \frac{C+A}{2} - \frac{B+C}{2}}{T - \frac{B+C}{2} - \frac{C+A}{2} - \frac{A+B}{2}} \right) = \operatorname{Im} \frac{z(z - w - \bar{w})(\bar{w} - \bar{z}) - uz(1 - \bar{w})(z\bar{w} + w\bar{z} - z\bar{z})}{(1 - w - \bar{w})(\bar{w} - \bar{z}) - u(1 - \bar{w})(z\bar{w} - \bar{z} + w\bar{z})} = 0$$

由此可以显式地解出参数  $u$ , 它有两个解

$$u_1 = \frac{z + \bar{z} - w - \bar{w}}{z + \bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z}}, \quad u_2 = \frac{(z - w)(\bar{z} - \bar{w})(1 - w - \bar{w})}{(1 - w)(1 - \bar{w})(z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z})}$$

若垂足圆与九点圆相切, 则上述解应是重合的, 由此即有

$$z(1 - z)\bar{w}^3 - z(1 - z)(1 + \bar{z})\bar{w}^2 + (1 - z)z\bar{z}\bar{w} + \bar{z}w(1 - w)(z - w)(1 - \bar{z}) = 0 \quad \dots(\star)$$

另一方面, 根据 (3.4.9),  $P$  的等角共轭点  $Q$  有表示

$$\vec{BQ} = \frac{z\bar{w}(w - z - \bar{w} + z\bar{w} + \bar{z} - w\bar{z})}{-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z}} \vec{BC}$$

根据 (3.4.3),  $\triangle ABC$  的外心  $O$  有表示

$$\vec{BO} = \frac{z(1 - \bar{z})}{z - \bar{z}} \vec{BC}$$

$P$ 、 $Q$ 、 $O$  三点共线的条件是

$$\operatorname{Im} \frac{P - O}{Q - O} = \operatorname{Im} \frac{(z - wz + w\bar{z} - z\bar{z})(z\bar{w} - wz\bar{w} - w\bar{z} + wz\bar{z} + w\bar{w}\bar{z} - z\bar{w}\bar{z})}{z(1 - z)(z\bar{w} - z\bar{w}^2 - w\bar{z} + \bar{w}^2\bar{z} + w\bar{z}^2 - \bar{w}\bar{z}^2)} = 0$$

它展开后的方程为

$$(-z\bar{w} + wz\bar{w} + w\bar{z} - wz\bar{z} - w\bar{w}\bar{z} + z\bar{w}\bar{z}) \\ (z(1-z)\bar{w}^3 - z(1-z)(1+\bar{z})\bar{w}^2 + (1-z)z\bar{z}\bar{w} + \bar{z}w(1-w)(z-w)(1-\bar{z})) = 0$$

若第一个因式等于 0, 则此时  $Q$  点将趋于无穷,  $P$  点则位于  $\triangle ABC$  的外接圆上,  $P$  点的垂足圆亦退化为直线, 因而排除掉这种情形. 第二个因式与  $(\star)$  相同, 因而命题成立.  $\square$

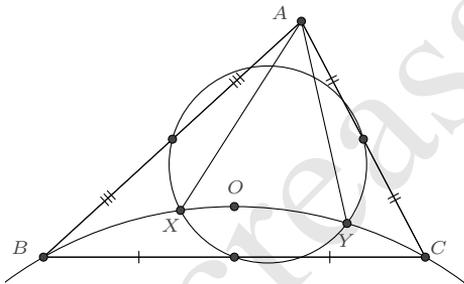
**注记 3.5.11** 根据退化条件及  $(\star)$  式, 消元  $\bar{w}$  后得

$$w^3(z-\bar{z})^3 - 3w^2z(z-\bar{z})^2(1-\bar{z}) + 3wz^2(z-\bar{z})(1-\bar{z})^2 - z^2(1-\bar{z})(z+\bar{z}-4z\bar{z}+z^2\bar{z}+z\bar{z}^2) = 0$$

表明在外接圆上, 存在三个这样的  $P$  点, 使得它的西姆松线与九点圆相切.

以上几例的证明, 我们直接使用了三角形的基本表示  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ . 对于仅涉及第一类特征的命题来说, 这通常是可行的, 但对于计算而言却并非友好. 当含有  $z$  及其共轭  $\bar{z}$  的表达式较为复杂时, 处理起来显得繁琐. 使用其他实参形式的表示会更简明一些,  $(3.1.9)$  的表示  $\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it}\vec{BC}$  是一个不错的选择.

**例 3.5.12** 如图,  $O$  是  $\triangle ABC$  的外心,  $\triangle BOC$  的外接圆交九点圆于  $X, Y$ , 证明:  $2AX \cdot AY = AB \cdot AC$ .



**证明** 令

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it}\vec{BC}$$

则  $\triangle ABC$  外接圆的圆心  $O$  表示为

$$\vec{BO} = \frac{1+is}{2}\vec{BC}$$

由此容易求出  $\triangle BOC$  外接圆的表示 ( $P$  为圆上的任意点) 是

$$\vec{BP} = \frac{1+i\frac{s-s^{-1}}{2}}{1-iu}\vec{BC}$$

若此圆与九点圆相交, 则  $P$  与  $\triangle ABC$  各边的中点共圆, 即有

$$\operatorname{Im} \frac{(P - \frac{A+B}{2})(\frac{C+A}{2} - \frac{B+C}{2})}{(P - \frac{B+C}{2})(\frac{C+A}{2} - \frac{A+B}{2})} = \operatorname{Im} \frac{(1+is)^2(1-it+st-su)}{(1-it)^2(1+is-s^2-su)} = 0$$

由此得到关于  $u$  的二次方程

$$2s^2(1-st)u^2 - s(3-s^2+2st+2s^3t+t^2-3s^2t^2)u + 1-s^2+2st+t^2-s^2t^2+2s^4t^2 = 0$$

方程的两个根  $u_1, u_2$  分别对应两个交点  $X, Y$ :

$$\vec{BX} = \frac{1+i\frac{s-s^{-1}}{2}}{1-iu_1} \vec{BC}, \quad \vec{BY} = \frac{1+i\frac{s-s^{-1}}{2}}{1-iu_2} \vec{BC}$$

根据韦达定理

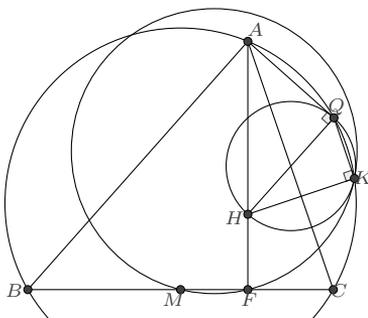
$$\begin{cases} u_1 + u_2 = \frac{3-s^2+2st+2s^3t+t^2-3s^2t^2}{2s(1-st)} \\ u_1 u_2 = \frac{1-s^2+2st+t^2-s^2t^2+2s^4t^2}{2s^2(1-st)} \end{cases}$$

由此计算知

$$2AX \cdot AY = \frac{(1+s^2)\sqrt{(1+s^2+4st+t^2+s^2t^2-4su_1-4s^2tu_1+4s^2u_1^2)(1+s^2+4st+t^2+s^2t^2-4su_2-4s^2tu_2+4s^2u_2^2)}}{2s^2(1+t^2)\sqrt{(1+u_1^2)(1+u_2^2)}} BC^2 = \frac{|(s+t)|\sqrt{1+s^2}}{1+t^2} BC^2$$

这也正是  $AB \cdot AC$  之值. □

**例 3.5.13 (2015 IMO 几何题)** 锐角三角形  $ABC$  中,  $AB > AC$ , 设  $\Gamma$  是它的外接圆,  $H$  是它的垂心,  $F$  是由顶点  $A$  处所引高的垂足,  $M$  是边  $BC$  的中点.  $Q$  是  $\Gamma$  上一点, 使得  $\angle HQA = 90^\circ$ ,  $K$  是  $\Gamma$  上一点, 使得  $\angle HKQ = 90^\circ$ . 已知  $A, B, C, K, Q$  互不相同, 且按此顺序排列在  $\Gamma$  上. 求证:  $\triangle KQH$  的外接圆与  $\triangle FKM$  的外接圆相切.



**证明** 令

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it} \vec{BC}$$

则  $A$  在  $BC$  边上的垂足  $F$  的表示为:

$$\vec{BF} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+is}{1-it}\right) \vec{BC} = \frac{1-st}{1+t^2} \vec{BC}$$

根据 (3.4.2),  $\triangle ABC$  垂心  $H$  的表示则是

$$\vec{BH} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

$\triangle ABC$  外接圆上的点  $Q$  可设为

$$\vec{BQ} = \frac{1+is}{1-iu} \vec{BC}$$

根据  $\angle HQA = 90^\circ$ , 即知

$$\operatorname{Re}\left(\frac{H-Q}{A-Q}\right) = 0 \implies \vec{BQ} = \frac{1-st}{1-2st-it} \vec{BC}$$

同理, 根据  $\angle HKQ = 90^\circ$  又求出

$$\vec{BK} = \frac{(1+is)(1-st)(1-2st+t^2)}{(1-it)(1-4st+t^2+4s^2t^2+is-2is^2t-ist^2)} \vec{BC}$$

若点  $P$  是  $\triangle KQH$  外接圆与  $\triangle FKM$  外接圆的交点, 根据四点共圆时交比为实数这一性质, 设

$$\frac{P-K}{P-H} \frac{Q-H}{Q-K} = u$$

则  $P$  有表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1-2st+t^2+is+ist^2+2is^2tu+ist^2u-isu-2is^2t)}{(1-it)(1-4st+t^2+4s^2t^2+is+2is^2tu+ist^2u-isu-ist^2-2is^2t)} \vec{BC}$$

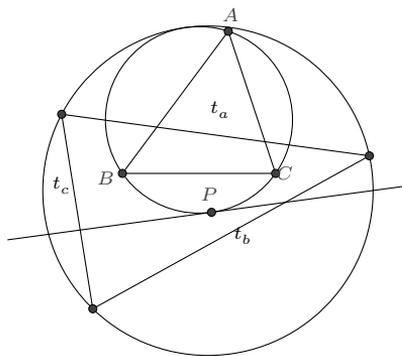
它与  $F$ 、 $K$ 、 $M$  的交比也应为实数, 即有

$$\operatorname{Im} \frac{P-F}{P-M} \frac{K-M}{K-F} = \operatorname{Im} \frac{(1+is-2is^2t+t^2-ist^2)(1-is+2is^2t+t^2+ist^2-isu+2is^2tu+ist^2u)}{(1-is+2is^2t+t^2+ist^2)(1+is-2is^2t+t^2-ist^2-isu+2is^2tu+ist^2u)} = 0$$

此方程仅有唯一的解  $u = 0$ , 这就说明了  $\triangle KQH$  的外接圆与  $\triangle FKM$  的外接圆相切.  $\square$

**例 3.5.14 (2011 IMO 几何题)** 锐角三角形  $ABC$  外接圆  $\omega$ ,  $t$  是  $\omega$  的一条切线, 它关于  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  的对称直线为  $t_a$ 、 $t_b$ 、 $t_c$ , 证明:  $t_a$ 、 $t_b$ 、 $t_c$  所围成的三角形的外接圆与

$\omega$  相切.



**证明** 令

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it} \vec{BC}$$

则  $\triangle ABC$  外接圆上的点  $P$  可表示为

$$\vec{BP} = \frac{1+is}{1-iu} \vec{BC}$$

在  $P$  点处的切线  $t$  则可表示为 ( $Q$  为切线上的任意点):

$$\vec{BQ} = \vec{BP} + \lambda \frac{d}{du} \vec{BP} = \left( \frac{1+is}{1-iu} + \lambda \frac{i-s}{(1-iu)^2} \right) \vec{BC}$$

对此式取共轭, 并替换参数  $\lambda$  以示区分, 则知切线  $t$  关于  $BC$  的对称直线  $t_a$  有表示 (记其上的点为  $U$ ):

$$\vec{BU} = \left( \frac{1-is}{1+iu} + a \frac{-i-s}{(1+iu)^2} \right) \vec{BC}$$

将切线  $t$  的表示又改写为

$$\vec{CQ} = \left( \frac{(1-it)(s+u)}{(s+t)(1-iu)} + \lambda \frac{(1+is)(1-it)}{(s+t)(1-iu)^2} \right) \vec{CA}$$

又得切线  $t$  关于  $CA$  的对称直线  $t_b$  有表示 (记其上的点为  $V$ ):

$$\vec{CV} = \left( \frac{(1+it)(s+u)}{(s+t)(1+iu)} + b \frac{(1-is)(1+it)}{(s+t)(1+iu)^2} \right) \vec{CA}$$

改写为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BV} = \left( \frac{1-st+is-it+2iu}{(1-it)(1+iu)} + b \frac{(1-is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)^2} \right) \vec{BC}$$

同理, 切线  $t$  关于  $AB$  的对称直线  $t_c$  有表示 (记其上的点为  $W$ ):

$$\vec{BW} = \left( \frac{(1+is)(1+it)}{(1-it)(1+iu)} + c \frac{(1+is)(1+it)}{(i+t)(1+iu)^2} \right) \vec{BC}$$

进而求得三条直线  $t_a$ 、 $t_b$ 、 $t_c$  的交点 (记为  $T_a$ 、 $T_b$ 、 $T_c$ ):

$$\begin{cases} \vec{BT}_a = \frac{(1+is)(s+st^2-ist+it^2+2isu-2itu+iu^2+istu^2)}{s(1-it)^2(1+iu)^2} \vec{BC} \\ \vec{BT}_b = \frac{(1+s^2)(1+it)}{(1-st)(1+iu)^2} \vec{BC} \\ \vec{BT}_c = \frac{t+s^2t-is^2+ist-2isu+2itu-iu^2-istu^2}{(1+is)t(1+iu)^2} \vec{BC} \end{cases}$$

若  $\triangle T_a T_b T_c$  的外接圆与  $\triangle ABC$  的外接圆相交, 交点  $K$  的表示设为

$$\vec{BK} = \frac{1+is}{1-iv} \vec{BC}$$

根据  $T_a$ 、 $T_b$ 、 $T_c$ 、 $K$  的交比为实数

$$\operatorname{Im} \left( \frac{T_a - T_b}{T_a - T_c} \frac{K - T_c}{K - T_b} \right) = 0$$

可知方程仅有一解

$$v = \frac{2st - su + tu - u^2 + stu^2}{s - t + u + stu}$$

也即  $\triangle T_a T_b T_c$  的外接圆与  $\triangle ABC$  的外接圆相切, 该切点的表示是

$$\vec{BK} = \frac{(1+is)(s-t+u+stu)}{(1+iu)(s-t+u-stu-2ist)} \vec{BC}$$

□

一般来说, 对于三角形的第一类特征点或特征圆的性质, 我们可以选择三角形的任意一个表示直接计算得到, 并不需要过多的技巧。

## 3.6 第二类特征量

**定义 3.6.1** 对于一个给定的  $\triangle ABC$ , 若  $L$  可表示为关于面积和边长的有理函数, 且不是第一类特征量, 则称其  $L$  为  $\triangle ABC$  的第二类特征量.

第二类特征量不能表示为关于三角形顶点坐标分量的有理函数,  $\sin A$ 、 $\cos A$ 、 $\tan \frac{A}{2}$  均属于此类. 同第一类特征量类似的, 我们有如下等价的命题:

**命题 3.6.2** 若  $L$  是  $\triangle ABC$  的第二类特征量, 则  $L$  可表示为一条边长和两个内角的半正切值的有理函数. 反之, 若  $L$  可表示为一条边长和两个内角的半正切值的有理函数, 且非第一类特征量, 则是第二类特征量.

记  $s = \tan \frac{A}{2}$ 、 $t = \tan \frac{B}{2}$ 、 $a = BC$ , 则不难导出如下第二类特征量的表示:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad b &= \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}a & (2) \quad c &= \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}a & (3) \quad \cos A &= \frac{1-s^2}{1+s^2} \\
 (4) \quad \sin A &= \frac{2s}{1+s^2} & (5) \quad \cos B &= \frac{1-t^2}{1+t^2} & (6) \quad \sin B &= \frac{2t}{1+t^2} \\
 (7) \quad \cos C &= -\frac{(1+s+t-st)(1-s-t-st)}{(1+s^2)(1+t^2)} & (8) \quad \sin C &= \frac{2(s+t)(1-st)}{(1+s^2)(1+t^2)} & (9) \quad \tan \frac{C}{2} &= \frac{1-st}{s+t} \\
 (10) \quad l &= \frac{s+t}{s(1+t^2)}a & (11) \quad R &= \frac{1+s^2}{4s}a & (12) \quad r &= \frac{t-st^2}{1+t^2}a
 \end{aligned}$$

其中  $l$ 、 $R$ 、 $r$  分别是三角形的半周长、外接圆半径和内切圆半径.

$s$ 、 $t$  的取值范围是:  $s > 0, t > 0, 1 - st > 0$ , 这由  $\tan \frac{A}{2}$ 、 $\tan \frac{B}{2}$ 、 $\tan \frac{C}{2}$  的表示立即可得, 它在一些需要进行值域讨论的时候会用到.

## 3.7 第二类特征点

**定义 3.7.1** 若  $\triangle ABC$  的特征点  $P$  关于顶点的重心坐标分量是第一、二类特征量, 且  $P$  不是第一类特征点, 则称  $P$  为  $\triangle ABC$  的第二类特征点.

同前面类似的, 我们有命题

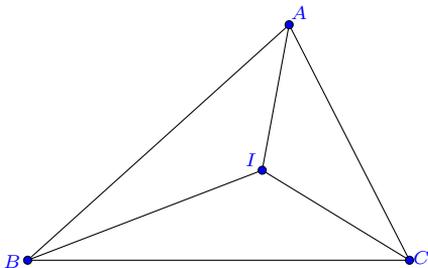
**命题 3.7.2** 记  $s = \tan \frac{A}{2}$ 、 $t = \tan \frac{B}{2}$ , 若  $P$  是  $\triangle ABC$  的第二类特征点, 则  $P$  可表示为  $\vec{BP} = f(s, t)\vec{BC}$ , 其中  $f$  是一个复数形式的有理函数. 反之, 若  $P$  可表示为这样的形式且不是第一类特征点, 则  $P$  是第二类特征点.

对于三角形的第二类特征量和特征点的表示, 为使行文简化, 我们约定: 若非特别说明, 否则记号  $s$ 、 $t$  总是分别表示  $\tan \frac{A}{2}$  和  $\tan \frac{B}{2}$ .

### 3.7.1 第二类特征点的表示

下面我们给出一些常见的第二类特征点的表示.

**例 3.7.3 (内心)** 内心是三角形三条角平分线的交点.



**解** 内心  $I$  在  $\angle B$  的平分线上, 因此可令  $\vec{BI} = \lambda e^{i\frac{B}{2}} \vec{BC}$ ;  $I$  也在  $\angle C$  的平分线上, 故又令  $\vec{CI} = \mu e^{-i\frac{C}{2}} \vec{CB}$ , 这两式相减消去  $I$ , 即得到

$$1 = \lambda e^{i\frac{B}{2}} + \mu e^{-i\frac{C}{2}}$$

对此式取共轭, 而后联立方程即可解出  $\lambda, \mu$ , 由此即知

$$\vec{BI} = \frac{1 + e^{iA+iB}}{1 + e^{iA}} \vec{BC}$$

此式又可写作

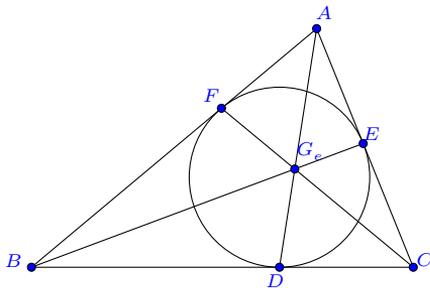
$$\vec{BI} = \frac{1 - st}{1 - it} \vec{BC} \quad (3.7.1)$$

□

**例 3.7.4 (旁心)** 旁心是三角形一个内角的平分线和其他两个内角的外角平分线的交点. 同内心的求法一致, 容易导出三个旁心的表示:

$$\vec{BI}_A = \frac{s+t}{i+t} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_B = \frac{i(s+t)}{s(i+t)} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_C = \frac{i(1-st)}{s(1-it)} \vec{BC} \quad (3.7.2)$$

**例 3.7.5 (葛尔刚点)** 分别连接三角形一个顶点及对边上的内切圆切点的三条直线共点, 该点称为葛尔刚点.



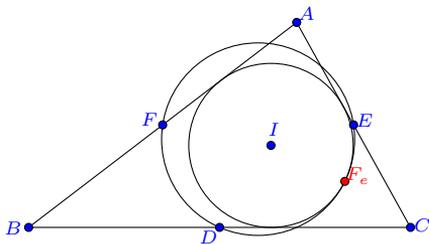
**解** 内切圆在三边的切点分别是内心在三边上的垂足点, 根据 (3.7.1), 易导出这三个切点的表示:

$$\vec{BD} = \frac{1-st}{1+t^2} \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{(1-is-2it)(1-st)}{(1-is)(1-it)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{1-st}{(1-it)^2} \vec{BC}$$

由此计算即知  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  三条直线交于公共点  $G_e$ :

$$\vec{BG}_e = \frac{(1+is)(1-is-2it)(1-st)}{(1-it)^2(1+s^2+st+t^2)} \vec{BC} \quad (3.7.3) \quad \square$$

**例 3.7.6 (费尔巴哈点)** 费尔巴哈点是三角形的内切圆与九点圆的唯一交点.



**解** 我们先用较为笨拙的方式导出费尔巴哈点的表示, 在后文中再用更便捷的方式导出. 在  $s = \tan \frac{A}{2}$ 、 $t = \tan \frac{B}{2}$  的表示下

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

根据 (3.4.4), 知九点圆的圆心  $O'$  和半径  $R'$  分别是:

$$\vec{BO}' = \frac{2(3s+t-s^2t-3st^2) - i(1+s-t+st)(1-s+t+st)}{8s(1-it)^2} \vec{BC}, \quad R' = \frac{1+s^2}{8s} BC$$

根据 (3.7.1), 内切圆的圆心  $I$  和半径  $r$  分别是

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}, \quad r = \text{Im}\left(\frac{1-st}{1-it}\right) BC = \frac{t-st^2}{1+t^2} BC$$

费尔巴哈点  $F_e$  到两圆圆心的距离分别等于两圆的半径, 若设  $\vec{BF}_e = (x+yi) \vec{BC}$ , 则有

$$\begin{cases} \left| x+yi - \frac{2(3s+t-s^2t-3st^2) - i(1+s-t+st)(1-s+t+st)}{8s(1-it)^2} \right| = \frac{1+s^2}{8s} \\ \left| x+yi - \frac{1-st}{1-it} \right| = \frac{t-st^2}{1+t^2} \end{cases}$$

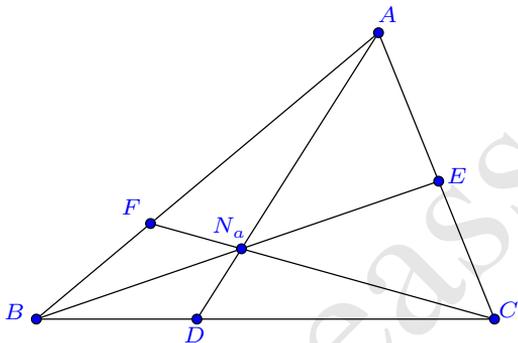
这个方程有唯一的解

$$\begin{cases} x = \frac{(1-st)(1+s^2-6st-2t^2+6s^2t^2+4st^3+5t^4-3s^2t^4-6st^5)}{(1+t^2)^2(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)} \\ y = \frac{2t(1-st)(1-2st-t^2)^2}{(1+t^2)^2(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)} \end{cases}$$

从而得到费尔巴哈点  $F_e$  的表示

$$\vec{BF}_e = \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)} \vec{BC} \quad (3.7.4) \quad \square$$

**例 3.7.7 (奈格尔点)** 在三角形  $ABC$  的三边  $BC$ 、 $CA$ 、 $AB$  上, 分别取一点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 使得  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  将  $\triangle ABC$  的周界分成两条等长的折线, 则  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  三线交于同一点, 该点称为奈格尔点<sup>①</sup>.



**解** 根据  $AB + BD = DC + CA$ 、 $BC + CE = EA + AB$ 、 $CA + AF = FB + BC$  以及  $AF + FB = AB$ 、 $BD + DC = BC$ 、 $CE + EA = CA$ , 我们容易解出

$$\begin{cases} FB = \frac{1}{2}(CA + AB - BC) = \frac{t(1-st)}{s(1+t^2)} BC \\ BD = \frac{1}{2}(BC + CA - AB) = \frac{t(s+t)}{1+t^2} BC \\ CE = \frac{1}{2}(CA + AB - BC) = \frac{t(1-st)}{s(1+t^2)} BC \end{cases}$$

<sup>①</sup> $D$ 、 $E$ 、 $F$  实际上也分别是三角形旁切圆在三边的切点.

于是  $D$ 、 $E$ 、 $F$  的表示分别为

$$\begin{cases} \vec{BF} = \frac{FB}{AB} \vec{BA} = \frac{t(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC} \\ \vec{BD} = \frac{BD}{BC} \vec{BC} = \frac{t(s+t)}{1+t^2} \vec{BC} \\ \vec{CE} = \frac{CE}{CA} \vec{CA} = \frac{1-st}{1+s^2} \vec{CA} \end{cases}$$

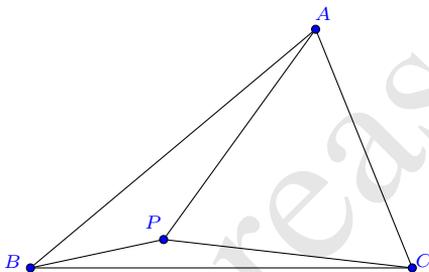
对于最后一式, 利用向量加法又可转化为

$$\vec{BE} = \frac{i(s+t)(1-2st-is)}{s(1-is)(1-it)^2} \vec{BC}$$

进而即可计算出  $AD$ 、 $BE$ 、 $CF$  的交点  $N_a$

$$\vec{BN}_a = \frac{t(1+is)(1-is-2st)}{s(1-it)^2} \vec{BC} \quad (3.7.5) \quad \square$$

**例 3.7.8 (等周点)** 在  $\triangle ABC$  所在平面找一点  $P$ , 使得三个小三角形  $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$  的周长相等. 这个点就称为等周点.



**解** 若直接设  $\vec{BP} = (x+yi)\vec{BP}$ , 则边长  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$  的表示都将含有根式, 从而导致计算的困难. 而前面已知, 对于三角形, 若以两内角的半正切值为参数, 则边长的表示是有理化的. 因此, 我们令  $u = \tan \frac{\angle BPC}{2}$ ,  $v = \tan \frac{\angle PBC}{2}$ , 于是

$$\vec{BP} = \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1-iv)^2} \vec{BC}$$

除  $PA$  外, 其余各边的边长均是有理表示的

$$BA = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} BC, \quad CA = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} BC$$

$$BP = \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)}BC, \quad CP = \frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}BC$$

根据  $\triangle PAB$  与  $\triangle PCA$  的周长相等, 知  $BA + BP = CA + CP$ , 代入这些表示即有

$$\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} + \frac{(u+v)(1-uv)}{u(1+v^2)} = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} + \frac{v(1+u^2)}{u(1+v^2)}$$

化简后可解出  $u$

$$u = \frac{1-st-stv^2-t^2v^2}{(1+t^2)v}$$

再根据  $\triangle PBC$  与  $\triangle PCA$  的周长相等的条件, 又可解出

$$v = \frac{1-s-t+t^2}{t(s+t)}$$

从而知等周点  $P$  的表示为

$$\vec{BP} = \frac{(1-s-t-it)^2(1-st)}{(1-it)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)} \vec{BC} \quad (3.7.6) \quad \square$$

许多三角形的第二类特征点均可按照这样的方式求解, 我们不再详细推导, 因为前文已叙, 根据特征点的重心坐标即可直接导出.

**3.7.2 第二类特征点的性质** 同第一类特征点类似的, 根据上述有理表示, 我们容易证明第二类特征点的一些几何性质. 例如重心  $G$ 、内心  $I$ 、与奈格尔点  $N_a$  共线, 且  $N_a G = 2IG$ .

**证明** 这里重心  $G$  属于第一类特征点, 我们先将它的表示 (3.4.1) 转化为以第二类特征量表示, 这只需要将式中的  $z$  以  $z = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}$  替代即可.

$$\vec{BG} = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \right) \vec{BC}$$

再根据内心  $I$  的表示 (3.7.1) 和奈格尔点  $N_a$  的表示 (3.7.5), 容易计算出

$$\frac{N_a - G}{I - G} = -2 \quad \square$$

又如, 对于欧拉三角形定理  $OI^2 = R^2 - 2rR$ , 我们先将  $z = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}$  代入外心的表示 (3.4.3), 化简得到

$$\vec{BO} = \frac{i(1-is)^2}{4s} \vec{BC}$$

再由内心  $I$  的表示 (3.7.1) 以及  $R$ 、 $r$  的表示 (3.6), 计算即知

$$OI^2 = \frac{(1+s^2)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}{16s^2(1+t^2)} BC^2 = R^2 - 2rR$$

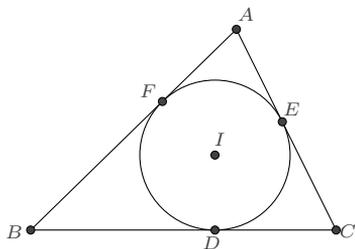
## 3.8 第二类特征圆

**定义 3.8.1** 记  $s = \tan \frac{A}{2}$ 、 $t = \tan \frac{B}{2}$ , 若圆不是  $\triangle ABC$  的第一类特征圆, 且圆上的任意点  $P$  可用  $\vec{BP} = f(s, t, u) \vec{BC}$  表示, 其中  $f$  是一个复数形式的有理函数, 则称该圆为  $\triangle ABC$  的第二类特征圆.

下面列举一些常见的第二类特征圆.

### 3.8.1 第二类特征圆的表示

**例 3.8.2 (内切圆)** 在三角形内且与三边相切的圆称为三角形的内切圆.



虽然我们可以直接根据内心和半径的表示写出内切圆的一个表示

$$\vec{BP} = \left( \frac{1-st}{1-it} + \frac{t-st^2}{1+t^2} \frac{1+iu}{1-iu} \right) \vec{BC}$$

但这个表示略显复杂, 并可能导致某些问题的计算稍繁. 我们根据 (2.3.2) 来导出一个更简单的表示: 内切圆与  $\angle ABC$  相切, 则有参数表示

$$\vec{BP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{B}{2} \right) \vec{BC} = \left( \lambda - \frac{2\lambda t}{i+u} \right) \vec{BC}$$

再根据圆与  $CA$  边相切, 有

$$(1-\lambda)(s+t)(1-st)u^2 + 2\lambda t(s+t)(1-st)u + s+t-s^2t-st^2-s\lambda-3st^2\lambda-t^3\lambda+s^2t^3\lambda = 0$$

此方程的两根重合, 于是判别式

$$\Delta = -4(s+t)(1-st)(1-st-\lambda-t^2\lambda)(s+t-s\lambda-st^2\lambda) = 0$$

解出

$$\lambda_1 = \frac{1-st}{1+t^2}, \quad \lambda_2 = \frac{s+t}{s(1+t^2)}$$

在  $s > 0, t > 0, 1-st > 0$  的限定条件下,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , 从而知  $\lambda_1$  对应的是内切圆.  $\triangle ABC$  的内切圆即有参数表示:

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC} \quad (3.8.1)$$

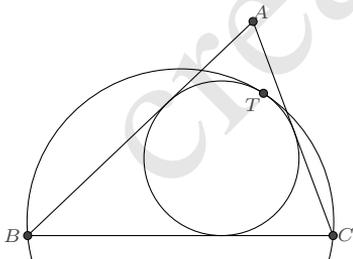
**例 3.8.3 (旁切圆)** 在三角形外且与三边相切的圆称为三角形的旁切圆. 前面导出内切圆的参数表示时,  $\lambda_2$  对应的即是  $B$ -旁切圆的表示. 而考虑与  $\angle B$  的补角相切的圆的表示:

$$\vec{BP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{\pi-B}{2} \right) \vec{BC} = \left( \lambda - \frac{2\lambda t^{-1}}{i+u} \right) \vec{BC}$$

经过类似的推导, 又可得到  $A$ -旁切圆和  $C$ -旁切圆的表示. 它们分别是:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\text{-旁切圆: } \vec{BP} = \frac{(s+t)(-t-2i+itu)}{(1-it)^2(1-iu)} \vec{BC} \\ B\text{-旁切圆: } \vec{BP} = \frac{(s+t)(1+2it-iu)}{s(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC} \\ C\text{-旁切圆: } \vec{BP} = \frac{(1-st)(t+2i-itu)}{s(1-it)^2(1-iu)} \vec{BC} \end{array} \right. \quad (3.8.2)$$

**例 3.8.4 (伪外接圆)** 过三角形的两个顶点, 且与三角形的内切圆相切的圆称为三角形的伪外接圆. 如图, 经过  $B, C$  两点且与内切圆相切的圆称为  $A$ -伪外接圆, 我们来导出它的表示.



**解** 根据 (3.8.1),  $\triangle ABC$  的内切圆可表示为

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC}$$

设  $A$ -伪外接圆的表示为

$$\vec{BP} = \frac{1+iq}{1-iv} \vec{BC}$$

当两圆相切时, 要求

$$\frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} = \frac{1+iq}{1-iv}$$

分离实部和虚部后消元  $v$ , 则得关于  $u$  的二次方程

$$(s+t)u^2 + 2(1-2st-t^2)u + 2q + s - 3t + 2qt^2 + 4st^2 = 0$$

此方程的两根应重合, 故判别式为 0.

$$\Delta = 4(1-2qs-s^2-2qt-2st+t^2-2qst^2-2qt^3+t^4) = 0$$

解出  $q$  即得  $A$ -伪外接圆的表示. 我们将其用通常的记号重新表述:  $A$ -伪外接圆上的任意点  $P$  有表示

$$\vec{BP} = \frac{(s+t+i+it^2)^2}{2(s+t)(1+t^2)(i+u)} \vec{BC} \quad (3.8.3)$$

切点  $T$  的表示是

$$\vec{BT} = \frac{(1-st)(s+t+i+it^2)}{(1+t^2)(s+t+i-2ist-it^2)} \vec{BC} \quad \square$$

**注记 3.8.5** 同理可求出  $B$ -伪外接圆和  $C$ -伪外接圆的表示, 但更直接的方式是对  $A$ -伪外接圆的表示作轮换而得:

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A, \tan \frac{A}{2} \rightarrow \tan \frac{B}{2}, \tan \frac{B}{2} \rightarrow \tan \frac{C}{2}, \tan \frac{C}{2} \rightarrow \tan \frac{A}{2}\}$$

也即轮换

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \rightarrow A, s \rightarrow t, t \rightarrow \frac{1-st}{s+t}, \frac{1-st}{s+t} \rightarrow s\}$$

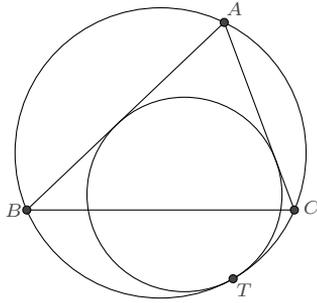
例如, 对 (3.8.3) 作一次轮换则得  $B$ -伪外接圆上点  $P$  的表示

$$\vec{CP} = \frac{(s+t+i+s+is^2)^2}{2(1+s^2)(s+t)(i+u)} \vec{CA}$$

将其转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BP} = \left( 1 - \frac{t(1+is)(1+s^2-is-it)^2}{2s(1-is)(1-it)^2(s+t)(i+u)} \right) \vec{BC}$$

**例 3.8.6 (伪内切圆)** 与三角形的两边相切, 且与三角形的外接圆内切的圆称为三角形的伪内切圆. 如图, 与边  $AB$ 、 $AC$  及外接圆相切的圆称为  $A$ -伪内切圆.



**解** 根据 (2.3.2), 与  $\angle CAB$  相切的圆有参数表示

$$\vec{AP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{A}{2} \right) \vec{AB} = \left( \lambda - \frac{2\lambda s}{i+u} \right) \vec{AB}$$

转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BP} = \frac{(s+t)(1-st)(1-\lambda-iu-2is\lambda+iu\lambda)}{s(1-it)^2(1-iu)} \vec{BC}$$

若它与  $\triangle ABC$  的外接圆相切, 则切点与  $A, B, C$  共圆, 由此得到关于  $u$  的二次方程

$$(1-\lambda)(s+t)(1-st)u^2 - 2(1-2\lambda)s(s+t)(1-st)u + s^3 + t + 3s^2t - s^3t^2 - s\lambda - 4s^3\lambda - t\lambda - 3s^2t\lambda + 4s^4t\lambda + st^2\lambda + 4s^3t^2\lambda = 0$$

相切又意味着方程的两根是重合的, 即有

$$\Delta = -4(s+t)(1-st)(t+s^2t-s\lambda-t\lambda)(1+s^2-\lambda+st\lambda) = 0$$

解得

$$\lambda_1 = \frac{t(1+s^2)}{s+t}, \quad \lambda_2 = \frac{1+s^2}{1-st}$$

在  $s > 0, t > 0, 1-st > 0$  的限定条件下, 易知  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , 因而  $\lambda$  应取值  $\lambda_1$ , 以使得所求圆内切于  $\triangle ABC$  的外接圆. 于是我们就得到了  $A$ -伪内切圆的一个表示:

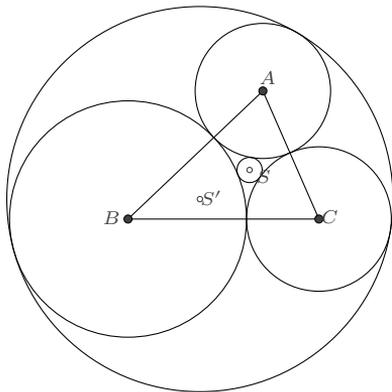
$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1-st-2it-2is^2t-iu+istu)}{(1-it)^2(1-iu)} \vec{BC} \quad (3.8.4)$$

切点  $T$  的表示是

$$\vec{BT} = \frac{(1-st)^2}{(1-it)(1-2st+it)} \vec{BC}$$

□

**例 3.8.7 (索迪圆)** 索迪圆是关于多圆相切问题的著名定理: 彼此相切的三圆必有两圆与它们相切. 如图, 给定  $\triangle ABC$ , 以  $A$ 、 $B$ 、 $C$  为圆心, 作三个圆两两相切, 并作与  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  都外切的圆  $\odot S$ , 以及与  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  都内切的圆  $\odot S'$ .  $\odot S$  称为**内索迪圆**,  $\odot S'$  称为**外索迪圆**.



**解** 设  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  的半径分别是  $r_A$ 、 $r_B$ 、 $r_C$ , 根据

$$r_A + r_B = AB, \quad r_B + r_C = BC, \quad r_C + r_A = CA$$

容易解出

$$r_A = \frac{t(1-st)}{s(1+t^2)}BC, \quad r_B = \frac{1-st}{1+t^2}BC, \quad r_C = \frac{t(s+t)}{1+t^2}BC$$

于是  $\odot A$  上的任意点  $X$ 、 $\odot B$  上的任意点  $Y$ 、 $\odot C$  上的任意点  $Z$  分别有表示:

$$\begin{cases} \vec{BX} = \left( \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} + \frac{t(1-st)}{s(1+t^2)} \frac{1+iu}{1-iu} \right) \vec{BC} \\ \vec{BY} = \frac{1-st}{1+t^2} \frac{1+iv}{1-iv} \vec{BC} \\ \vec{BZ} = \left( 1 + \frac{t(s+t)}{1+t^2} \frac{1+iw}{1-iw} \right) \vec{BC} \end{cases}$$

这里  $u$ 、 $v$ 、 $w$  是自由的参量. 其中  $\odot B$  的表示是较为简单的, 我们考虑在  $Y$  点处与之相切的圆系. 根据 (2.3.1) 知, 所有与  $\odot B$  在  $Y$  点处相切的圆均可表示为如下形式:

$$\vec{BP} = \vec{BY} + \frac{ik}{1-in} \frac{d}{dv} \vec{BY} = \frac{(1-st)(1-2k+v^2-in-iv^2\eta)}{(1+t^2)(1-iv)^2(1-in)} \vec{BC}$$

其中  $k$  是待定参数,  $\eta$  是变量. 若它与  $\odot A$  相切, 则在切点处: 根据  $X = P$  而有

$$t(1+tu)(1-iv)^2(1-in) + s(1-iu)(k+tv-v^2+t\eta-v\eta+it-ikt-iv-itv\eta+iv^2\eta) = 0$$

根据切向量  $\frac{d}{du} \vec{BX}$  与  $\frac{d}{d\eta} \vec{BP}$  平行又得

$$(1 + uv + u\eta - v\eta)(u - v - \eta - uv\eta) = 0$$

联立即可解出<sup>①</sup>

$$u = \frac{t(-1 + st - sv - tv)}{st + t^2 - sv + t^3v}, \quad k = \frac{(s+t)(t-v)^2(1+v^2)}{-t + st^2 - 2stv - 2t^2v + sv^2 - t^3v^2}$$

再考虑此圆与  $\odot C$  相切, 又得

$$w = \frac{t(s+t)}{(1-st)v}, \quad k = -\frac{(1+t^2)v^2(1+v^2)}{st + t^2 - v^2 + stv^2}$$

根据以上两式, 则可完全地解出各参数, 共有两组解. 第一组解是

$$k = -\frac{t(s+t)(1+t^2)(1+2s+s^2+2t+2st+2t^2)}{(1+s+t+t^2)^2(1+2s+s^2+2t+st+t^2)},$$

$$u = \frac{-1-s-t+st}{(1+t)(s+t)}, \quad v = \frac{t(s+t)}{1+s+t+t^2}, \quad w = \frac{1+s+t+t^2}{1-st}$$

对应的是内索迪圆. 它的一个参数表示为<sup>②</sup>:

$$\vec{BP} = \frac{(1+s+t-it)(1-st)(1+2s+s^2+2t+3st+3t^2-iu-2isu-is^2u-2itu-istu-it^2u)}{(1-it)^2(1+s+t+it)(1+2s+s^2+2t+st+t^2)(1-iu)} \vec{BC} \quad (3.8.5)$$

第二组解是

$$k = -\frac{t(s+t)(1+t^2)(1-2s+s^2-2t+2st+2t^2)}{(1-s-t+t^2)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)},$$

$$u = \frac{-1+s+t+st}{(1-t)(s+t)}, \quad v = \frac{-t(s+t)}{1-s-t+t^2}, \quad w = \frac{-1+s+t-t^2}{1-st}$$

对应的是外索迪圆. 它的一个参数表示为:

$$\vec{BP} = \frac{(1-s-t-it)(1-st)(1-2s+s^2-2t+3st+3t^2-iu+2isu-is^2u+2itu-istu-it^2u)}{(1-it)^2(1-s-t+it)(1-2s+s^2-2t+st+t^2)(1-iu)} \vec{BC} \quad (3.8.6)$$

□

<sup>①</sup>另一组解  $u = -\frac{1}{t}$ ,  $k = 1 + v^2$  对应是  $\odot B$ , 故应舍弃.

<sup>②</sup>出于行文习惯, 这里将变量  $\eta$  替换为  $u$ . 外索迪圆的表示亦同此.

**3.8.2 第二类特征圆的性质** 利用第二类特征圆的有理表示, 我们容易证明它们的有关性质, 这些性质的证明在过去往往被认为是困难的. 其中, 关于内切圆的性质发现非常之多, 以下两例是其中较为知名的.

**例 3.8.8 (费尔巴哈定理)** 三角形的九点圆与三角形的内切圆和旁切圆相切.

**证明** 以内切圆为例, 根据内切圆的表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC}$$

若它与三角形的九点圆有交点, 则交点  $P$  与  $\triangle ABC$  各边的中点共圆.

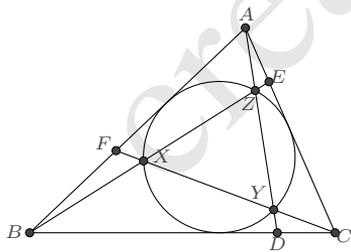
$$\operatorname{Im} \frac{(P - \frac{A+B}{2})(\frac{C+A}{2} - \frac{B+C}{2})}{(P - \frac{B+C}{2})(\frac{C+A}{2} - \frac{A+B}{2})} = 0$$

由此知

$$u = \frac{2t - s - 3st^2}{1 - 2st - t^2}$$

是唯一的解, 即两圆相切. □

**例 3.8.9 (Sejfried 定理)** 如果  $\triangle ABC$  的三个顶点与其对边上的点  $D, E, F$  的连线两两相交的点  $X, Y, Z$  都在内切圆  $I$  上, 且  $X, Y, Z$  相异, 那么  $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \varphi^6$ , 其中  $\varphi$  是方程  $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$  的根.



**证明** 根据内切圆的表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+2it-iu)}{(1+t^2)(1-iu)} \vec{BC}$$

设  $u$  为  $l, m, n$  时  $P$  分别对应  $X, Y, Z$  三点, 则分别根据  $AYZ, BZX, CXY$  共线

而有方程组

$$\begin{cases} m+n+2mns-2t+2mnt-2mst-2nst-mt^2-nt^2+2st^2=0 \\ l+n-2t=0 \\ 2+ls+ms+lt+mt-2st=0 \end{cases}$$

它有两组解

$$\begin{cases} l = \frac{-1+2st+t^2+\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)}, m = \frac{-3+2st-t^2-\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)}, n = \frac{1+2st+3t^2-\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)} \\ l = \frac{-1+2st+t^2-\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)}, m = \frac{-3+2st-t^2+\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)}, n = \frac{1+2st+3t^2+\sqrt{5}(1+t^2)}{2(s+t)} \end{cases}$$

进而不难根据共线关系求解出  $D$ 、 $E$ 、 $F$  及对应的线段比例关系

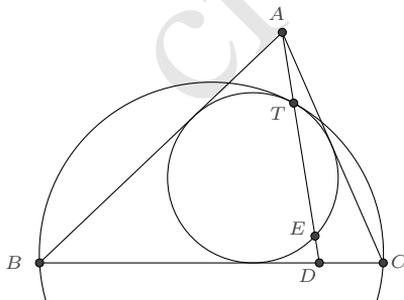
$$\begin{cases} \frac{BD}{DC} = \frac{3+\sqrt{5}(1-st)}{2t(s+t)}, \frac{CE}{EA} = \frac{3+\sqrt{5}s(s+t)}{2(1-st)}, \frac{AF}{FB} = \frac{3+\sqrt{5}t}{2s} \\ \frac{BD}{DC} = \frac{3-\sqrt{5}(1-st)}{2t(s+t)}, \frac{CE}{EA} = \frac{3+\sqrt{5}s(s+t)}{2(1-st)}, \frac{AF}{FB} = \frac{3-\sqrt{5}t}{2s} \end{cases}$$

从而

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = \left( \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \right)^3 = \left( \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \right)^6 \quad \square$$

近年来,对伪外接圆和伪内切圆的性质探索也非常热门,其中两个优美的性质如下.

**例 3.8.10** 设  $\triangle ABC$  的内切圆与  $A$ -伪外接圆的切点为  $T$ , 延长  $AT$  交  $BC$  于  $D$ , 交  $A$ -伪外接圆于  $E$ , 则  $\left(\frac{BE}{CE}\right)^2 = \left(\frac{BD}{CD}\right)^3$



**证明** 我们将前面所得的表示整理一下. 对  $\triangle ABC$ , 有:

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

根据 (3.8.3),  $A$ -伪外接圆的一个表示是

$$\vec{BP} = \frac{(s+t+i+it^2)^2}{2(s+t)(1+t^2)(i+u)} \vec{BC}$$

切点  $T$  的表示为

$$\vec{BT} = \frac{(1-st)(s+t+i+it^2)}{(1+t^2)(s+t+i-2ist-it^2)} \vec{BC}$$

根据以上表示, 不难计算出  $AT$  与  $BC$  边的交点  $D$ :

$$\vec{BD} = \frac{(1-st)^3}{(1+t^2)(1-3st-t^2+3s^2t^2+3st^3+t^4)} \vec{BC}$$

以及  $AT$  与  $A$ -伪外接圆的另一个交点  $E$ :

$$\vec{BE} = \frac{(1-st)^2(1-is-it+t^2)}{(1+t^2)(1-it)(1-st-is+2is^2t+2ist^2+it^3)} \vec{BC}$$

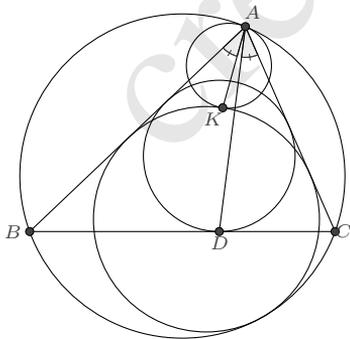
于是

$$\frac{BE}{CE} = \left| \frac{B-E}{C-E} \right| = \left| -\frac{(1-st)^2(1-is-it+t^2)}{t^2(s+t)^2(1+is+it+t^2)} \right| = \frac{(1-st)^2}{t^2(s+t)^2}$$

$$\frac{BD}{CD} = \left| \frac{B-D}{C-D} \right| = \frac{(1-st)^3}{t^3(s+t)^3}$$

从而可知待证结论成立. □

**例 3.8.11** 如图, 若圆  $\Gamma$  与  $\triangle ABC$  的外接圆相切于点  $A$ , 与  $\triangle ABC$  的  $A$ -伪内切圆相切于点  $K$ ,  $D$  是  $\triangle ABC$  内切圆在  $BC$  边上的切点, 则  $\angle BAK = \angle CAD$ .



**证明** 考虑  $\triangle ABC$  外接圆的如下表示:

$$\vec{BP} = \frac{(s+u)(1-su)}{s(1-iu)^2} \vec{BC}$$

$P$  在  $u = t$  时即是点  $A$ . 在  $A$  点处, 其切向量为

$$\mathbf{v}_A = \frac{d}{du} \vec{BP} \Big|_{u=t} = \frac{(1+is)^2(1+it)}{s(1-it)^3} \vec{BC}$$

于是圆  $\Gamma$  可设为

$$\vec{BP} = \vec{BA} + \frac{ik}{1-iu} \mathbf{v}_A = \left( \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} + \frac{ik}{1-iu} \frac{(1+is)^2(1+it)}{s(1-it)^3} \right) \vec{BC}$$

根据 (3.8.4),  $A$ -伪内切圆有表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1-st-2it-2is^2t-iv+istv)}{(1-it)^2(1-iv)} \vec{BC}$$

根据二者相切的条件即可求解出  $k$ , 它有两个解

$$k_1 = \frac{t(1-st)(1+t^2)}{2(s+t)}, \quad k_2 = \frac{1}{2}(1+t^2)$$

在  $s > 0, t > 0, 1-st > 0$  的限定条件下,  $0 < k_1 < k_2$ , 根据图示, 我们应取较小者. 对应的切点  $K$  的表示则为

$$\vec{BK} = \frac{(1-st)(1-st+2is+2it)}{(1-it)(1+2is+it)} \vec{BC}$$

点  $D$  也是  $\triangle ABC$  的内心在  $BC$  边上的投影, 即为

$$\vec{BD} = \operatorname{Re} \frac{1-st}{1-it} \vec{BC} = \frac{1-st}{1+t^2} \vec{BC}$$

从而

$$\operatorname{Im} \frac{(K-A)(D-A)}{(B-A)(C-A)} = \operatorname{Im} \frac{t(1-st)}{s+t} = 0$$

这就说明了  $\angle BAK = \angle CAD$ . □

关于索迪圆 (3.8.7), 亦有如下一些优美的性质:

(1). 内索迪圆的半径  $r_S$  与  $r_A, r_B, r_C$  有关系式:

$$\left( \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_S} \right)^2 = 2 \left( \frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} + \frac{1}{r_S^2} \right)$$

(2). 若外索迪圆包含  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  在其内, 则半径  $r'_S$  与  $r_A$ 、 $r_B$ 、 $r_C$  有关系式:

$$\left(\frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} - \frac{1}{r_{S'}}\right)^2 = 2\left(\frac{1}{r_A^2} + \frac{1}{r_B^2} + \frac{1}{r_C^2} + \frac{1}{r_{S'}^2}\right)$$

(3). 内索迪点  $S$  与外索迪点  $S'$  的距离平方可表示为

$$SS'^2 = r_S^2 + r_{S'}^2 \pm 14r_S r_{S'}$$

当外索迪圆包含  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  在其内时取  $-$  号, 否则取  $+$  号.

其中 (1)、(2) 又并称为笛卡尔定理. (3) 式近年由叶中豪先生发现.

**证明** 我们只需得到各量的表示即可. 其中  $r_A$ 、 $r_B$ 、 $r_C$  是已知的:

$$r_A = \frac{t(1-st)}{s(1+t^2)}BC, \quad r_B = \frac{1-st}{1+t^2}BC, \quad r_C = \frac{t(s+t)}{1+t^2}BC$$

根据内索迪圆的表示 (3.8.5), 作代换  $\frac{1+iu}{1-iu} = z; (|z| = 1)$ , 将其表示为

$$\vec{BP} = \left(\frac{(1-st)(1+s+t-it)^2}{(1-it)^2(1+2s+s^2+2t+st+t^2)} + \frac{t(s+t)(1+s+t-it)(1-st)}{(1-it)^2(1+s+t+it)(1+2s+s^2+2t+st+t^2)}z\right)\vec{BC}$$

即可得到内索迪点  $S$  和半径  $r_S$  的表示:

$$\vec{BP} = \frac{(1-st)(1+s+t-it)^2}{(1-it)^2(1+2s+s^2+2t+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$r_S = \frac{t(s+t)(1-st)}{(1+t^2)(1+2s+s^2+2t+st+t^2)}BC$$

根据  $r_A$ 、 $r_B$ 、 $r_C$ 、 $r_S$  的表示消元  $s$ 、 $t$ 、 $BC$  即得到关系式 (1).

同样地, 根据外索迪圆的表示 (3.8.6) 得到外索迪点  $S'$  和半径  $r_{S'}$  的表示为:

$$\vec{BS'} = \frac{(1-s-t-it)^2(1-st)}{(1-it)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)}\vec{BC}$$

$$r_{S'} = \frac{t(s+t)(1-st)}{(1+t^2)|1-2s-2t+st+s^2+t^2|}BC$$

若要使得  $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$  在外索迪圆的内部, 则需使得

$$r_{S'} - r_A = |S' - A|, r_{S'} - r_B = |S' - B|, r_{S'} - r_C = |S' - C|$$

此条件要求  $1 - 2s - 2t + st + s^2 + t^2 < 0$ , 将  $r_{S'}$  的表示与  $r_A$ 、 $r_B$ 、 $r_C$  联立消元又得

关系式 (2).

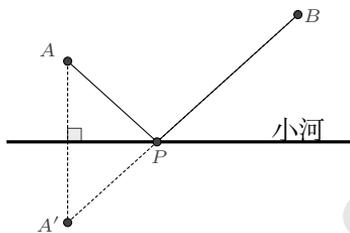
$$SS'^2 = \frac{16t^2(s+t)^2(1-st)^2(1-s^2+s^4-4st+2s^3t-t^2+3s^2t^2+2st^3+t^4)}{(1+t^2)^2(1-2s+s^2-2t+st+t^2)^2(1+2s+s^2+2t+st+t^2)^2} BC^2$$

由此易证 (3) 式. □

## 3.9 距离极值问题

平面几何中, 求几条线段长度的加和极值是一类常见的问题, 它们大都需要通过巧妙的转化才能给出解答. 其中最简单的是

**例 3.9.1 (将军饮马问题)** 将军每天从军营  $A$  出发, 先到河边饮马, 然后再去河岸同侧的  $B$  地开会, 求怎样走才能使路程最短.

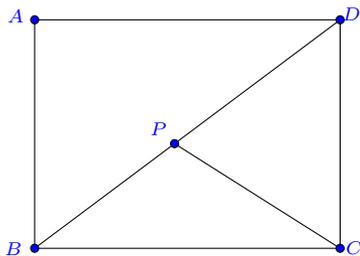


如图, 因为两点之间线段最短, 所以问题可简化为如下表述: 在直线  $l$  的同侧有  $A$ 、 $B$  两点, 在直线上求一点  $P$ , 使得  $AP + BP$  为最短.

一个著名的简便解法是作  $A$  关于直线 (小河) 的对称点  $A'$ , 设  $A'B$  与直线 (小河) 的交点为  $P$ , 则  $AP + BP$  为最短距离.

但如果假设饮马之后行进的速度变为之前的  $\lambda$  倍, 即目标变为求  $AP + \lambda BP (\lambda > 0)$  的最小值, 如何求解  $P$  点将是一个较为困难的问题. 事实上, 如果我们将  $A$ 、 $B$ 、 $P$  视为一个三角形的顶点, 利用三角形的有理化表示 (3.1.10), 则可将目标函数涉及的两条线段  $AP$ 、 $BP$  用参数有理地表示出来, 从而较为方便的计算出极值.

**例 3.9.2** 长方形  $ABCD$  的边长  $AB = 3$ 、 $BC = 4$ ,  $P$  为对角线  $BD$  上的一点, 求  $PC + \frac{3}{5}PB$  的最小值.



**解** 考虑  $\triangle PBC$  的四阶有理化表示, 令  $s = \tan \frac{\angle BPC}{2}$ ,  $t = \tan \frac{\angle PBC}{2}$ , 则

$$\vec{BP} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

于是目标函数涉及的两条边长  $PB$ 、 $PC$  有表示

$$PB = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} BC, \quad PC = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} BC$$

其中  $t$  的值不难根据

$$\tan \angle PBC = \frac{DC}{BC} = \frac{3}{4} = \frac{2t}{1-t^2}$$

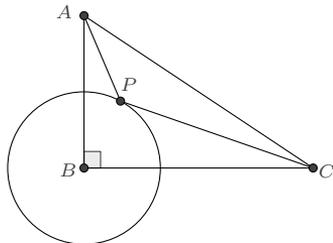
计算出, 为  $t = \frac{1}{3}$ , 从而目标函数变为

$$PC + \frac{3}{5}PB = 4 \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} + \frac{12(s+t)(1-st)}{5s(1+t^2)} = \frac{12(2+s)^2}{25s}$$

它的最小值是  $\frac{96}{25}$ , 在  $s = 2$  时取得. □

对于将动点的轨迹限定在圆上或者其他曲线上的情形, 解法是类似的.

**例 3.9.3** 在直角三角形  $ABC$  中,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = 4$ ,  $BC = 6$ , 以  $B$  为中心的圆半径为 2,  $P$  是圆上一动点, 连接  $AP$ 、 $CP$ , 求  $CP + \frac{1}{2}AP$  的最小值.



**解** 考虑  $\triangle CAP$  的四阶有理表示, 令

$$\vec{CP} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{CA}$$

则可以将目标函数化为有理表示

$$T = CP + \frac{1}{2}AP = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)}CA + \frac{1}{2} \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}CA = \sqrt{13} \frac{2s+3t-s^2t-2st^2}{s(1+t^2)}$$

另一方面, 因为  $\vec{BA} = \frac{4}{3}i\vec{BC} = \frac{2}{3}i\vec{BC}$ , 所以

$$\vec{CB} = \frac{B-C}{A-C} \vec{CA} = \frac{0-1}{\frac{2}{3}i-1} \vec{CA} = \left(\frac{9}{13} + \frac{6i}{13}\right) \vec{CA}$$

$P$  在以  $B$  为中心、半径为 2 的圆上这一条件则是

$$BP = |\vec{CP} - \vec{CB}| = \left| \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} - \left(\frac{9}{13} + \frac{6i}{13}\right) \right| 2\sqrt{13} = 2$$

将其化为有理方程表示

$$3s^2 + 8st - 24s^2t - 8s^3t + 13t^2 - 24st^2 + 24s^3t^2 + 13s^4t^2 - 8st^3 + 24s^2t^3 + 8s^3t^3 + 3s^2t^4 = 0$$

为简单地求出目标极值, 可将此式与目标函数联合消元  $t$ , 得到

$$(13 - 48s + 26s^2 + 48s^3 + 13s^4)T^4 + 2(11 + 552s - 1570s^2 - 1608s^3 - 461s^4)T^2 + 13(31 + 48s + 39s^2)^2 = 0$$

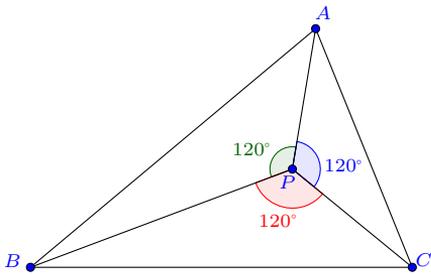
取极值时, 上式关于  $s$  的偏导数亦为 0, 即有

$$(-12 + 13s + 36s^2 + 13s^3)T^4 + 2(138 - 785s - 1206s^2 - 461s^3)T^2 + 39(8 + 13s)(31 + 48s + 39s^2) = 0$$

这两式联立, 解出目标函数的最小值为  $T = \sqrt{37}$ . □

利用这种转化, 三线段之和的极值也是可直接求出的, 例如著名的费马点极值.

**例 3.9.4 (费马点)** 在  $\triangle ABC$  所在平面找一点  $P$ , 使得该点到三个顶点的距离之和  $PA + PB + PC$  为最小.



**解** 因为点  $P$  必然与三角形的其中一个顶点位于该顶点所对边的同侧, 所以不妨设  $P$  与  $A$  位于  $BC$  的同侧, 则可令

$$\vec{BA} = (x + yi)\vec{BC}, \vec{BP} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}\vec{BC}$$

其中  $y > 0, s > 0, t > 0, 1 - st > 0$ . 于是目标函数可转化为仅含单一根式的表示

$$PA + PB + PC = \left( \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} + \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} + |x + yi - \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}| \right) BC$$

记  $L = \frac{PA+PB+PC}{BC}$ , 容易再将其转化为多项式方程表示:

$$\begin{aligned} (Ls + Lst^2 - s - 2t + st^2)^2 - s^2(1+t^2)^2(x^2 + y^2) \\ + 2s(1-t^2)(s+t)(1-st)x + 4st(s+t)(1-st)y - (s+t)^2(1-st)^2 = 0 \end{aligned}$$

$L$  取极值时, 上式对参量  $s, t$  的偏导亦等于 0. 这有两组解, 一组是

$$\begin{cases} s = \sqrt{3} \\ 3 - 2\sqrt{3}t - 3t^2 - 3x - 2\sqrt{3}tx + 3t^2x + \sqrt{3}y - 6ty - \sqrt{3}t^2y = 0 \\ 1 + L - 2\sqrt{3}t - t^2 + Lt^2 - 2x + 2t^2x - 4ty = 0 \end{cases}$$

此时

$$\vec{BP} = \frac{2(\sqrt{3}x + y)}{-3i + \sqrt{3} + (3i + \sqrt{3})x + (3 - i\sqrt{3})y}\vec{BC}$$

若要得到  $PA + PB + PC$  关于  $\triangle ABC$  边长的表示, 只需再联立

$$x^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}, \quad (x-1)^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

消元  $t$ 、 $x$ 、 $y$  即可. 其结果为

$$AP + BP + CP = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{\triangle ABC}}$$

另一组解是

$$\begin{cases} 2sx - 2sx^2 + y - s^2y - 2sy^2 = 0 \\ 2tx - y + t^2y = 0 \\ stx + Lstx - Lsy + ty = 0 \end{cases}$$

此时  $\vec{BP} = (x + yi)\vec{BC}$ , 也就是  $P$  为三角形的顶点  $A$ . 此时

$$AP + BP + CP = b + c$$

□

类似地, 通过将目标函数的两边有理化表示, 我们可以证明 **Fagnano 定理**: 在锐角三角形的内接三角形中, 以垂足三角形的周长为最短.

## 3.10 其他类的特征

前面我们定义的三角形第一、二类特征, 主要是从有理表示的角度考虑的. 它们的一个自然推广是:

**定义 3.10.1 (第  $n$  类特征量)** 对于一个给定的  $\triangle ABC$ , 若  $L$  可表示为一条边长的  $\frac{2}{n}$  次方和两个内角的  $\frac{1}{n}$  正切值的有理函数, 且不是第  $k(k = 1, 2, \dots, n-1)$  类特征量, 则称其  $L$  为  $\triangle ABC$  的第  $n$  类特征量.

**定义 3.10.2 (第  $n$  类特征点)** 若  $\triangle ABC$  的特征点  $P$  关于顶点的重心坐标分量是第  $1, 2, \dots, n$  类特征量, 且  $P$  不是第  $k(k = 1, 2, \dots, n-1)$  类特征点, 则称  $P$  为  $\triangle ABC$  的第  $n$  类特征点.

**定义 3.10.3 (第  $n$  类特征圆)** 若  $\triangle ABC$  的特征圆上的任意点  $P$  可表示为  $\vec{BP} = f(p, q, u)\vec{BC}$  (其中  $p, q$  为两个内角的  $\frac{1}{n}$  正切值,  $f$  是一个复数形式的有理函数) 的形式, 且不是第  $k(k = 1, 2, \dots, n-1)$  类特征圆, 则称其为  $\triangle ABC$  的第  $n$  类特征圆.

以上定义尚不算好, 但是足够我们方便地讨论三角形相关的命题. 同前面类似地, 有

**命题 3.10.4** 记  $s = \tan \frac{A}{n}$ 、 $t = \tan \frac{B}{n}$ , 若  $P$  是  $\triangle ABC$  的第  $n$  类特征点, 则  $P$  可表示为  $\vec{BP} = f(s, t)\vec{BC}$ , 其中  $f$  是一个复数形式的有理函数. 反之, 若  $P$  可表示为这样的形式

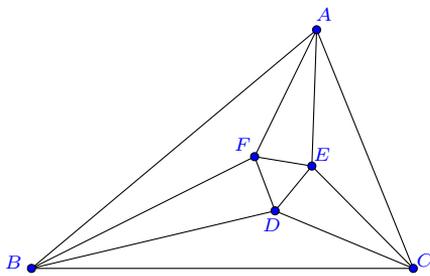
且不是第  $k(k=1, 2, \dots, n-1)$  类特征点, 则  $P$  是第  $n$  类特征点.

另外, 在此定义下, 关于尺规作图, 有如下命题:

**命题 3.10.5** 对于一个给定的三角形, 它的第  $2^k(k=0, 1, 2, 3, \dots)$  类特征点和特征圆是可以尺规作图的, 其他类特征点或特征圆不可以尺规作图.

三角形的常见特征点/特征圆几乎都属于第一类或第二类, 极少有属于第  $n(n \geq 4)$  类的. 广为人知的莫莱三角形是第三类特征.

**例 3.10.6 (莫莱三角形)** 如图, 在  $\triangle ABC$  中, 设分别接近于三边  $BC, CA, AB$  的各内角的三等分线相交于  $D, E, F$ , 则  $\triangle DEF$  是一个等边三角形.



**证明** 令  $a = e^{i\frac{2\angle A}{3}}$ ,  $b = e^{i\frac{2\angle B}{3}}$ ,  $c = e^{i\frac{2\angle C}{3}}$  ( $abc = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ), 并记  $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ , 对  $\triangle ABC$ ,  $\triangle DBC$ ,  $\triangle ECA$ ,  $\triangle FAB$ , 分别应用三角形的角角边表示 (3.1.7II) 则得

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \frac{b^3(1-c^3)}{1-b^3c^3} \vec{BC} \\ \vec{BD} &= \frac{b(1-c)}{1-bc} \vec{BC} \\ \vec{CE} &= \frac{c(1-a)}{1-ca} \vec{CA} = \frac{bc-\omega}{b-\omega} \vec{CA} \\ \vec{AF} &= \frac{a(1-b)}{1-ab} \vec{AB} = \frac{(1-b)\omega}{b(c-\omega)} \vec{BC}\end{aligned}$$

利用向量的加法, 又可将  $D, E, F$  统一表示如下:

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \frac{b(1-c)}{1-bc} \vec{BC} \\ \vec{BE} &= \frac{b(1-c)(1+b^3c+b^3c^2-b^2\omega-b^2c\omega-b^2c^2\omega)}{(1-bc)(1+bc+b^2c^2)(b-\omega)} \vec{BC} \\ \vec{BF} &= \frac{b^2(1-c)(1+c+c^2)(bc-\omega)}{(1-bc)(1+bc+b^2c^2)(c-\omega)} \vec{BC}\end{aligned}$$

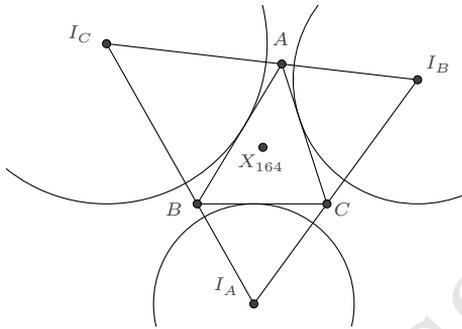
不难验证 (利用到性质:  $1 + \omega + \omega^2 = 0$ )

$$\vec{BD} + \omega \vec{BE} + \omega^2 \vec{BF} = 0$$

这就证明了  $\triangle DEF$  为正三角形. □

我们再举两个第四类特征的例子.

**例 3.10.7 (旁心三角形的内心)** 此点在ETC的编号是 X164, 它的定义是三角形  $\triangle ABC$  三个旁心所构成的三角形  $\triangle I_A I_B I_C$  的内心, 其重心坐标分量是  $a(\sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2}) : b(\sin \frac{C}{2} + \sin \frac{A}{2} - \sin \frac{B}{2}) : c(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} - \sin \frac{C}{2})$ .



**解** 若令  $p = \tan \frac{A}{4}$ ,  $q = \tan \frac{B}{4}$ , 则

$$e^{i\frac{A}{2}} = \frac{1+ip}{1-ip}, \quad e^{i\frac{B}{2}} = \frac{1+iq}{1-iq} \quad \dots\dots(*)$$

等式的两端取虚部即得

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{2p}{1+p^2}, \quad \sin \frac{B}{2} = \frac{2q}{1+q^2}$$

再根据

$$e^{i\frac{C}{2}} = e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{B}{2})} = i \frac{1-ip}{1+ip} \frac{1-iq}{1+iq}$$

取虚部又得

$$\sin \frac{C}{2} = \frac{(1+p+q-pq)(1-p-q-pq)}{(1+p^2)(1+q^2)}$$

另一方面, 根据正弦定理  $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ , 我们只需给出三个内角的正弦

值即可,方法是类似的.

$$\begin{cases} \sin A = \frac{4p(1-p)(1+p)}{(1+p^2)^2} \\ \sin B = \frac{4q(1-q)(1+q)}{(1+q^2)^2} \\ \sin C = \frac{4(p+q)(1-pq)(1+p+q-pq)(1-p-q-pq)}{(1+p^2)^2(1+q^2)^2} \end{cases}$$

再由角角边的表示 (3.1.7) 以及 (\*) 式而有

$$\vec{BA} = \frac{(p+q)(1-pq)(1+p+q-pq)(1-p-q-pq)}{p(1-p)(1+p)(1+q)^4} \vec{BC}$$

于是根据  $X_{164}$  的重心坐标表示, 我们得到

$$\overrightarrow{BX_{164}} = \frac{(1+i)(p+q)(1-p-q-pq+ip(1+p+q-pq))}{2p(1+p)(1-iq)^2} \vec{BC}$$

$p, q$  的取值范围可根据  $\tan \frac{A}{4}$ 、 $\tan \frac{B}{4}$ 、 $\tan \frac{C}{4}$  确定:

$$0 < \tan \frac{A}{4} = p < 1, \quad 0 < \tan \frac{B}{4} = q < 1, \quad 0 < \tan \frac{C}{4} = \frac{1-p-q-pq}{1+p+q-pq} < 1$$

化简后为  $0 < p < 1$ ,  $0 < q < \frac{1-p}{1+p}$ . □

我们也可以根据  $X_{164}$  的定义直接导出这个表示:

**解**  $\triangle ABC$  的三个旁心表示 (3.7.2) 是

$$\vec{BI}_A = \frac{s+t}{i+t} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_B = \frac{i(s+t)}{s(i+t)} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_C = \frac{i(1-st)}{s(1-it)} \vec{BC}$$

为求  $\triangle I_A I_B I_C$  的内心表示, 我们考虑先得到形如

$$\vec{I_B I_A} = \frac{(m+n)(1-mn)}{m(1-in)^2} \vec{I_B I_C}$$

的表示 (要求  $m > 0$ 、 $n > 0$ 、 $1-mn > 0$ ), 则  $X_{164}$  可表示为

$$\overrightarrow{I_B X_{164}} = \frac{1-mn}{1-in} \vec{I_B I_C}$$

根据旁心的表示, 计算得

$$\vec{I_B I_A} = \frac{s+t}{-i+t} \vec{I_B I_C}$$

即需要找到适合的  $m$ 、 $n$ , 使得

$$\frac{(m+n)(1-mn)}{m(1-in)^2} = \frac{s+t}{-i+t}$$

对此式分离实部和虚部, 容易解出  $s$ 、 $t$ :

$$s = \frac{1-m^2}{2m}, \quad t = \frac{1-n^2}{2n}$$

也就是说, 在上述代换下,  $X_{164}$  可以有理地表示出来.

$$\overrightarrow{BX_{164}} = \overrightarrow{BI_B} + \frac{1-mn}{1-in} (\overrightarrow{BI_C} - \overrightarrow{BI_B}) = \frac{(1-mn)(1-m^2-2mn+in+im^2n)}{(1-m)(1+m)(1+in)^2} \overrightarrow{BC}$$

但因为这里我们要求的是得到  $X_{164}$  关于  $p$ 、 $q$  的表示, 根据

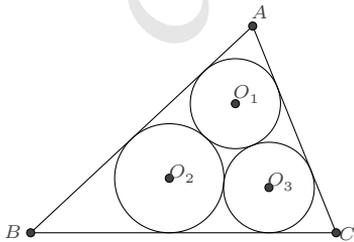
$$s = \tan \frac{A}{2} = \frac{2p}{1-p^2}, \quad t = \tan \frac{B}{2} = \frac{2q}{1-q^2}$$

比较  $s$ 、 $t$  的上述两种表示, 由各量取值的范围限定即知  $m = \frac{1-p}{1+p}$ ,  $n = \frac{1-q}{1+q}$ , 从而

$$\overrightarrow{BX_{164}} = \frac{(1+i)(p+q)(1-p-q-pq+ip(1+p+q-pq))}{2p(1+p)(1-iq)^2} \overrightarrow{BC} \quad \square$$

**注记 3.10.8** 这里我们通过将三角形  $\triangle I_A I_B I_C$  的表示与已知的三角形四阶有理表示形式做比较而求得了其内心, 在后文中将多次用到这种方法.

**例 3.10.9 (马尔法蒂问题)** 给定三角形  $ABC$ , 求三个圆, 使每个圆与三角形的两条边相切, 且三个圆两两相切.



**解** 各圆的圆心显然位于三角形顶点与内心  $I$  的连线上. 于是可设各圆的圆心分别为:

$$O_1 = \lambda I + (1-\lambda)A, \quad O_2 = \mu I + (1-\mu)B, \quad O_3 = \nu I + (1-\nu)C$$

其中  $0 < \{\lambda, \mu, \nu\} < 1$ . 相应地, 各圆的半径也可表示为:

$$r_1 = \lambda r, \quad r_2 = \mu r, \quad r_3 = \nu r$$

其中  $r$  是  $\triangle ABC$  内切圆的半径. 根据两两圆相切的条件, 有

$$|O_1 - O_2| = r_1 + r_2, \quad |O_2 - O_3| = r_2 + r_3, \quad |O_3 - O_1| = r_3 + r_1$$

记  $s = \tan \frac{A}{2}, t = \tan \frac{B}{2}$ , 将  $\triangle ABC$  的顶点、内心和内切圆半径的表示

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}, \quad r = \frac{t-st^2}{1+t^2} BC$$

代入, 则可得到如下的方程组

$$\begin{cases} t^2\lambda^2 - 2t\lambda(s+t-s\mu+2s^2t\mu) + (s+t-s\mu)^2 = 0 \\ (1-st)^2\mu^2 - 2(1-st)(1+t^2-st\nu+t^2\nu-2st^3\nu)\mu + (1+t^2-st\nu-t^2\nu)^2 = 0 \\ s^2(s+t)^2\nu^2 - 2s(s+s^3+t+s^2t+s\lambda-t\lambda-3s^2t\lambda+st^2\lambda+2s^3t^2\lambda)\nu + (1+s^2-\lambda+st\lambda)^2 = 0 \end{cases}$$

可以直接求解出  $\lambda, \mu, \nu$ , 但这样得到的表达式包含根式  $\sqrt{1+s^2}$  和  $\sqrt{1+t^2}$ , 这提示我们应该再做半角正切代换. 即令

$$s = \frac{2p}{1-p^2}, \quad t = \frac{2q}{1-q^2}$$

其中  $p = \tan \frac{A}{4}, q = \tan \frac{B}{4}$ , 并根据  $0 < \{\tan \frac{A}{4}, \tan \frac{B}{4}, \tan \frac{C}{4}\} < 1$  确定出它们的取值范围是  $0 < p < 1, 0 < q < \frac{1-p}{1+p}$ . 在此限定下, 即知方程组有唯一的解:

$$\lambda = \frac{(1+q)(1-pq)}{(1+p)(1+p+q-pq)}, \quad \mu = \frac{(1+p)(1-pq)}{(1+q)(1+p+q-pq)}, \quad \nu = \frac{(1+p)(1+q)(1+p+q-pq)}{4(1-pq)}$$

从而知各圆圆心的表示分别是:

$$\begin{aligned} \vec{BO}_1 &= \frac{(1-pq)(1-p-q-pq)(1+2p+p^2+3q+2pq-p^2q-2iq-2iq^2)}{(1-p)(1+p)^2(1-iq)^4} \vec{BC} \\ \vec{BO}_2 &= \frac{(1-pq)(1-p-q-pq)}{(1-p)(1-iq)^2(1+q)} \vec{BC} \\ \vec{BO}_3 &= \frac{(1-p-q-pq)(2+2q-3iq+2ipq+ip^2q-iq^2+2ipq^2-ip^2q^2)}{2(1-p)(1-iq)^2(1-pq)} \vec{BC} \quad \square \end{aligned}$$

## 3.11 表示间的关系

前面已叙, 三角形及其特征点的表示有多种的形式. 这些不同的表示有着怎样的关系呢? 它们之间是否可以相互转换?

**3.11.1 有理表示之间的关系** 我们以三角形第二类特征点的表示进行说明.

**例 3.11.1** 根据三角形的角角边表示 (3.1.7), 若令  $z = e^{i(A+B)}$ ,  $w = e^{iA}$ , 则三角形有表示

$$\vec{BA} = \frac{1-z^2}{1-w^2} \vec{BC} \quad (3.11.1)$$

并且在此表示下, 第二类特征点有比较简单的形式<sup>①</sup>. 例如内心和旁心的表示为

$$\vec{BI} = \frac{1+z}{1+w} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_A = \frac{1-z}{1+w} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_B = \frac{1-z}{1-w} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_C = \frac{1+z}{1-w} \vec{BC}$$

不难得知,  $z$ 、 $w$  与  $s$ 、 $t$  有如下的映射关系:

$$\begin{cases} z = \frac{(1+is)(1+it)}{(1-is)(1-it)}, & w = \frac{1+is}{1-is} \\ s = \frac{1-w}{1+w}i, & t = \frac{w-z}{w+z}i \end{cases}$$

事实上, 注意到这里三角形内心的表示与前文的表示 (3.7.1) 都是一阶的, 用其来确定变换关系会比较简明. 根据三角形对应点保持比例不变这一性质, 即有

$$\frac{I-B}{C-B} = \frac{1+z}{1+w} = \frac{1-st}{1-it}$$

此式取共轭又有

$$\frac{w(1+z)}{z(1+w)} = \frac{1-st}{1+it}$$

联立即可解出上述关系.

其它第二类特征点均可表示为  $z$ 、 $w$  的有理表示, 例如例如费尔巴哈点  $F_e$ , 根据 (3.7.4), 知

$$\vec{BF}_e = \frac{(1+z)(w+w^2-z+z^2)}{2(1+w)(w-z+wz)} \vec{BC}$$

**注记 3.11.2** 尽管上述表示在形式上更为简单, 但  $z$ 、 $w$  的取值范围是比较复杂的. 在涉及点的区分或值域的讨论时, 这样的表示显得不便.

<sup>①</sup>一般来说, 采用单位复数进行表示在形式上会更简单一些.

容易想到, 如果我们已知三角形及其特征点的一个有理表示, 对其做任意的双有理变换, 均可以给出它们的另一种有理表示. 例如, 若令

$$\vec{BI} = (u + iv)\vec{BC}$$

它与  $s, t$  的关系是

$$\begin{cases} s = \frac{u - u^2 - v^2}{v}, & t = \frac{v}{u} \\ u = \frac{1 - st}{1 + t^2}, & v = \frac{t - st^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

从而可以给出三角形其余点的表示:

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \frac{(1-u)(u+iv)^2}{u-u^2-v^2} \vec{BC} \\ \vec{BI}_A &= \frac{(1-u)(v-iv)}{v} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_B = \frac{(1-u)(u+iv)}{u-u^2-v^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_C = \frac{v(iu-v)}{u-u^2-v^2} \vec{BC} \\ \vec{BF}_e &= \frac{u^2 - u^3 - 2v^2 + uv^2 + iuv - 2iu^2v}{u - u^2 - 3v^2 + iv - 2iuv} \vec{BC} \end{aligned}$$

根据这种双有理映射关系, 即有

**命题 3.11.3** 对于一个三角形, 如果其内心与某一顶点连线构成的向量, 可由该顶点所在边的向量经由一个有理表示的旋转缩放变换而得到, 则该三角形的所有第二类特征点/圆均可有理地表示出来.

某些书上提到了三角形的一些其他设点方式.

**例 3.11.4** <sup>①</sup> 根据三角形总有外接圆这一性质, 若限定外接圆是单位圆, 则可令

$$A = a^2, \quad B = b^2, \quad C = c^2$$

这里  $a, b, c$  是单位复数:  $|a| = |b| = |c| = 1$ , 适当地规定它们的幅角范围, 可有理地表示三角形的内心和旁心为如下形式:

$$I = -(ab + bc + ca), \quad I_A = ab - bc + ca, \quad I_B = ab + bc - ca, \quad I_C = -ab + bc + ca$$

容易根据内心确定出这种表示与前文表示的关系:

$$\frac{I - B}{C - B} = \frac{-(ab + bc + ca) - b^2}{c^2 - b^2} = \frac{a + b}{b - c} = \frac{1 - st}{1 - it}$$

<sup>①</sup> 见《Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads》6.6 节.

联立此式及其共轭式即知

$$\begin{cases} s = i\frac{b+c}{b-c}, & t = i\frac{c+a}{c-a} \\ a = -c\frac{1+it}{1-it}, & b = -c\frac{1-is}{1+is} \end{cases}$$

确定转换关系后,即可导出其他第二类特征点在此设法下的表示. 例如费尔巴哈点

$$F_e = b^2 + \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}(c^2-b^2) = \frac{a^3b+ab^3+a^3c+b^3c+ac^3+bc^3}{2(ab+ac+bc)}$$

**例 3.11.5** 根据三角形总有内切圆这一性质,若限定内切圆是单位圆,又可令

$$A = \frac{2}{b+c}, \quad B = \frac{2}{c+a}, \quad C = \frac{2}{a+b}$$

这里  $a$ 、 $b$ 、 $c$  是单位复数:  $|a| = |b| = |c| = 1$ . 同上类似地,根据内心的表示有

$$\frac{I-B}{C-B} = \frac{0 - \frac{2}{c+a}}{\frac{2}{a+b} - \frac{2}{c+a}} = \frac{a+b}{b-c} = \frac{1-st}{1-it}$$

它与前一示例的变换关系是相同的.

$$\begin{cases} s = i\frac{b+c}{b-c}, & t = i\frac{c+a}{c-a} \\ a = -c\frac{1+it}{1-it}, & b = -c\frac{1-is}{1+is} \end{cases}$$

由此,费尔巴哈点

$$F_e = \frac{2}{c+a} + \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}\left(\frac{2}{a+b} - \frac{2}{c+a}\right) = \frac{a+b+c}{ab+ac+bc}$$

从以上示例中可以看到,对于三角形及第二类特征点所构成的图形来说,任意两组适当的有理化表示之间,存在双有理变换关系. 这个结论可以推广到更一般的情形.

**3.11.2 特征量的计算与转化** 利用有理表示计算特征量是方便的. 例如, 根据外心  $O$  和内心  $I$  的表示

$$\vec{BO} = \frac{i(1-is)^2}{4s} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

容易计算出二者距离的平方:

$$OI^2 = \frac{(1+s^2)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}{16s^2(1+t^2)} a^2$$

此表示容易转化为以下三种常见的形式:

**角度函数表示** 若代入  $s = \tan \frac{A}{2}$ 、 $t = \tan \frac{B}{2}$ , 化简后则为

$$OI^2 = \frac{3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C}{4\sin^2 A} a^2 = R^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$$

**边长表示** 若想得到  $OI^2$  关于三角形边长的表示, 只需联立它与边长  $b$ 、 $c$  的表示 (3.6)

$$b = \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)} a, \quad c = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} a$$

转化为多项式方程组即是

$$\begin{cases} 16s^2(1+t^2)OI^2 - (1+s^2)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)a^2 = 0 \\ bs(1+t^2) - t(1+s^2)a = 0 \\ cs(1+t^2) - (s+t)(1-st)a = 0 \end{cases}$$

消元  $s$ 、 $t$  则得

$$OI^2 = \frac{abc(a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - b^2c - c^2a - ab^2 - bc^2 - ca^2 + 3abc)}{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$

**特征量  $IRr$  表示** 若要得到  $IF_e$  关于三角形的半周长  $l$ 、外接圆半径  $R$ 、内切圆半径  $r$  的表示, 同样地, 我们联立  $OI^2$  的表示与这三者的表示:

$$l = \frac{s+t}{s(1+t^2)} a, \quad R = \frac{1+s^2}{4s} a, \quad r = \frac{t-st^2}{1+t^2} a$$

消元  $s$ 、 $t$ 、 $a$  即得

$$OI^2 = R^2 - 2rR$$

**3.11.3 转化为重心坐标表示** 因为重心坐标分量也是三角形的特征量,所以转化是同上类似的,我们只需要根据特征点的表示得到各重心坐标分量的表示即可.

**例 3.11.6 (费尔巴哈点的重心坐标)** 设费尔巴哈点关于  $\triangle ABC$  的重心坐标表示为:  $F_e = \alpha A + \beta B + \gamma C$  ( $\alpha A + \beta B + \gamma = 1$ ), 将改写为  $\vec{BF}_e = \alpha \vec{BA} + \gamma \vec{BC}$ , 代入  $\vec{BA}$  的表示 (3.1.10), 即有

$$\vec{BF}_e = \left( \alpha \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} + \gamma \right) \vec{BC}$$

将其与费尔巴哈点的有理表示 (3.7.4) 比较, 则知:

$$\alpha \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} + \gamma = \frac{(1-st)(1-st-2t^2+is-it)}{(1-it)^2(1-3st+is-it)}$$

分离实部和虚部, 我们就可以解出  $\alpha$  和  $\gamma$ .

$$\alpha = \frac{s(1-2st-t^2)^2}{(s+t)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}, \quad \gamma = \frac{(s-t)^2(1-st)}{1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2}$$

并且

$$\beta = 1 - \alpha - \gamma = \frac{t(1-s^2-2st)^2}{(s+t)(1+s^2-8st+t^2+9s^2t^2)}$$

另一种方法是根据重心坐标分量的几何意义,  $\alpha : \beta : \gamma = S_{F_e BC} : S_{AF_e C} : S_{ABF_e}$  (其中  $S$  表示有向面积), 得到

$$\begin{aligned} \alpha : \beta : \gamma &= \text{Im}(\vec{BF}_e \otimes \vec{BC}) : \text{Im}(\vec{CF}_e \otimes \vec{CA}) : \text{Im}(\vec{AF}_e \otimes \vec{AB}) \\ &= s(1-2st-t^2)^2 : t(1-s^2-2st)^2 : (s-t)^2(s+t)(1-st) \end{aligned}$$

利用“特征量的计算与转化”方法, 我们可导出重心坐标分量的其它表示, 以  $\alpha$  为例, 它用角度函数表示是

$$\alpha = \frac{\sin^2(\frac{B-C}{2}) \sin(\frac{A}{2}) \sec(\frac{B}{2}) \sec(\frac{C}{2})}{3 - 2 \cos A - 2 \cos B - 2 \cos C}$$

用边长表示则是

$$\alpha = \frac{(b+c-a)(b-c)^2}{2(a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-c^2a-a^2c+3abc)}$$

根据对称性,  $\beta$ 、 $\gamma$  可由  $\alpha$  的表示通过变量轮换而得.

**3.11.4 转化为一般复数表示** 对于三角形的第一类特征点, 有理表示可以直接转化为一般复数表示. 例如, 前面我们已知,  $\triangle ABC$  在  $\vec{BA} = z\vec{BC}$  的表示下, 垂心的表示是

$$\vec{BH} = \frac{(z-1)(z+\bar{z})}{z-\bar{z}} \vec{BC}$$

若各点以复数表示, 则我们只需将上式中的  $z$  以  $z = \frac{A-B}{C-B}$  代入, 按复数运算法则化简表示即可, 从而得到

$$H = \frac{(B-C)(B+C-A)\bar{A} + (C-A)(C+A-B)\bar{B} + (A-B)(A+B-C)\bar{C}}{(B-C)\bar{A} + (C-A)\bar{B} + (A-B)\bar{C}}$$

对于三角形的第二类特征点, 可通过消元得到它的方程表示. 例如对于  $\triangle ABC$  的表示 (3.1.10), 若各点是复数, 则可将其改写为

$$\frac{A-B}{C-B} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}$$

对此式取共轭, 又有

$$\frac{\bar{A}-\bar{B}}{\bar{C}-\bar{B}} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1+it)^2}$$

同样的, 改写三角形内心的表示 (3.7.1) 为

$$\frac{I-B}{C-B} = \frac{1-st}{1-it}$$

以上三式联立, 消元  $s, t$  则知, 内心  $I$  是如下关于  $Z$  的四次方程的一个解:

$$\begin{aligned} & \bar{A}(B-C)(Z^2 - 2AZ + AB - BC + CA)^2 \\ & + \bar{B}(C-A)(Z^2 - 2BZ + AB + BC - CA)^2 \\ & + \bar{C}(A-B)(Z^2 - 2CZ - AB + BC + CA)^2 = 0 \quad (3.11.2) \end{aligned}$$

另外三个解是三角形的旁心.

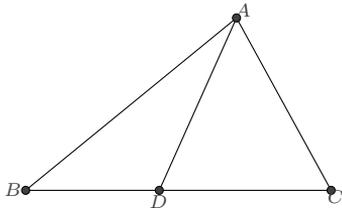
## 3.12 表示的深化讨论

对于由三角形及其相关的点、线和圆构成的初等几何图形来说, 一旦我们获得了该图形各元素的有理表示, 则其各项性质通常容易计算证明.

绝大多数初等几何命题仅限于第一、二类特征, 其中第一类特征显然是可有理表示的, 又根据命题 (3.11.3), 对于第二类特征, 若知晓三角形的内心关于两个顶点所成向量的有理表示, 则所有其他第二类特征也是容易表示的. 因此, 我们着重研究三角形内心

的有理表示,进一步地说,考虑三角形内角的单位复数(或半正切)表示即可.

**3.12.1 过顶点直线划分的情形** 如图,  $\triangle ABC$  中,  $D$  是边  $BC$  上的任意一点, 线段  $AD$  将三角形划分为两个小三角形, 求使得  $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$  的内心同时有有理化的一个表示.



**解** 如前, 我们仍令  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$ , 这样三角形  $\triangle ABC$  的内心已可有理表示. 为了有理表示  $\triangle ABD$  的内心, 可再令  $p = \tan \frac{\angle BAD}{2}$  ( $0 < p < s$ ), 根据

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC} = \frac{(p+t)(1-pt)}{p(1-it)^2} \vec{BD}$$

可知

$$\vec{BD} = \frac{p(s+t)(1-st)}{s(p+t)(1-pt)} \vec{BC}$$

$\triangle ABD$  的内心  $I_1$  则可表示为

$$\vec{BI}_1 = \frac{1-pt}{1-it} \vec{BD} = \frac{p(s+t)(1-st)}{s(p+t)(1-it)} \vec{BC}$$

对于  $\triangle ADC$ , 因为

$$\begin{aligned} \tan \frac{\angle DAC}{2} &= \tan \frac{\angle A - \angle BAD}{2} = \frac{s-p}{1+sp} := \varsigma \\ \tan \frac{\angle ADC}{2} &= \tan \frac{\angle BAD + \angle ABD}{2} = \frac{p+t}{1-pt} := \eta \end{aligned}$$

所以其内心  $I_2$  的表示为

$$\vec{DI}_2 = \frac{1-\varsigma\eta}{1-i\eta} \vec{DC} = \frac{(1+ip)(1-st)}{(1+ps)(1-it)} \vec{DC}$$

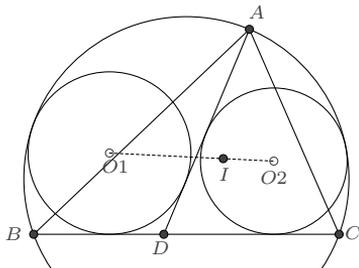
转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BI}_2 = \frac{(s-ipt)(1-st)}{s(1-it)(1-pt)} \vec{BC}$$

□

与此相关的一个著名命题是泰博定理, 它曾在相当长的时间里被认为是困难的.

**例 3.12.1 (泰博定理)** 给定  $\triangle ABC$  以及  $BC$  上任意一点  $D$ , 若  $\odot O_1$ 、 $\odot O_2$  分别与  $AD$ 、 $BC$  和  $\triangle ABC$  的外接圆都相切, 则  $O_1$ 、 $O_2$  和  $\triangle ABC$  的内心共线.



**证明** 令  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  及其内心  $I$  的表示为:

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

再令  $p = \tan \frac{\angle BAD}{2}$  ( $s > p > 0$ ), 有

$$\vec{BD} = \frac{p(s+t)(1-st)}{s(p+t)(1-pt)} \vec{BC}$$

根据相切于一角的圆的表示 (2.3.2), 先计算  $\angle ADC$  的半正切值:

$$\tan \frac{\angle ADC}{2} = \tan \frac{\angle BAD + \angle ABC}{2} = \frac{p+t}{1-pt}$$

从而  $\odot O_1$  上的任意点  $P$  可表示为

$$\vec{DP} = \left( \lambda - \frac{2\lambda}{i+u} \tan \frac{\pi + \angle ADC}{2} \right) \vec{DB} = \lambda \left( 1 + \frac{2}{i+u} \frac{1-pt}{p+t} \right) \vec{DB}$$

$\odot O_2$  上的任意点  $P$  可表示为

$$\vec{DP} = \left( \mu - \frac{2\mu}{i+u} \tan \frac{\angle ADC}{2} \right) \vec{DC} = \mu \left( 1 - \frac{2}{i+u} \frac{p+t}{1-pt} \right) \vec{DC}$$

其中  $\lambda$  和  $\mu$  均是正实数.

若  $\odot O_1$  内切于  $\triangle ABC$  的外接圆, 则由  $P$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$  四点共圆所得到的关于  $u$  的二次方程的判别式应等于 0, 从而解出  $\lambda$ :

$$\lambda_1 = \frac{p-s}{p(1-st)}, \quad \lambda_2 = \frac{(p-s)t}{1-st}, \quad \lambda_3 = \frac{(1+ps)t}{s+t}, \quad \lambda_4 = \frac{1+ps}{p(s+t)}$$

根据  $\triangle ABC$  的一般限定条件  $s > 0, t > 0, 1 - st > 0$  及前面所要求的  $s > p > 0$ , 可知  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < \lambda_4$ , 再由内切条件知应满足要求的解是  $\lambda_3$ , 于是  $\odot O_1$  的表示是:

$$\vec{BP} = \frac{p(1-st)(ps+st+2it+2ipst-ipsu-istu)}{s(p+t)^2(1-iu)} \vec{BC}$$

其圆心

$$\vec{BO}_1 = \frac{p(1-st)(ps+st+it+ipst)}{s(p+t)^2} \vec{BC}$$

同理, 可求出  $\odot O_2$  的圆心

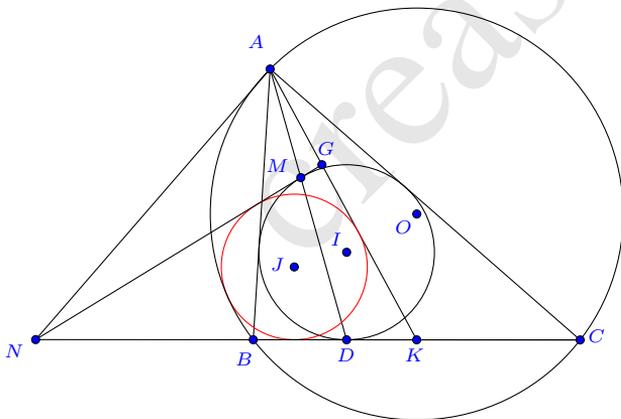
$$\vec{BO}_2 = \frac{(1-st)(s-pst+ist-ipt)}{s(1-pt)^2} \vec{BC}$$

计算即有

$$\frac{O_1 - I}{I - O_2} = \frac{(1-pt)^2}{(p+t)^2} \in R$$

因而  $O_1, O_2, I$  三点共线. □

**例 3.12.2 (2021 沙雷金几何第 18 题)** 非等腰三角形  $\triangle ABC$  内切圆为  $I$ ,  $BC$  边的中点为  $K$ , 在  $BC$  边上的切点为  $D$ ,  $AD$  交  $I$  于另一点  $M$ , 过  $M$  作圆  $I$  的切线, 它与直线  $BC$  交于点  $N$ , 与  $AK$  交于点  $G$ . 三角形  $\triangle NGK$  的内切圆为  $J$ , 求证:  $J$  与三角形  $ABC$  的外接圆  $O$  相切.



**证明** 令  $s = \tan \frac{A}{2}, t = \tan \frac{B}{2}$ , 则知

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

$$\vec{BK} = \frac{1}{2}\vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1-st}{1+t^2}\vec{BC}$$

$AD$  交  $\odot I$  的交点  $M$  为

$$\vec{BM} = \frac{(i+2s+3t)(1-st)}{(i+2s+t)(1-it)^2}\vec{BC}$$

它的切向量

$$\vec{v} = \frac{t(1-st)(1+2s+2t-2st-t^2)^2}{(1+t^2)(1-it)^2(1-2is-it)^2}\vec{BC}$$

设  $\vec{BN} = \lambda\vec{BC}$ , 由  $\vec{MN} // \vec{v}$  解出

$$\vec{BN} = \frac{1-st}{1-2st-t^2}\vec{BC}$$

同理, 求出

$$\vec{BG} = \frac{(1-st)(2s+3t+2ist+it^2)}{2(1-it)(s+t)}\vec{BC}$$

为求出  $\triangle NGK$  的内切圆  $J$ , 我们令  $p = \tan \frac{\angle NGK}{2}$ ,  $q = \tan \frac{\angle GKN}{2}$ , 即有

$$\vec{NG} = \frac{(p+q)(1-pq)}{p(1-iq)^2}\vec{NK}$$

而根据前面的表示计算

$$\vec{NG} = -\frac{t(1+2is+it)^2(1-st)}{(1-it)^2(s+t)}\vec{NK}$$

二者对比, 若限定非等腰三角形  $\triangle ABC$  的边  $AB < AC$ , 则由  $q > 0$  及

$$\frac{(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)} < \frac{t(1+s^2)}{s(1+t^2)}, \quad s > 0, \quad t > 0, \quad 1-st > 0$$

知

$$q = \frac{-1+2st+t^2}{2(s+t)}$$

并且

$$2(s+t)^2(1-p^2) + p(1-2st-t^2)(s-4s^3+2t-4s^2t-st^2) = 0$$

于是由

$$\vec{NJ} = \frac{1-pq}{1-iq}\vec{NK}, \quad r_J = \frac{q-pq^2}{1+q^2}NK$$

转化得到

$$\vec{BJ} = \frac{2i - p + 2s - ipt}{2(i + 2s + t)} \vec{BC}, \quad r_J = \frac{p + 2s + 2t - 2pst - pt^2}{2(1 + 4s^2 + 4st + t^2)} BC$$

$\triangle ABC$  的外接圆圆心和半径分别为

$$\vec{BO} = \frac{i(1 - is)^2}{4s} \vec{BC}, \quad R = \frac{1 + s^2}{4s} BC$$

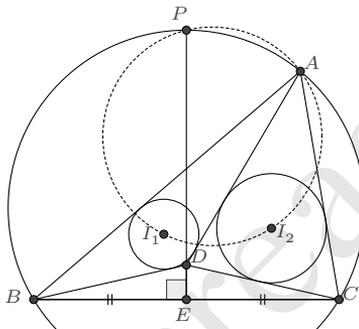
计算即有

$$(R - r_J)^2 - |\vec{BO} - \vec{BJ}|^2 = \frac{2(s+t)^2(1-p^2) + p(1-2st-t^2)(s-4s^3+2t-4s^2t-st^2)}{2(1+4s^2+4st+t^2)^2} BC = 0$$

这就证明了  $\odot J$  与三角形  $ABC$  的外接圆  $O$  相切.  $\square$

对于某些命题, 选择其他边作为基向量可能会使计算量稍小一些.

**例 3.12.3**  $\triangle ABC$  的外接圆为  $O$ ,  $D$  是边  $BC$  的中垂线上的一点, 且点  $D$  位于  $\angle BAC$  之内,  $I_1$ 、 $I_2$  分别为  $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$  的内心, 求证:  $\triangle AI_1I_2$  的外接圆恒过一定点.



**证明** 因为  $A$  点在题目中出现的频次最高, 所以我们考虑以  $AB$  为基准向量. 令  $a = e^{iA}$ ,  $c = e^{iC}$ ,  $z = e^{i\angle BAD}$ ,  $w = e^{i\angle ABD}$ . 对于  $\triangle ABD$ :

$$\vec{AD} = \frac{z^2(1-w^2)}{1-w^2z^2} \vec{AB}, \quad \vec{AI_1} = \frac{(1-w)z}{1-wz} \vec{AB}$$

对于  $\triangle ACD$ :

$$\angle CAD = \angle A - \angle BAD \implies e^{i\angle CAD} = \frac{a}{z}$$

又  $D$  点在  $BC$  的中垂线上, 所以

$$\angle ACD - \angle C = \angle ABD - \angle B \implies e^{i\angle ACD} = -ac^2w$$

于是

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \frac{z^2 - a^4 c^4 w^2}{z^2(1 - a^2 c^4 w^2)} \vec{AD} = \frac{(1 - w^2)(z^2 - a^4 c^4 w^2)}{(1 - w^2 z^2)(1 - a^2 c^4 w^2)} \vec{AB} \\ \vec{AI_2} &= \frac{z - a^2 c^2 w}{z - ac^2 w} \vec{AD} = \frac{(1 - w^2)z(z - a^2 c^2 w)}{(1 - w^2 z^2)(1 - ac^2 w)} \vec{AB}\end{aligned}$$

联合  $\vec{AC} = \frac{1 - c^2 a^2}{1 - a^2} \vec{AB}$  知有关系式:

$$1 - a^2 c^2 + a^2 c^2 w^2 - a^2 c^4 w^2 - z^2 + c^2 z^2 - c^2 w^2 z^2 + a^2 c^4 w^2 z^2 = 0$$

$\triangle AI_1 I_2$  外接圆上的点  $P$  设为:  $\vec{AP} = \chi \vec{AB}$  (其中  $|\chi| = 1$ ) 它应满足  $P, A, I_1, I_2$  四点交比为实数:  $\operatorname{Im} \left( \frac{P - I_1}{P - A} \frac{I_2 - A}{I_2 - I_1} \right) = 0$ , 即有:

$$\begin{aligned}(1 - w)(1 - ac^2 w + a^2 c^2 w + a^2 c^2 w^2 - z - ac^2 w^2 z)\chi \\ - (1 - w)z(a + a^2 c^2 w^2 - z - wz + awz - a^2 c^2 w^2 z)\bar{\chi} \\ - (1 - a)(1 - ac^2 w)(1 - w^2 z^2)\chi\bar{\chi} = 0\end{aligned}$$

以上两式联合消元参数  $w$ , 将得到关于  $z$  的四次方程:

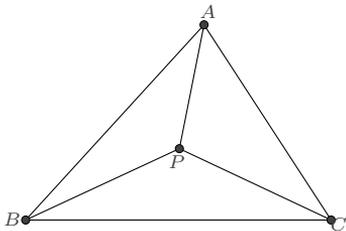
$$\begin{aligned}ac^2(1 + ac^2 + a\bar{\chi} - ac^2\bar{\chi})^2\chi^2 + \bar{\chi}^2(1 + ac^2 - \chi + c^2\chi)^2z^4 \\ + (1 + a)\bar{\chi}(1 + ac^2 - \chi + c^2\chi)(\bar{\chi} - ac^2\bar{\chi} - 2c^2\chi - \bar{\chi}\chi + c^2\bar{\chi}\chi)z^3 \\ - (1 + a)c^2\chi(1 + ac^2 + a\bar{\chi} - ac^2\bar{\chi})(2a\bar{\chi} + \chi - ac^2\chi - a\bar{\chi}\chi + ac^2\bar{\chi}\chi)z \\ + (1 + ac^2)(a\bar{\chi}^2 + a^2 c^2 \bar{\chi}^2 - 2a\bar{\chi}^2\chi + 2ac^2\bar{\chi}^2\chi + c^2\chi^2 + ac^4\chi^2 \\ + 2ac^2\bar{\chi}\chi^2 - 2ac^4\bar{\chi}\chi^2 + a\bar{\chi}^2\chi^2 - 2ac^2\bar{\chi}^2\chi^2 + ac^4\bar{\chi}^2\chi^2)z^2 = 0\end{aligned}$$

过定点的条件为无论  $z$  取何值, 此式均成立, 因此关于  $z$  的各项系数均为 0, 由此解出:

$$\chi = \frac{1 + ac^2}{1 - c^2}, \quad \bar{\chi} = \frac{1 + ac^2}{a(c^2 - 1)}$$

定点  $P$  即为  $BC$  的中垂线与外接圆在  $A$  侧的交点. □

**3.12.2 三角形内点划分的情形** 如图,  $P$  是  $\triangle ABC$  内的一点, 求使得  $\triangle ABC$ 、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ 、 $\triangle PCA$  的内心同时有理化的一个表示.



**解** 为了简洁, 这里我们采用角度的单位复数进行表示. 令  $a = e^{i\angle A}$ ,  $b = e^{i\angle B}$ ,  $p = e^{i\angle BPC}$ ,  $q = e^{i\angle PBC}$ , 则  $\triangle ABC$  的内心  $I$ 、 $\triangle PBC$  的内心  $I_1$  可分别表示为:

$$\vec{BI} = \frac{1+ab}{1+a} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_1 = \frac{1+pq}{1+p} \vec{BC}$$

为有理表示  $\triangle PCA$  的内心  $I_2$  和  $\triangle PAB$  的内心  $I_3$ , 只需再令  $z = e^{i\angle BAP}$ , 则

$$\vec{AI}_3 = \frac{(b-q)z}{bz-q} \vec{AB}, \quad \vec{CI}_2 = \frac{pq(a-z)}{a(pq-bz)} \vec{CA}$$

转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BI}_3 = \frac{(1-a^2b^2)q(1-z)}{(1-a^2)(q-bz)} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_2 = \frac{pq - a^2b^2pq - bz + a^2bz - apqz + ab^2pqz}{(1-a^2)(pq-bz)} \vec{BC}$$

又根据  $z$  的定义, 知有

$$z^2 = \frac{(P-A)}{(B-A)} / \overline{\left(\frac{P-A}{B-A}\right)} = -\frac{q^2(a^2 - a^2b^2 - p^2 + a^2b^2p^2 + p^2q^2 - a^2p^2q^2)}{b^2 - a^2b^2 - q^2 + a^2b^2q^2 + p^2q^2 - b^2p^2q^2}$$

也就是说, 如果存在适当的  $a, b, p, q, z$  的有理表示, 使得上述等式成立, 则各三角形的内心均可有理表示.  $\square$

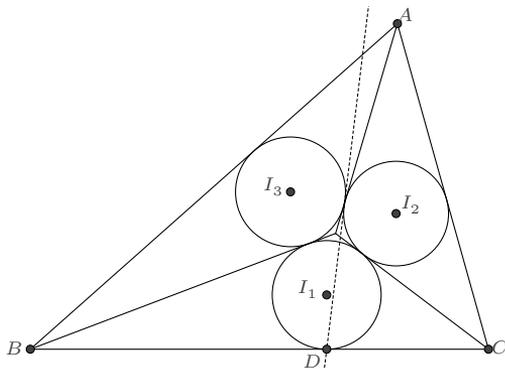
一个典型的示例是  $P$  为三角形的内心  $I$ , 此时  $a = -p^2$ ,  $b = q^2$ ,  $z = -ip$ , 相应地, 各点有表示:

$$\vec{BA} = \frac{1-p^4q^4}{1-p^4} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-p^2q^2}{1-p^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_1 = \frac{1+pq}{1+p} \vec{BC}$$

$$\vec{BI}_2 = \frac{(1+pq)(1-p^2-pq+p^2q^2-ip+ip^2q)}{(1-p^2)(1-ip)} \vec{BC}, \quad \vec{BI}_3 = \frac{(1-p^2q^2)(1-ipq)}{(1-p^2)(1-ip)} \vec{BC}$$

与此相关的一个命题是:

**例 3.12.4** 给定  $\triangle ABC$ ,  $I$  为内心, 圆  $I_1, I_2, I_3$  分别为  $\triangle IBC, \triangle ICA, \triangle IAB$  的内切圆, 则圆  $I_2, I_3$  的异于  $AI$  的另一条内公切线过  $I_1$  与  $BC$  的切点.



**证明** 根据上面所得各三角形内心  $I_1, I_2, I_3$  的表示, 容易计算出  $\odot I_2, \odot I_3$  的半径:

$$r_2 = \frac{p(1-q)(1-iq)(1+q)(1+pq)}{2(1-p)(1-ip)(1+p)q^2} BC$$

$$r_3 = \frac{(1-q)(1-pq)(i+pq)(1+pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q^2} BC$$

因而  $\odot I_2$  上的任意点  $P$  可表示为:

$$\vec{BP} = \left( \frac{(1+pq)(1-ip-p^2-pq+ip^2q+p^2q^2)}{(1-ip)(1-p)(1+p)} + \frac{p(1-q)(1-iq)(1+q)(1+pq)}{2(1-p)(1-ip)(1+p)q^2} \frac{1+iu}{1-iu} \right) \vec{BC}$$

$\odot I_3$  上的任意点  $Q$  可表示为:

$$\vec{BQ} = \left( \frac{(1-ipq)(1-pq)(1+pq)}{(1-ip)(1-p)(1+p)} + \frac{(1-q)(1-pq)(i+pq)(1+pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q^2} \frac{1+iv}{1-iv} \right) \vec{BC}$$

若  $P, Q$  是另一条内公切线上的切点, 则  $uv = -1$  并且

$$u = \frac{i + (1+i)q + (1-i)pq - ipq^2}{1 + pq^2}$$

两切点的表示即为:

$$\vec{BP} = \frac{\left( \begin{aligned} &(1+pq)(ip+p^2+(2-2i)q-(1+2i)pq-p^2q-2iq^2-(6-i)pq^2 \\ &+5ip^2q^2+2p^3q^2-(1-2i)pq^3+5p^2q^3-2ip^3q^3+(1-i)p^2q^4-2p^3q^4) \end{aligned} \right)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q((1-i)-iq-pq)} \vec{BC}$$

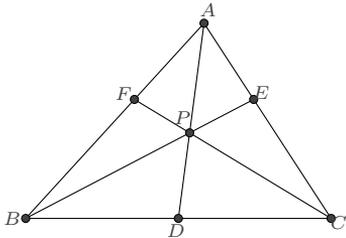
$$\vec{BQ} = \frac{(1+q)(1-pq)(1-ipq)(1+pq)(1-ip-2iq-(1-i)pq)}{2(1-ip)(1-p)(1+p)q((1-i)-iq-pq)} \vec{BC}$$

另外, 圆  $\odot I_1$  在  $BC$  上的切点 (即  $I_1$  在  $BC$  的垂足点)  $D$  为:

$$\vec{BD} = \operatorname{Re} \left( \frac{1+pq}{1+p} \right) \vec{BC} = \frac{(1+q)(1+pq)}{2(1+p)q} \vec{BC}$$

计算知  $P$ 、 $Q$ 、 $D$  三点共线, 因而结论成立.  $\square$

**3.12.3 三条 ceva 线划分的情形** 如图,  $P$  是  $\triangle ABC$  内的一点, 直线  $AP$ 、 $BP$ 、 $CP$  分别交对边于  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点, 求使得  $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle BAE$ 、 $\triangle CAF$ 、 $\triangle CBF$  以及  $\triangle PBD$ 、 $\triangle PCD$ 、 $\triangle PCE$ 、 $\triangle PAE$ 、 $\triangle PAF$ 、 $\triangle PBF$  的内心同时有理化表示的一个表示.



同前面一样, 我们只需令  $a = e^{i\angle A}$ ,  $b = e^{i\angle B}$ ,  $p = e^{i\angle BPC}$ ,  $q = e^{i\angle PBC}$ ,  $z = e^{i\angle BAP}$ , 它们之间满足关系:

$$z^2 = \left( \frac{P-A}{B-A} \right) / \overline{\left( \frac{P-A}{B-A} \right)} = -\frac{q^2(a^2 - a^2b^2 - p^2 + a^2b^2p^2 + p^2q^2 - a^2p^2q^2)}{b^2 - a^2b^2 - q^2 + a^2b^2q^2 + p^2q^2 - b^2p^2q^2}$$

则各三角形的内心均可有理表示. 例如, 对  $\triangle ABD$ , 因为

$$e^{i\angle BAD} = z, \quad e^{i\angle ADB} = \frac{-1}{bz}$$

所以其内心  $I_1$  的表示为:

$$\vec{AI}_1 = \frac{1 + e^{i\angle ADB} e^{i\angle BAD}}{1 + e^{i\angle ADB}} \vec{AB} = \frac{(1-b)z}{1-bz} \vec{AB}$$

转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BI}_1 = \frac{(1-ab)(1+ab)(1-z)}{(1-a)(1+a)(1-bz)} \vec{BC}$$

又如, 对  $\triangle PCD$ , 因为

$$e^{i\angle PDC} = e^{i(\angle BAD + \angle ABD)} = bz, \quad e^{i\angle PCD} = \frac{-1}{pq}$$

所以其内心  $I_8$  的表示为:

$$\vec{CI}_8 = \frac{1 + e^{i\angle PDC} e^{i\angle PCD}}{1 + e^{i\angle PDC}} \vec{CP} = \frac{pq - bz}{pq(1 + bz)} \vec{CP}$$

转化为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则是

$$\vec{BI}_8 = \frac{(1 + pq)(q - pq^2 - bpz + bqz)}{(1 - p)(1 + p)q(1 + bz)} \vec{BC}$$

以上表明, 对于大多数三角形图形而言, 考虑角度的单位复数 (或半正切值), 即可得到三角形的各点/量的有理表示, 从而可方便地证明命题或做计算.

当然, 基向量和角度的选取是任意的, 对某些命题而言, 若选择适当也会使计算更容易一些, 但通常来说, 并无特别的必要, 因为在“表示间的关系”一节中我们已指出: 任意两组适当的有理化表示之间, 存在双有理变换关系. 这个关系, 决定了计算量的阶数是相同的. 在现代计算软件的辅助下, 这种计算量的差异不会特别明显. 为了统一地、机械式地做计算和证明, 本书一般并不刻意选取基向量和角度.

## 3.13 三角形不等式

通过三角形的特征量的有理表示, 我们容易证明一些三角形不等式.

**例 3.13.1 (欧拉不等式)**  $R \geq 2r$

**证明** 根据  $R$ 、 $r$  的有理表示 (3.6), 则有

$$R - 2r = \frac{1 + s^2 - 8st + t^2 + 9s^2t^2}{4s(1 + t^2)} BC = \frac{(1 - 3st)^2 + (s - t)^2}{4s(1 + t^2)} BC \geq 0$$

取等号的条件为  $s = t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 即等边三角形. □

这里我们通过将表示直接配为平方和予以了证明. 类似地, 著名的 Finsler-Hadwiger 不等式也容易这样证明.

**例 3.13.2 (Finsler-Hadwiger 不等式)**  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

**证明**

$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S - (a - b)^2 - (b - c)^2 - (c - a)^2 \\ &= \frac{4t(1 - st)(1 - \sqrt{3}s + s^2 - \sqrt{3}t + st + t^2)}{s(1 + t^2)^2} BC \end{aligned}$$

$$= \frac{t(1-st)((\sqrt{3}-2s-t)^2 + (1-\sqrt{3}t)^2)}{s(1+t^2)^2} BC \geq 0 \quad \square$$

另外一些不等式转化后的项数较多, 不太容易这样直接配方. 为达到配方的目的, 我们可考虑在复数范围内作因式分解, 而后将共轭因式配对.

**例 3.13.3 (Gerrestne 不等式)**  $l^2 - 16Rr + 5r^2 \geq 0$

**证明**

$$l^2 - 16Rr + 5r^2 = \frac{s^2 - 2st - 4s^3t + t^2 + 9s^2t^2 + 4s^4t^2 - 4st^3 - 14s^3t^3 + 4s^2t^4 + 9s^4t^4}{s^2(1+t^2)^2} BC$$

我们只需证明分子在  $s > 0, t > 0, 1 - st > 0$  的条件下不小于 0 即可. 先在复数范围内进行因式分解:

$$\begin{aligned} s^2 - 2st - 4s^3t + t^2 + 9s^2t^2 + 4s^4t^2 - 4st^3 - 14s^3t^3 + 4s^2t^4 + 9s^4t^4 \\ = (4t^2 + 9t^4)(s - s_1)(s - s_2)(s - s_3)(s - s_4) \end{aligned}$$

四个根分别是

$$s_1 = \frac{2 - it + 7t^2 - 6it^3 + (2 - it + 3t^2)\sqrt{1 - 4t^2}}{8t + 18t^3}$$

$$s_2 = \frac{2 - it + 7t^2 - 6it^3 - (2 - it + 3t^2)\sqrt{1 - 4t^2}}{8t + 18t^3}$$

$$s_3 = \frac{2 + it + 7t^2 + 6it^3 - (2 + it + 3t^2)\sqrt{1 - 4t^2}}{8t + 18t^3}$$

$$s_4 = \frac{2 + it + 7t^2 + 6it^3 + (2 + it + 3t^2)\sqrt{1 - 4t^2}}{8t + 18t^3}$$

容易看到, 如果将  $(s - s_1)(s - s_2)$  和  $(s - s_3)(s - s_4)$  分别配对展开, 就可以消去其中的根式

$$(s - s_1)(s - s_2) = \frac{-s + t + 2s^2t - 2st^2 - ist + 3is^2t^2}{t(2 + 3it)}$$

$$(s - s_3)(s - s_4) = \frac{-s + t + 2s^2t - 2st^2 + ist - 3is^2t^2}{t(2 - 3it)}$$

这两个式子是共轭的, 它们的乘积等于实部平方与虚部平方之和, 从而得到配方

$$\begin{aligned} s^2 - 2st - 4s^3t + t^2 + 9s^2t^2 + 4s^4t^2 - 4st^3 - 14s^3t^3 + 4s^2t^4 + 9s^4t^4 \\ = (s - t)^2(1 - 2st)^2 + s^2t^2(1 - 3st)^2 \end{aligned}$$

因而不等式是成立的. □

某些类型的几何不等式也可以转化成为上面的这种类型而得以证明, 例如中线不等式.

**例 3.13.4 (中线不等式)** 记  $m_a, m_b, m_c$  分别为三角形  $ABC$  各顶点到对边中点的线段长,  $S$  为三角形面积, 则有不等式

$$\frac{1}{m_a m_b} + \frac{1}{m_b m_c} + \frac{1}{m_c m_a} \leq \frac{\sqrt{3}}{S}$$

**证明** 设  $\vec{BA} = (x + yi)\vec{BC}$ , 则可求得各中线长:

$$m_a = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2} BC, \quad m_b = \frac{1}{2} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} BC, \quad m_c = \frac{1}{2} \sqrt{(x-2)^2 + y^2} BC$$

可以做代换消除其中的两个根式, 这只需要将  $\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2}$  和  $\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$  视为点  $(x, y)$  到点  $(\frac{1}{2}, 0)$  和点  $(2, 0)$  的距离即可. 因此令

$$x + yi - \frac{1}{2} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \left(2 - \frac{1}{2}\right)$$

分离实部和虚部后即是

$$x = \frac{4s + 3t - 3s^2t - 4st^2 - 3t^3 + 3s^2t^3 + 4st^4}{2s(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{3t(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}$$

其中参数  $s > 0, t > 0, 1 - st > 0$ . 于是不等式中的各量有如下表示

$$\begin{cases} m_a = \frac{3(s+t)(1-st)}{2s(1+t^2)} BC \\ m_b = \frac{3\sqrt{4s^2 + 4st - 4s^3t + t^2 - 6s^2t^2 + s^4t^2 - 4st^3 + 4s^3t^3 + 4s^2t^4}}{4s(1+t^2)} BC \\ m_c = \frac{3t(1+s^2)}{4s(1+t^2)} BC \\ S = \frac{3t(s+t)(1-st)}{2s(1+t^2)^2} BC^2 \end{cases}$$

原不等式则转化为

$$\sqrt{4s^2 + 4st - 4s^3t + t^2 - 6s^2t^2 + s^4t^2 - 4st^3 + 4s^3t^3 + 4s^2t^4} \geq \frac{4s(2s + 3t - s^2t - 2st^2)}{3\sqrt{3} - 4s + 3\sqrt{3}s^2}$$

两端平方后则为

$$\begin{aligned}
 & 108s^2 - 96\sqrt{3}s^3 + 216s^4 - 96\sqrt{3}s^5 + 108s^6 + 108st - 96\sqrt{3}s^2t - 20s^3t - 108s^5t \\
 & + 96\sqrt{3}s^6t - 108s^7t + 27t^2 - 24\sqrt{3}st^2 - 236s^2t^2 + 120\sqrt{3}s^3t^2 - 142s^4t^2 + 120\sqrt{3}s^5t^2 \\
 & - 108s^6t^2 - 24\sqrt{3}s^7t^2 + 27s^8t^2 - 108st^3 + 96\sqrt{3}s^2t^3 + 20s^3t^3 + 108s^5t^3 - 96\sqrt{3}s^6t^3 \\
 & + 108s^7t^3 + 108s^2t^4 - 96\sqrt{3}s^3t^4 + 216s^4t^4 - 96\sqrt{3}s^5t^4 + 108s^6t^4 \geq 0
 \end{aligned}$$

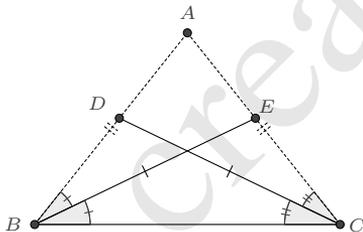
这是关于  $t$  的四次多项式不等式, 应用前述方法可将左边式子化为

$$\begin{aligned}
 & \frac{4s^2t^2(1-\sqrt{3}s)^2(11-2\sqrt{3}s+9s^2)(9-4\sqrt{3}s+9s^2)^2}{9(1+s^2)(9-8\sqrt{3}s+9s^2)} \\
 & + \frac{\left( \begin{aligned} & 54s - 48\sqrt{3}s^2 + 108s^3 - 48\sqrt{3}s^4 + 54s^5 + 27t - 24\sqrt{3}st - 5s^2t - 27s^4t \\ & + 24\sqrt{3}s^5t - 27s^6t - 54st^2 + 48\sqrt{3}s^2t^2 - 108s^3t^2 + 48\sqrt{3}s^4t^2 - 54s^5t^2 \end{aligned} \right)^2}{3(1+s^2)(9-8\sqrt{3}s+9s^2)}
 \end{aligned}$$

不难知道式中各项均不小于 0, 因而也就证明了原命题.  $\square$

另外有一些命题, 虽然结论是等式型的, 但事实上需要对不等式进行讨论.

**例 3.13.5 (莱默斯问题)** 若三角形的两个内角的平分线相等, 则该三角形为等腰三角形.



**证明** 考虑以图中涉及的两角  $B$ 、 $C$  的半正切值作为参数, 令  $s = \tan \frac{B}{2}$ ,  $t = \tan \frac{C}{2}$ , 根据 (3.1.7II), 则知点  $D$ 、 $E$  有表示:

$$\begin{aligned}
 \vec{BD} &= \frac{e^{i2B}(1-e^{iC})}{1-e^{i(2B+C)}} \vec{BC} = \frac{t(1+is)^2}{2s+t-s^2t} \vec{BC} \\
 \vec{BE} &= \frac{e^{iB}(1-e^{i2C})}{1-e^{i(B+2C)}} \vec{BC} = \frac{2(1+is)t}{s+2t-st^2} \vec{BC}
 \end{aligned}$$

两线段  $BD$ 、 $CE$  的长度是

$$CD = \frac{2s\sqrt{1+t^2}}{2s+t-s^2t}BC, \quad BE = \frac{2t\sqrt{1+s^2}}{s+2t-st^2}BC$$

二者若相等, 则

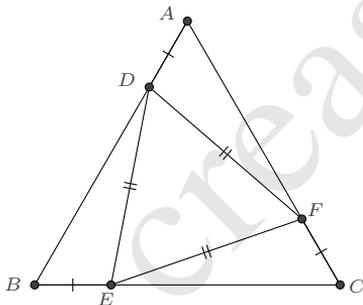
$$CD^2 - BE^2 = \frac{4(s-t)(s+t)(s^2+4st+t^2-5s^2t^2+4s^3t^3-s^4t^4)}{(2s+t-s^2t)^2(s+2t-st^2)^2}BC^2 = 0$$

我们需要证明的即是因式  $s^2+4st+t^2-5s^2t^2+4s^3t^3-s^4t^4$  在  $s>0, t>0, 1-st>0$  的条件下不能等于 0. 注意到此式关于  $s, t$  是对称的, 将其改写为

$$s^2+4st+t^2-5s^2t^2+4s^3t^3-s^4t^4 = (s+t)^2 + st(2-st)(1-st)^2$$

即知它恒大于 0. 从而必有  $s=t$ , 即  $\angle B = \angle C$ . □

**例 3.13.6 (IBM 等边三角形问题)** 给定  $\triangle ABC$ ,  $D, E, F$  分别在边  $AB, BC, CA$  上 (位于线段内), 且  $AD = BE = CF$ . 如果  $\triangle DEF$  为等边三角形, 则  $\triangle ABC$  也为等边三角形.



**证明** 令  $s = \tan \frac{A}{2}, t = \tan \frac{B}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  的表示为

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

考虑到问题的对称性, 为方便讨论, 不妨假定  $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ , 相应地,  $s, t$  的范围限制则是  $0 < s \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ . 这样我们只需确保点  $E$  在线段  $BC$  之内即可. 设

$AD = BE = CF = \lambda BC$ , 其中参数  $\lambda$  在  $(0,1)$  之间,  $D$ 、 $E$ 、 $F$  三点则可表示为:

$$\begin{cases} \vec{AD} = \frac{AD}{AB} \vec{AB} = \frac{\lambda s(1+t^2)}{(s+t)(1-st)} \vec{AB} \\ \vec{BE} = \frac{BE}{BC} \vec{BC} = \lambda \vec{BC} \\ \vec{CF} = \frac{CF}{CA} \vec{CA} = \frac{\lambda s(1+t^2)}{t(1+s^2)} \vec{CA} \end{cases}$$

将其中  $D$ 、 $E$  两点也转化为基向量  $\vec{BC}$  的表示

$$\begin{cases} \vec{BD} = \frac{s+t-s^2t-2st^2-s\lambda}{s(1-it)^2} \vec{BC} \\ \vec{BF} = \frac{1+\lambda-st-st\lambda-is-it+is\lambda+it\lambda}{(1-is)(1-it)} \vec{BC} \end{cases}$$

若  $\triangle DEF$  为等边三角形, 应有

$$\frac{D-E}{F-E} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

分离实部和虚部即得到方程组:

$$\begin{cases} \sqrt{3} + s - 2\sqrt{3}st - 2s^2t - \sqrt{3}t^2 - st^2 - 2s\lambda - 2t\lambda + 2\sqrt{3}st\lambda + 2\sqrt{3}t^2\lambda = 0 \\ s - \sqrt{3}s^2 + 2t - 2\sqrt{3}st - st^2 + \sqrt{3}s^2t^2 - 4s\lambda + 2\sqrt{3}s^2\lambda + 2\sqrt{3}st\lambda + 2s^2t\lambda - 2st^2\lambda = 0 \end{cases}$$

根据第一个方程, 若  $t \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 则可解出

$$\lambda = \frac{(\sqrt{3}+s)(1-2st-t^2)}{2(s+t)(1-\sqrt{3}t)}$$

将  $\lambda$  视为关于  $s$  的函数, 因为

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{\sqrt{3}-t+2s^2t+\sqrt{3}t^2+4st^2+t^3}{2(s+t)^2(-1+\sqrt{3}t)} < 0$$

所以  $\lambda(s)$  在  $0 < s \leq t < \frac{1}{\sqrt{3}}$  的限制下是单调减的, 故

$$\lambda(s) \geq \lambda(t) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(t + \frac{1}{t}\right) > 1$$

这就说明仅当  $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$  时, 第一个方程才有满足要求的解. 此时又可解出  $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , 从而证

明了  $\triangle ABC$  是等边三角形.

□

Creasson

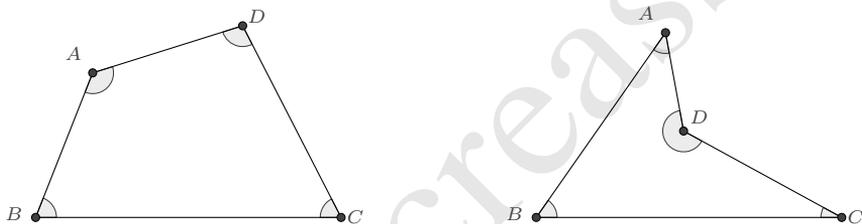
Creasson

# 第 4 章 四边形

## 4.1 四边形的表示

四边形可以看作是两个三角形组合而成,因而可以直接应用三角形的表示.例如,对于任意四边形  $ABCD$ ,可设其表示为  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BD} = w\vec{BC}$ ,但这样表示过于粗糙,不能很好地揭示其内在的特点,在证明一些复杂的命题时也是不够用的.

**4.1.1 一般四边形** 一般四边形分为凸四边形和凹四边形,凸四边形的任意一个内角总是介于  $0$  到  $180^\circ$  之间,而凹四边形的有一个内角是大于  $180^\circ$  的.同三角形类似



的,我们可将四边形的一边视为由相邻边经旋转缩放而得到.对于如上所示的四边形  $ABCD$ ,记四边形的内角分别为  $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ ,则

$$\vec{BA} = \frac{AB}{BC} e^{i\angle B} \vec{BC}, \quad \vec{AD} = \frac{AD}{AB} e^{i\angle A} \vec{AB}, \quad \vec{CD} = \frac{CD}{BC} e^{-i\angle C} \vec{CB}$$

为了表示的简便,我们记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ 、 $d = e^{i\angle D}$  分别表示四个内角的单位复数值,并在本节有关四边形的处理中,均沿用这样的记号.因为根据四内角之和等于  $2\pi$  知  $abcd = 1$ ,所以一般我们选取  $a$ 、 $b$ 、 $c$  就足够了.除非在某些情况下,我们希望得到一些对称的表示.

又记  $\lambda = \frac{AB}{BC}$ 、 $\mu = \frac{CD}{BC}$ 、 $\nu = \frac{AD}{AB}$ , 则我们可改写上面的表示为

$$\vec{BA} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{AD} = \nu a \vec{AB}, \quad \vec{CD} = \frac{\mu}{c} \vec{CB}$$

显然, 这几个表示不是独立的. 后两式相减消去点  $D$  即有

$$\vec{CD} - \vec{AD} = \vec{CA} = \frac{\mu}{c} \vec{CB} - \nu a \vec{AB}$$

再结合第一式即得关系式:

$$\lambda b - 1 = -\frac{\mu}{c} + \nu \lambda a b$$

将此式取共轭又有

$$\frac{\lambda}{b} - 1 = -\mu c + \frac{\nu \lambda}{ab}$$

联立即解出  $\mu$ 、 $\nu$ . 从而我们就得到了四边形的一个表示:

**命题 4.1.1** 四边形可由两边及三个内角完全确定, 记  $\lambda = AB : BC$ 、 $a = e^{i\angle A}$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ , 则它的一个表示是:

$$\vec{BA} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)}{1 - a^2b^2c^2} \vec{BC} \quad (4.1.1)$$

此表示的一个好处是, 能够方便地将四边形的各边边长也有理地表示出来. 对于凸四边形和  $\angle D > 180^\circ$  的凹四边形, 各边边长的表示都是

$$\begin{aligned} AB &= \lambda BC \\ CD &= \frac{c(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)}{(1 - a^2b^2c^2)} BC \\ DA &= \frac{a(\lambda - b + bc^2 - b^2c^2\lambda)}{(1 - a^2b^2c^2)} BC \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

如果我们考虑四边形对角线与其中一边的夹角, 例如考虑对角线  $AC$  与  $AB$  的夹角, 令  $\chi = e^{i\angle BAC}$ , 则由

$$\left(\frac{C-A}{B-A}\right) : \overline{\left(\frac{C-A}{B-A}\right)} = \left(\frac{b\lambda-1}{b\lambda}\right) : \left(\frac{\lambda-b}{\lambda}\right) = \frac{1-b\lambda}{b(b-\lambda)} = \chi^2$$

解得

$$\lambda = \frac{1-b^2\chi^2}{b(1-\chi^2)}$$

于是有

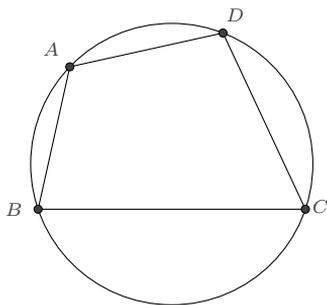
**推论 4.1.2** 记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ ，则四边形的一个表示是：

$$\vec{BA} = \frac{1 - b^2\chi^2}{1 - \chi^2}, \quad \vec{BD} = \frac{1 - a^2 + a^2b^2 - a^2b^2c^2 - b^2\chi^2 + a^2b^2c^2\chi^2}{(1 - a^2b^2c^2)(1 - \chi^2)} \vec{BC} \quad (4.1.3)$$

它除了能有理地表示四边形的边长外，也使得一条对角线有有理表示. 对于凸四边形和  $\angle D > 180^\circ$  的凹四边形，其表示均为

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1 - b^2\chi^2}{b(1 - \chi^2)} BC, & CD &= \frac{(1 - b^2)c(a^2 - \chi^2)}{(1 - a^2b^2c^2)(1 - \chi^2)} BC \\ DA &= \frac{a(1 - b^2)(1 - b^2c^2\chi^2)}{b(1 - a^2b^2c^2)(1 - \chi^2)} BC, & AC &= \frac{(1 - b^2)\chi}{b(1 - \chi^2)} BC \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

**4.1.2 圆内接四边形** 内接于圆的四边形称为圆内接四边形. 它属于凸四边形.



圆内接四边形的表示事实上容易根据三角形的表示而得. 这里我们再导出一个它的内角形式的表示. 根据对角之和为  $180^\circ$  这一基本性质, 即有  $ac = -1$ , 于是由 (4.1.3) 得

**推论 4.1.3** 记  $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ ，则圆内接四边形的一个表示是：

$$\vec{BA} = \frac{1 - b^2\chi^2}{1 - \chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{c^2 - 1}{c^2(1 - \chi^2)} \vec{BC} \quad (4.1.5)$$

在此表示下, 各边边长及对角线之长为

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1 - b^2\chi^2}{b(1 - \chi^2)} BC, & CD &= \frac{1 - c^2\chi^2}{c(1 - \chi^2)} BC, & DA &= \frac{b^2c^2\chi^2 - 1}{bc(1 - \chi^2)} BC \\ AC &= \frac{(1 - b^2)\chi}{b(1 - \chi^2)} BC, & BD &= \frac{(1 - c^2)\chi}{c(1 - \chi^2)} BC \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

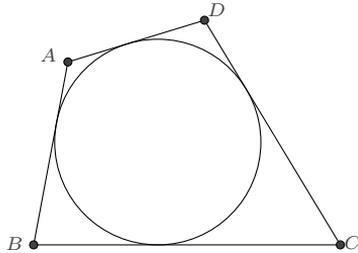
四边形的外接圆有表示

$$\vec{BP} = \frac{2}{(1 - \chi^2)(1 - iu)} \vec{BC}$$

它的圆心  $O$  和半径  $R$  分别为

$$\vec{BO} = \frac{1}{1-\chi^2} \vec{BC}, \quad R = \frac{i\chi}{\chi^2-1} BC$$

**4.1.3 圆外切四边形** 各边与圆相切的四边形称为圆外切四边形. 它也属于凸四边形.



圆外切四边形的一个基本的性质是对边之和相等, 根据边长的表示 (4.1.2)

$$AB + CD = BC + DA \implies \lambda = \frac{(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}$$

从而得到

**推论 4.1.4** 记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ , 则圆外切四边形的一个表示是:

$$\vec{BA} = \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)} \vec{BC} \quad (4.1.7)$$

各边边长为

$$AB = \frac{(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)} BC, \quad CD = \frac{(1-b)(1-ab)c}{(1-bc)(1-abc)} BC, \quad DA = \frac{a(1-b)(1-c)}{(1-a)(1-abc)} BC \quad (4.1.8)$$

四边形的内切圆有表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-c)(-1+3b-iu-ibu)}{2(1-bc)(1-iu)} \vec{BC}$$

它的圆心  $I$  和半径  $r$  分别为

$$\vec{BI} = \frac{b(1-c)}{1-bc} \vec{BC}, \quad r = i \frac{(1-b)(1-c)}{2(1-bc)} BC$$

如果选取 (4.1.3) 的表示作计算, 则由对边之和相等得到

$$1-a-ab+abc+b\chi^2-bc\chi^2-b^2c\chi^2+ab^2c\chi^2=0$$

为了进一步地有理表示各边边长及两条对角线之长, 我们考虑  $\angle BDC$ , 令  $\kappa = e^{i\angle DBC}$ , 则

$$\kappa^2 = \frac{1 - a^2 + a^2b^2 - a^2b^2c^2 - b^2\chi^2 + a^2b^2c^2\chi^2}{1 - a^2c^2 - \chi^2 + c^2\chi^2 - b^2c^2\chi^2 + a^2b^2c^2\chi^2}$$

联立这二式, 则有如下结论:

**推论 4.1.5** 对于圆外切四边形  $ABCD$ , 若  $AB = BC$ , 记  $c = e^{i\angle C}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ , 则该四边形有表示

$$\vec{BA} = -\frac{1}{\chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{c^2 - 1}{c^2 + \chi^2} \vec{BC} \quad (4.1.9)$$

此时四条边及对角线之长为:

$$\begin{aligned} AB = BC, \quad CD = DA &= \frac{c(1 + \chi^2)}{c^2 + \chi^2} BC \\ AC &= \frac{1 + \chi^2}{\chi} BC, \quad BD = i \frac{(1 - c^2)\chi}{c^2 + \chi^2} BC \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

**推论 4.1.6** 对于圆外切四边形  $ABCD$ , 若  $AB \neq BC$ , 记  $b = e^{i\angle B}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ 、 $\kappa = e^{i\angle DBC}$ , 则该四边形有表示

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \frac{1 - b^2\chi^2}{1 - \chi^2} \vec{BC} \\ \vec{BD} &= \frac{4b\kappa^2(\kappa^2 - b)(1 - b^2\chi^2)(1 + b\chi^2)}{(-2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa\chi^2)(2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 + 2b^2\kappa\chi^2)} \vec{BC} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

此时四条边及对角线之长可有理表示为:

$$\begin{aligned} AB &= \frac{1 - b^2\chi^2}{b(1 - \chi^2)} BC \\ CD &= \frac{(2b - \kappa^2 - b\kappa^2 + b^2\chi^2 - b^3\chi^2)(\kappa^2 - b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa\chi^2)}{(-2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa\chi^2)(2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 + 2b^2\kappa\chi^2)} BC \\ DA &= \frac{(1 - b^2\chi^2)(2b^2 - \kappa^2 - b\kappa^2 - b^2\chi^2 + b^3\chi^2)(-\kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b\kappa^2\chi^2)}{b(1 - \chi^2)(-2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa\chi^2)(2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 + 2b^2\kappa\chi^2)} BC \\ AC &= \frac{(1 - b^2)\chi}{b(1 - \chi^2)} BC \\ BD &= \frac{4b\kappa(\kappa^2 - b)(1 - b^2\chi^2)(1 + b\chi^2)}{(-2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa\chi^2)(2b\kappa + \kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 + 2b^2\kappa\chi^2)} BC \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

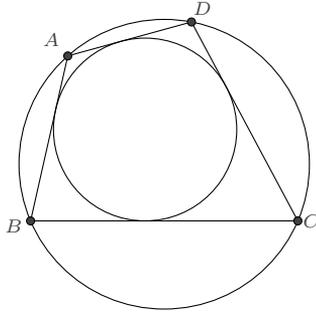
**注记 4.1.7** 记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ , 它们的关系是

$$a = \frac{-\kappa^2 + b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b\kappa^2\chi^2}{2b^2 - \kappa^2 - b\kappa^2 - b^2\chi^2 + b^3\chi^2}$$

$$c = \frac{2b - \kappa^2 - b\kappa^2 + b^2\chi^2 - b^3\chi^2}{\kappa^2 - b\kappa^2 + b^2\chi^2 + b^3\chi^2 - 2b^2\kappa^2\chi^2}$$

$b$ 、 $\chi$ 、 $\kappa$  的取值应使得  $a$ 、 $c$  的幅角在  $(0, \pi)$  之间.

**4.1.4 双心四边形** 若四边形既内接于一圆, 也外切于一圆, 则称为双心四边形.



**推论 4.1.8** 记  $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ , 则双心四边形的一个表示是:

$$\vec{BA} = \frac{b(1-c)(b+c)}{(1+c)(1-bc)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(-1+b+c+bc)}{(1+b)c(1-bc)} \vec{BC} \quad (4.1.13)$$

双心四边形的外接圆有表示

$$\vec{BP} = \frac{2bc(1-b-c-bc)}{(1+b)(1+c)(1-bc)(1-iu)} \vec{BC}$$

其圆心和半径分别为

$$\vec{BO} = \frac{bc(1-b-c-bc)}{(1+b)(1+c)(1-bc)} \vec{BC}, \quad R = \sqrt{\frac{bc(1+b+c-bc)(1-b-c-bc)}{(1+b)^2(1+c)^2(1-bc)^2}} \vec{BC}$$

双心四边形的内切圆有表示

$$\vec{BP} = \frac{(1-c)(-1+3b-iu-ibu)}{2(1-bc)(1-iu)} \vec{BC}$$

其圆心和半径分别为

$$\vec{BI} = \frac{b(1-c)}{1-bc} \vec{BC}, \quad r = \frac{i(1-b)(1-c)}{2(1-bc)} \vec{BC}$$

**4.1.5 等积四边形** 对边之积相等的四边形称为等积四边形. 根据 (4.1.4)

$$AB \cdot CD = BC \cdot DA \implies b^2 = \frac{-a + a^2c + a\chi^2 - c\chi^2}{c\chi^2(a^2 - ac - \chi^2 + ac\chi^2)}$$

于是有

**推论 4.1.9** 记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ , 则等积四边形的一个表示是:

$$\vec{BA} = \frac{a(1-c^2)}{c(a^2 - ac - \chi^2 + ac\chi^2)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{a(c^2-1)}{c(ac + \chi^2)} \vec{BC} \quad (4.1.14)$$

**4.1.6 调和四边形** 对边之积相等的圆内接四边形称为调和四边形. 根据 (4.1.14) 即得

**推论 4.1.10** 记  $a = e^{i\angle A}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ , 则调和四边形的一个表示是:

$$\vec{BA} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2\chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1-a^2}{1-\chi^2} \vec{BC} \quad (4.1.15)$$

而根据 (4.1.5) 又有

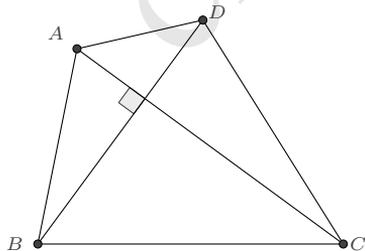
**推论 4.1.11** 记  $b = e^{i\angle B}$ 、 $\chi = e^{i\angle BAC}$ , 则调和四边形的一个表示是:

$$\vec{BA} = \frac{1-b^2\chi^2}{1-\chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{2(1-b^2\chi^2)}{2-\chi^2-b^2\chi^2} \vec{BC} \quad (4.1.16)$$

**注记 4.1.12** 若采用之前的表示, 则调和四边形有一个简单的参数表示

$$\vec{BA} = \frac{1+is}{1-it} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{1+is}{1-i\frac{1}{2}(t-s)} \vec{BC}$$

**4.1.7 垂直四边形** 对角线互相垂直的四边形称为垂直四边形.



**推论 4.1.13** 记  $\lambda = AB : BC$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ , 则垂直四边形的一个表示是:

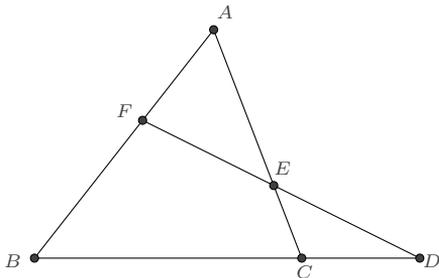
$$\vec{BA} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c^2)(1-\lambda b)}{\lambda - b - bc^2 + \lambda b^2 c^2} \vec{BC} \quad (4.1.17)$$

至于其他的一些特殊四边形,可类似地导出它们的表示,这里不再赘述.

## 4.2 四边形的性质

四边形的一些性质可直接根据其表示而得以直接证明.著名的“Urquhart 定理”即是其中之一,它被 Urquhart 本人称为是欧氏几何中“最初等的定理”.

**例 4.2.1 (Urquhart 定理)** 如图,点  $E$ 、 $F$  在  $\triangle ABC$  的两条边  $CA$ 、 $AB$  上,它们的连线交  $BC$  的延长线于点  $D$ ,如果  $BF + FE = BC + CE$ ,那么  $BA + AE = BD + DE$ .



**证明** 将点  $A$ 、 $D$  看成是凸四边形  $FBCE$  的对边延长线的交点,令  $\lambda = \frac{BF}{BC}$ ,  $a = e^{i\angle BFE}$ ,  $b = e^{i\angle B}$ ,  $c = e^{i\angle BCA}$ , 则四边形有表示

$$\vec{BF} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)}{1 - a^2b^2c^2} \vec{BC}$$

它的各边边长为

$$BF = \lambda BC, \quad FE = -\frac{a(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)}{(1 - abc)(1 + abc)} BC, \quad CE = \frac{c(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)}{(1 - abc)(1 + abc)} BC$$

容易求出交点  $A$ 、 $D$  的表示:

$$\vec{BA} = \frac{b^2(1 - c)(1 + c)}{(1 - bc)(1 + bc)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{(1 - a)(1 + a)b\lambda}{(1 - ab)(1 + ab)} \vec{BC}$$

于是又知命题所涉及的其他几条线段之长:

$$BA = \frac{b(1 - c^2)}{1 - b^2c^2} BC, \quad AE = \frac{(1 - a^2)bc(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)}{(1 - b^2c^2)(1 - a^2b^2c^2)} BC$$

$$BD = \frac{(1 - a^2)b\lambda}{1 - a^2b^2} BC, \quad DE = \frac{ab(1 - c^2)(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)}{(1 - a^2b^2)(1 - a^2b^2c^2)} BC$$

由此, 计算即得

$$BF + FE - BC - CE = -\frac{1 + ab + c + abc - \lambda - a\lambda - bc\lambda - abc\lambda}{1 + abc} BC$$

$$BA + AE - BD - DE = \frac{(1 - a)b(1 - c)(1 + ab + c + abc - \lambda - a\lambda - bc\lambda - abc\lambda)}{(1 + ab)(1 + bc)(1 + abc)} BC$$

显见命题成立.  $\square$

**例 4.2.2** 若已知圆内接四边形的各边边长, 求圆的半径  $R$ .

**解** 为表示的简便, 记  $l_1 = AB, l_2 = BC, l_3 = CD, l_4 = DA$ , 则根据圆内接四边形边长的表示 (4.1.6) 和半径的表示

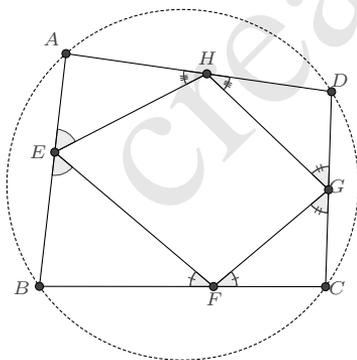
$$l_1 = \frac{1 - b^2\chi^2}{b(1 - \chi^2)} l_2, \quad l_3 = \frac{1 - c^2\chi^2}{c(1 - \chi^2)} l_2$$

$$l_4 = \frac{b^2c^2\chi^2 - 1}{bc(1 - \chi^2)} l_2, \quad R = \frac{i\chi}{\chi^2 - 1} l_2$$

消元  $b, c, \chi$  即得

$$R^2 = \frac{(l_1l_2 + l_3l_4)(l_2l_3 + l_1l_4)(l_1l_3 + l_2l_4)}{(l_1 + l_2 + l_3 - l_4)(l_2 + l_3 + l_4 - l_1)(l_3 + l_4 + l_1 - l_2)(l_4 + l_1 + l_2 - l_3)} \quad \square$$

**例 4.2.3** 如图, 如果凸四边形  $ABCD$  的边上存在点  $E, F, G, H$ , 使得各角相等, 则  $A, B, C, D$  四点共圆.



**证明** 考虑四边形  $EFGH$  的表示, 令  $\lambda = EH : EF, a = e^{i\angle EHG}, b = e^{i\angle HEF}, c = e^{i\angle EFG}, d = e^{i\angle HGF}; (abcd = 1)$ , 则

$$\vec{EH} = \lambda b \vec{EF}, \quad \vec{EG} = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)}{1 - a^2b^2c^2} \vec{EF}$$

对  $\triangle AEH$ , 因为它的两个内角

$$\angle AHE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle EHG, \quad \angle AEH = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\angle HEF$$

所以

$$e^{i\angle AHE} = \frac{i}{\sqrt{a}}, \quad e^{i\angle AEH} = \frac{i}{\sqrt{b}}$$

从而根据三角形的角角边表示 (3.1.7II) 知

$$\vec{EA} = \frac{1+a}{1-ab} \vec{EH} = \lambda \frac{(1+a)b}{1-ab} \vec{EF}$$

同理可知

$$\vec{FB} = \frac{1+b}{1-bc} \vec{FE}, \quad \vec{GC} = \frac{1+c}{1-cd} \vec{GF}, \quad \vec{HD} = \frac{1+d}{1-da} \vec{HG}$$

它们转化为以  $\vec{EF}$  为基向量的表示则是

$$\begin{aligned} \vec{EB} &= \frac{b(1+c)}{bc-1} \vec{EF} \\ \vec{EC} &= \frac{b(\lambda - a - ac - \lambda a^2 + a^2b + a^2bc)}{(1-ab)(1-abc)} \vec{EF} \\ \vec{ED} &= \frac{b(\lambda + \lambda a - ab - \lambda bc - \lambda abc + abc^2)}{(1-bc)(1-abc)} \vec{EF} \end{aligned}$$

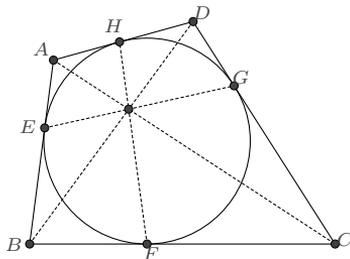
由此计算即得

$$\operatorname{Im} \left( \frac{A-B}{A-C} \frac{D-C}{D-B} \right) = \operatorname{Im} \left( \frac{(1-b)(1-abc)}{(1-ab)(1-bc)} \right) = 0$$

因而  $A, B, C, D$  四点共圆. □

又如, 关于圆外切四边形, 著名的牛顿定理可简单证明如下:

**例 4.2.4 (牛顿定理)** 圆外切四边形对角线与切点四边形对角线共交点.



**证明** 根据圆内切四边形的表示 (4.1.7)

$$\vec{BA} = \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)} \vec{BC}$$

计算出对角线  $AC$ 、 $BD$  的交点 (记为  $M$ )

$$\vec{BM} = \frac{(1+b)(1-c)(1+a-ab-abc)}{2(1-ac)(1-bc)} \vec{BC}$$

又根据圆心  $I$  的表示

$$\vec{BI} = \frac{b(1-c)}{1-bc} \vec{BC}$$

计算出它在各边上的垂足点 (即圆在各边的切点) 为

$$\begin{aligned} \vec{BE} &= \frac{b(1+b)(1-c)}{2(1-bc)} \vec{BC}, & \vec{BF} &= \frac{(1+b)(1-c)}{2(1-bc)} \vec{BC} \\ \vec{BG} &= \frac{(1-c)(-1+b+2bc)}{2c(1-bc)} \vec{BC}, & \vec{BH} &= \frac{b(2+a-ab)(1-c)}{2(1-bc)} \vec{BC} \end{aligned}$$

验算即知  $M$  同时在  $EG$  和  $FH$  上. □

**例 4.2.5 (双心四边形 Fuss 公式)** 对于双心四边形, 根据其外接圆圆心和内切圆圆心的表示, 容易计算出二者距离  $d$  的表示

$$d^2 = -\frac{bc(1+b-c+bc)(1-b+c+bc)}{(1+b)^2(1+c)^2(1-bc)^2} BC^2$$

结合其外接圆半径  $R$  和内切圆半径  $r$  的表示

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{bc(1+b+c-bc)(1-b-c-bc)}{(1+b)^2(1+c)^2(1-bc)^2}} BC \\ r &= \frac{i(1-b)(1-c)}{2(1-bc)} BC \end{aligned}$$

消元  $b$ 、 $c$  即得

$$d^4 - 2d^2r^2 - 2d^2R^2 - 2r^2R^2 + R^4 = 0$$

它容易被改写为更简洁的形式

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2}$$

## 4.3 四边形的面积

对于一般的四边形, 利用格林公式 (2.4.1) 及四边形的表示 (4.1.1), 即知其面积

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left( \vec{BC} \otimes \vec{BD} + \vec{BD} \otimes \vec{BA} \right) \\ &= i \frac{(1-a^2)(1-b^2c^2)\lambda^2 - 2(1-a^2)b(1-c^2)\lambda + (1-a^2b^2)(1-c^2)}{4(1-a^2b^2c^2)} BC^2 \end{aligned}$$

若利用  $\lambda = AB : BC$ 、 $a = e^{i\angle A}$ 、 $b = e^{i\angle B}$ 、 $c = e^{i\angle C}$ 、 $d = e^{i\angle D}$  及  $abcd = 1$  将其转化为三角函数的表示, 则是

$$S = \frac{AB^2 \sin A \sin(A+D) + 2AB \cdot BC \sin A \sin C + BC^2 \sin C \sin(C+D)}{2 \sin D}$$

一般四边形有两个著名的面积公式.

### 例 4.3.1 (贝利契纳德公式)

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4AC^2 \cdot BD^2 - (AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2)^2} \quad (4.3.1)$$

### 例 4.3.2 (一般婆罗摩笈多公式)

$$S = \sqrt{(L-AB)(L-BC)(L-CD)(L-DA) - AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos^2 \frac{A+C}{2}} \quad (4.3.2)$$

其中  $L$  是四边形的半周长  $L = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$ .

这只需代入边长的表示 (4.1.2) 及

$$\cos^2 \frac{A+C}{2} = \frac{1}{4} \left( \sqrt{ac} + \frac{1}{\sqrt{ac}} \right)^2 = \frac{(1+ac)^2}{4ac}$$

化简即成为我们前面得到的面积表示.

另一个俄罗斯人发现的面积公式也比较有名, 它曾被称为“几何定理解析方法的杀手”.

### 例 4.3.3 (俄罗斯面积公式)

$$4S = \frac{(AB + BC + CD + DA)^2}{\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} + \cot \frac{D}{2}} - \frac{(AB + CD - BC - DA)^2}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{D}{2}}$$

它只需再代入

$$\tan \frac{A}{2} = \frac{1-a}{1+a}i, \quad \tan \frac{B}{2} = \frac{1-b}{1+b}i, \quad \tan \frac{C}{2} = \frac{1-c}{1+c}i, \quad \tan \frac{D}{2} = \frac{1-d}{1+d}i$$

化简即可.

这里再例举一些特殊四边形的面积计算式.

#### 例 4.3.4 (圆内接四边形面积)

$$S = \sqrt{(L - AB)(L - BC)(L - CD)(L - DA)}$$

其中  $L$  是四边形的半周长.

#### 例 4.3.5 (圆内接四边形面积)

$$S = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA} \cdot \sin \frac{A + C}{2}$$

其中  $L$  是四边形的半周长.

#### 例 4.3.6 (双心四边形面积)

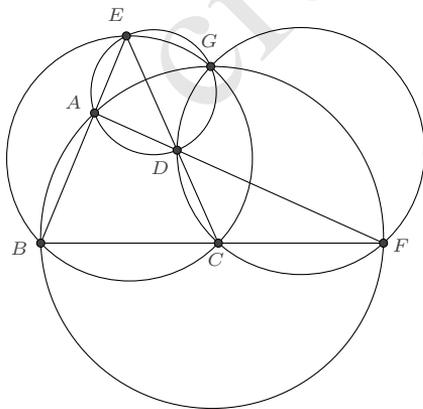
$$S = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$$

它们不难由贝利契纳德公式或一般婆罗摩笈多公式导出, 或根据各自的有理表示予以证明.

## 4.4 四边形的特征

在四边形的研究中, 人们也发现了一些与四边形密切相关的点, 它们具有较为良好的性质.

**例 4.4.1 (密克尔点)** 密克尔点一般是用“完全四边形”<sup>①</sup>定义的. 这里我们用四边形重新表述: 如图, 延长四边形  $ABCD$  的两组对边, 分别交于点  $E$  和  $F$ , 则  $\triangle ABF$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDF$ 、 $\triangle DAE$  的外接圆交于一点  $G$ , 称之为密克尔点.



<sup>①</sup>完全四边形是指四条直线两两相交, 共有六个交点, 这四线六点所形成的图形.

若令  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BD} = w\vec{BC}$ , 不难求出, 点  $G$  有非常简单的形式

$$\vec{BG} = \frac{z}{1+z-w} \vec{BC}$$

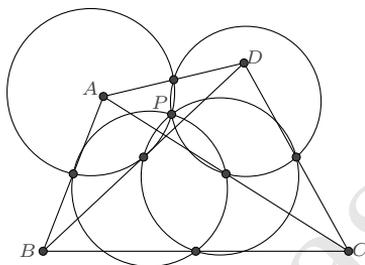
在四边形的 (4.1.1) 表示下, 密克尔点  $G$  则是

$$\vec{BG} = \frac{b(1-a^2b^2c^2)\lambda}{1-a^2b^2+a^2b\lambda-a^2b^3c^2\lambda} \vec{BC} \quad (4.4.1)$$

若在复平面上, 密克尔点  $G$  又可表示为对称的形式:

$$G = \frac{AC - BD}{(A + C) - (B + D)}$$

**例 4.4.2 (彭赛列点)** 对任何一个四点形, 任一点到其余三点组成三角形的垂足圆、任意三点组成三角形的九点圆、三组对边交点组成三角形的外接圆九圆共点, 这点称为这个四点形的彭赛列点.



若令  $\vec{BA} = z\vec{BC}$ ,  $\vec{BD} = w\vec{BC}$ , 不难求出, 点  $P$  的表示是

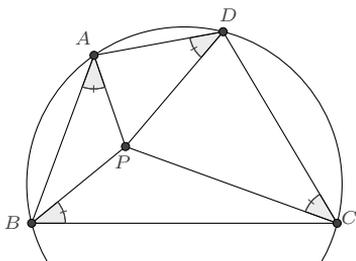
$$\vec{BP} = \frac{1}{2} \frac{z^2\bar{w}(1-\bar{w}) - \bar{z}\bar{w}(\bar{z}-\bar{w}) - w^2\bar{z}(1-\bar{z})}{z\bar{w}(1-\bar{w}) - \bar{z}\bar{w}(\bar{z}-\bar{w}) - w\bar{z}(1-\bar{z})} \vec{BC}$$

在四边形的 (4.1.1) 表示下, 彭赛列点  $P$  则是

$$\vec{BP} = \frac{(1+a^2b^2)(1-c^2) + (1-a^2)b(1+b^2c^2)\lambda}{2(1-c^2+b^2c^2-a^2b^2c^2)} \vec{BC} \quad (4.4.2)$$

另外有一些特征点, 它们仅存在于一些特殊的四边形中.

**例 4.4.3 (调和四边形的布洛卡点)** 圆内接四边形  $ABCD$  内若存在一点  $P$ , 使得  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$ , 则  $ABCD$  是调和四边形.  $P$  点称为调和四边形的布洛卡点.



**解** 若利用圆内接四边形的  $ABCD$  的表示 (4.1.5)

$$\vec{BA} = \frac{1-b^2\chi^2}{1-\chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{c^2-1}{c^2(1-\chi^2)} \vec{BC}$$

设  $\vec{BP} = z\vec{BC}$ , 根据  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$ , 则有

$$\begin{cases} \operatorname{Im}\left(\frac{P-A}{B-A} : \frac{P-B}{C-B}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-z-b^2\chi^2+z\chi^2}{z(1-b^2\chi^2)}\right) = 0 \\ \operatorname{Im}\left(\frac{P-C}{D-C} : \frac{P-B}{C-B}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{c^2(1-z)(1-\chi^2)}{z(1-c^2\chi^2)}\right) = 0 \\ \operatorname{Im}\left(\frac{P-D}{A-D} : \frac{P-B}{C-B}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1-c^2+c^2z-c^2z\chi^2}{z(1-b^2c^2\chi^2)}\right) = 0 \end{cases}$$

显然  $z \neq 0$ , 因此仅当

$$c^2 = \frac{2-\chi^2-b^2\chi^2}{\chi^2(1+b^2-2b^2\chi^2)}$$

时, 方程有解

$$z = \frac{2(1-b^2\chi^2)^2}{2-\chi^2-4b^2\chi^2+b^4\chi^2+2b^2\chi^4}$$

四边形  $ABCD$  的表示为

$$\vec{BA} = \frac{1-b^2\chi^2}{1-\chi^2} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{2(1-b^2\chi^2)}{2-\chi^2-b^2\chi^2} \vec{BC}$$

正是 (4.1.16) 式, 这就说明了结论.

在此表示下, 调和四边形的布洛卡点  $P$  的表示为

$$\vec{BP} = \frac{2(1-b^2\chi^2)^2}{2-\chi^2-4b^2\chi^2+b^4\chi^2+2b^2\chi^4} \vec{BC} \quad (4.4.3)$$

□

另外, 四边形也有一些较为知名的特征线和特征圆:

**牛顿线** 延长四边形  $ABCD$  的两组对边, 分别交于点  $E$  和  $F$ , 则三条线段  $AC$ 、 $BD$ 、

$EF$  的中点共线.

**西姆松线** 四边形的密克点在各边的垂足共线.

**斯坦纳圆** 延长四边形  $ABCD$  的两组对边, 分别交于点  $E$  和  $F$ , 则  $\triangle ABF$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle CDF$ 、 $\triangle DAE$  外接圆的圆心, 与四边形的密克点五点共圆.

读者可自行导出它们的表示.

也有一些较为复杂的特征, 例如四边形的等角共轭点, 其定义为四边形内切椭圆的两个焦点, 这些将在后文的圆锥曲线一章再行讨论.

## 4.5 表示间的关系

同三角形一样, 四边形也有多种形式的表示. 例如, 对于圆外切四边形  $ABCD$ , 如果我们设  $\lambda = BA : BC$ , 并设内切圆圆心  $I$  的表示是  $\vec{BI} = (p + qi)\vec{BC}$ , 则可导出它的一个表示是:

$$\vec{BA} = \lambda \frac{p + iq}{p - iq} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{(p + iq)(p - iq - 2\lambda + p\lambda + iq\lambda)}{p^2 + q^2 - \lambda} \vec{BC}$$

它与 (4.1.7) 之间是如下的双有理变换关系:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)}, & p = \frac{(1+b)(1-c)}{2(1-bc)}, & q = \frac{i(1-b)(1-c)}{2(1-bc)} \\ a = \frac{\lambda - p + iq}{\lambda - p - iq}, & b = \frac{p + iq}{p - iq}, & c = \frac{1 - p + iq}{1 - p - iq} \end{cases}$$

又如, 若圆外切四边形  $ABCD$  位于复平面上, 假定它的内切圆是单位圆, 则各顶点可表示为

$$A = \frac{2}{\alpha + \beta}, \quad B = \frac{2}{\beta + \gamma}, \quad C = \frac{2}{\gamma + \delta}, \quad D = \frac{2}{\delta + \alpha}$$

其中  $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = |\delta| = 1$ . 它与 (4.1.7) 之间也存在双有理变换关系:

$$\begin{cases} a = -\frac{\beta}{\alpha}, & b = -\frac{\gamma}{\beta}, & c = -\frac{\delta}{\gamma} \\ \alpha = -\frac{\delta}{abc}, & \beta = \frac{\delta}{bc}, & \gamma = -\frac{\delta}{c} \end{cases}$$

也就是说, 对于同一个几何图形<sup>①</sup>, 如果它有两组不同的适当的有理表示, 则表示之间存在双有理变换关系.

<sup>①</sup>对于这里的圆外切四边形而言, 所指的图形由四个顶点和内切圆的圆心构成.

## 4.6 表示的深化讨论

同三角形的理由一样, 这里我们着重研究四边形相关的三角形内心的有理表示, 同时也讨论一些类伪内切圆的表示.

根据前面的讨论, 如果三角形两个内角的单位复数值有有理表示, 则该三角形的内心可有理地表示. 或者, 根据内心的重心坐标表示, 若三角形的边长可有理地表示, 则其内心也可有理地表示. 因此, 我们通常只需讨论三角形内角的单位复数值的有理化或边长的有理化即可. 当然, 也可直接根据内心的方程 (3.11.2), 讨论方程解的有理化.

### 4.6.1 四边形的顶点三角形

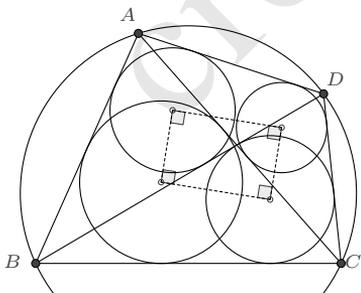
**定义 4.6.1** 四边形的三个顶点连线构成的三角形称为四边形的顶点三角形.

对于一般四边形, 在表示 (4.1.3) 之下, 四条边及一条对角线之长可有理地表示出来 (4.1.4), 因此, 若能有理地表示另一条对角线之长, 则四边形的所有顶点三角形的内心可同时有理地表示.

**命题 4.6.2** 圆内接四边形的顶点三角形的内心可同时有理地表示. 在 (4.1.5) 的表示下, 若记四个顶点三角形  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  的内心分别为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ , 则

$$\begin{aligned} \vec{BI}_1 &= \frac{1+b\chi}{1+\chi} \vec{BC}, & \vec{BI}_2 &= \frac{c-1}{c(1+\chi)} \vec{BC} \\ \vec{BI}_3 &= \frac{c+\chi+b\chi+bc\chi^2}{c(1-\chi^2)} \vec{BC}, & \vec{BI}_4 &= \frac{(1+c)(1+b\chi)}{c(1-\chi^2)} \vec{BC} \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

根据这个表示, 我们立即可得结论<sup>①</sup>:  $I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0$ , 即圆内接四边形的顶点三角形的内心构成一个矩形. 另外一个关系式是四个顶点三角形的内切圆半径满足:  $r_1 - r_2 + r_3 - r_4 = 0$ , 读者可自行证明.



**命题 4.6.3** 圆外切四边形的顶点三角形的内心可同时有理地表示. 记四个顶点三角形  $\triangle ABC$ 、 $\triangle BCD$ 、 $\triangle CDA$ 、 $\triangle DAB$  的内心分别为  $I_1$ 、 $I_2$ 、 $I_3$ 、 $I_4$ , 若  $AB \neq BC$ , 则在

<sup>①</sup>16-18 世纪的日本寺庙中, 曾盛行欧氏几何学的研究, 许多几何发现被记录于“算额”之上, 它们被称为小日本寺庙几何, 这个命题是其中之一.

(4.1.11) 的表示下, 它们可同时有理地表示:

$$\begin{aligned}
 \vec{BI}_1 &= \frac{1+b\chi}{1+\chi} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_2 &= \frac{2\kappa(\kappa^2-b)(1-b^2\chi^2)}{(1+\kappa)(-2b\kappa+\kappa^2+b\kappa^2+b^2\chi^2+b^3\chi^2-2b^2\kappa\chi^2)} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_3 &= \frac{(1+b\chi)(\kappa^2-b\kappa^2-2b^2\chi+2b\kappa^2\chi-b^2\chi^2+b^3\chi^2+2b\kappa^2\chi^2-2b^2\kappa^2\chi^2)}{(1+\chi)(\kappa^2-b\kappa^2-2b^2\chi+2b\kappa^2\chi+b^2\chi^2-b^3\chi^2)} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_4 &= \frac{2b\kappa(\kappa^2-b)(1-b^2\chi^2)}{(b+\kappa)(-2b\kappa+\kappa^2+b\kappa^2+b^2\chi^2+b^3\chi^2-2b^2\kappa\chi^2)} \vec{BC}
 \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

其他四边形的顶点三角形可作类似的讨论.

## 4.6.2 对角线的交点三角形

**定义 4.6.4** 四边形的对角线交点, 与四边形的其中一边的两个顶点构成的三角形称为四边形的交点三角形.

**命题 4.6.5** 对于圆内接四边形  $ABCD$ , 设它的对角线交点为  $M$ , 记四个对角线的交点三角形  $\triangle ABM$ 、 $\triangle BCM$ 、 $\triangle CDM$ 、 $\triangle DAM$  的内心分别为  $I_5$ 、 $I_6$ 、 $I_7$ 、 $I_8$ , 则在 (4.1.5) 的表示下, 它们可同时有理地表示:

$$\begin{aligned}
 \vec{BI}_5 &= \frac{1-b^2\chi^2}{(1+\chi)(1+bc\chi^2)} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_6 &= \frac{1+b\chi}{1-bc\chi^2} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_7 &= \frac{c+b\chi+c\chi+bc^2\chi^2}{c(1+\chi)(1+bc\chi^2)} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_8 &= \frac{(1+b\chi)(c+\chi-bc\chi-bc^2\chi^2)}{c(1-\chi^2)(1-bc\chi^2)} \vec{BC}
 \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

**定义 4.6.6** 设四边形内接于  $\odot O$ , 若一圆内切于  $\odot O$  并与两条对角线相切, 则称其为圆内接四边形的第二类伪内切圆.

显然, 圆内接四边形共有四个第二类伪内切圆.

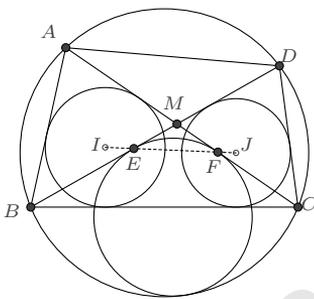
**命题 4.6.7** 对于圆内接四边形  $ABCD$ , 设它的对角线交点为  $M$ , 记  $\angle AMB$ 、 $\angle BMC$ 、 $\angle CMD$ 、 $\angle DMA$  内的第二类伪内切圆圆心分别为  $I_9$ 、 $I_{10}$ 、 $I_{11}$ 、 $I_{12}$ , 则在 (4.1.5) 的表

示下, 它们可同时有理地表示:

$$\begin{aligned}
 \vec{BI}_9 &= \frac{(1+b\chi)(1+\chi-b\chi+b\chi^2+2bc\chi^2)}{(1+\chi)(1+bc\chi^2)^2} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_{10} &= \frac{(1+b\chi)(1+\chi-b\chi+b\chi^2-2bc\chi^2)}{(1+\chi)(-1+bc\chi^2)^2} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_{11} &= \frac{(1-b\chi)(1+\chi+b\chi-b\chi^2+2bc\chi^2)}{(1+\chi)(1+bc\chi^2)^2} \vec{BC} \\
 \vec{BI}_{12} &= \frac{(1+b\chi)(1-\chi-b\chi-b\chi^2-2bc\chi^2)}{(1-\chi)(1-bc\chi^2)^2} \vec{BC}
 \end{aligned} \tag{4.6.4}$$

一个综合了圆内接四边形的顶点三角形内切圆与第二类伪内切圆的命题是

**例 4.6.8 (Sawayama's Lemma)** 四边形  $ABCD$  内接于圆  $O$ ,  $I, J$  为  $\triangle ABC, \triangle DBC$  内心,  $\odot P$  分别与  $BD, AC$  相切于点  $E, F$ , 与圆  $O$  内切于点  $G$ . 则  $E, F, I, J$  四点共线.



**证明** 这里我们直接利用前面已得到的圆内接四边形的各特征点在 (4.1.5) 下的表示:

$$\begin{aligned}
 \vec{BI} &= \frac{1+b\chi}{1+\chi} \vec{BC}, \quad \vec{BJ} = \frac{c-1}{c(1+\chi)} \vec{BC} \\
 \vec{BP} &= \frac{(1+b\chi)(1+\chi-b\chi+b\chi^2-2bc\chi^2)}{(1+\chi)(-1+bc\chi^2)^2} \vec{BC}
 \end{aligned}$$

$P$  在对角线上的投影点  $E, F$  为

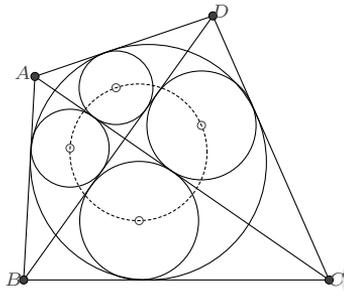
$$\begin{aligned}
 \vec{BE} &= \frac{(c-1)(1+b\chi)}{c(1+\chi)(1-bc\chi^2)} \vec{BC} \\
 \vec{BF} &= \frac{(1+b\chi)(1+\chi-b\chi-bc\chi^2)}{(1+\chi)(1-bc\chi^2)} \vec{BC}
 \end{aligned}$$

由此容易验证  $E, F, I, J$  四点共线.  $\square$

**命题 4.6.9** 对于圆外切四边形  $ABCD$ , 设它的对角线交点为  $M$ , 记四个对角线的交点三角形  $\triangle ABM$ 、 $\triangle BCM$ 、 $\triangle CDM$ 、 $\triangle DAM$  的内心分别为  $I_5$ 、 $I_6$ 、 $I_7$ 、 $I_8$ , 若  $AB \neq BC$ , 则在 (4.1.11) 的表示下, 它们可同时有理地表示:

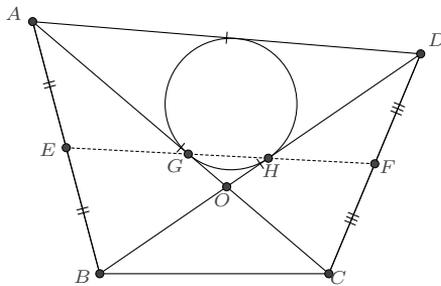
$$\begin{aligned} \vec{BI}_5 &= \frac{\kappa(1-b^2\chi^2)}{(1+\chi)(\kappa-b\chi)} \vec{BC} \\ \vec{BI}_6 &= \frac{\kappa(1+b\chi)}{\kappa+b\chi} \vec{BC} \\ \vec{BI}_7 &= \frac{\kappa(1+b\chi)(2b\kappa-\kappa^2-b\kappa^2-2b^2\chi+2b\kappa^2\chi-b^2\chi^2+b^3\chi^2+2b^2\kappa\chi^2-2b^2\kappa^2\chi^2)}{(\kappa-b\chi)(2b\kappa-\kappa^2-b\kappa^2-b^2\chi^2-b^3\chi^2+2b^2\kappa\chi^2)} \vec{BC} \\ \vec{BI}_8 &= \frac{\kappa(1-b^2\chi^2)(2b\kappa-\kappa^2-b\kappa^2+2b^2\chi-2b\kappa^2\chi+b^2\chi^2-b^3\chi^2+2b^2\kappa\chi^2-2b\kappa^2\chi^2)}{(1+\chi)(\kappa+b\chi)(2b\kappa-\kappa^2-b\kappa^2-b^2\chi^2-b^3\chi^2+2b^2\kappa\chi^2)} \vec{BC} \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

由此不难证明圆外切四边形的一个性质: 对角线的交点三角形的四内心共圆.



我们再来看一个特殊四边形的例子.

**例 4.6.10** 设四边形  $ABCD$  是凸四边形且  $AC = BD = AD$ ,  $AB$ 、 $CD$  的中点分别为  $E$ 、 $F$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ . 求证:  $\triangle AOD$  的内切圆与  $OA$ 、 $OD$  的切点在直线  $EF$  上.



**证明** 利用四边形  $ABCD$  的表示 (4.1.1), 计算得到

$$\begin{cases} AC^2 = \frac{(b-\lambda)(1-b\lambda)}{b} BC^2 \\ BD^2 = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)(1-c^2 + bc^2\lambda - a^2bc^2\lambda)}{(1-abc)^2(1+abc)^2} BC^2 \\ AD^2 = \frac{a^2(b-bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)}{(1-abc)^2(1+abc)^2} BC^2 \end{cases}$$

由  $AC = BD = AD$  则可解出

$$\lambda = \frac{b(1+b^2c^4)}{1+b^2c^2+b^4c^4}, \quad a^2 = \frac{1-c^2+b^2c^2}{c^2(1-b^2+b^2c^2)}$$

从而知该四边形有表示

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \frac{b^2(1+b^2c^4)}{(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)} \vec{BC} \\ \vec{BD} &= \frac{b^2c^2(1-b^2+b^2c^2)}{(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)} \vec{BC} \end{aligned}$$

四边形对角线交点  $O$  的表示为

$$\vec{BO} = \frac{b^2(1-b^2)c^2(1+b^2c^4)}{(1-b^2c^2)(1+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)} \vec{BC}$$

根据三角形内心的方程式 (3.11.2) 即可求出  $\triangle AOD$  的内心  $I$

$$\vec{BI} = \frac{b^4c^2 + b^6c^6}{-1 + b^6c^6} \vec{BC}$$

进而可计算出  $I$  在  $AC$ 、 $BD$  两边的投影点  $G$  和  $H$ :

$$\begin{aligned} \vec{BG} &= \frac{(1+b^2c^4)(1-b^4c^2+2b^4c^4-2b^6c^4)}{2(1-b^2c^2)(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)} \vec{BC} \\ \vec{BH} &= \frac{b^2c^2(1-2b^2+2b^2c^2-b^4c^2)(1+b^2c^4)}{2(1-b^2c^2)(1-bc+b^2c^2)(1+bc+b^2c^2)(1-c^2+b^2c^2)} \vec{BC} \end{aligned}$$

不难验证  $G$ 、 $H$  与  $AB$  的中点  $E$  和  $CD$  的中点  $F$  是共线的。 □

**注记 4.6.11** 若根据题设条件, 以  $\vec{DA}$  为基向量, 证明会简短很多。

令  $p = e^{i\angle ADB}$ ,  $q = e^{i\angle CAD}$ , 则因  $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$  是等腰三角形而有表示

$$\vec{DB} = p \vec{DA}, \quad \vec{DC} = \frac{q-1}{q} \vec{DA}$$

又根据角度可直接得到  $\triangle AOD$  内心  $I$  的表示

$$\vec{DI} = \frac{p(1-q)}{1-pq} \vec{DA}$$

进而求出  $I$  在对角线  $AC$ 、 $BD$  上的投影点  $G$ 、 $H$

$$\vec{DG} = \frac{(1-q)(-1+p+2pq)}{2q(1-pq)} \vec{DA}, \quad \vec{DH} = \frac{p(1+p)(1-q)}{2(1-pq)} \vec{DA}$$

验证即知它们与  $AB$ 、 $CD$  的中点共线.

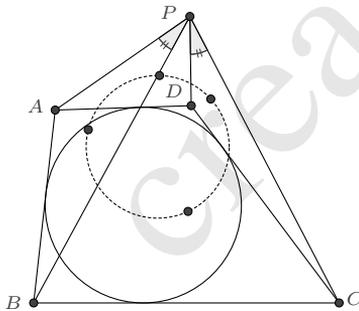
$p$ 、 $q$  与  $b^2$ 、 $c^2$  存在双有理变换关系:

$$\begin{cases} p = -\frac{c^2(1-b^2+b^2c^2)}{1-c^2+b^2c^2}, & q = -\frac{b^2(1-c^2+b^2c^2)}{1-b^2+b^2c^2} \\ b^2 = -\frac{q(1-p+pq)}{1-q+pq}, & c^2 = -\frac{p(1-q+pq)}{1-p+pq} \end{cases}$$

### 4.6.3 四边形的外点三角形

**定义 4.6.12** 如果一点在四边形的外部, 该点与四边形其中一边的两个顶点连线构成三角形称为四边形的外点三角形.

**例 4.6.13** 圆外切四边形  $ABCD$ ,  $P$  是四边形外的一点, 若  $\angle APB = \angle CPD$ , 则四个小三角形  $\triangle APB$ ,  $\triangle BPC$ ,  $\triangle CPD$ ,  $\triangle DPA$  的内心共圆.



**证明** 我们只需设法使得四个小三角形所涉及各边边长有理表示, 则可获得它们内心的有理表示. 根据圆外切四边形  $ABCD$  的表示 (4.1.7),  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $DA$  的表示已是有理形式, 因而只需再将  $PA$ 、 $PB$ 、 $PC$ 、 $PD$  也有理地表示即可. 对于  $\triangle PBC$ , 若令  $p = e^{i\angle BPC}$ ,  $q = e^{i(\angle BPC + \angle PBC)}$ , 则它有表示

$$\vec{BP} = \frac{1-q^2}{1-p^2} \vec{BC}$$

并且两边  $PB$ 、 $PC$  的表示也是有理的

$$PB = \frac{p(1-q^2)}{(1-p^2)q}BC, \quad PC = \frac{(p^2-q^2)}{(1-p^2)q}BC$$

而由命题的条件  $\angle APB = \angle CPD$ , 即

$$\operatorname{Im} \frac{(P-A)(P-C)}{(P-B)(P-D)} = 0$$

又可得到关于  $a$  的一次方程, 解出

$$a = \frac{(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)(bp^2-b^2cp^2-q^2+cq^2-bc^2p^2q^2+b^2c^2p^2q^2)}{b(1-b+b^2cp^2-b^2c^2p^2-cq^2+bc^2q^2)(p^2-bcp^2-q^2+cq^2-cp^2q^2+bcp^2q^2)}$$

计算即知,  $PA$ 、 $PD$  也可有理地表示出来.

$$PA = \frac{(b^2p^2-q^2)(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)(p^2-bcp^2-q^2+cq^2-cp^2q^2+bcp^2q^2)}{\left( \begin{array}{l} (1-p^2)q(bp^2-b^2cp^2-q+bcq^2) \\ (bp^2-b^2cp^2+q-bq-bcp^2q+b^2cp^2q-q^2+bcq^2) \end{array} \right)} BC$$

$$PD = \frac{p(1-c^2q^2)(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)(p^2-bcp^2-q^2+cq^2-cp^2q^2+bcp^2q^2)}{\left( \begin{array}{l} (1-p^2)q(p-bcp-q+cq+bcp^2q-bc^2p^2q-cpq^2+bc^2pq^2) \\ (p-bcp+q-cq-bcp^2q+bc^2p^2q-cpq^2+bc^2pq^2) \end{array} \right)} BC$$

从而得到各小三角形内心的有理表示<sup>①</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{PI}_1 = \frac{(bp-q)(1+q)(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)}{(p-q)(p+q)(bp^2-b^2cp^2-q+bcq^2)} \vec{PC} \\ \vec{PI}_2 = \frac{1+q}{p+q} \vec{PC} \\ \vec{PI}_3 = \frac{p(1+cq)(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)}{(p+q)(p-bcp-q+cq+bcp^2q-bc^2p^2q-cpq^2+bc^2pq^2)} \vec{PC} \\ \vec{PI}_4 = \frac{p(bp-q)(1+cq)(1-b+bp^2-bcp^2-q^2+bcq^2)^2}{\left( \begin{array}{l} (p^2-q^2)(bp^2-b^2cp^2-q+bcq^2) \\ (p-bcp-q+cq+bcp^2q-bc^2p^2q-cpq^2+bc^2pq^2) \end{array} \right)} \vec{PC} \end{array} \right.$$

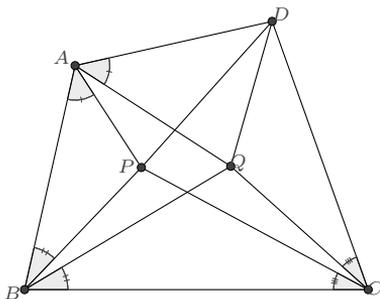
进而计算即知这四内心共圆. □

<sup>①</sup>这里为了使书写简短, 改以  $\vec{PC}$  为基向量进行表示.

### 4.6.4 四边形的内点三角形

**定义 4.6.14** 如果一点在四边形的内部, 该点与四边形其中一边的两个顶点连线构成三角形称为四边形的内点三角形.

**例 4.6.15** 如图, 设  $P, Q$  是凸四边形  $ABCD$  内两点, 且  $\angle PAB = \angle QAD$ 、 $\angle PBA = \angle QBC$ 、 $\angle PCB = \angle QCD$ . 求证:  $\sqrt{PA \cdot PC \cdot QA \cdot QC} + \sqrt{PB \cdot PD \cdot QB \cdot QD} = \sqrt{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}$ .



**证明** 令  $\lambda = \frac{AB}{BC}$ ,  $a = e^{i\angle A}$ ,  $b = e^{i\angle B}$ ,  $c = e^{i\angle C}$ , 则四边形  $ABCD$  有表示:

$$\vec{BA} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)}{1 - a^2b^2c^2} \vec{BC}$$

再令  $p = e^{i\angle PBC}$ ,  $q = e^{i\angle PCB}$ , 则

$$\vec{BP} = \frac{p^2(1 - q^2)}{1 - p^2q^2} \vec{BC}$$

根据  $\angle PBA = \angle QBC$  和  $\angle PCB = \angle QCD$  又知

$$e^{i\angle QBC} = e^{i(\angle B - \angle PBC)} = \frac{b}{p}, \quad e^{i\angle QCB} = e^{i(\angle C - \angle PCB)} = \frac{c}{q}$$

因而点  $Q$  有表示:

$$\vec{BQ} = \frac{b^2(c^2 - q^2)}{b^2c^2 - p^2q^2} \vec{BC}$$

再根据  $\angle BAP = \angle QAD$  得到

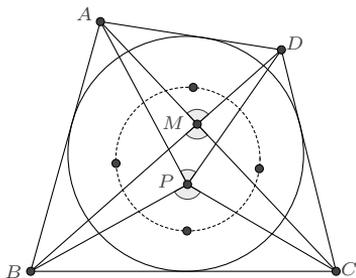
$$a^2 = \frac{(bc^2 - bq^2 - b^2c^2\lambda + p^2q^2\lambda)(p^2 - p^2q^2 - b\lambda + bp^2q^2\lambda)}{b(b - bq^2 - \lambda + p^2q^2\lambda)(bc^2p^2 - bp^2q^2 - b^2c^2\lambda + p^2q^2\lambda)}$$

将其整体代入点  $D$  的表示化简, 则有:

$$\vec{BD} = \frac{bc^2p^2 - bp^2q^2 - bc^2p^2q^2 + bp^2q^4 - b^2c^2\lambda + b^2q^2\lambda - b^2p^2q^2\lambda + b^2c^2p^2q^2\lambda + p^4q^2\lambda - p^4q^4\lambda}{bc^2p^2 - bp^2q^2 - bc^2p^2q^2 + bp^2q^4 - b^2c^2\lambda + p^2q^2\lambda + b^2c^2p^2q^2\lambda - p^4q^4\lambda} \vec{BC}$$

至此, 图中所有点均已有了理表示, 各线段长可以方便地计算出来. 待证的等式亦可约化为一个简单的代数恒等式而获证.  $\square$

**例 4.6.16** 圆外切四边形  $ABCD$ ,  $P$  是四边形内的一点, 记四边形对角线的交点为  $M$ , 若  $\angle BPC + \angle DPA = 2\angle BMC$ , 则四个小三角形  $\triangle APB, \triangle BPC, \triangle CPD, \triangle DPA$  的内心共圆.



**证明** 首先我们尝试有理地表示图中各点, 记  $a = e^{i\angle A}$ ,  $b = e^{i\angle B}$ ,  $c = e^{i\angle C}$ , 则圆外切四边形  $ABCD$  的表示为:

$$\vec{BA} = \frac{b(1-ab)(1-c)}{(1-a)(1-bc)} \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(1-c)(1+a-ab-abc)}{(1-bc)(1-abc)} \vec{BC}$$

其对角线交点  $M$  有表示:

$$\vec{BM} = \frac{(1+b)(1-c)(1+a-ab-abc)}{2(1-ac)(1-bc)} \vec{BC}$$

对于形内的点  $P$ , 记  $p = e^{i\angle BPC}$ ,  $q = e^{i\angle PBC}$ , 则有

$$\vec{BP} = \frac{1-p^2q^2}{1-p^2} \vec{BC}$$

前面我们已知: 为了有理地表示三角形的内心, 需要获得三角形内角的表示. 不妨设  $e^{i\angle APB} = z$ ,  $e^{i\angle DPA} = w$ , 则由角度关系可知四个小三角形的所有内角表示, 兹列如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle PAB: \quad e^{i\angle APB} = z, \quad e^{i\angle ABP} = \frac{b}{q}, \quad e^{i\angle PAB} = \frac{-q}{zb} \\ \triangle PBC: \quad e^{i\angle BPC} = p, \quad e^{i\angle PBC} = q, \quad e^{i\angle PCB} = \frac{-1}{pq} \\ \triangle PCD: \quad e^{i\angle PCD} = -cpq, \quad e^{i\angle CPD} = \frac{1}{pzw}, \quad e^{i\angle CDP} = \frac{wz}{cq} \\ \triangle PDA: \quad e^{i\angle PAD} = -\frac{zab}{q}, \quad e^{i\angle DPA} = w, \quad e^{i\angle ADP} = \frac{q}{abwz} \end{array} \right.$$

于是四内心可分别表示为:

$$\begin{cases} \vec{PI}_1 = \frac{q+bz}{b+q} \vec{PA} = \frac{q-b}{q-bz} \vec{PB} \\ \vec{PI}_2 = \frac{p(1-q)}{1-pq} \vec{PB} = \frac{1+pq}{p(1+q)} \vec{PC} \\ \vec{PI}_3 = \frac{1+cpq}{p(cq+wz)} \vec{PC} = \frac{p(wz-cq)}{1-cpq} \vec{PD} \\ \vec{PI}_4 = \frac{q-abwz}{q-abz} \vec{PD} = \frac{q+abz}{q+abwz} \vec{PA} \end{cases}$$

若四内心共圆, 则它们的交比应为实数. 根据上述内心的两种表示, 计算得到

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 - I_4} \frac{I_3 - I_4}{I_3 - I_2} = \frac{\left( \frac{p(1+q)(b+q)(cq+wz)(q+abwz)(q-b-pq+bpq+bpz-bpqz)}{(q-abcpqz-abwz-pqwz+abcpqwz+abpwz^2)} \right)}{\left( \frac{b(1-pq)(1-cpq)(q-bz)(q-abz)(1+q-cq+cpq-wz-pqwz)}{(q+abz-qz+aqz-aqwz-abwz^2)} \right)} \frac{(P-B)(P-D)}{(P-A)(P-C)}$$

因为

$$\frac{(P-B)(P-D)}{(P-A)(P-C)} = \frac{|PB| \cdot |PD|}{|PA| \cdot |PC|} e^{-i(\angle BPC + \angle DPA)} = \frac{|PA| \cdot |PC|}{|PB| \cdot |PD|} \frac{1}{pw}$$

所以待证目标等价于证明

$$\frac{\left( \frac{(1+q)(b+q)(cq+wz)(q+abwz)(q-b-pq+bpq+bpz-bpqz)}{(q-abcpqz-abwz-pqwz+abcpqwz+abpwz^2)} \right)}{\left( \frac{b(1-pq)(1-cpq)w(q-bz)(q-abz)(1+q-cq+cpq-wz-pqwz)}{(q+abz-qz+aqz-aqwz-abwz^2)} \right)} \in \mathbb{R}$$

也即左方式子与其共轭之比等于 1:

$$\frac{\left( \frac{(b-q+pq-bpq-bpz+bpqz)(c+cpq-wz+pwz-cpwz-cpqwz)}{(q+bz-bwz+abwz-qwz-abwz^2)(q-abcpqz-abwz-pqwz+abcpqwz+abpwz^2)} \right)}{\left( \frac{bpw(1-q-z+bz-bpz+pqz)(1+q-cq+cpq-wz-pqwz)}{(q+abz-qz+aqz-aqwz-abwz^2)(cq+z-abcz-cpqz-wz+abcpwz^2)} \right)} = 1 \quad (*)$$

另一方面, 根据  $z$ 、 $w$  的定义可知

$$z^2 = \frac{\begin{pmatrix} b-ab-b^2c+ab^2c-q^2+abq^2+cq^2-abcq^2+p^2q^2 \\ -bp^2q^2-cp^2q^2+abcp^2q^2+b^2cp^2q^2-ab^2cp^2q^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b(1-a-b+ab^2+abc-ab^2c+bp^2-ab^2p^2-bcp^2) \\ +ab^2cp^2-p^2q^2+ap^2q^2+bc p^2q^2-abc p^2q^2 \end{pmatrix}} \quad (1)$$

$$w^2 = \frac{\begin{pmatrix} b(1-a-b+ab^2+abc-ab^2c+bp^2-ab^2p^2-bcp^2+ab^2cp^2-p^2q^2) \\ +ap^2q^2+bc p^2q^2-abc p^2q^2 \\ +c^2q^2-bc^2q^2-abc^2q^2-c^2p^2q^2+bc^2p^2q^2+abc^2p^2q^2-ab^2c^2p^2q^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (b-ab-b^2c+ab^2c-q^2+abq^2+cq^2-abcq^2+p^2q^2-bp^2q^2-cp^2q^2) \\ +abc p^2q^2+b^2c p^2q^2-ab^2c p^2q^2 \\ -bc p^2q^2-abc p^2q^2+ab^2c^2p^2-p^2q^2+bc p^2q^2+abc p^2q^2-ab^2c^2p^2q^2 \end{pmatrix}} \quad (2)$$

再由  $\angle BPC + \angle DPA = 2\angle BMC$  知

$$pw = -\frac{(1-a-ab+abc)(1+c-bc-abc)}{(1+a-ab-abc)(1-c-bc+abc)} \quad (3)$$

注意到由 (1) 可以解出  $c$ :

$$c = \frac{\begin{pmatrix} b-ab-q^2+abq^2+p^2q^2-bp^2q^2-bz^2+abz^2 \\ +b^2z^2-ab^3z^2-b^2p^2z^2+ab^3p^2z^2+bp^2q^2z^2-abp^2q^2z^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b^2-ab^2-q^2+abq^2+p^2q^2-abp^2q^2-b^2p^2q^2+ab^2p^2q^2 \\ +ab^2z^2-ab^3z^2-b^2p^2z^2+ab^3p^2z^2+b^2p^2q^2z^2-ab^2p^2q^2z^2 \end{pmatrix}}$$

将其代入 (3) 后又可解出  $a$ :

$$a = \frac{\begin{pmatrix} (b^2-q^2+p^2q^2-b^2p^2q^2-b^2p^2z^2+b^2p^2q^2z^2) \\ (b-2q^2+bq^2+2p^2q^2-2bp^2q^2-bpw+bpq^2w-bz^2+2b^2z^2-b^3z^2 \\ -2b^2p^2z^2+b^3p^2z^2+bp^2q^2z^2+bpwz^2-b^3pwz^2+b^3p^3wz^2-bp^3q^2wz^2) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} b(1-q^2-z^2+b^2z^2-b^2p^2z^2+p^2q^2z^2) \\ (b^2-q^2+p^2q^2-b^2p^2q^2-b^2pw-pq^2w+2bpq^2w+p^3q^2w-2bp^3q^2w+b^2p^3q^2w \\ -b^2p^2z^2+b^2p^2q^2z^2+2b^2pwz^2-2b^3pwz^2-b^2p^3wz^2+2b^3p^3wz^2-b^2p^3q^2wz^2) \end{pmatrix}}$$

再将  $a, c$  的表示代入 (2) 进行因式分解, 其中符合要求的是如下关于  $w$  的二次式:

$$\begin{aligned} & -b^2+q^2+b^2q^2-p^2q^2+b^2p^2q^2-q^4+p^2q^4-b^2p^2q^4+b^2pw+pq^2w-2bpq^2w-b^2pq^2w-p^3q^2w \\ & +2bp^3q^2w-b^2p^3q^2w-pq^4w+2bpq^4w+p^3q^4w-2bp^3q^4w+b^2p^3q^4w-b^2wz+2b^3wz+2b^2p^2wz \\ & -2b^3p^2wz+q^2wz-2bq^2wz-b^2q^2wz-p^2q^2wz+3b^2p^2q^2wz-2b^3p^2q^2wz+2bp^4q^2wz-4b^2p^4q^2wz \\ & +2b^3p^4q^2wz+q^4wz-3p^2q^4wz+4bp^2q^4wz-b^2p^2q^4wz+2p^4q^4wz-4bp^4q^4wz+2b^2p^4q^4wz \\ & -b^2pw^2z+pq^2w^2z+b^2pq^2w^2z-p^3q^2w^2z+b^2p^3q^2w^2z-pq^4w^2z+p^3q^4w^2z-b^2p^3q^4w^2z+b^2z^2 \\ & -b^4z^2+b^2p^2z^2+b^4p^2z^2-q^2z^2+b^2q^2z^2+p^2q^2z^2-6b^2p^2q^2z^2+b^4p^2q^2z^2+b^2p^4q^2z^2-b^4p^4q^2z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+p^2q^4z^2+b^2p^2q^4z^2-p^4q^4z^2+b^2p^4q^4z^2-3b^2p wz^2+4b^3p wz^2-b^4p wz^2+b^2p^3 wz^2-4b^3p^3 wz^2 \\
&+b^4p^3 wz^2-pq^2 wz^2+3b^2pq^2 wz^2-2b^3pq^2 wz^2+p^3q^2 wz^2+2b^2p^3q^2 wz^2+b^4p^3q^2 wz^2-b^2p^5q^2 wz^2 \\
&+2b^3p^5q^2 wz^2-b^4p^5q^2 wz^2+2p q^4 wz^2-2bp q^4 wz^2-3p^3q^4 wz^2+4bp^3q^4 wz^2-3b^2p^3q^4 wz^2+p^5q^4 wz^2 \\
&-2bp^5q^4 wz^2+b^2p^5q^4 wz^2+b^2wz^3-2b^3wz^3+b^4wz^3-3b^2p^2wz^3+4b^3p^2wz^3-3b^4p^2wz^3-2b^3p^4wz^3 \\
&+2b^4p^4wz^3-q^2wz^3+2bq^2wz^3-b^2q^2wz^3+p^2q^2wz^3+2b^2p^2q^2wz^3+b^4p^2q^2wz^3-2bp^4q^2wz^3 \\
&+3b^2p^4q^2wz^3-b^4p^4q^2wz^3+p^2q^4wz^3-4bp^2q^4wz^3+b^2p^2q^4wz^3-p^4q^4wz^3+4bp^4q^4wz^3-3b^2p^4q^4wz^3 \\
&+b^2pw^2z^3-b^4pw^2z^3+b^2p^3w^2z^3+b^4p^3w^2z^3-pq^2w^2z^3+b^2pq^2w^2z^3+p^3q^2w^2z^3-6b^2p^3q^2w^2z^3 \\
&+b^4p^3q^2w^2z^3+b^2p^5q^2w^2z^3-b^4p^5q^2w^2z^3+p^3q^4w^2z^3+b^2p^3q^4w^2z^3-p^5q^4w^2z^3+b^2p^5q^4w^2z^3 \\
&-b^2p^2z^4+b^4p^2z^4-b^4p^4z^4+b^2p^2q^2z^4-b^4p^2q^2z^4+b^2p^4q^2z^4+b^4p^4q^2z^4-b^2p^4q^4z^4+2b^2p wz^4 \\
&-4b^3p wz^4+2b^4p wz^4-b^2p^3wz^4+4b^3p^3wz^4-3b^4p^3wz^4+b^4p^5wz^4+2bpq^2wz^4-4b^2pq^2wz^4+2b^3pq^2wz^4 \\
&-2bp^3q^2wz^4+3b^2p^3q^2wz^4-b^4p^3q^2wz^4-b^2p^5q^2wz^4-2b^3p^5q^2wz^4+b^4p^5q^2wz^4-2bp^3q^4wz^4 \\
&+2b^2p^3q^4wz^4+2bp^5q^4wz^4-b^2p^5q^4wz^4+b^2p^2wz^5-2b^3p^2wz^5+b^4p^2wz^5+2b^3p^4wz^5-b^4p^4wz^5 \\
&-b^2p^2q^2wz^5+2b^3p^2q^2wz^5-b^4p^2q^2wz^5-b^2p^4q^2wz^5-2b^3p^4q^2wz^5+b^4p^4q^2wz^5+b^2p^4q^4wz^5 \\
&-b^2p^3w^2z^5+b^4p^3w^2z^5-b^4p^5w^2z^5+b^2p^3q^2w^2z^5-b^4p^3q^2w^2z^5+b^2p^5q^2w^2z^5+b^4p^5q^2w^2z^5-b^2p^5q^4w^2z^5
\end{aligned}$$

同样, 将  $a$ 、 $c$  的表示代入 (\*), 得到关于  $w$  的一个高次方程, 该方程的一个因式即是上式. 于是命题成立.  $\square$

#### 注记 4.6.17

(1). 应用多项式的求余降次, 可以获得  $z$  关于  $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $p$ 、 $q$  的显式表示:

$$z = \frac{\begin{pmatrix} p(1+a-ab-abc)(1-c-abc+bc^2-b^2c^2+ab^2c^2-q^2+bcq^2+abcq^2+c^2q^2) \\ -bc^2q^2-abc^2q^2+cp^2q^2-bcp^2q^2-c^2p^2q^2+abc^2p^2q^2+b^2c^2p^2q^2-ab^2c^2p^2q^2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} (1+c-bc-abc)(1-a-b+ab^2+abc-ab^2c+bp^2+abp^2-ab^2p^2-bcp^2) \\ -abc p^2+ab^2c^2p^2-p^2q^2+ap^2q^2-abp^2q^2+bcp^2q^2+ab^2cp^2q^2-ab^2c^2p^2q^2 \end{pmatrix}}$$

(2). 此命题的另一个等价表述是:

圆外切四边形  $ABCD$ ,  $P$  是四边形内的一点,  $X$  是  $\angle APC$  的角平分线与线段  $AC$  的交点,  $Y$  是  $\angle BPD$  的角平分线与线段  $BD$  的交点. 若  $X$ 、 $Y$  与四边形  $ABCD$  的内切圆圆心  $O$  共线, 则四个小三角形  $\triangle APB$ 、 $\triangle BPC$ 、 $\triangle CPD$ 、 $\triangle DPA$  的内心共圆.

(3). 另外一个较为优美的性质:

$$AP \cdot BP \cdot CD + CP \cdot DP \cdot AB = AP \cdot DP \cdot BC + BP \cdot CP \cdot DA$$

证明也是类似的.

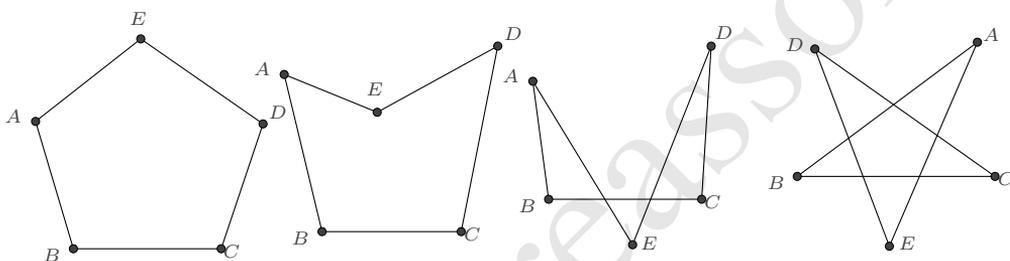
Creasson

Creasson

# 第 5 章 多边形

## 5.1 多边形的表示

一般多边形的图形是比较多样的. 以五边形为例, 有这样一些样式:

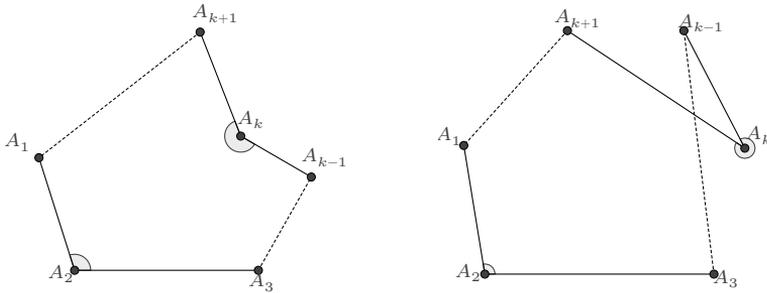


为了以多边形的内禀量角度和边长对其作代数表示, 我们有相当的必要约定角度的选择.

**约定 5.1.1** 对于按字母顺序顺次连接顶点的多边形  $A_1A_2A_3\dots A_n$ , 记  $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$ , 约定其在  $A_k$  点处的内角为  $A_k\vec{A}_{k-1}$  绕该点顺时针旋转至与  $A_k\vec{A}_{k+1}$  方向一致时所需的最小角度. 内角简记为  $\angle A_k$ .

按此约定, 同四边形的表示 (4.1.1) 的导出过程类似, 我们可以给出一般五边形的表示

**命题 5.1.2** 记  $\lambda = \frac{AB}{BC}, \mu = \frac{CD}{BC}, a = e^{i\angle A}, b = e^{i\angle B}, c = e^{i\angle C}, d = e^{i\angle D}$ , 则五边形的一



个表示是

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{c-\mu}{c} \vec{BC} \\ \vec{BE} &= \frac{b(a^2b - a^2bc^2d^2 + \lambda - a^2\lambda - a^2bc\mu + a^2bcd^2\mu)}{(1-abcd)(1+abcd)} \vec{BC} \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

例如, 正五边形的边长相等且各个内角均为  $108^\circ$ , 因此  $\lambda = \mu = 1, a = b = c = d = e^{i\frac{3\pi}{5}}$ , 于是其表示为

$$\vec{BA} = \left( \cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \left( 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \left( \frac{1}{2} + i \sin \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right) \vec{BC}$$

又如, 正五角星的边长相等且各个内角均为  $36^\circ$ , 因此  $\lambda = \mu = 1, a = b = c = d = e^{i\frac{1}{5}\pi}$ , 于是其表示为

$$\vec{BA} = \left( \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \left( 1 + \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5} \right) \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \left( \frac{1}{2} + i \sin \frac{\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right) \vec{BC}$$

在 (5.1.1) 的表示下, 五边形的各边长也是可有理表示的. 例如, 若五边形是凸的, 则

$$\begin{aligned} AB &= \lambda BC, \quad CD = \mu BC \\ DE &= \frac{d(c - a^2b^2c - bc\lambda + a^2bc\lambda - \mu + a^2b^2c^2\mu)}{(-1 + abcd)(1 + abcd)} \\ EA &= \frac{a(b - bc^2d^2 - \lambda + b^2c^2d^2\lambda - bc\mu + bcd^2\mu)}{(-1 + abcd)(1 + abcd)} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

其他情形也是类似的, 只存在正负号选取的差异.

对于圆内接五边形, 根据共圆条件不难得出

$$\lambda = \frac{(1 - abd)(1 + abd)}{b(1 - ad)(1 + ad)}, \quad \mu = \frac{(1 - acd)(1 + acd)}{c(1 - ad)(1 + ad)}$$

从而得到它的一个表示是

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \frac{1 - a^2 b^2 d^2}{1 - a^2 d^2} \vec{BC} \\ \vec{BD} &= \frac{c^2 - 1}{c^2(1 - a^2 d^2)} \vec{BC} \\ \vec{BE} &= \frac{1 - a^2}{1 - a^2 d^2} \vec{BC}\end{aligned}$$

对于圆外切五边形, 其内切圆的表示容易根据两个角度  $\angle B$ 、 $\angle C$  而确定:

$$\vec{BP} = \frac{(1 - c)(-1 + 3b - iu - ibu)}{2(1 - bc)(1 - iu)} \vec{BC}$$

再由此圆与另外两边  $DE$  和  $EA$  相切而知<sup>①</sup>

$$\lambda = \frac{(1 - ab)(1 - c)}{(1 - a)(1 + bc)}, \quad \mu = \frac{(1 - b)(1 - cd)}{(1 - bc)(1 - d)}$$

从而得到它的一个表示是

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= \frac{b(1 - ab)(1 - c)}{(1 - a)(1 - bc)} \vec{BC} \\ \vec{BD} &= \frac{(c - 1)(1 - b - bc + bcd)}{c(1 - bc)(1 - d)} \vec{BC} \\ \vec{BE} &= \frac{b(1 - c)(1 + a - ab + abcd)}{(1 - bc)(1 + abcd)} \vec{BC}\end{aligned}$$

一般  $n$  边形均可以按照前述方法导出其表示, 只是较为繁琐. 下面我们介绍特殊  $n$  边形的几种常用表示.

对于圆的内接  $n$  边形, 一个熟知的表示是:

**命题 5.1.3** 若已知圆的中心  $O$  及圆上的一点  $T$ , 则圆内接  $n$  边形可表示为

$$\vec{OA}_k = e^{i\theta_k} \vec{OT} = \frac{1 + iu_k}{1 - iu_k} \vec{OT}; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.3)$$

并一般要求  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$ .

而如果考虑圆的二阶有理表示 (2.2.2), 又有

**命题 5.1.4** 圆内接  $n$  边形的一个二阶有理参数表示是

$$\vec{A}_1 A_k = \frac{1 + is}{1 - iu_k} A_1 A_2; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.4)$$

<sup>①</sup>另有三种情形: 圆与各边或其延长线相切但位于五边形之外.

这里规定  $u_1 = -\infty, u_2 = -s$  以及  $-s < u_3 < u_4 < \dots < u_n$  以保证  $A_1A_2\dots A_n$  是按逆时针排列的凸多边形.

也可以考虑圆的四阶有理参数表示, 得到

**命题 5.1.5** 若已知圆的中心  $O$  及圆上的一点  $T$ , 则圆内接  $n$  边形可表示为

$$\vec{OA}_k = e^{i2\theta_k} \vec{OT} = \left( \frac{1 + iu_k}{1 - iu_k} \right)^2 \vec{OT}; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.5)$$

并一般要求  $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ .

**命题 5.1.6** 圆内接  $n$  边形的一个四阶有理参数表示是

$$\vec{OA}_k = \frac{(s + u_k)(1 - su_k)}{s(1 - iu_k)^2} \vec{A_1A_2}; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.6)$$

这里规定  $u_1 = -s, u_2 = 0$  以及  $0 < u_3 < u_4 < \dots < u_n < \frac{1}{s}$  以保证  $A_1A_2\dots A_n$  是按逆时针排列的凸多边形.

四阶的有理参数表示可使得任意两点之间的距离也可有理表示, 例如对于 (5.1.6)

$$A_jA_k = \frac{(1 + s^2)(1 + u_ju_k)(u_k - u_j)}{s(1 + u_j^2)(1 + u_k^2)} A_1A_2; (1 \leq j < k \leq n)$$

这对于圆内接多边形性质的研究是极为方便的.

同理, 圆的任意一个有理表示都可以诱导出圆外切  $n$  边形的一个有理表示. 例如

**命题 5.1.7** 若已知圆的中心  $O$  及圆上的一点  $T$ , 则圆外切  $n$  边形可表示为

$$\vec{OA}_k = \frac{2}{z_k + z_{k+1}} \vec{OT}; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.7)$$

这里规定  $z_{n+1} = z_1$ , 并且  $z_1, z_2, \dots, z_n$  是单位复数.

**命题 5.1.8** 圆外切  $n$  边形的一个二阶有理参数表示是

$$\vec{PA}_k = -\frac{(1 + is)(2 + iu_k + iu_{k+1})}{2(1 + u_ku_{k+1})} \vec{PQ}; (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.8)$$

这里  $P, Q$  是  $A_1$  向圆所引切线的两个切点,  $u_{n+1} = u_1$ , 并规定  $u_1 = \infty, u_2 = -s$  以及  $-s < u_3 < u_4 < \dots < u_n < \infty$  以保证  $A_1A_2\dots A_n$  是按逆时针排列的凸多边形.

若要使得圆外切  $n$  边形的边长可有理表示, 考虑圆的四阶有理参数表示即可, 这里不再赘述.

特别地, 正  $n$  边形有这样两种表示 (记  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ )

**命题 5.1.9** 若已知正  $n$  边形的中心  $O$  及一个顶点, 则正  $n$  边形可表示为

$$\vec{OA}_k = \omega^{k-1} \vec{OA}_1; \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.9)$$

**命题 5.1.10** 若已知正  $n$  边形的一边, 则正  $n$  边形可表示为

$$\vec{A_1A_k} = \frac{1 - \omega^{k-1}}{1 - \omega} \vec{A_1A_2}; \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (5.1.10)$$

也有其他一些较为知名的多边形, 例如调和多边形, 其定义为:

**定义 5.1.11 (调和多边形)** 平面上点  $K$  至圆内多边形各边的垂线, 若与各边的长度成比例, 则此多边形称为调和多边形.

这里我们导出它的一个表示.

**解** 设圆心为  $O$ , 半径为  $R$ , 又设  $K$  与  $O$  的距离为  $d$ . 圆内接多边形的各点按逆时针方向排列, 其表示依次为

$$\vec{OA}_k = R \frac{1 + iu_k}{1 - iu_k}$$

$K$  到各边的垂线与各边长度成比例, 设其为  $r$ , 则

$$r = \frac{2S_{KA_kA_{k+1}}}{|A_kA_{k+1}|^2} = \frac{R - d + (R + d)u_k u_{k+1}}{2R(u_k - u_{k+1})}$$

上述关于  $u_k$  的递推关系是分式线性的

$$u_{k+1} = \frac{d - R + 2rRu_k}{2rR + (d + R)u_k}$$

根据不动点理论, 若  $\lambda_1, \lambda_2$  是

$$\lambda = \frac{d - R + 2rR\lambda}{2rR + (d + R)\lambda}$$

的两根, 即

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{d - R}}{\sqrt{d + R}}$$

则

$$\frac{u_{k+1} - \lambda_1}{u_{k+1} - \lambda_2} = \left( \frac{2rR - d\lambda_1 - R\lambda_1}{2rR - d\lambda_2 - R\lambda_2} \right) \frac{u_k - \lambda_1}{u_k - \lambda_2}$$

设多边形的边数为  $n$ , 易知  $u_k$  是  $n$ -周期序列, 因此

$$\frac{2rR - d\lambda - R\lambda_1}{2rR - d\lambda_2 - R\lambda_2} = \pm e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

由此导出

$$\tan \frac{\pi}{n} = \pm \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{2Rr}$$

而

$$\frac{u_k - \lambda_1}{u_k - \lambda_2} = e^{\pm i\frac{2k\pi}{n}} \frac{u_0 - \lambda_1}{u_0 - \lambda_2}$$

其中  $u_0$  是任意的实数.

若令  $\frac{R-d}{R+d} = s^2$ , 其中  $-1 < s < 1$ , 则上述结论可简化为:

$$r = \pm \frac{s}{(1+s^2)} \cot \frac{\pi}{n}$$

并且

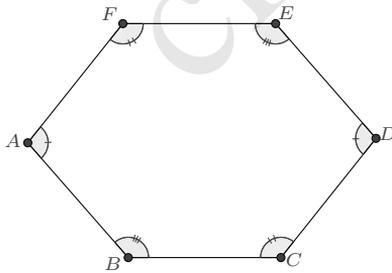
$$u_k = \frac{s(u_0 + s \tan \frac{k\pi}{n})}{s - u_0 \tan \frac{k\pi}{n}}$$

□

## 5.2 多边形的性质

目前, 关于多边形性质的研究不多, 这里例举一些典型的示例.

**例 5.2.1** 等边六边形的  $ABCDEF$ , 若  $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$ , 则有:  $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$



**证明** 因为六边形的内角和为  $4\pi$ , 所以由题设可知

$$\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F = 2\pi$$

令  $a = e^{i\angle A}, b = e^{i\angle B}, c = e^{i\angle C}, d = e^{i\angle D}, e = e^{i\angle E}, f = e^{i\angle F}$ , 即有

$$ace = bdf = 1$$

又因为  $ABCDEF$  是等边六边形, 所以

$$a = \frac{F-A}{B-A}, b = \frac{A-B}{C-B}, c = \frac{B-C}{D-C}, d = \frac{C-D}{E-D}, e = \frac{D-E}{F-E}, f = \frac{E-F}{A-F}$$

根据前四式, 我们可以得到六边形的以  $\vec{BC}$  为基向量的表示

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= b\vec{BC}, & \vec{BD} &= \left(1 - \frac{1}{c}\right)\vec{BC} \\ \vec{BE} &= \frac{1-d+cd}{cd}\vec{BC}, & \vec{BF} &= (1-a)b\vec{BC}\end{aligned}$$

将其代入后两式得到关系式

$$e = \frac{1}{1-d+cd-bcd+abcd}, \quad f = \frac{1-d+cd-bcd+abcd}{abcd}$$

取共轭又有

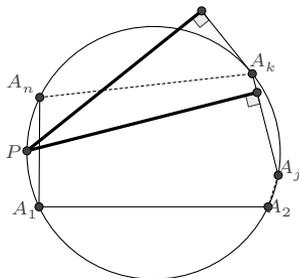
$$\frac{1}{e} = \frac{abcd}{1-a+ab-abc+abcd}, \quad \frac{1}{f} = 1-a+ab-abc+abcd$$

以上等式联立, 即知其唯一的有效解是

$$c = \frac{1}{ab}, \quad d = a, \quad e = b, \quad f = \frac{1}{ab}$$

因而结论成立. □

**例 5.2.2** 圆内接  $n (n \geq 4)$  边形外接圆上一点至各顶点所作切线的距离之积与该点至各条对角线的距离之积的  $\frac{2}{n-3}$  次方相等.



**证明** 根据(5.1.4), 圆内接  $n$  边形的各顶点  $A_k$  可表示为

$$\vec{A_1 A_k} = \frac{1+is}{1-iu_k} \vec{A_1 A_2}; (k=1, 2, \dots, n)$$

设圆上的一点  $P$  为

$$\vec{A_1 P} = \frac{1+is}{1-it} \vec{A_1 A_2}$$

则不难求出,  $P$  点到  $A_k$  点处的切线的距离为

$$d_k = \frac{\sqrt{1+s^2}(t-u_k)^2}{(1+t^2)(1+u_k^2)} A_1 A_2$$

$P$  到  $A_j A_k$  连线的距离为

$$\delta_{jk} = \frac{\sqrt{1+s^2}|t-u_j||t-u_k|}{(1+t^2)\sqrt{1+u_j^2}\sqrt{1+u_k^2}} A_1 A_2$$

这个距离表示关于  $j, k$  是可分离的, 我们将其分解为对称的表示:

$$\delta_{jk} = \left( \frac{\sqrt[4]{1+s^2}|t-u_j|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+u_j^2}} \sqrt{A_1 A_2} \right) \cdot \left( \frac{\sqrt[4]{1+s^2}|t-u_k|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+u_k^2}} \sqrt{A_1 A_2} \right)$$

因此这些距离之积

$$\prod_{\substack{1 \leq j, k \leq n \\ j \notin \{k-1, k, k+1\}}} \delta_{jk} = \prod_{k=1}^n \left( \frac{\sqrt[4]{1+s^2}|t-u_k|}{\sqrt{1+t^2}\sqrt{1+u_k^2}} \sqrt{A_1 A_2} \right)^{n-3} = \prod_{k=1}^n d_k^{\frac{n-3}{2}}$$

□

**例 5.2.3** 求正  $n$  边形平面上的一点  $P$  到各顶点的距离平方.

**解** 简单的做法是利用向量的加法和正  $n$  边形的性质  $\sum_{k=1}^n \vec{OA_k} = 0$  进行计算

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n PA_k^2 &= \sum_{k=1}^n (\vec{OA_k} - \vec{OP}) \otimes (\vec{OA_k} - \vec{OP}) \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{OA_k} \otimes \vec{OA_k} - \vec{OP} \otimes \left( \sum_{k=1}^n \vec{OA_k} \right) - \left( \sum_{k=1}^n \vec{OA_k} \right) \otimes \vec{OP} + \sum_{k=1}^n \vec{OP} \otimes \vec{OP} \\ &= \sum_{k=1}^n \vec{OA_k}^2 + \sum_{k=1}^n OP^2 = n(R^2 + OP^2) \end{aligned}$$

□

## 第 6 章 圆锥曲线

---

圆锥曲线是指由一平面截二次锥面得到的曲线. 2000 多年前, 古希腊数学家阿波罗尼斯就采用纯几何的方法对圆锥曲线的性质做过全面而深入地探讨和总结. 至 17 世纪, 随着解析几何和射影几何的创立, 数学家们又对圆锥曲线做了相当丰富的研究, 其中最引人夺目的当属彭赛列闭合定理, 这也是古典几何与现代数学结合而生的优美之作. 近年来, 几何学者又发现了一系列的圆锥曲线命题, 其中大部分在《图说几何》一书中已有收录, 另一些散见于论文及网络论坛.

传统直角坐标系下, 对一般圆锥曲线的刻画是如下方程表示:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0 \quad (6.0.1)$$

这个二次方程除了表示椭圆、抛物线和双曲线外, 还包括一些退化的情形: 两条相交直线、一条直线、或一个点、甚或是虚化的图形. 例如  $x^2 - y^2 = 0$ 、 $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ 、 $x^2 + y^2 = 0$  和  $x^2 + y^2 + 1 = 0$ , 但一般来说, 对圆锥曲线性质的讨论并不包含这些退化情形, 虽然某些性质对退化情形也是成立的.

本章仍主要沿用上一章的方法对圆锥曲线进行解构, 不同的是, 将更多地基于重心坐标, 这是因为相较于圆, 一般圆锥曲线有更多的射影性质.

## 6.1 重心坐标表示

对于给定的不共线三点  $A, B, C$ , 其所在平面上的任意点  $P$  有重心坐标表示:

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, (\alpha + \beta + \gamma = 1)$$

若  $P$  点位于某条二次曲线上, 则  $\alpha, \beta, \gamma$  应满足一个二次方程. 我们先设其为一般的形式:

$$\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \lambda_3 \gamma^2 + \lambda_4 \alpha \beta + \lambda_5 \alpha \gamma + \lambda_6 \beta \gamma + \lambda_7 \alpha + \lambda_8 \beta + \lambda_9 \gamma + \lambda_{10} = 0$$

这个表示有相当的参数冗余. 利用  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ , 我们替代其中的平方项和常数项:

$$\alpha^2 \rightarrow \alpha(1 - \beta - \gamma), \quad \beta^2 \rightarrow \beta(1 - \alpha - \gamma), \quad \gamma^2 \rightarrow \gamma(1 - \alpha - \beta), \quad 1 \rightarrow \alpha + \beta + \gamma$$

如此, 则可简化二次曲线的重心坐标方程为如下形式:

$$\lambda_{12} \alpha \beta + \lambda_{13} \alpha \gamma + \lambda_{23} \beta \gamma + \lambda_{10} \alpha + \lambda_{20} \beta + \lambda_{30} \gamma = 0 \quad (6.1.1)$$

也可以将其化为齐次表示的方程, 这只需对一次项和常数项作如下的替代:

$$\alpha \rightarrow \alpha(\alpha + \beta + \gamma), \quad \beta \rightarrow \beta(\alpha + \beta + \gamma), \quad \gamma \rightarrow \gamma(\alpha + \beta + \gamma), \quad 1 \rightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2$$

则化为:

$$\mu_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \mu_3 \gamma^2 + \mu_{12} \alpha \beta + \mu_{13} \alpha \gamma + \mu_{23} \beta \gamma = 0 \quad (6.1.2)$$

在多数的书籍或文章中, (6.1.2) 是更常见的, 因为它与 (6.0.1) 的形式保持一致, 这允许我们把关于直角坐标方程的讨论结果直接“照搬”. 但在本书中, 我们更多地将 (6.1.1) 用于圆锥曲线的研究, 此并非标新立异, 而是为了内容讨论的便利.

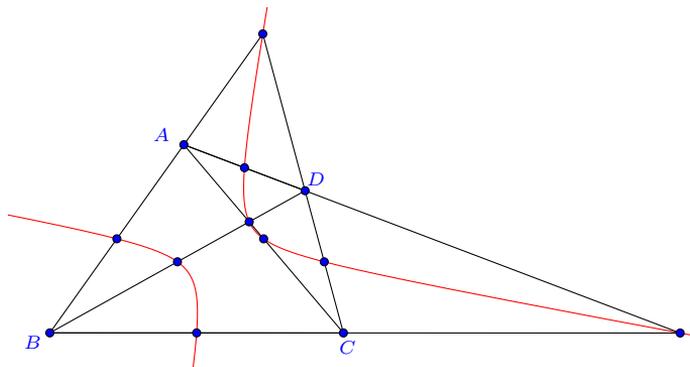
关于曲线的分类, 读者可自行依照二次曲线的直角坐标分类理论进行. 这里仅指出的是, 对于 (6.1.1) 所示的圆锥曲线, 若非退化, 则判别式:

$$\Delta = \lambda_{12}^2 + \lambda_{23}^2 + \lambda_{31}^2 - 2\lambda_{12}\lambda_{23} - 2\lambda_{23}\lambda_{31} - 2\lambda_{31}\lambda_{12} \quad (6.1.3)$$

$\Delta > 0$  时为双曲线;  $\Delta = 0$  时为抛物线;  $\Delta < 0$  时为椭圆.

重心坐标表示在圆锥曲线上的一个典型示例是九点二次曲线.

**例 6.1.1 (九点二次曲线)** 任意一个四边形  $ABCD$ ,  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$  的中点, 以及  $AB$  与  $CD$  的交点,  $AC$  与  $BD$  的交点,  $AD$  与  $BC$  的交点, 此九点位于同一条二次曲线上.



**证明** 不妨设  $D$  点关于  $ABC$  的重心坐标为:  $D = aA + bB + cC, (a + b + c = 1)$ , 容易求出这 9 点分别有表示:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}(A + B), & G_2 &= \frac{1}{2}(B + C), & G_3 &= \frac{1}{2}(aA + bB + C + cC) \\ G_4 &= \frac{1}{2}(A + aA + bB + cC), & G_5 &= \frac{1}{2}(A + C), & G_6 &= \frac{1}{2}(aA + B + bB + cC) \\ G_7 &= \frac{aA + bB}{a + b}, & G_8 &= \frac{aA + cC}{a + c}, & G_9 &= \frac{bB + cC}{b + c} \end{aligned}$$

不难得知, 它们均位于位于如下关于  $A, B, C$  的重心坐标表示的二次曲线上:

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\alpha\beta + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\beta\gamma + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\gamma\alpha - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c}\right) = 0$$

也可该写为:

$$\frac{\alpha^2}{a} + \frac{\beta^2}{b} + \frac{\gamma^2}{c} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\alpha\beta - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\beta\gamma - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)\gamma\alpha = 0$$

曲线的分类由  $\Delta = abc$  决定. 因为  $ABCD$  四点不共线,  $abc \neq 0$ , 所以九点二次曲线不能是抛物线. 当  $ABCD$  为凹四边形时,  $\Delta < 0$ , 对应的九点二次曲线是椭圆. 当  $ABCD$  为凸四边形时,  $\Delta > 0$ , 其九点二次曲线是双曲线.  $\square$

## 6.2 有理表示

对于直角坐标表示的圆锥曲线方程 (6.1.1), 同 (§??) 圆的有理参数化表示过程完全类似, 我们可以在其上任取一点  $(m, n)$ , 而后考虑经过该点的直线  $y - n = u(x - m)$ , 则得到圆锥曲线的一个二阶有理参数表示:

$$\begin{cases} x = \frac{cmu^2 - 2(e + cn)u - 2d - am - 2bn}{a + 2bu + cu^2} \\ y = \frac{-(2e + 2bm + cn)u^2 - 2(d + am)u + an}{a + 2bu + cu^2} \end{cases}$$

对于非退化的圆锥曲线而言, 随着参数  $u$  的变化, 这个表示将可以取到曲线上的所有点. 但对于退化的双直线情形, 则它只能表示其中一条直线上的点. 这是有理参数表示的一个固有性质: 若曲线是可分解的, 则有理参数表示仅能表示其中一个分支. 我们将在后面的 (§??) 进行叙述.

为了更显简单直观, 我们有必要改写表示, 重新表述如下:

对于平面上直角坐标表示的非退化圆锥曲线 (椭圆、抛物线、双曲线), 其总是有二阶有理参数表示:

$$x = \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_1}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}, \quad y = \frac{a_2u^2 + 2b_2u + c_2}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}$$

若是在复平面上, 则可以写为更简洁的形式:

$$z(u) = \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_1}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} + \frac{a_2u^2 + 2b_2u + c_2}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}i \quad (6.2.1)$$

一般情况下, 我们无须对直角坐标系或复平面加以区分, 因为这个对应关系是显而易见的.

对于常见的几种标准方程, 其有理参数表示如下:

- (1). 标准的椭圆方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  有表示:  $z(u) = a\frac{1-u^2}{1+u^2} + b\frac{2u}{1+u^2}i$
- (2). 标准的双曲线方程  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  有表示:  $z(u) = a\frac{1+u^2}{1-u^2} + b\frac{2u}{1-u^2}i$
- (3). 标准的抛物线方程  $y^2 = 2px$  有表示:  $z(u) = 2pu^2 + 2pui$
- (4). 圆方程  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  有表示:

$$z(u) = x_0 + y_0i + r\frac{1+iu}{1-iu} = \frac{r+x_0 - (r-x_0)u^2}{1+u^2} + \frac{y_0 + 2ru + y_0u^2}{1+u^2}i$$

需要指出的是, (6.2.1) 所表示曲线, 也可能是一条线段、射线或直线:

$$(a). z(u) = \frac{(1+u)^2}{1+2u+2u^2} + \frac{(1+u)^2}{1+2u+2u^2}i \text{ 表示的是线段 } y=x, x \in (0,1).$$

$$(b). z(u) = \frac{(1-u)^2}{(1+u)^2} + \frac{(1-u)^2}{(1+u)^2}i \text{ 表示的是射线 } y=x, x > 0.$$

$$(c). z(u) = \frac{(1+u)^2}{1+4u+2u^2} + \frac{(1+u)^2}{1+4u+2u^2}i \text{ 表示直线 } y=x.$$

它们可分别看成是极扁的椭圆、抛物线和双曲线. 在下文关于圆锥曲线的讨论中, 除非特别说明, 我们一般是指椭圆、抛物线和双曲线的非退化情形.

根据圆锥曲线的有理表示进行分类是简单的. 对于 (6.2.1), 令

$$\Delta = b_3^2 - a_3c_3 \quad (6.2.2)$$

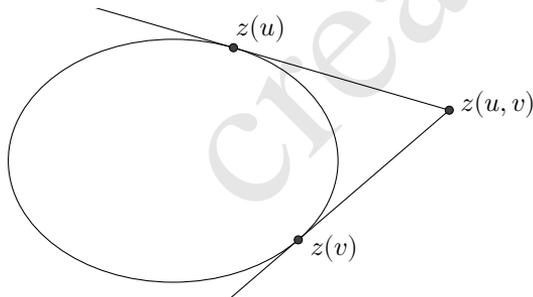
则  $\Delta > 0$  时为双曲线;  $\Delta = 0$  时为抛物线;  $\Delta < 0$  时为椭圆.

对于一般圆锥曲线问题的处理, 直接应用上述的有理表示尚难看出其带来的便捷, 我们先导出它的几个基本性质.

**6.2.1 切线的交点** 对于由 (6.2.1) 所表示的圆锥曲线, 任取其上的两点  $z(u), z(v)$  分别作切线, 则切线的交点为:

$$z(u, v) = \frac{a_1uv + b_1(u+v) + c_1}{a_3uv + b_3(u+v) + c_3} + i \frac{a_2uv + b_2(u+v) + c_2}{a_3uv + b_3(u+v) + c_3}$$

这是一个极为有趣的结果, 它关于  $u, v$  是对称的, 并且在表示形式上, 可看作是由 (6.2.1) 简单地以  $uv$  替代其中的二次项  $u^2$ , 以  $u+v$  替代其中的一次项  $2u$  而得. 对于椭圆来说, 其外部的任意点都能而且仅能向椭圆引两条切线, 因而  $z(u, v)$  可作为椭圆外部区域上点的一个表示.



一般地, 对于圆锥曲线  $\Gamma$ , 如果我们定义**曲线的外部**是由可以向  $\Gamma$  引两条切线的点集所构成, **曲线的内部**是由不可向  $\Gamma$  引切线的点集构成. 则可知, 圆锥曲线外部的平面区域上的点, 都有如上  $z(u, v)$  的表示, 其中的参数对  $(u, v)$  与圆锥曲线外部的点存在一一映射关系. 事实上, 18 世纪的数学家 Darboux 已经注意到了这个映射, 因而参数对  $(u, v)$  又称为**达布坐标** (Darboux coordinates), 它是可交换的, 即  $(u, v) = (v, u)$ .

自然地, 我们希望将上述表示拓展至全平面, 不妨简单地以  $z(u, v) = \frac{1-uv}{1+uv} + \frac{u+v}{1+uv}i$

为例进行考察,若它可表示内部的原点  $0$ ,  $(u, v)$  应怎样取值呢? 我们仍“如常”地分离实部和虚部,则得到两个方程:  $\frac{1-uv}{1+uv} = 0$  和  $\frac{u+v}{1+uv} = 0$ , 不难解出  $(u, v) = (i, -i)$ , 这是一对共轭的虚数. 事实上, 圆锥曲线内部的任意一点, 若按照这样的程式求解参数对  $(u, v)$ , 都会得到一对共轭的虚数, 而且这对虚数是唯一的.

因此, 如果我们允许参数对  $(u, v)$  的取值从实数扩展至共轭的复数, 则  $z(u, v)$  可以表示全平面. 当  $(u, v)$  取实数值且  $u \neq v$  时, 表示圆锥曲线外部的点;  $(u, v)$  取实数值且  $u = v$  时, 表示圆锥曲线上的点;  $(u, v)$  取共轭虚数值时, 表示圆锥曲线内部的点.  $z(u, v)$  称为由圆锥曲线的参数表示  $z(u)$  (6.2.1) 所诱导的平面表示. 于是有如下定理:

**定义-定理 6.2.1** 平面上的任意一点, 可以唯一地表示为如下二阶有理参数形式:

$$z(u, v) = \frac{a_1 uv + b_1(u+v) + c_1}{a_3 uv + b_3(u+v) + c_3} + i \frac{a_2 uv + b_2(u+v) + c_2}{a_3 uv + b_3(u+v) + c_3} \quad (6.2.3)$$

其中参数对  $(u, v)$  取实数值或一对共轭虚数值. 并且当  $u = v$  时, 点位于一条圆锥曲线之上. 为方便, 我们简记  $z(u, u) = z(u)$ .

若读者不甚接受上述共轭虚数的扩展, 也可使用  $X = uv, Y = u + v$  进行替代, 即用

$$z(X, Y) = \frac{a_1 X + b_1 Y + c_1}{a_3 X + b_3 Y + c_3} + i \frac{a_2 X + b_2 Y + c_2}{a_3 X + b_3 Y + c_3} \quad (6.2.4)$$

表示圆锥曲线内部的点或进行有关计算, 这也正是通常的射影变换.

**6.2.2 直线的表示** 直线是射影不变的, 即对于平面上的任意一条直线, 若我们建立 (6.2.4) 的映射, 则仍将得到形如

$$AX + BY + C = 0 \quad (6.2.5)$$

的方程, 该方程与参数表示的各项系数  $a_i, b_i, c_i (i = 1, 2, 3)$  无关, 这一性质也可通过直接计算而知.

若采用 (6.2.3) 的平面参数表示, 则所得直线方程为

$$Auv + B(u+v) + C = 0 \quad (6.2.6)$$

经过两点  $z(u_1, v_1), z(u_2, v_2)$  的直线, 其上的点  $z(u, v)$  则满足行列式方程:

$$\det \begin{pmatrix} u_1 v_1 & u_1 + v_1 & 1 \\ u_2 v_2 & u_2 + v_2 & 1 \\ uv & u + v & 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.2.7)$$

若再限定两点均在圆锥曲线上, 即  $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ , 则又可化简为

$$2(uv + u_1u_2) = (u + v)(u_1 + u_2) \quad (6.2.8)$$

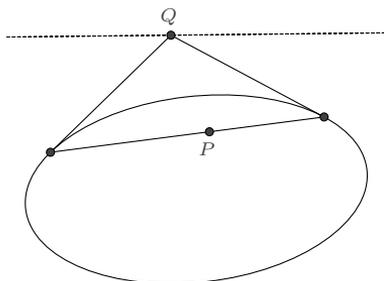
此直线可看作是圆锥曲线外的一点  $z(u_1, u_2)$  向圆锥曲线所引切线的切点连线, 称为  $z(u_1, u_2)$  的**极线**, 而  $z(u_1, u_2)$  称为**极点**.

又若点  $z(u, v)$  是  $z(u_0)$  切线上的点, 即于 (6.2.8) 中  $u_2 \rightarrow u_0, u_1 \rightarrow u_0$ , 则

$$(u - u_0)(v - u_0) = 0$$

解得  $u = u_0$  或  $v = u_0$ , 也即  $z(u, u_0)$  可表示圆锥曲线在点  $z(u_0)$  处的切线.

注意到在 (6.2.8) 中,  $u_1, u_2$  是成对出现的, 因而  $z(u_1, u_2)$  可以是平面上的任意点. 当它位于圆锥曲线的内部时, 极线的几何意义是: 过极点作任意直线交圆锥曲线于两点, 则曲线在这两点处切线的交点轨迹是一条直线.



直角坐标方程 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线的极线有简单的形式: 点  $(m, n)$  对应的极线为

$$amx + b(nx + my) + cny + d(m + x) + e(n + y) + f = 0 \quad (6.2.9)$$

在 (6.2.3) 的表示下, 平面上若有共线的四点  $A = z(\zeta_1, \eta_1), B = z(\zeta_2, \eta_2), C = z(\zeta_3, \eta_3), D = z(\zeta_4, \eta_4)$ , 则它们的交比将是一个与各系数无关的值.

$$\frac{A - C}{A - D} \frac{B - D}{B - C} = \frac{(\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_4)}{(\zeta_1 - \zeta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)} = \frac{(\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_4)}{(\eta_1 - \eta_4)(\eta_2 - \eta_3)} \quad (6.2.10)$$

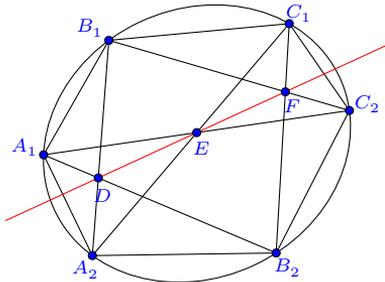
它也可以写作另外两种形式:

$$\frac{A - C}{A - D} \frac{B - D}{B - C} = \frac{(\eta_1 - \eta_3)(\zeta_2 - \zeta_4)}{(\zeta_1 - \zeta_4)(\eta_2 - \eta_3)} = \frac{(\zeta_1 - \zeta_3)(\eta_2 - \eta_4)}{(\eta_1 - \eta_4)(\zeta_2 - \zeta_3)} \quad (6.2.11)$$

这只需要根据  $A, B, C, D$  共线的条件, 解出  $(\eta_3, \eta_4)$ 、 $(\zeta_3, \zeta_4)$ 、 $(\zeta_3, \eta_4)$  或  $(\eta_3, \zeta_4)$ , 再代入化简即得.

**6.2.3 应用示例** 前面所列的有理参数表示的几个性质,属于射影不变量,因而可以方便地应用于一些保持射影不变性质的圆锥曲线命题上.

**例 6.2.2 (帕斯卡定理)** 圆锥曲线内接六边形,其三对边的交点共线.



**证明** 利用参数表示 (6.2.3), 我们令圆锥曲线上的点

$$A_1 = z(u_1), B_1 = z(v_1), C_1 = z(w_1), A_2 = z(u_2), B_2 = z(v_2), C_2 = z(w_2)$$

对角线交点设为

$$D = z(p_1, q_1), E = z(p_2, q_2), F = z(p_3, q_3)$$

则根据三点共线的结论 (6.2.8), 得到如下方程组:

$$\begin{cases} 2(p_1q_1 + u_1v_2) = (p_1 + q_1)(u_1 + v_2) \\ 2(p_1q_1 + u_2v_1) = (p_1 + q_1)(u_2 + v_1) \\ 2(p_2q_2 + v_1w_2) = (p_2 + q_2)(v_1 + w_2) \\ 2(p_2q_2 + v_2w_1) = (p_2 + q_2)(v_2 + w_1) \\ 2(p_3q_3 + w_1u_2) = (p_3 + q_3)(w_1 + u_2) \\ 2(p_3q_3 + w_2u_1) = (p_3 + q_3)(w_2 + u_1) \end{cases}$$

由此求出

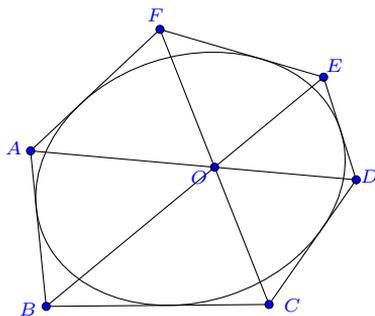
$$\begin{aligned} p_1q_1 &= \frac{u_1v_2(u_2 + v_1) - u_2v_1(u_1 + v_2)}{(u_1 + v_2) - (u_2 + v_1)}, p_1 + q_1 = \frac{2(u_1v_2 - u_2v_1)}{(u_1 + v_2) - (u_2 + v_1)} \\ p_2q_2 &= \frac{v_1w_2(v_2 + w_1) - v_2w_1(v_1 + w_2)}{(v_1 + w_2) - (v_2 + w_1)}, p_2 + q_2 = \frac{2(v_1w_2 - v_2w_1)}{(v_1 + w_2) - (v_2 + w_1)} \\ p_3q_3 &= \frac{w_1u_2(w_2 + u_1) - w_2u_1(w_1 + u_2)}{(w_2 + u_1) - (w_1 + u_2)}, p_3 + q_3 = \frac{2(w_1u_2 - w_2u_1)}{(w_2 + u_1) - (w_1 + u_2)} \end{aligned}$$

并计算知

$$\det \begin{pmatrix} p_1 q_1 & p_1 + q_1 & 1 \\ p_2 q_2 & p_2 + q_2 & 1 \\ p_3 q_3 & p_3 + q_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

这就证明了  $D, E, F$  三点共线. □

**例 6.2.3 (布利昂雄定理)** 六条边和一条圆锥曲线相切的六边形的三条对角线共点.



**证明** 同上例一样, 令

$$A = z(u_1, u_2), B = z(u_2, u_3), C = z(u_3, u_4), D = z(u_4, u_5), E = z(u_5, u_6), F = z(u_6, u_1)$$

若三条直线  $AD, BE, CF$  共点于  $z(p, q)$ , 则应有:

$$\det \begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_1 u_2 & u_1 + u_2 & 1 \\ u_4 u_5 & u_4 + u_5 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_2 u_3 & u_2 + u_3 & 1 \\ u_5 u_6 & u_5 + u_6 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} pq & p+q & 1 \\ u_3 u_4 & u_3 + u_4 & 1 \\ u_6 u_1 & u_6 + u_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

它们可以改写为  $A_k pq + B_k(p+q) + C_k = 0$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) 的形式. 存在解的条件为

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & 1 \\ A_2 & B_2 & 1 \\ A_3 & B_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

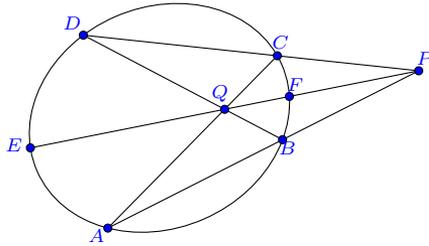
计算即知这是成立的. 事实上, 可以解出

$$pq = \frac{u_1 u_2 u_3 u_4 - u_2 u_3 u_4 u_5 + u_3 u_4 u_5 u_6 - u_4 u_5 u_6 u_1 + u_5 u_6 u_1 u_2 - u_6 u_1 u_2 u_3}{u_1 u_2 - u_2 u_3 + u_3 u_4 - u_4 u_5 + u_5 u_6 - u_6 u_1}$$

$$p + q = \frac{\begin{bmatrix} u_1 u_2 (u_4 + u_5) - u_2 u_3 (u_5 + u_6) + u_3 u_4 (u_6 + u_1) \\ - u_4 u_5 (u_1 + u_2) + u_5 u_6 (u_2 + u_3) - u_6 u_1 (u_3 + u_4) \end{bmatrix}}{u_1 u_2 - u_2 u_3 + u_3 u_4 - u_4 u_5 + u_5 u_6 - u_6 u_1}$$

□

**例 6.2.4 (三割线定理)** 给定圆锥曲线  $\Gamma$ , 由不在曲线上的一点  $P$  向曲线所引的两条直线, 分别交于  $A, B, C, D$  四点,  $AC$  和  $BD$  交于点  $Q$ ,  $PQ$  的连线交  $\Gamma$  于  $E, F$ , 则有  $\frac{1}{PE} + \frac{1}{PF} = \frac{2}{PQ}$ .



**证明** 令  $A = z(u_1), B = z(v_1), C = z(u_2), D = z(v_2), P = z(p_1, p_2), Q = z(q_1, q_2)$ , 则由  $ABP$  和  $CDP$  共线知

$$2(p_1 p_2 + u_1 v_1) = (p_1 + p_2)(u_1 + v_1)$$

$$2(p_1 p_2 + u_2 v_2) = (p_1 + p_2)(u_2 + v_2)$$

解出

$$p_1 p_2 = \frac{(u_1 - u_2)v_1 v_2 + (v_1 - v_2)u_1 u_2}{u_1 - u_2 + v_1 - v_2}$$

$$p_1 + p_2 = \frac{2(u_1 v_1 - u_2 v_2)}{u_1 - u_2 + v_1 - v_2}$$

又由  $ADE$  和  $BCE$  共线

$$2(q_1 q_2 + u_1 v_2) = (q_1 + q_2)(u_1 + v_2)$$

$$2(q_1 q_2 + u_2 v_1) = (q_1 + q_2)(u_2 + v_1)$$

解出

$$q_1 q_2 = \frac{(u_1 - u_2)v_1 v_2 - (v_1 - v_2)u_1 u_2}{(u_1 - u_2) - (v_1 - v_2)}$$

$$q_1 + q_2 = \frac{2(u_1 v_2 - u_2 v_1)}{(u_1 - u_2) - (v_1 - v_2)}$$

$P, Q$  的连线与曲线  $\Gamma$  的交点设为  $E = z(w_1), F = z(w_2)$ , 则  $w_1, w_2$  是如下方程的两根

$$\det \begin{pmatrix} w^2 & 2w & 1 \\ p_1 p_2 & p_1 + p_2 & 1 \\ q_1 q_2 & q_1 + q_2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

代入前面求出的式子, 化简即为

$$(u_1 + u_2 - v_1 - v_2)w^2 - 2(u_1 u_2 - v_1 v_2)w + u_1 u_2(v_1 + v_2) - (u_1 + u_2)v_1 v_2 = 0$$

根据韦达定理, 有

$$w_1 w_2 = \frac{u_1 u_2(v_1 + v_2) - v_1 v_2(u_1 + u_2)}{u_1 + u_2 - v_1 - v_2}$$

$$w_1 + w_2 = \frac{2(u_1 u_2 - v_1 v_2)}{u_1 + u_2 - v_1 - v_2}$$

而待证的结论等价于证明交比

$$\frac{(P - F)(Q - E)}{(P - E)(Q - F)} = -1$$

也就是

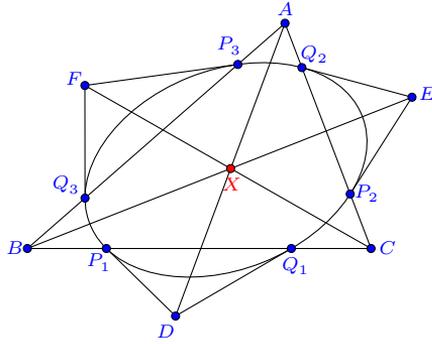
$$\frac{(p_1 p_2 - w_2 w_2)(q_1 q_2 - w_1 w_1)}{(p_1 p_2 - w_1 w_1)(q_1 q_2 - w_2 w_2)} = -1$$

它可以简化为对称式

$$2w_1^2 w_2^2 + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)w_1 w_2 - (p_1 p_2 + q_1 q_2)(w_1 + w_2)^2 + 2p_1 p_2 q_1 q_2 = 0$$

将前面所得各式代入即知等式是成立的, 命题得证. □

**例 6.2.5** 如果一条圆锥曲线与三角形  $A, B, C$  的每边交于两点, 过这两点作切线, 分别交于  $D, E, F$ , 求证  $AD, BE, CF$  三线共点.



**证明** 设  $A = z(u_1, v_1), B = z(u_2, v_2), C = z(u_3, v_3)$  以及

$$P_1 = z(p_1), Q_1 = z(q_1), P_2 = z(p_2), Q_2 = z(q_2), P_3 = z(p_3), Q_3 = z(q_3)$$

则

$$\begin{cases} 2(u_1v_1 + p_2q_2) = (u_1 + v_1)(p_2 + q_2) \\ 2(u_1v_1 + p_3q_3) = (u_1 + v_1)(p_3 + q_3) \\ 2(u_2v_2 + p_3q_3) = (u_2 + v_2)(p_3 + q_3) \\ 2(u_2v_2 + p_1q_1) = (u_2 + v_2)(p_1 + q_1) \\ 2(u_3v_3 + p_1q_1) = (u_3 + v_3)(p_1 + q_1) \\ 2(u_3v_3 + p_2q_2) = (u_3 + v_3)(p_2 + q_2) \end{cases}$$

由此解出

$$\begin{aligned} p_1q_1 &= -\frac{u_3v_3(u_2 + v_2) - u_2v_2(u_3 + v_3)}{(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3)}, & p_1 + q_1 &= \frac{2(u_2v_2 - u_3v_3)}{(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3)} \\ p_2q_2 &= -\frac{u_1v_1(u_3 + v_3) - u_3v_3(u_1 + v_1)}{(u_3 + v_3) - (u_1 + v_1)}, & p_2 + q_2 &= \frac{2(u_3v_3 - u_1v_1)}{(u_3 + v_3) - (u_1 + v_1)} \\ p_3q_3 &= -\frac{u_2v_2(u_1 + v_1) - u_1v_1(u_2 + v_2)}{(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)}, & p_3 + q_3 &= \frac{2(u_1v_1 - u_2v_2)}{(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)} \end{aligned}$$

切线交点为  $D = z(p_1, q_1), E = z(p_2, q_2), F = z(p_3, q_3)$ , 若  $AD, BE, CF$  交于公共点  $X = z(\zeta, \eta)$ , 则如下三式应有公共解

$$\det \begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta + \eta & 1 \\ u_1v_1 & u_1 + v_1 & 1 \\ p_1q_1 & p_1 + q_1 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta + \eta & 1 \\ u_2v_2 & u_2 + v_2 & 1 \\ p_2q_2 & p_2 + q_2 & 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} \zeta\eta & \zeta + \eta & 1 \\ u_3v_3 & u_3 + v_3 & 1 \\ p_3q_3 & p_3 + q_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

根据线性方程组理论, 它等价于

$$\det \begin{pmatrix} p_1q_1 - u_1v_1 & p_1 + q_1 - (u_1 + v_1) & p_1q_1(u_1 + v_1) - (p_1 + q_1)u_1v_1 \\ p_2q_2 - u_2v_2 & p_2 + q_2 - (u_2 + v_2) & p_2q_2(u_2 + v_2) - (p_2 + q_2)u_2v_2 \\ p_3q_3 - u_3v_3 & p_3 + q_3 - (u_3 + v_3) & p_3q_3(u_3 + v_3) - (p_3 + q_3)u_3v_3 \end{pmatrix} = 0$$

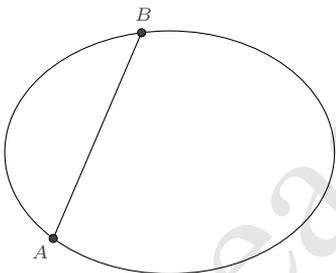
将前面所得各式代入计算即知此式是成立的, 从而命题获证.  $\square$

上面我们得到了圆锥曲线一般的二阶有理表示, 并用它证明了具有射影不变性的一些命题, 但这些只是冰山之一角. 我们还需要做更细致的讨论, 才能窥视其瑰丽多姿的全貌. 我们先从相交情形开始.

## 6.3 相交情形

经过一个孤立点的情形缺少了参照, 因而并不是太适合圆锥曲线固有性质的探讨, 所以我们并不对其作讨论.

### 6.3.1 过已知两点的圆锥曲线



若圆锥曲线经过已知两点  $A, B$ , 以  $\vec{AB}$  为基准向量, 则我们可将圆锥曲线表示为  $\vec{AP} = z(u)\vec{AB}$ , 其中  $P$  为圆锥曲线上的任意点,  $z(u)$  取 (6.2.1) 的形式. 显然  $z(u)$  可取值 0 和 1, 我们根据这一点来重新推导其具体表示, 这里介绍两种方式.

**法一:** 根据  $z = x + yi$  所满足的一般方程:  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , 由  $z = 0$  及  $z = 1$  在其上, 知  $d = -\frac{a}{2}, f = 0$ , 即有

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 - ax + 2ey = 0$$

上式中  $a$  不能取值 0, 否则曲线将退化为两直线的情形, 又因为方程系数存在冗余, 所以我们可简单地令  $a = 1$ , 考虑参数直线  $y = ux$ , 则得到它的一个有理表示:

$$z(u) = x(u) + y(u)i = \frac{(1 + iu)(1 - 2eu)}{1 + 2bu + cu^2}$$

但这个表示尚有一些不如意的地方, 因为  $\lim_{u \rightarrow 0} z(u) = 1$ ,  $\lim_{u \rightarrow (2e)^{-1}} z(u) = 0$ . 我们希望的是  $\lim_{u \rightarrow 0} z(u) = 0$ ,  $\lim_{u \rightarrow \infty} z(u) = 1$ .

若  $e \neq 0$ , 考虑作线性分式变换  $\frac{u-0}{u-(2e)^{-1}} = \frac{k}{v}$  (其中  $k$  为任意的常数), 即  $u = \frac{k}{2e(k-v)}$ , 则

$$z(v) = \frac{4e^2v^2 - 4e^2kv - 2iekv}{4e^2v^2 - 4e(b+2e)kv + (c+4be+4e^2)k^2}$$

再令

$$-k = 2s, \quad -\frac{k}{2e} = 2, \quad -\frac{(b+2e)k}{e} = 2p, \quad \frac{c+4be+4e^2}{4e^2}k^2 = q$$

进行化简<sup>①</sup>. 从而得到表示

$$z(v) = \frac{v^2 + 2sv + 2iv}{v^2 + 2pv + q}$$

若  $e = 0$ , 考虑倒数变换  $u = \frac{k}{v}$ , 此时  $z(v) = \frac{v(ik+v)}{ck^2+2bkv+v^2}$  令  $k = 2$  并作代换  $b = \frac{p}{2}, c = \frac{q}{4}$ , 则化为  $z(v) = \frac{v^2+2iv}{v^2+2pv+q}$ , 也正是上面表示的特例情形 ( $s = 0$ ).

因而, 对于任意的经过 0, 1 两点的非退化圆锥曲线, 参数表示  $z(v) = \frac{v^2+2sv+2iv}{v^2+2pv+q}$  都是适当的.

**法二:** 我们也可以根据一般有理参数表示 (6.2.1) 推导而得. 已知对于任意的非退化圆锥曲线, 其有参数表示:

$$z(u) = \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_1}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} + \frac{a_2u^2 + 2b_2u + c_2}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}i$$

若它经过 0, 1 两点, 因为 (XX 定理) 保证总是可以指定圆锥曲线上的任意三点对应的  $u$  值, 我们令

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0} z(u) = \frac{c_1}{c_3} + \frac{c_2}{c_3}i = 0 \\ \lim_{u \rightarrow \infty} z(u) = \frac{a_1}{a_3} + \frac{a_2}{a_3}i = 1 \end{cases}$$

则可导出  $c_1 = 0, c_2 = 0, a_1 = a_3, a_2 = 0$ , 于是有参数表示

$$z(u) = \frac{a_3u^2 + 2b_1u + 2b_2ui}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3}$$

<sup>①</sup>这个代换是双有理的:

$$\begin{cases} k = -4e, & p = 2(b+2e), & q = 4(c+4be+4e^2), & s = 2e \\ k = -2s, & b = \frac{1}{2}(p-2s), & c = \frac{1}{4}(q-4ps+4s^2), & e = \frac{s}{2} \end{cases}$$

再作代换  $u = kv$  ( $k$  是可以任意指定的非 0 常数), 则为

$$z(v) = \frac{a_3 k^2 v^2 + 2b_1 kv + 2b_2 kvi}{a_3 k^2 v^2 + 2b_3 kv + c_3}$$

上式中  $a_3$  不能为 0, 否则曲线是退化的, 令

$$\frac{b_3}{ka_3} = p, \quad \frac{c_3}{k^2 a_3} = q, \quad \frac{b_1}{ka_3} = s, \quad \frac{b_2}{ka_3} = 1$$

则得到经过 0, 1 两点的非退化圆锥曲线的简化表示:

$$z(v) = \frac{v^2 + 2sv + 2iv}{v^2 + 2pv + q}$$

**命题 6.3.1** 若非退化的圆锥曲线经过已知的两点  $A, B$ , 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} \vec{AB} \quad (6.3.1)$$

式中  $P$  在  $u \rightarrow 0, \infty$  时恰好是  $A, B$  两点.

曲线的分类由表示式的分母关于  $u$  的判别式而定.

$$\Delta = p^2 - q$$

$\Delta > 0$  时为双曲线;  $\Delta = 0$  时为抛物线;  $\Delta < 0$  时为椭圆.

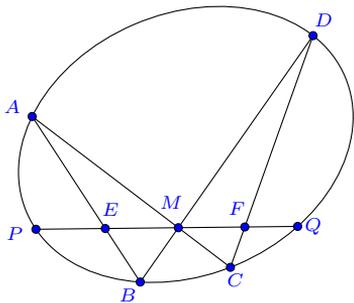
若为抛物线, 则  $q = p^2$ , 从而有:

**推论 6.3.2** 经过已知两点  $A, B$  的抛物线, 其上的任意一点  $P$  有如下参数表示:

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{(u + p)^2} \vec{AB} \quad (6.3.2)$$

应用 (6.3.1), 我们可以给出蝴蝶定理一般形式的一个简便证明.

**例 6.3.3 (坎迪定理)** 如图, 点  $A, B, C, D, P, Q$  在同一圆锥曲线上,  $AB$  交  $PQ$  于  $E$ ,  $CD$  交  $PQ$  于  $F$ ,  $AC, BD, PQ$  三线共点于  $M$ , 若点  $P, E$  同在  $M$  的一侧, 点  $Q, F$  同在  $M$  的另一侧, 则有长度关系:  $\frac{1}{MP} - \frac{1}{MQ} = \frac{1}{ME} - \frac{1}{MF}$



**证明** 以  $\vec{PQ}$  作为基准向量, 则根据 (6.3.1), 圆锥曲线上的任意点  $T$  可表示为  $\vec{PT} = z(u)\vec{PQ}$ , 其中

$$z(u) = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q}$$

令  $\vec{PA} = z(a)\vec{PQ}$ ,  $\vec{PB} = z(b)\vec{PQ}$ ,  $\vec{PC} = z(c)\vec{PQ}$ ,  $\vec{PD} = z(d)\vec{PQ}$ , 并在  $PQ$  上的点  $M, E, F$  分别为  $\vec{PM} = \lambda\vec{PQ}$ ,  $\vec{PE} = \mu\vec{PQ}$ ,  $\vec{PF} = \nu\vec{PQ}$ , 则

根据  $A, E, B$  三点共线, 解得  $\mu = \frac{ab}{ab-q}$ .

根据  $C, F, D$  三点共线, 解得  $\nu = \frac{cd}{cd-q}$ .

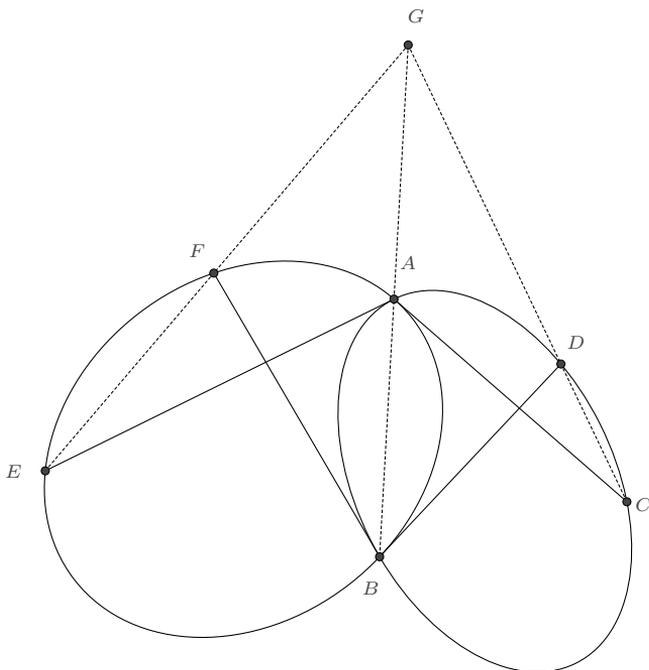
根据  $A, M, C$  三点共线, 解得  $\lambda = \frac{ac}{ac-q}$ .

再根据  $B, M, D$  三点共线, 即可知  $ac = bd$ . 而待证的结论等价于

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{1}{\lambda-\mu} - \frac{1}{\nu-\lambda}$$

将前面的各式代入, 即知它是恒成立的. □

**例 6.3.4** 如图, 圆锥曲线  $\Gamma_1$  与圆锥曲线  $\Gamma_2$  相交于  $A, B$  两点, 由  $A, B$  点分别作  $\Gamma_1$  的切线, 与  $\Gamma_2$  交于  $C, D$  两点, 再由  $A, B$  点分别作  $\Gamma_2$  的切线, 与  $\Gamma_1$  交于  $E, F$  两点, 则三条直线  $AB, CD, EF$  相交于一点  $G$ .



**证明** 考虑以  $\vec{AB}$  为基向量, 圆锥曲线  $\Gamma_1$  上的任意点  $P$  有表示

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2s_1u + 2iu}{u^2 + 2p_1u + q_1} \vec{AB}$$

圆锥曲线  $\Gamma_2$  上的任意点  $Q$  有表示

$$\vec{AQ} = \frac{v^2 + 2s_2v + 2iv}{v^2 + 2p_2v + q_2} \vec{AB}$$

$\Gamma_1$  在  $A$  点处的切向量为

$$\mathbf{v}_{1A} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \vec{AP} = \frac{2(s_1 + i)}{q_1} \vec{AB}$$

根据  $\text{Im}\left(\frac{C-A}{\mathbf{v}_{1A}}\right) = 0$  即可计算出  $C$  点的表示:

$$\vec{AC} = \frac{4(s_1 - s_2)(s_1 + i)}{q_2 + 4p_2s_1 + 4s_1^2 - 4p_2s_2 - 8s_1s_2 + 4s_2^2} \vec{AB}$$

$\Gamma_1$  在  $B$  点处的切向量为

$$\mathbf{v}_{1B} = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \vec{AP} = 2(p_1 - s_1 - i) \vec{AB}$$

根据  $\text{Im}\left(\frac{D-B}{v_{1B}}\right) = 0$  又可计算出  $D$  点的表示:

$$\vec{AD} = \frac{q_2 + 4p_1s_2 - 4p_2s_2 - 4s_1s_2 + 4s_2^2 + 4i(p_1 - p_2 - s_1 + s_2)}{4p_1^2 - 4p_1p_2 + q_2 - 8p_1s_1 + 4p_2s_1 + 4s_1^2 + 8p_1s_2 - 4p_2s_2 - 8s_1s_2 + 4s_2^2} \vec{AB}$$

同理, 知

$$\vec{AE} = \frac{4(s_2 - s_1)(s_2 + i)}{q_1 - 4p_1s_1 + 4s_1^2 + 4p_1s_2 - 8s_1s_2 + 4s_2^2} \vec{AB}$$

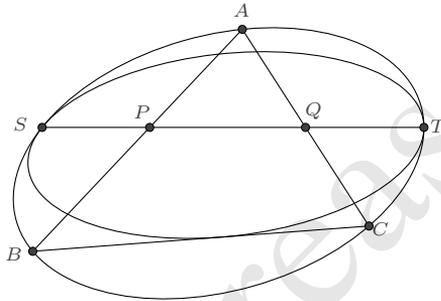
$$\vec{AF} = \frac{q_1 - 4p_1s_1 + 4p_2s_1 + 4s_1^2 - 4s_1s_2 + 4i(p_2 - p_1 - s_2 + s_1)}{4p_2^2 - 4p_1p_2 + q_1 - 4p_1s_1 + 8p_2s_1 + 4s_1^2 + 4p_1s_2 - 8p_2s_2 - 8s_1s_2 + 4s_2^2} \vec{AB}$$

进而求出直线  $CD$  与  $EF$  的交点  $G$  的表示:

$$\vec{AG} = \frac{s_1 - s_2}{p_2 - p_1 + 2(s_1 - s_2)} \vec{AB}$$

由此即知  $G$  点也在直线  $AB$  上, 命题得证.  $\square$

**例 6.3.5** 两圆锥曲线  $\Omega_1, \Omega_2$  相切于  $S, T$  两点,  $\triangle ABC$  内接于  $\Omega_1$ , 且  $BC$  与  $\Omega_2$  相切,  $AB, AC$  分别交直线  $ST$  于  $P, Q$  两点, 证明:  $S, T, P, Q$  四点的交比是与  $\triangle ABC$  位置无关的一个定值.



**证明** 以  $\vec{ST}$  为基向量, 圆锥曲线  $\Omega_1$  上的任意点  $X$  可表示为

$$\vec{SX} = \frac{u^2 + 2s_1u + 2iu}{u^2 + 2p_1u + q_1} \vec{ST}$$

圆锥曲线  $\Omega_2$  上的任意点  $Y$  可表示为

$$\vec{SY} = \frac{u^2 + 2s_2u + 2iu}{u^2 + 2p_2u + q_2} \vec{ST}$$

由二者在点  $S$  和  $T$  处相切易知

$$s_1 = s_2, \quad p_1 = p_2$$

设  $\Omega_1$  上的三点  $A, B, C$  对应的参数  $u$  分别为  $a, b, c$ , 根据  $BC$  与  $\Omega_2$  相切而有

$$(b+c)^2 q_1 - 4bcq_2 = 0$$

$P, Q$  两点的表示分别是

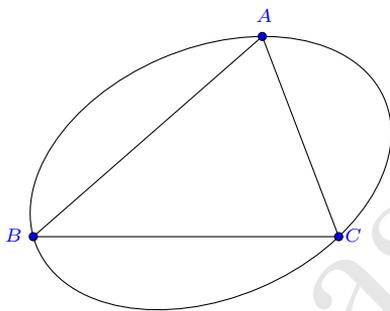
$$\vec{SP} = \frac{ab}{ab - q_1} \vec{ST}, \quad \vec{SQ} = \frac{ac}{ac - q_1} \vec{ST}$$

于是  $S, T, P, Q$  四点的交比为

$$\frac{S - PT - Q}{S - QT - P} = \frac{b}{c} = \frac{2q_2 \pm 2\sqrt{q_2(q_2 - q_1)} - q_1}{q_1}$$

是一个仅与圆锥曲线固有参数相关的量。 □

### 6.3.2 三角形的外接圆锥曲线



若圆锥曲线经过已知的不共线三点  $A, B, C$ , 设圆锥曲线上的点  $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ , ( $\alpha + \beta + \gamma = 1$ ), 则由 (6.1.1) 知其重心坐标方程应为:

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{23}\beta\gamma = 0$$

其中  $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{23}$  均不为 0, 否则圆锥曲线是退化的. 因为我们总是可以利用  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  将其转化为二元二次方程, 所以  $\alpha, \beta, \gamma$  有如下形式的二阶有理参数表示:

$$\alpha = \frac{a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1}{a_4 u^2 + 2b_4 u + c_4}, \quad \beta = \frac{a_2 u^2 + 2b_2 u + c_2}{a_4 u^2 + 2b_4 u + c_4}, \quad \gamma = \frac{a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3}{a_4 u^2 + 2b_4 u + c_4}$$

对于上面的齐次方程, 我们可以先寻找多项式

$$\alpha' = a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1, \quad \beta' = a_2 u^2 + 2b_2 u + c_2, \quad \gamma' = a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3$$

使得

$$\lambda_{12}\alpha'\beta' + \lambda_{13}\alpha'\gamma' + \lambda_{23}\beta'\gamma' = 0$$

则

$$\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha' + \beta' + \gamma'}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\alpha' + \beta' + \gamma'}, \quad \gamma = \frac{\gamma'}{\alpha' + \beta' + \gamma'}$$

即为所求. 一个适当的表示是

$$\alpha' = \lambda_{23}(1-u), \quad \beta' = \lambda_{13}u, \quad \gamma' = -\lambda_{12}u(1-u)$$

从而我们就得到了经过  $ABC$  三点的外接圆锥曲线的一个二阶有理表示. 再做代换  $p = \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{12}}, q = \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}}$  以简化形式, 则得如下命题:

**命题 6.3.6** 若非退化的圆锥曲线经过已知的三点  $A, B, C$ , 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)} \quad (6.3.3)$$

式中  $P$  在  $u \rightarrow 0, 1, \infty$  时恰好是  $A, B, C$  三点.

特别地, 经过  $A, B, C$  三点的圆有参数表示

$$P = \frac{a^2(1-u)A + b^2uB - c^2u(1-u)C}{a^2(1-u) + b^2u - c^2u(1-u)} \quad (6.3.4)$$

其中  $a, b, c$  是  $\triangle ABC$  的边长:  $a = BC, b = CA, c = AB$ .

曲线的分类由表示式的分母关于  $u$  的判别式而定.

$$\Delta = p^2 - 2pq + q^2 - 2p - 2q + 1$$

$\Delta > 0$  时为双曲线;  $\Delta = 0$  时为抛物线;  $\Delta < 0$  时为椭圆.

若为抛物线,  $\Delta = 0$  的一个通解表示是  $p = s^2, q = (1+s)^2$ , 从而有:

**推论 6.3.7** 经过已知三点  $A, B, C$  的抛物线, 其上的任意一点  $P$  有如下参数表示:

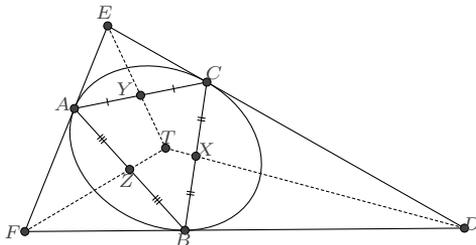
$$P = \frac{s^2(1-u)A + (1+s)^2uB - u(1-u)C}{(s+u)^2} \quad (6.3.5)$$

(6.3.3) 所表示的圆锥曲线, 若它是中心圆锥曲线, 即  $\Delta \neq 0$ , 则可根据其重心坐标方程  $p\beta\gamma + q\gamma\alpha + \alpha\beta = 0$ , 推知曲线的中心是

$$O = \frac{p(p-q-1)A + q(q-1-p)B + (1-p-q)C}{1+p^2+q^2-2p-2q-2pq} \quad (6.3.6)$$

这容易直接根据曲线中心的定义得到: 曲线上的点关于中心的对称点也位于曲线上, 也可以利用二次曲线的中心具有仿射不变性来求.

**例 6.3.8** 如图,  $\triangle DEF$  是  $\triangle ABC$  的外接圆锥曲线在顶点处的切线的交点三角形,  $X, Y, Z$  是  $\triangle ABC$  各边的中点, 则  $DX, EY, FZ$  三线共点于圆锥曲线的中心.



**证明** 根据 (6.3.3),  $\triangle ABC$  的外接圆锥曲线上的任意点可设为

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

因而圆锥曲线在  $\triangle ABC$  三个顶点处的切向量分别为:

$$\mathbf{v}_A = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{dP}{du} = \frac{A - C - Aq + Bq}{p}$$

$$\mathbf{v}_B = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{dP}{du} = \frac{C - B - Ap + Bp}{q}$$

$$\mathbf{v}_C = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{dP}{du} = Ap - Cp - Bq + Cq$$

进而求出各切线的交点三角形  $\triangle DEF$  的表示:

$$D = \frac{C - pA + qB}{1 - p + q}, \quad E = \frac{C + pA - qB}{1 + p - q}, \quad F = \frac{C - pA - qB}{1 - p - q}$$

$\triangle ABC$  的各边中点是:

$$X = \frac{B+C}{2}, \quad Y = \frac{C+A}{2}, \quad Z = \frac{A+B}{2}$$

待证结论是三线  $DX, EY, FZ$  共同交于点  $T$ , 我们先设

$$T = \lambda D + (1-\lambda)X = \mu E + (1-\mu)Y$$

代入上面的表示即有

$$\lambda \frac{C - pA + qB}{1 - p + q} + (1-\lambda) \frac{B+C}{2} = \mu \frac{C + pA - qB}{1 + p - q} + (1-\mu) \frac{C+A}{2}$$

根据  $A, B, C$  的线性无关性可解出

$$\lambda = \frac{(1-p+q)^2}{1+p^2+q^2-2p-2q-2pq}, \mu = \frac{(1+p-q)^2}{1+p^2+q^2-2p-2q-2pq}$$

于是

$$T = \frac{p(p-q-1)A + q(q-1-p)B + (1-p-q)C}{1+p^2+q^2-2p-2q-2pq}$$

根据 (6.3.6),  $T$  正是曲线的中心. 又计算得

$$\frac{T-F}{Z-F} = \frac{-4pq}{1+p^2+q^2-2p-2q-2pq}$$

这就说明了  $T$  点也在直线  $FZ$  上, 命题获证.  $\square$

**例 6.3.9 (三角形的最小面积外接椭圆问题)** 这个问题是近代综合几何的创始人之一 Jacob Steiner 于 1826 年提出的: 在  $\triangle ABC$  的无数个外接椭圆中, 哪一个的面积最小. 它的解法有好几种, 最常见的做法是利用“仿射变换下, 图像的面积之比保持不变”这一性质. 这里我们利用 (6.3.3) 来直接求解.

**解**  $\triangle ABC$  外接圆锥曲线上的点  $P$  有表示:

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

它为椭圆的要求是判别式  $\Delta = p^2 - 2pq + q^2 - 2p - 2q + 1 < 0$ . 改写上式为向量形式:

$$\vec{BP} = \frac{(1-u)(p\vec{BA} - u\vec{BC})}{p-u-pu+qu+u^2}$$

在  $P$  点处的切向量为

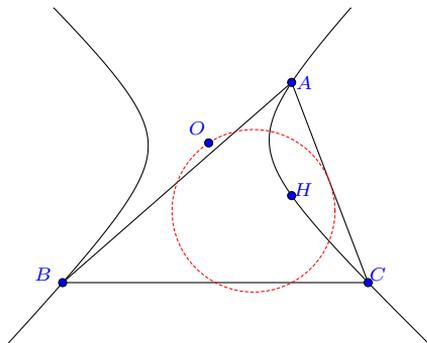
$$\frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{p(1-q-2u+u^2)\vec{BA} - (p-2pu+pu^2-qu^2)\vec{BC}}{(p-u-pu+qu+u^2)^2}$$

根据格林面积公式 (2.4.1), 椭圆的面积

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \oint_L \operatorname{Im} \left( \vec{BP} \otimes \frac{d}{du} \vec{BP} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(1-u)^2}{(p-u-pu+qu+u^2)^2} du \cdot \operatorname{Im}(\vec{BA} \otimes \vec{BC}) \\ &= \frac{4pq\pi}{(-1+2p-p^2+2q+2pq-q^2)^{3/2}} S_{ABC} \end{aligned}$$

易知当  $p = 1, q = 1$  时, 椭圆有最小的面积  $S_{\min} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} S_{ABC}$ . 此时椭圆的中心正是  $\triangle ABC$  的重心.  $\square$

**例 6.3.10 (费尔巴哈双曲线)** 经过三角形顶点和垂心的圆锥曲线是一条双曲线, 称为费尔巴哈双曲线, 其中点的轨迹是一个圆.



**证明** 设  $\vec{BA} = (s + it)\vec{BC}$ , 则根据 (6.3.3),  $\triangle ABC$  的外接圆锥曲线可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{(ps + ipt - u)(1 - u)}{p - u - pu + qu + u^2} \vec{BC}$$

它经过  $\triangle ABC$  的垂心

$$\vec{BH} = \frac{s(t + i - is)}{t} \vec{BC}$$

解出

$$q = \frac{-1 + s + ps - ps^2 - pt^2}{s}$$

从而得到曲线的参数表示

$$\vec{BP} = \frac{s(ps + ipt - u)(1 - u)}{ps - u - ps^2u - pt^2u + su^2} \vec{BC}$$

判别式

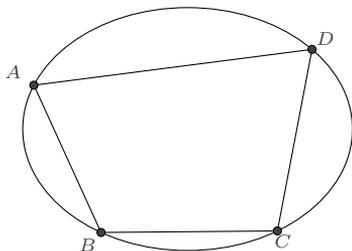
$$\Delta = 1 - 2ps^2 + p^2s^4 + 2pt^2 + 2p^2s^2t^2 + p^2t^4 = (1 - ps^2 + pt^2)^2 + 4p^2s^2t^2 > 0$$

因而是一条双曲线. 曲线的中心

$$\vec{BO} = \frac{s(1 - ps + ipt)}{1 - ps^2 + 2ipst + pt^2} \vec{BC}$$

是关于参数  $p$  的一个复线性分式, 故而轨迹是一个圆. 不难验证, 这个圆经过  $\triangle ABC$  各边的中点, 即它是  $\triangle ABC$  的九点圆.  $\square$

### 6.3.3 四边形的外接圆锥曲线



若点  $D$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标表示是  $D = \alpha_D A + \beta_D B + \gamma_D C$ , 其中  $\alpha_D + \beta_D + \gamma_D = 1$ , 那么圆锥曲线在 (6.3.3) 的表示下, 参数  $p, q$  应满足方程:  $p\beta_D\gamma_D + q\gamma_D\alpha_D + \alpha_D\beta_D = 0$ , 此方程的一个通解表示是

$$p = -\frac{\alpha_D}{\gamma_D}s, \quad q = -\frac{\beta_D}{\gamma_D}(1-s)$$

从而我们就得到了如下命题:

**命题 6.3.11** 对于平面上的四边形  $ABCD$ , 若  $D$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标为  $\alpha_D, \beta_D, \gamma_D$ , 则其外接圆锥曲线有如下参数表示:

$$P = \frac{\alpha_D s(1-u)A + \beta_D(1-s)uB + \gamma_D u(1-u)C}{\alpha_D s(1-u) + \beta_D(1-s)u + \gamma_D u(1-u)} \quad (6.3.7)$$

式中  $P$  在  $u \rightarrow 0, 1, \infty, s$  时恰好是  $A, B, C, D$  四点.

对于上述表示的圆锥曲线, 若非抛物线, 则曲线的中心

$$O = \frac{s\alpha_D(s - \beta_D + \gamma_D - s\gamma_D)A + (1-s)\beta_D(1-s - \alpha_D + s\gamma_D)B + (1 - \alpha_D + s\alpha_D - s\beta_D)\gamma_D C}{s^2(1-\gamma_D)^2 - 2s(\beta_D - \alpha_D\gamma_D) + (1-\alpha_D)^2}$$

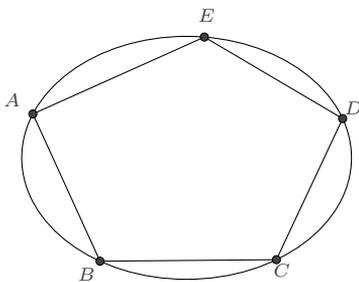
这是关于参数  $s$  的一个二阶有理表示,  $s$  的变动将勾勒出一条圆锥曲线. 不难验证, 它经过  $AB, BC, CD, DA, AC, BD$  的中点, 以及  $AB$  与  $CD$  的交点、 $AC$  与  $BD$  的交点、 $AD$  与  $BC$  的交点, 这也就是前面提及的九点二次曲线 (6.1.1). 基于此, 我们可以改写它为对称的形式

$$O = \frac{\alpha_D(1-\alpha_D)(1-t)\frac{B+C}{2} + \beta_D(1-\beta_D)t\frac{C+A}{2} - \gamma_D(1-\gamma_D)t(1-t)\frac{A+B}{2}}{\alpha_D(1-\alpha_D)(1-t) + \beta_D(1-\beta_D)t - \gamma_D(1-\gamma_D)t(1-t)}$$

$s$  与  $t$  之间是如下的分式线性变换关系:

$$s = \frac{(\beta_D + \gamma_D)(\alpha_D(\beta_D - \gamma_D) + t\gamma_D(\alpha_D + \beta_D))}{(\alpha_D + \beta_D)(\alpha_D(\beta_D + \gamma_D) - t\gamma_D(\alpha_D - \beta_D))}$$

### 6.3.4 五边形的外接圆锥曲线



**命题 6.3.12** 对于平面上的五边形  $ABCDE$ , 若  $D, E$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标为  $(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$  和  $(\alpha_E, \beta_E, \gamma_E)$ , 则其外接圆锥曲线有如下参数表示:

$$P = \frac{\lambda_1(1-u)A + \lambda_2uB - \lambda_3(1-u)uC}{\lambda_1(1-u) + \lambda_2u - \lambda_3(1-u)u} \quad (6.3.8)$$

其中

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} \beta_D^{-1} & \gamma_D^{-1} \\ \beta_E^{-1} & \gamma_E^{-1} \end{vmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{vmatrix} \gamma_D^{-1} & \alpha_D^{-1} \\ \gamma_E^{-1} & \alpha_E^{-1} \end{vmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{vmatrix} \alpha_D^{-1} & \beta_D^{-1} \\ \alpha_E^{-1} & \beta_E^{-1} \end{vmatrix}$$

**例 6.3.13** 复平面上给定五点  $A = -3 + 2i, B = 0, C = 2, D = 3 + 2i, E = 1 + 4i$ , 求经过这五点的圆锥曲线.

**解** 首先我们计算出  $D, E$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标表示, 为

$$\begin{cases} \alpha_D = 1, & \beta_D = -3, & \gamma_D = 3 \\ \alpha_E = 2, & \beta_E = -\frac{9}{2}, & \gamma_E = \frac{7}{2} \end{cases}$$

然后计算

$$\lambda_1 = \begin{vmatrix} \beta_D^{-1} & \gamma_D^{-1} \\ \beta_E^{-1} & \gamma_E^{-1} \end{vmatrix} = -\frac{4}{189}$$

$$\lambda_2 = \begin{vmatrix} \gamma_D^{-1} & \alpha_D^{-1} \\ \gamma_E^{-1} & \alpha_E^{-1} \end{vmatrix} = -\frac{5}{42}$$

$$\lambda_3 = \begin{vmatrix} \alpha_D^{-1} & \beta_D^{-1} \\ \alpha_E^{-1} & \beta_E^{-1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{18}$$

则所求圆锥曲线的参数表示为

$$P = \frac{\lambda_1(1-u)A + \lambda_2uB - \lambda_3(1-u)uC}{\lambda_1(1-u) + \lambda_2u - \lambda_3(1-u)u} = \frac{2(u-1)(12-8i+21u)}{8+16u+21u^2}$$

若转化为直角坐标方程, 则为  $8x^2 + 8xy + 15y^2 - 16x - 66y = 0$ .  $\square$

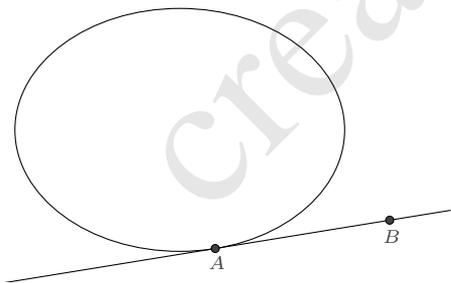
**注记 6.3.14** 对于平面上的六边形, 如果它的三组对边的交点共线, 则各顶点位于同一条圆锥曲线上. 这是帕斯卡定理的逆定理. 利用重心坐标, 我们可表其为如下简洁的形式:

**命题 6.3.15** 平面上的六边形  $ABCDEF$ , 若  $D, E, F$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标为  $(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D), (\alpha_E, \beta_E, \gamma_E), (\alpha_F, \beta_F, \gamma_F)$ , 则该六边形存在外接圆锥曲线的条件是

$$\begin{vmatrix} \alpha_D^{-1} & \beta_D^{-1} & \gamma_D^{-1} \\ \alpha_E^{-1} & \beta_E^{-1} & \gamma_E^{-1} \\ \alpha_F^{-1} & \beta_F^{-1} & \gamma_F^{-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (6.3.9)$$

## 6.4 相切情形

**6.4.1 相切于一点的圆锥曲线** 对于圆锥曲线与一条直线相切的情形, 同前面“过已知两点的圆锥曲线”的推导类似, 我们有如下命题



**命题 6.4.1** 若非退化的圆锥曲线与经过  $A, B$  两点的直线相切于点  $A$ , 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

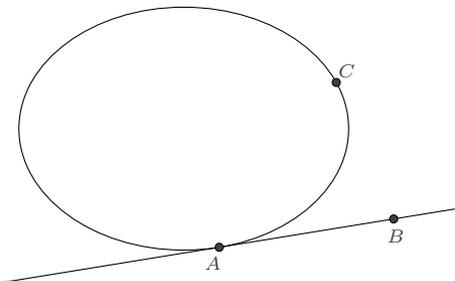
$$\vec{AP} = \frac{2u + iu^2}{pu^2 + 2qu + s} \vec{AB} \quad (6.4.1)$$

**推论 6.4.2** 若抛物线与经过  $A, B$  两点的直线相切于点  $A$ , 则其的任意一点  $P$  可表示

为如下参数形式:

$$\vec{AP} = \frac{p(2+iu)u}{(1+qu)^2} \vec{AB} \quad (6.4.2)$$

若已知圆锥曲线与经过  $A$ 、 $B$  两点的直线相切于点  $A$ , 且经过另一点  $C$ , 如图:



那么我们可以将圆锥曲线用  $A$ 、 $B$ 、 $C$  的重心坐标来表示. 推导如下:

**解** 根据圆锥曲线的一般重心坐标方程表示 (6.1.1):

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{23}\beta\gamma + \lambda_{10}\alpha + \lambda_{20}\beta + \lambda_{30}\gamma = 0$$

根据圆锥曲线过  $A$ 、 $C$  两点, 知  $\lambda_{10} = 0, \lambda_{30} = 0$ . 我们再考察直线  $AB$  与圆锥曲线的交点情况, 以  $\beta = 1 - \alpha, \gamma = 0$  代入方程, 得到

$$(1 - \alpha)(\alpha\lambda_{12} + \lambda_{20}) = 0$$

圆锥曲线与直线  $AB$  相切意味着此方程仅有一解  $\alpha = 1$ , 因而  $\lambda_{20} = -\lambda_{12}$ . 于是所求圆锥曲线的重心坐标方程是

$$\lambda_{12}\alpha\beta + \lambda_{13}\alpha\gamma + \lambda_{23}\beta\gamma - \lambda_{12}\beta = 0$$

式中  $\lambda_{12}, \lambda_{13}$  不能为 0, 否则圆锥曲线是退化的.

为得到有理参数表示, 先将  $\gamma = 1 - \alpha - \beta$  代入, 使之成为二元方程

$$\lambda_{13}\alpha^2 + (\lambda_{13} + \lambda_{23} - \lambda_{12})\alpha\beta + \lambda_{23}\beta^2 - \lambda_{13}\alpha + (\lambda_{12} - \lambda_{23})\beta = 0$$

其显然的有理点是  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ . 以  $\beta = k\alpha$  代入, 即得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{23}}{k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{13} - k\lambda_{23} - k^2\lambda_{23}} \\ \beta = \frac{k^2\lambda_{12} - k\lambda_{13} - k^2\lambda_{23}}{k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{13} - k\lambda_{23} - k^2\lambda_{23}} \end{cases}$$

从而所求圆锥曲线的一个参数表示是

$$P = \frac{(k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{23})A + k(k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{23})B - k^2\lambda_{12}C}{k\lambda_{12} - \lambda_{13} - k\lambda_{13} - k\lambda_{23} - k^2\lambda_{23}}$$

这个表示略显复杂,它在  $A, C$  两点处对应的  $k$  值分别是 0 和  $\frac{\lambda_{13}}{\lambda_{12}-\lambda_{23}}$ , 我们希望在  $A, C$  两点处, 可变参数分别取 0 和  $\infty$ . 为此, 再做线性分式变换:  $\frac{k}{k\lambda_{12}-\lambda_{13}-k\lambda_{23}} = mu$  (其中  $m$  是一个自由的非 0 常数), 则得到  $P$  的一个新参数表示

$$P = \frac{(1 - mu\lambda_{12} + mu\lambda_{23})A - mu\lambda_{13}B + m^2u^2\lambda_{12}\lambda_{13}C}{1 - mu\lambda_{12} + mu\lambda_{23} - mu\lambda_{13} + m^2u^2\lambda_{12}\lambda_{13}} \quad \square$$

为使得表示简化, 令  $m = -\frac{1}{2\lambda_{12}}$  并记号  $p = \frac{4\lambda_{12}}{\lambda_{13}}$ ,  $q = \frac{\lambda_{12}-\lambda_{23}}{\lambda_{13}}$ , 则得如下所述命题.

**命题 6.4.3** 若非退化的圆锥曲线与经过  $A, B$  两点的直线相切于点  $A$ , 且经过另一点  $C$ , 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{(p + 2qu)A + 2uB + u^2C}{(p + 2qu) + 2u + u^2} \quad (6.4.3)$$

式中  $P$  在  $u \rightarrow 0, \infty$  时恰好是  $A, C$  两点.

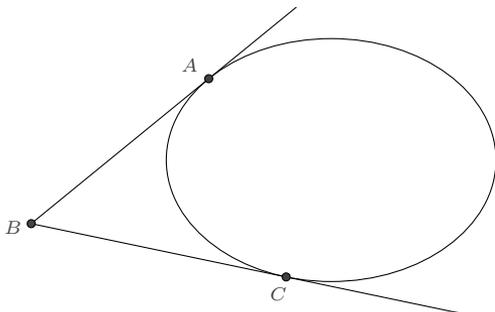
**推论 6.4.4** 对于  $\angle ABC$ , 若抛物线与经过  $A, B$  两点的直线相切于点  $A$ , 且经过另一点  $C$ , 则抛物线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{(1 + 2su)A + 2(1 - s)uB + Cu^2}{(1 + u)^2} \quad (6.4.4)$$

**6.4.2 相切于两点的圆锥曲线** 根据相切于一点的圆锥曲线的表示 (6.4.3), 我们容易导出

**命题 6.4.5** 对于  $\angle ABC$ , 若圆锥曲线与角的两边  $BA, BC$  分别相切于  $A, C$  两点, 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{pA + 2uB + u^2C}{p + 2u + u^2} \quad (6.4.5)$$



另一个情形是两点处的切线平行, 此时有命题

**命题 6.4.6** 若非退化的圆锥曲线与经过  $A$ 、 $B$  两点的直线相切于点  $A$ , 且经过另一点  $C$ , 并在  $C$  点处的切线平行于直线  $AB$ , 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{pA + 2u(B - A) + Cu^2}{p + u^2} \quad (6.4.6)$$

若令  $P = (x, y)$ 、 $A = (x_A, y_A)$ 、 $B = (x_B, y_B)$ 、 $C = (x_C, y_C)$ , 则 (6.4.5) 所表示的圆锥曲线的直角坐标方程为:

$$p[(x_A - x_C)y - (y_A - y_C)x + x_Cy_A - x_Ay_C]^2 - 4[(x_A - x_B)y - (y_A - y_B)x + x_By_A - x_Ay_B][(x_B - x_C)y - (y_B - y_C)x + x_Cy_B - x_By_C] = 0$$

不难发现, 式中  $(x_A - x_C)y - (y_A - y_C)x + x_Cy_A - x_Ay_C$  表示的正是  $AC$  直线,  $(x_A - x_B)y - (y_A - y_B)x + x_By_A - x_Ay_B$  是直线  $AB$ , 也即  $A$  点处的切线,  $(x_B - x_C)y - (y_B - y_C)x + x_Cy_B - x_By_C$  是直线  $CB$ , 也即  $C$  点处的切线.

而 (6.4.6) 所表示的圆锥曲线的直角坐标方程为

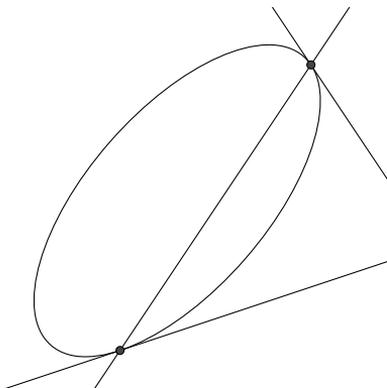
$$p[(x_A - x_C)y - (y_A - y_C)x + x_Cy_A - x_Ay_C]^2 - 4[(x_A - x_B)y - (y_A - y_B)x + x_By_A - x_Ay_B][(x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x + x_Cy_B - y_Cx_B + x_Ay_C - x_Cy_A] = 0$$

其中  $(x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x + x_Cy_B - y_Cx_B + x_Ay_C - x_Cy_A$  对应的也正是  $C$  点处的切线.

由此, 我们可统一二者为如下命题:

**命题 6.4.7** 直角坐标系下, 若圆锥曲线与直线  $l_1$  和直线  $l_2$  相切, 切点的连线记为  $l_3$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$pl_3^2 - l_1l_2 = 0 \quad (6.4.7)$$



**例 6.4.8** 求圆锥曲线, 使之与单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切于两点  $(1, 0)$  和  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ .

**解** 单位圆在  $(1, 0)$  点处的切线为:  $x - 1 = 0$ , 在  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  点处的切线为:  $3x + 4y - 5 = 0$ , 两切点的连线为:  $2x + y - 2 = 0$ , 于是所求的圆锥曲线可表示为:

$$p(2x + y - 2)^2 - (x - 1)(3x + 4y - 5) = 0 \quad \square$$

我们再来看与已知角的两边相切的圆锥曲线表示 (6.4.5), 显然地, 当  $B$  点趋于无穷时, 表达式是失效的. 为了应对这一极限情形, 我们考虑对  $B$  的系数进行适当地调整. 事实上, 考虑一般的情形, 假设

$$P = \frac{k_1 A + 2k_2 v B + k_3 v^2 C}{k_1 + 2k_2 v + k_3 v^2}$$

表示的是与

$$P = \frac{pA + 2uB + u^2 C}{p + 2u + u^2}$$

相同的圆锥曲线, 比较二者可知, 令  $k_1 = p \frac{k_2^2}{k_3}$  即可, 此时  $v = \frac{uk_2}{k_3}$ .

**命题 6.4.9** 对于  $\angle ABC$ , 若圆锥曲线与角的两边  $BA$ 、 $BC$  分别相切于  $A$ 、 $C$  两点, 则该圆锥曲线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{k_1 A + 2k_2 u B + k_3 u^2 C}{k_1 + 2k_2 u + k_3 u^2} \quad (6.4.8)$$

式中  $k_1, k_2, k_3$  均为非 0 的常数, 并且其中有两个可任意指定.

现在, 我们来看如何由 (6.4.8) 得到 (6.4.6):

若非退化的圆锥曲线与经过  $A$ 、 $B$  两点的直线相切于点  $A$ , 且经过另一点  $C$ , 并在  $C$  点处的切线平行于直线  $AB$ . 令  $T = A + \lambda(B - A)$ ,  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $T$  可视为是直线  $AB$

与  $C$  点处的切线在无穷远处的交点, 于是圆锥曲线可表示为:

$$P = \frac{k_1 A + 2k_2 u(A + \lambda(B - A)) + k_3 u^2 C}{k_1 + 2k_2 u + k_3 u^2}$$

现在令  $k_2 = \frac{1}{\lambda}, k_3 = 1$ , 则

$$P = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{k_1 A + 2\frac{1}{\lambda} u(A + \lambda(B - A)) + u^2 C}{k_1 + 2\frac{1}{\lambda} u + u^2} = \frac{k_1 A + 2u(B - A) + u^2 C}{k_1 + u^2}$$

将  $k_1$  替换为  $p$ , 即得到了 (6.4.6) 的表示.

(6.4.8) 的另一个应用是简化相切于圆锥曲线两点的圆锥曲线的表示.

**例 6.4.10** 求与单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切于两点的圆锥曲线的有理表示.

**解** 设相切两点的表示

$$A = \frac{1 - a^2 + 2ai}{1 + a^2}, \quad C = \frac{1 - c^2 + 2ci}{1 + c^2}$$

这二者的切线交点是

$$B = \frac{1 - ac + i(a + c)}{1 + ac}$$

在 (6.4.8) 中, 我们令  $k_1 = p(1 + a^2), k_2 = 1 + ac, k_3 = 1 + c^2$ , 则得

$$P = \frac{p(1 - a^2 + 2ai) + 2(1 - ac + i(a + c))u + (1 - c^2 + 2ci)u^2}{p(1 + a^2) + 2(1 + ac)u + (1 + c^2)u^2}$$

这比直接由 (6.4.5) 给出的表示

$$P = \frac{p\frac{1-a^2+2ai}{1+a^2} + 2\frac{1-ac+i(a+c)}{1+ac}u + \frac{1-c^2+2ci}{1+c^2}u^2}{p + 2u + u^2}$$

要简化一些, 并且适用于  $A, C$  两点处切线平行的情形. 当  $a, c$  均取有限值时, 它总是有效的.

对于极限情形, 不妨设  $c \rightarrow \infty$ , 那么

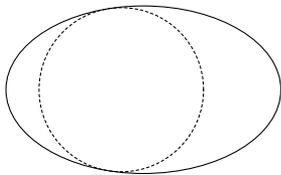
$$A = \frac{1 - a^2 + 2ai}{1 + a^2}, \quad C = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1 - c^2 + 2ci}{1 + c^2} = -1, \quad B = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1 - ac + i(a + c)}{1 + ac} = 1 + ia$$

在 (6.4.8) 中令  $k_1 = p(1 + a^2), k_2 = 1, k_3 = 1$ , 则得

$$P = \frac{p(1 - a^2 + 2ai) + 2(1 + ia)u - u^2}{p(1 + a^2) + 2u + u^2}$$

□

**例 6.4.11** 给定椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ , 求在椭圆内且相切于两点的圆.



**解** 设圆与椭圆的两个切点分别是

$$A = a \frac{1-s^2}{1+s^2} + b \frac{2s}{1+s^2}i, \quad B = a \frac{1-t^2}{1+t^2} + b \frac{2t}{1+t^2}i$$

一种方式是利用 (6.4.7) 来求. 先得到与椭圆在这两点相切的圆锥曲线的一般表示:

$$p(ab + abst - bx + bstx - asy - aty)^2 - (ab + abs^2 - bx + bs^2x - 2asy)(ab + abt^2 - bx + bt^2x - 2aty) = 0$$

若其为圆, 则  $x^2$  与  $y^2$  项的系数相等, 且  $xy$  项的系数等于 0. 由此得到两组解

$$\begin{cases} p = \frac{b^2 + 4a^2s^2 - 2b^2s^2 + b^2s^4}{a^2(1+s^2)^2} \\ t = \frac{1}{s} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} p = \frac{b^2 + 4a^2s^2 - 2b^2s^2 + b^2s^4}{b^2(1+s^2)^2} \\ t = -s \end{cases}$$

第一组解对应的圆是在椭圆外的, 第二组解在椭圆内. 所求圆的表示即为

$$a(1+s^2)^2(x^2+y^2) - 2(a^2-b^2)(1-s^4)x + a(a^2-2b^2-2a^2s^2+a^2s^4-2b^2s^4) = 0$$

另一种方式是利用与直线相切于一点的圆的表示 (2.3.1), 设圆的表示为

$$P = \left(a \frac{1-s^2}{1+s^2} + b \frac{2s}{1+s^2}i\right) + \frac{ik}{1-iu} \frac{d}{ds} \left(a \frac{1-s^2}{1+s^2} + b \frac{2s}{1+s^2}i\right)$$

将其与椭圆方程联立, 得到关于  $u$  的二次方程<sup>①</sup>:

$$ab(1+s^2)(b^2 - abk + 4a^2s^2 - 2b^2s^2 - abks^2 + b^2s^4)u^2 - 4kab(a^2 - b^2)s(1-s^2)u + ab^3 - b^4k + 4a^3bs^2 - ab^3s^2 - 4a^4ks^2 + 2b^4ks^2 + 4a^3bs^4 - ab^3s^4 - b^4ks^4 + ab^3s^6 = 0$$

它关于  $u$  的判别式应等于 0:

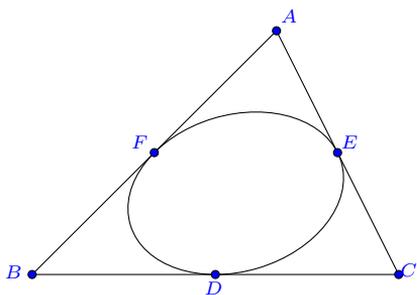
$$\Delta = 4ab(a - bk + as^2)(-b + ak - bs^2)(b^2 + 4a^2s^2 - 2b^2s^2 + b^2s^4)^2 = 0$$

<sup>①</sup>这里为二次方程的原因是  $u \rightarrow \infty$  时对应的是圆与椭圆的已设切点.

$k = \frac{b(1+s^2)}{a}$  对应的是在椭圆内部的切圆:

$$P = \left( a \frac{1-s^2}{1+s^2} + b \frac{2s}{1+s^2} i \right) - \frac{2b(b-bs^2+2ias)}{a(1+s^2)(1-iu)} \quad \square$$

**6.4.3 三角形的相切圆锥曲线** 如图, 若圆锥曲线与三角形  $ABC$  的三边相切于点  $D$ 、 $E$ 、 $F$ , 设  $BD:DC = \lambda$ ,  $CE:EA = \mu$ ,  $AF:FB = \nu$ , 求圆锥曲线的一个有理表示.



我们可以根据 (6.4.5) 导出一个有理表示, 这里介绍另一种导出法:

先写出  $D$ 、 $E$ 、 $F$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标表示:

$$D = \frac{B + \lambda C}{1 + \lambda}, \quad E = \frac{C + \mu A}{1 + \mu}, \quad F = \frac{A + \nu B}{1 + \nu}$$

根据 (6.3.3),  $\triangle DEF$  外接圆锥曲线的可表示为

$$P = \frac{(1-u)D + puE - qu(1-u)F}{(1-u) + pu - qu(1-u)}$$

它在三个切点处的切向量分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{dP}{du} = -\frac{A(q-p\mu+q\mu-p\mu\nu)}{(1+\mu)(1+\nu)} - \frac{B(p-q+p\nu+q\lambda\nu)}{(1+\lambda)(1+\nu)} + \frac{C(p+q\lambda-p\lambda\mu+q\lambda\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)} \\ \mathbf{v}_E &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{dP}{du} = \frac{A(q+\mu+p\nu-q\mu\nu)}{p(1+\mu)(1+\nu)} - \frac{B(1+\nu-q\nu-q\lambda\nu)}{p(1+\lambda)(1+\nu)} + \frac{C(1-q-q\lambda-\lambda\mu)}{p(1+\lambda)(1+\mu)} \\ \mathbf{v}_F &= \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{dP}{du} = -\frac{A(1-p+\mu+p\mu\nu)}{q(1+\mu)(1+\nu)} + \frac{B(1+p\nu-\lambda\nu+p\lambda\nu)}{q(1+\lambda)(1+\nu)} - \frac{C(p-\lambda+p\lambda-\lambda\mu)}{q(1+\lambda)(1+\mu)} \end{aligned}$$

这三个切向量是分别与  $\vec{BC}$ 、 $\vec{CA}$ 、 $\vec{AB}$  平行的, 故得

$$\begin{cases} q - p\mu + q\mu - p\mu\nu = 0 \\ 1 + \nu - q\nu - q\lambda\nu = 0 \\ p - \lambda + p\lambda - \lambda\mu = 0 \end{cases}$$

$p, q$  有解的充要条件是  $\lambda\mu\nu = 1$ , 此条件意味着  $AD, BE, CF$  三线共点.

$$p = \frac{\lambda(1+\mu)}{1+\lambda}, \quad q = \frac{1+\lambda\mu}{1+\lambda}$$

从而我们就得到了如下命题

**命题 6.4.12** 若圆锥曲线与三角形  $ABC$  的三边相切于点  $D, E, F$ , 设  $BD : DC = \lambda, CE : EA = \mu, AF : FB = \nu$ , 则必有  $\lambda\mu\nu = 1$ , 且该圆锥曲线有如下表示:

$$P = \frac{\lambda\mu u^2 A + (1-u)^2 B + \lambda C}{u^2 \lambda\mu + (1-u)^2 + \lambda} \quad (6.4.9)$$

如果曲线是中心二次曲线, 则其中心  $O$  为:

$$O = \frac{(1+\lambda)\mu A + (1+\mu)B + (1+\lambda\mu)C}{2(1+\mu+\lambda\mu)} \quad (6.4.10)$$

**推论 6.4.13** 若抛物线与三角形  $ABC$  的三边相切, 则抛物线上的任意一点  $P$  可表示为如下参数形式:

$$P = \frac{(1-s)u^2 A + s(1-u)^2 B - s(1-s)C}{(s-u)^2} \quad (6.4.11)$$

**例 6.4.14 (三角形的最小面积内切椭圆问题)** 这个问题也是由 Jacob Steiner 提出的: 在  $\triangle ABC$  的无数个内切椭圆中, 哪一个的面积最小.

**解**  $\triangle ABC$  内切椭圆上的点  $P$  有表示:

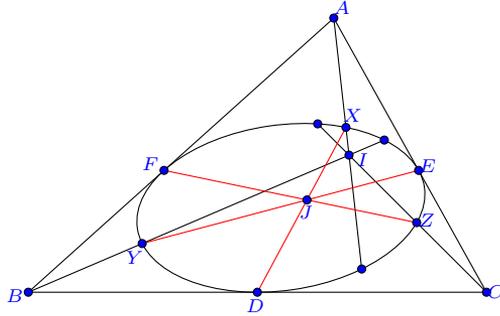
$$P = \frac{\lambda\mu u^2 A + (1-u)^2 B + \lambda C}{u^2 \lambda\mu + (1-u)^2 + \lambda}$$

其中  $\lambda, \mu$  均是正实数. 根据格林面积公式 (2.4.1), 椭圆的面积

$$S = -\frac{1}{2} \oint_L \operatorname{Im} \left( \vec{BP} \otimes \frac{d}{du} \vec{BP} \right) = \frac{\pi \lambda^2 \mu}{(\lambda + \lambda\mu + \lambda^2 \mu)^{3/2}} S_{ABC}$$

极值在  $\lambda = \mu = 1$  时取得, 此时内切椭圆有最小的面积  $S_{\min} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} S_{ABC}$ . 椭圆的中心也恰好是  $\triangle ABC$  的重心.  $\square$

**例 6.4.15 (三线共点问题)** 给定三角形  $ABC$ , 圆锥曲线  $\Gamma$  分别切三边于  $D, E, F, I$  是  $\triangle ABC$  所在平面上的一点, 且使得直线  $AI, BI, CI$  均与  $\Gamma$  相交, 分别选取其中一个交点, 记为  $X, Y, Z$ , 则  $DX, EY, FZ$  连线相交于同一点.



**证明** 设  $\vec{BA} = (s + it)\vec{BC}$ , 并且  $BD : DC = \lambda, CE : EA = \mu, AF : FB = \nu$ , 即有

$$\vec{BD} = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \vec{BC}, \quad \vec{BE} = \frac{1 + s\mu + it\mu}{1 + \mu} \vec{BC}, \quad \vec{BF} = \frac{s + it}{1 + \nu} \vec{BC}$$

圆锥曲线  $\Gamma$  上的任意一点  $P$  有参数表示

$$\vec{BP} = \frac{\lambda\mu u^2(s + it) + \lambda}{\lambda\mu u^2 + (1 - u)^2 + \lambda} \vec{BC}$$

又设  $\vec{BI} = (m + in)\vec{BC}$ , 并且  $u$  取  $\alpha, \beta, \gamma$  时分别对应  $X, Y, Z$  三点, 则根据共线条件得到方程

$$\begin{cases} ns - mt - 2ns\alpha + 2mt\alpha + ns\alpha^2 - mt\alpha^2 - n\lambda + ns\lambda + t\lambda - mt\lambda = 0 \\ n + ns\beta^2\mu - mt\beta^2\mu = 0 \\ n - 2n\gamma + n\gamma^2 + n\gamma^2\lambda\mu - ns\gamma^2\lambda\mu - t\gamma^2\lambda\mu + mt\gamma^2\lambda\mu = 0 \end{cases}$$

可以由此解出  $\alpha, \beta, \gamma$ , 但这样将含有根式, 不便于运算, 因此我们反解  $\lambda, \mu$ :

$$\lambda = \frac{(ns - mt)(1 - \alpha)^2}{n - ns - t + mt}, \mu = \frac{n}{(mt - ns)\beta^2}$$

并有

$$\gamma = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta} \text{ 或 } \gamma = \frac{\beta}{-1 + \alpha + \beta}$$

直线  $DX$  与  $EY$  的交点  $J$  为:

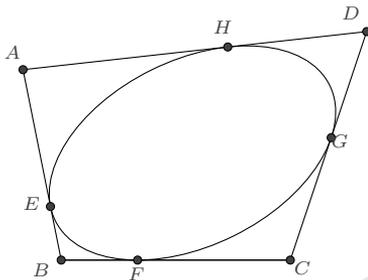
$$\vec{BJ} = \frac{\lambda(1-\alpha+\beta+s\alpha\beta\mu+it\alpha\beta\mu)}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta+\lambda-\alpha\lambda+\beta\lambda+\alpha\beta\lambda\mu} \vec{BC}$$

若  $J$  也在直线  $FZ$  上, 则应使得

$$(\beta-\gamma+\alpha\gamma-\beta\gamma)(1-2\gamma+\gamma^2+\lambda+\gamma^2\lambda\mu)=0$$

前面导出的一个解  $\gamma = \frac{\beta}{1-\alpha+\beta}$  恰好满足要求, 这就说明了结论是正确的. <sup>①</sup> □

**6.4.4 四边形的相切圆锥曲线** 如图, 若圆锥曲线与四边形  $ABCD$  的各边相切于点  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$ , 设  $BF:FC = \lambda$ , 求圆锥曲线的一个有理表示.



根据 (6.4.5), 设圆锥曲线的一个表示是:

$$P = \frac{pE + 2uB + u^2F}{p + 2u + u^2}$$

由  $BF:FC = \lambda$  知  $F = \frac{B+C\lambda}{1+\lambda}$ , 又设  $E = \frac{B+A\mu}{1+\mu}$ , 则

$$P = \frac{p(1+\lambda)\mu A + (p+2u+u^2+p\lambda+2u\lambda+2u\mu+u^2\mu+2u\lambda\mu)B + \lambda(1+\mu)u^2C}{(p+2u+u^2)(1+\lambda)(1+\mu)}$$

设点  $D$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标表示是:  $D = \alpha_D A + \beta_D B + \gamma_D C$ , 我们先考察圆锥曲线与直线  $CD$  的交点情况:

令  $P = tD + (1-t)C = t\alpha_D A + t\beta_D B + (1-t+t\gamma_D)C$ , 将  $P$  的表示代入后比较  $A$ 、 $B$ 、

<sup>①</sup>根据  $J$  的表示容易看出, 一般来说共有四组允许的选择.

$C$  的系数, 则有

$$\begin{cases} 2tu(1+\mu)\alpha_D + tu^2(1+\mu)\alpha_D + p(-\mu + t\alpha_D + t\mu\alpha_D) = 0 \\ 2u(1+\lambda)(1+\mu)(-1+t\beta_D) + u^2(1+\mu)(-1+t\beta_D + t\lambda\beta_D) + p(1+\lambda)(-1+t\beta_D + t\mu\beta_D) = 0 \\ p(1+\lambda)(1-t+t\gamma_D) + 2u(1+\lambda)(1-t+t\gamma_D) + u^2(1-t-t\lambda+t\gamma_D + t\lambda\gamma_D) = 0 \end{cases}$$

这三个方程中仅有两个是独立的, 我们选择前两个消去参数  $t$ , 得到关于  $u$  的二次方程

$$u^2(1+\mu)\alpha_D + 2u(1+\lambda)(1+\mu)\alpha_D + p(1+\lambda)(\alpha_D - \mu\beta_D) = 0$$

要使得圆锥曲线与  $CD$  相切, 则解应是唯一的, 根据判别式即有

$$\alpha_D - p\alpha_D + \lambda\alpha_D + \mu\alpha_D + \lambda\mu\alpha_D + p\mu\beta_D = 0$$

同样的道理, 根据圆锥曲线与直线  $AD$  相切, 有

$$1-p+\lambda+\mu+\lambda\mu-\alpha_D+p\alpha_D-\lambda\alpha_D-\mu\alpha_D-\lambda\mu\alpha_D-\beta_D+p\beta_D-\lambda\beta_D+p\lambda\beta_D-\mu\beta_D-\lambda\mu\beta_D = 0$$

联立解出

$$\begin{cases} p = \frac{(1+\lambda)(1-\alpha_D + \lambda\alpha_D - \beta_D)}{1-\alpha_D - \beta_D - \lambda\beta_D} = \frac{(1+\lambda)(\gamma_D + \lambda\alpha_D)}{\gamma_D - \lambda\beta_D} \\ \mu = \frac{\lambda\alpha_D}{1-\alpha_D - \beta_D} = \frac{\lambda\alpha_D}{\gamma_D} \end{cases}$$

于是得到所求圆锥曲线的一个有理表示

$$P = \frac{(1+\lambda)^2(A\lambda\alpha_D + B\gamma_D) + 2u(1+\lambda)(\gamma_D - \lambda\beta_D)B + u^2(\gamma_D - \lambda\beta_D)(B + C\lambda)}{(1+\lambda)(\lambda\alpha_D + \lambda^2\alpha_D - 2u\lambda\beta_D - u^2\lambda\beta_D + \gamma_D + 2u\gamma_D + u^2\gamma_D + \lambda\gamma_D)}$$

这个表示较为复杂, 可以再做代换  $u \rightarrow \frac{(1+\lambda)}{u}$ , 则得如下命题

**命题 6.4.16** 若圆锥曲线与四边形  $ABCD$  的各边相切, 且它在  $BC$  边上的切点划分  $BC$  的比例为  $\lambda$ , 若点  $D$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标是  $(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$ , 则该圆锥曲线的一个有理表示为:

$$P = \frac{(\lambda\alpha_D A + \gamma_D B)u^2 + (\gamma_D - \lambda\beta_D)(B + 2uB + \lambda C)}{(\lambda\alpha_D + \gamma_D)u^2 + (\gamma_D - \lambda\beta_D)(1 + 2u + \lambda)} \quad (6.4.12)$$

**例 6.4.17** 复平面上给定四边形  $ABCD$  各点的坐标:  $A = -1 + 4i, B = -i, C = 5 + i, D = 6 + 5i$ , 求一圆锥曲线, 使之与四边形各边相切, 且在  $BC$  边上的切点为  $\frac{5}{2}$ .

**解** 首先我们求出点  $D$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标:

$$\alpha_D = \frac{2}{3}, \quad \beta_D = -1, \quad \gamma_D = \frac{4}{3}$$

然后求出  $BC$  边上切点所划分的线段比例为:  $\lambda = 1$ , 根据 (6.4.12) 即知圆锥曲线的一个有理表示为:

$$P = \frac{2u^2A + (7 + 14u + 4u^2)B + 7C}{2(3 + 7u + 7u^2)} = \frac{35 - 2u^2 - 14iu + 4iu^2}{2(7 + 7u + 3u^2)}$$

转化为直角坐标方程则为

$$10 - 134x + 52x^2 - 160y - 62xy + 73y^2 = 0$$

□

根据 (6.4.12), 我们容易计算出其余各边的切点所划分线段的比例:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{\gamma_D}{\lambda\alpha_D}, \quad \frac{CG}{GD} = -\frac{1}{\lambda\beta_D}, \quad \frac{DH}{HA} = -\frac{\lambda\alpha_D\beta_D}{\gamma_D}$$

从而有

**推论 6.4.18** 若圆锥曲线与四边形  $ABCD$  的各边相切, 则各切点所划分线段比例的乘积等于 1.

**注记 6.4.19** 这个性质实际对于任意相切于的圆锥曲线的多边形均成立.

如果曲线是中心二次曲线, 则其中心  $O$  为:

$$O = \frac{(B + D) + \lambda\alpha_D(A + C)}{2(1 + \lambda\alpha_D)} \quad (6.4.13)$$

由此式容易导出牛顿定理: 和完全四边形四边相切的有心圆锥曲线的心迹是一条直线, 该直线经过完全四边形的三条对角线的中点.

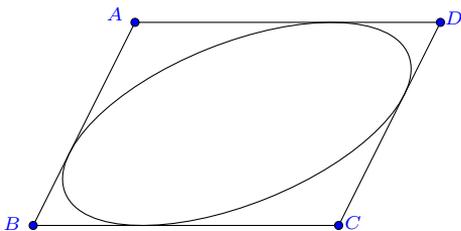
如果四边形为平行四边形, 则  $D = A + C - B$ , 因而  $\alpha_D = 1, \beta_D = -1, \gamma_D = 1$ , 由 (6.4.12) 则有

$$P = \frac{u^2(B + A\lambda) + (1 + \lambda)(B + 2Bu + C\lambda)}{u^2(1 + \lambda) + (1 + \lambda)(1 + 2u + \lambda)}$$

这个表示可以通过做代换  $\frac{1}{1+\lambda} = s$  变得更简单一些.

**推论 6.4.20** 与平行四边形  $ABCD$  各边相切的圆锥曲线有参数表示:

$$P = \frac{s(1-s)u^2A + s(1+2u+su^2)B + (1-s)C}{1+2su+su^2} \quad (6.4.14)$$

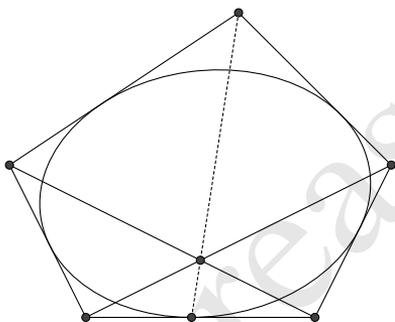


**6.4.5 五边形的相切圆锥曲线** 与五边形各边相切的圆锥曲线是确定的, 这里我们无需再叙述推导过程.

**命题 6.4.21** 若圆锥曲线与五边形  $ABCDE$  的各边相切, 若  $D$ 、 $E$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标分别是  $(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$ 、 $(\alpha_E, \beta_E, \gamma_E)$ , 则该圆锥曲线的一个有理表示为:

$$P = \frac{(\alpha_D - \alpha_E + \alpha_E \beta_D - \alpha_D \beta_E)[u^2 \alpha_D^2 \beta_E A - (1 - u^2) \alpha_D \beta_D \beta_E B + (1 - u)^2 \alpha_E \beta_D \gamma_D C] + \alpha_D^2 \beta_D \beta_E \gamma_E B}{(\alpha_D - \alpha_E + \alpha_E \beta_D - \alpha_D \beta_E)[u^2 \alpha_D^2 \beta_E - (1 - u^2) \alpha_D \beta_D \beta_E + (1 - u)^2 \alpha_E \beta_D \gamma_D] + \alpha_D^2 \beta_D \beta_E \gamma_E} \quad (6.4.15)$$

五边形内切椭圆的一个性质是: 五边形的顶点与其内切椭圆在对边切点的连线, 经过另外两组对角线的交点.



**注记 6.4.22** 若平面上的六边形三条对角线共点, 则存在一条与各边相切的圆锥曲线. 这称为布利昂雄定理的逆定理. 利用重心坐标, 我们可表其为如下简洁的形式:

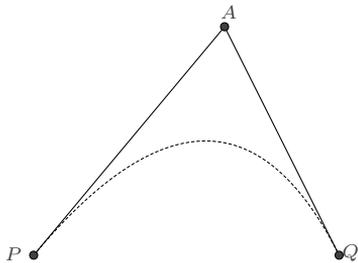
**命题 6.4.23** 平面上的六边形  $ABCDEF$ , 若  $D$ 、 $E$ 、 $F$  关于  $\triangle ABC$  的重心坐标为  $(\alpha_D, \beta_D, \gamma_D)$ 、 $(\alpha_E, \beta_E, \gamma_E)$ 、 $(\alpha_F, \beta_F, \gamma_F)$ , 则该六边形相切于一条圆锥曲线的条件是

$$\beta_D \gamma_E \alpha_F = \gamma_D \alpha_E \beta_F \quad (6.4.16)$$

## 6.5 有理 B 样条曲线

有理 B 样条曲线又称 NURBS 曲线,它是计算机辅助设计 (CAD) 领域中广泛使用的曲线拟合工具,具有平滑精确等拟合优点. 本节我们就二次曲线情形做一些讨论.

**6.5.1 给定一个控制点的拟合** 平面上,求作一条以  $P$  为起始点、 $Q$  为终点的有理二次曲线,并使得其在  $P$ 、 $Q$  两点处的切向量均指向控制点  $A$ .



我们在前面 (6.4.5) 已经给出过此类问题的圆锥曲线表示:

$$Z = \frac{pP + 2uA + u^2Q}{p + 2u + u^2}$$

它在  $u = 0, \infty$  时分别对应  $P$ 、 $Q$  两点. 一般 CAD 制图要求  $u$  的取值范围限定在  $[0, 1]$  之间, 为此, 考虑将  $(0, \infty)$  映射为  $(0, 1)$  的分式线性变换:

$$u = k \frac{v}{1-v}$$

则得所求二次曲线的一个表示

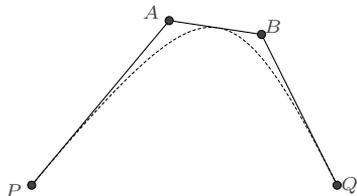
$$Z = \frac{p(1-u)^2 P + 2ku(1-u)A + k^2 u^2 Q}{p(1-u)^2 + 2ku(1-u) + k^2 u^2} \quad (6.5.1)$$

其中参数  $p$  用于调节曲线的形状, 而  $k$  可用于控制绘图的速率. 通常情况下要求  $p > 0, k > 0$ , 以使得曲线位于  $\triangle PAQ$  之内.

若令  $\vec{PA} = (s + it) \vec{PQ}$ , 该二次曲线又可表示为

$$\vec{PZ} = \frac{ku(2s + ku - 2su + 2it - 2itu)}{p + 2ku - 2pu - 2ku^2 + k^2 u^2 + pu^2} \vec{PQ} \quad (6.5.2)$$

**6.5.2 给定两个控制点的拟合** 平面上, 求作一条以  $P$  为起始点、 $Q$  为终点的有理二次曲线, 并使得其与给定的线段  $PA$ 、 $AB$ 、 $QB$  相切.



**解** 设二次曲线与直线  $AB$  相切于点  $T = \lambda A + (1 - \lambda)B$ , 则经过  $P$ 、 $Q$ 、 $T$  三点的二次曲线可表示为:

$$Z = \frac{p(1-u)P + quQ - u(1-u)X}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

又设点  $B$  关于  $P$ 、 $Q$ 、 $A$  的重心坐标表示为  $B = \alpha P + \beta A + \gamma Q (\alpha + \beta + \gamma = 1)$ , 根据二次曲线在  $P$ 、 $Q$  两点处的切线分别是  $PA$  和  $QB$  而知

$$p = -\frac{\alpha\lambda}{\beta}, \quad q = \gamma(1-\lambda)$$

再根据二次曲线在  $X$  点处直线  $AB$  相切, 得到

$$\lambda = \frac{\beta}{1+\beta}$$

于是, 该二次曲线可表示为

$$Z = \frac{\alpha(1-u^2)P + 2\beta u(1-u)A - \gamma u^2 Q}{\alpha(1-u^2) + 2\beta u(1-u) - \gamma u^2}$$

注意到这个表示在  $X$  处的参数取值是  $\infty$ , 而 CAD 制图一般要求  $u$  的取值范围限定在  $[0, 1]$  之间. 为此, 考虑将  $(0, 1, \infty)$  映射为  $(0, 1, k)$  的分式线性变换:

$$\frac{u}{1-u} = \frac{k-1}{k} \frac{v}{1-v}$$

其中  $k \in (0, 1)$ , 则得

$$Z = \frac{\alpha k(1-u)(k-2u+ku)P - 2\beta k(1-k)u(1-u)A - \gamma(1-k)^2 u^2 Q}{\alpha k(1-u)(k-2u+ku) - 2\beta k(1-k)u(1-u) - \gamma(1-k)^2 u^2} \quad (6.5.3)$$

若令  $\vec{PA} = (s + it)\vec{PQ}$ ,  $\vec{PB} = (m + in)\vec{PQ}$ , 该二次曲线又可表示为

$$\vec{PZ} = \frac{(1-k)u(2kns - nsu - knsu + mtu - kmtu + 2iknt - 2ikntu)}{\begin{pmatrix} k^2n - k^2ns - k^2t + k^2mt - 2k^2nu + 2knsu + 2ktu \\ -2kmtu + k^2nu^2 - nsu^2 - 2ktu^2 + k^2tu^2 + mtu^2 \end{pmatrix}} \vec{PQ} \quad (6.5.4) \quad \square$$

**6.5.3 有理曲线的最优参数化** 前面所得有理  $B$  样条二次曲线的表示, 在实际应用时, 为防止图形绘制时点随参数变化过于剧烈, 一般要求曲线的最大参数速率与最小参数速度之比为最小. 例如, 对于两个控制点的情形, 若

$$P = 0, \quad Q = 1, \quad A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, \quad B = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$$

由 (6.5.4) 得二次曲线

$$Z(u) = \frac{3(1-k)u((2+4i)k+u-(3+4i)ku)}{4k^2+10ku-18k^2u+3u^2-16ku^2+17k^2u^2}$$

我们即需要找到适当的参数  $k$ , 使得如下值为最小:

$$\min_k \left( \frac{|Z'(u)|_{\max}}{|Z'(u)|_{\min}} \right)$$

一般情形下, 直接求解是比较困难的. 文献<sup>①</sup>给出了一个充分条件:

**定理 6.5.1** 若有理参数曲线  $Z(u)$  满足  $|Z'(0)| = |Z'(1)|$  且在参数域  $[0, 1]$  内为最值, 则  $Z(u)$  是曲线的最优有理化方程.

利用此定理, 容易得到本例的最优参数  $k$ :

$$k = \frac{3}{47}(-27 - 24\sqrt{2} + 2\sqrt{576 + 418\sqrt{2}}) \approx 0.471432$$

## 6.6 已知中心的情形

对于中心圆锥曲线, 若已知其中心  $O$  及曲线上的一点  $A$ , 我们可以从 (6.3.1) 来导出其表示, 这是较为便捷的方式.

考虑  $A$  关于  $O$  的对称点  $B = 2O - A$ , 则圆锥曲线上的任意一点  $P$  有表示

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} \vec{AB}$$

<sup>①</sup> 《有理参数曲线的最优参数化》作者: 厉玉蓉, 李丹, 计算机辅助设计与图形学学报, 2015 年 10 月, 第 10 期, 第 27 卷.

转换成以  $\vec{OA}$  为基向量的表示, 则为

$$\vec{OP} = \frac{(q + 2pu - 4iu - 4su - u^2)}{q + 2pu + u^2} \vec{OA}$$

考虑  $P$  关于  $O$  的对称点  $Q = 2O - P$ , 设其为

$$\vec{OQ} = \frac{(q + 2pv - 4iv - 4sv - v^2)}{q + 2pv + v^2} \vec{OA}$$

两式相加, 得

$$\mathbf{0} = \left( \frac{(q + 2pu - 4iu - 4su - u^2)}{q + 2pu + u^2} + \frac{(q + 2pv - 4iv - 4sv - v^2)}{q + 2pv + v^2} \right) \vec{OA}$$

即有

$$\frac{(q + 2pu - 4iu - 4su - u^2)}{q + 2pu + u^2} + \frac{(q + 2pv - 4iv - 4sv - v^2)}{q + 2pv + v^2} = 0$$

分离实部和虚部, 得方程组

$$\begin{cases} q^2 + 2pqu - 2qsu + 2pqv - 2qsv + 4p^2uv - 8psuv - 2su^2v - 2svv^2 - u^2v^2 = 0 \\ qu + qv + 4puv + u^2v + uv^2 = 0 \end{cases}$$

对于任意的一个  $u$  值, 相应的存在一个  $v$  值使得上述方程组成立. 我们先通过辗转相除法消去  $v$ , 得到

$$pqu(q + 2pu + u^2)^3 = 0$$

因为  $u$  值可以是任意的, 所以只能是  $p = 0$  或  $q = 0$ . 将其分别代回上述方程组检验即知应是  $p = 0$ , 此时  $u$  和  $v$  的关系是  $uv + q = 0$ . 从而我们就得到表示:

$$\vec{OP} = \frac{q - 4iu - 4su - u^2}{q + u^2} \vec{OA}$$

为使得表示更简化一些, 再做代换  $u \rightarrow -2u$ ,  $q \rightarrow 4q$ , 则

$$\vec{OP} = \frac{q + 2iu + 2su - u^2}{q + u^2} \vec{OA}$$

为方便应用, 我们以新的参数重新表述结论.

**命题 6.6.1** 若已知圆锥曲线的中心  $O$  及曲线上一点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为如下的有

理参数形式:

$$\vec{OP} = \frac{p + 2qu - u^2 + 2iu}{p + u^2} \vec{OA} \quad (6.6.1)$$

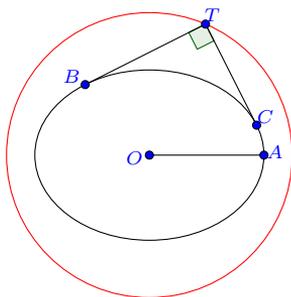
若点  $A$  是曲线的端点, 则根据  $OA$  的距离是一个极值 (即取极值时  $u = 0$ ), 可以确定出  $q = 0$ , 因而又有

**推论 6.6.2** 若已知圆锥曲线的中心  $O$  及曲线的端点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{OP} = \frac{p - u^2 + 2iu}{p + u^2} \vec{OA} \quad (6.6.2)$$

中心圆锥曲线的一个著名结论是蒙日圆.

**例 6.6.3 (蒙日圆)** 给定中心圆锥曲线  $\Gamma$ , 任意两条相互垂直的切线的交点都在同一个圆上, 且该圆的圆心是  $\Gamma$  的中心.



**证明** 记  $\Gamma$  的中心为  $O$ , 取其实轴上的一个端点  $A$ , 设  $\Gamma$  上两切线的切点为  $B, C$ , 则它们可表示为

$$\vec{OB} = \frac{p - u^2 + 2iu}{p + u^2} \vec{OA}, \quad \vec{OC} = \frac{p - v^2 + 2iv}{p + v^2} \vec{OA}$$

二者的切向量相互垂直, 即有  $\operatorname{Re} \left( \frac{d}{du} \vec{OB} \otimes \frac{d}{dv} \vec{OC} \right) = 0$ , 由此得

$$p^2 - pu^2 - pv^2 + 4p^2uv + u^2v^2 = 0$$

另一方面, 两切线的交点  $T$  为

$$\vec{OT} = \frac{p - uv + i(u + v)}{p + uv} \vec{OA}$$

我们将交点重表示为  $\vec{OT} = (x + yi) \vec{OA}$ , 则比较二者知

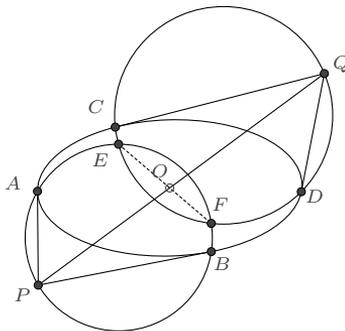
$$u + v = p \frac{2y}{1 + x}, \quad uv = p \frac{1 - x}{1 + x}$$

将此代入前面关于  $u, v$  的方程化简, 则有

$$x^2 + y^2 = \frac{1+p}{p}$$

这就清楚地表明了交点  $T$  的轨迹是一个以  $O$  为圆心的圆.  $\square$

**例 6.6.4 (图说几何 11.58)** 如图, 给定中心圆锥曲线  $\Gamma$  (中心为  $O$ ), 点  $P, Q$  在曲线外, 由  $P$  向圆锥曲线所引切线的切点分别是  $A, B$ , 由  $Q$  向圆锥曲线所引切线的切点分别是  $C, D$ , 圆  $\odot PAB$  与圆  $\odot QCD$  相交于  $E, F$  两点, 若  $P, O, Q$  三点共线, 则  $E, O, F$  三点也共线.



**证明** 设圆锥曲线的一个端点为  $T$ , 根据 (6.6.2), 我们设

$$\vec{OA} = \frac{p - a^2 + 2ai}{p + a^2} \vec{OT}, \quad \vec{OB} = \frac{p - b^2 + 2bi}{p + b^2} \vec{OT}$$

$$\vec{OC} = \frac{p - c^2 + 2ci}{p + c^2} \vec{OT}, \quad \vec{OD} = \frac{p - d^2 + 2di}{p + d^2} \vec{OT}$$

则

$$\vec{OP} = \frac{p - ab + i(a + b)}{p + ab} \vec{OT}, \quad \vec{OQ} = \frac{p - cd + i(c + d)}{p + cd} \vec{OT}$$

若  $O, P, Q$  三点共线, 则有

$$abc + abd - acd - bcd + ap + bp - cp - dp = 0$$

平面上的点  $X$  设为  $\vec{OX} = (x + yi) \vec{OT}$ , 若它在圆  $\odot PAB$  上, 则由  $P, A, B, X$  四点共圆可得

$$p(a^2 + p)(ab + p)(b^2 + p)(x^2 + y^2) - (ab - p)(a^2b^2 - a^2p - b^2p - 2a^2b^2p + p^2 - 2p^3)x \\ - (a + b)p(a^2b^2 + a^2p + 4abp + b^2p + p^2 - 4abp^2)y + (p - 1)(ab + p)(a^2b^2 - a^2p - 4abp - b^2p + p^2) = 0$$

若  $X$  在  $\odot QCD$  上, 则有

$$p(c^2+p)(cd+p)(d^2+p)(x^2+y^2) - (cd-p)(c^2d^2 - c^2p - d^2p - 2c^2d^2p + p^2 - 2p^3)x - (c+d)p(c^2d^2 + c^2p + 4cdp + d^2p + p^2 - 4cdp^2)y + (p-1)(cd+p)(c^2d^2 - c^2p - 4cdp - d^2p + p^2) = 0$$

这二者加权相减消去  $x^2$ 、 $y^2$  项, 即得两圆的公共弦  $E$ 、 $F$  的方程 (较长), 点  $O$  若在弦  $EF$  上, 将  $x=0, y=0$  代入此方程, 则应有

$$2(p-1)(ab+p)(cd+p)(abc+abd-acd-bcd+ap+bp-cp-dp)(abc+abd+acd+bcd-ap-bp-cp-dp) = 0$$

前面根据  $O$ 、 $P$ 、 $Q$  三点共线所导出的式子正是其中的一个因子, 故命题成立.  $\square$

## 6.7 已知焦点的情形

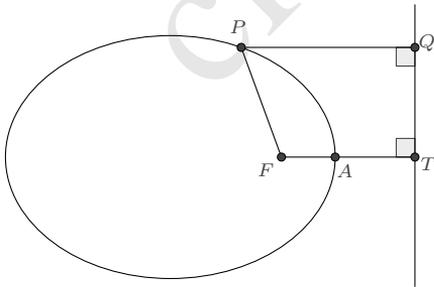
**6.7.1 已知一个焦点的圆锥曲线** 对于已知圆锥曲线的一个焦点  $F$  及曲线上一点  $A$  的情形, 我们先设圆锥曲线为一般的表示:

$$\vec{FP} = \left( \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_1}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} + \frac{a_2u^2 + 2b_2u + c_2}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} i \right) \vec{FA}$$

令  $u=0$  时,  $P=A$ , 则有  $c_1=c_3, c_2=0$ , 又令  $u \rightarrow \infty$  时,  $P$  点也在直线  $FA$  上, 则  $a_2=0$ , 于是

$$\vec{FP} = \left( \frac{a_1u^2 + 2b_1u + c_3}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} + \frac{2b_2u}{a_3u^2 + 2b_3u + c_3} i \right) \vec{FA}$$

根据圆锥曲线的第二定义: 曲线上的点到定点的距离与到定直线 (称为**准线**) 的距离之比是常数 (离心率  $e$ ). 设焦点  $F$  在准线上的投影点  $T$  为  $\vec{FT} = (m+ni)\vec{FA}$ , 点  $P$  在准线上的投影点为  $Q$ ,



则根据  $PQ \parallel FT, TQ \perp FT$  得知:

$$\vec{FQ} = \left( m + in - \frac{nu^2a_1 + 2nub_1 - 2mub_2 + nc_3}{(m-in)(u^2a_3 + 2ub_3 + c_3)} \right) \vec{FA}$$

于是离心率  $e$  的平方为:

$$e^2 = \frac{|FP|^2}{|PQ|^2} = \frac{(m^2 + n^2)(u^4 a_1^2 + 4u^3 a_1 b_1 + 4u^2 b_1^2 + 4u^2 b_2^2 + 2u^2 a_1 c_3 + 4u b_1 c_3 + c_3^2)}{(mu^2 a_1 - m^2 u^2 a_3 - n^2 u^2 a_3 + 2mub_1 + 2nub_2 - 2m^2 ub_3 - 2n^2 ub_3 + mc_3 - m^2 c_3 - n^2 c_3)^2}$$

此式不因  $u$  值的改变而改变, 两边对  $u$  求导, 将得到关于  $u$  的 4 次多项式方程, 并且方程的各项系数应恒等于 0, 以使得  $u$  值可任意选取, 即有:

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 b_1 + n^2 b_1 + n b_2 - m^2 b_3 - n^2 b_3 = 0 \\ 2m^2 b_1^2 + 2n^2 b_1^2 + 2n b_1 b_2 - 2m b_2^2 + 2m^2 b_2^2 + 2n^2 b_2^2 - 2m^2 b_1 b_3 - 2n^2 b_1 b_3 \\ \quad + m^2 a_1 c_3 + n^2 a_1 c_3 - m^2 a_3 c_3 - n^2 a_3 c_3 = 0 \\ (a_1 - a_3) b_1 c_3 = 0 \\ 2m^2 a_3 b_1^2 + 2n^2 a_3 b_1^2 + 2n a_1 b_1 b_2 - 2m a_1 b_2^2 + 2m^2 a_3 b_2^2 + 2n^2 a_3 b_2^2 - 2m^2 a_1 b_1 b_3 \\ \quad - 2n^2 a_1 b_1 b_3 - m^2 a_1^2 c_3 - n^2 a_1^2 c_3 + m^2 a_1 a_3 c_3 + n^2 a_1 a_3 c_3 = 0 \\ m^2 a_3 b_1 + n^2 a_3 b_1 + n a_1 b_2 - m^2 a_1 b_3 - n^2 a_1 b_3 = 0 \end{array} \right.$$

此方程组唯一有效的解是

$$a_3 = \frac{(2m - m^2 - n^2)a_1}{m^2 + n^2}, \quad b_1 = 0, \quad b_3 = \frac{n b_2}{m^2 + n^2}, \quad c_3 = -\frac{b_2^2}{a_1}$$

于是

$$\vec{FP} = \frac{(m^2 + n^2)(u a_1 + i b_2)^2}{2m u^2 a_1^2 + 2n u a_1 b_2 - m^2 u^2 a_1^2 - n^2 u^2 a_1^2 - m^2 b_2^2 - n^2 b_2^2} \vec{FA}$$

$a_1, b_2$  不能为 0, 否则曲线是退化的. 再做一个线性变换  $u \rightarrow -\frac{b_2}{a_1} u$ , 得

$$\vec{FP} = \frac{(m^2 + n^2)(1 + i u)^2}{m^2 + n^2 + 2n u + (m^2 + n^2 - 2m)u^2} \vec{FA}$$

它可被改写为如下形式

$$\vec{FP} = \frac{(1 + i u)^2}{1 + \frac{2n u}{m^2 + n^2} + \frac{m^2 + n^2 - 2m}{m^2 + n^2} u^2} \vec{FA}$$

容易看到, 若做代换

$$\frac{n}{m^2 + n^2} \rightarrow p, \quad \frac{m^2 + n^2 - 2m}{m^2 + n^2} \rightarrow q$$

则可使得表示为最简, 幸运的是, 这个变换是双有理的

$$m \rightarrow \frac{2(1-q)}{1-2q+q^2+4p^2}, \quad n \rightarrow \frac{4p}{1-2q+q^2+4p^2}$$

从而我们得到命题如下:

**命题 6.7.1** 若已知圆锥曲线的一个焦点  $F$  及曲线上一点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{FP} = \frac{(1+iu)^2}{1+2pu+qu^2} \vec{FA} \quad (6.7.1)$$

并且由推导过程可知, 其离心率

$$e = \sqrt{\frac{4p^2 + (1-q)^2}{(1+q)^2}} \quad (6.7.2)$$

准线上的点  $T$  有参数表示

$$\vec{FT} = \frac{2+iv}{1+pv-q} \vec{FA} \quad (6.7.3)$$

不难由上面的表示验证焦点的一个重要性质:

**命题 6.7.2** 圆锥曲线的焦点对应的准线是也是焦点的的极线.

如果点  $A$  是圆锥曲线的端点, 根据  $A$  与  $F$  的距离是一个极值可知  $p=0$ , 于是有

**推论 6.7.3** 若已知圆锥曲线的一个焦点  $F$  和焦点所在对称轴上的一个端点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{FP} = \frac{(1+iu)^2}{1+qu^2} \vec{FA} \quad (6.7.4)$$

根据离心率  $e$  的表示, 我们又有如下结论

**推论 6.7.4** 离心率  $e$  的圆锥曲线, 若已知它的一个焦点  $F$  和离  $F$  较近的端点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{FP} = \frac{(1+e)(1+iu)^2}{(1+e)+(1-e)u^2} \vec{FA} \quad (6.7.5)$$

离心率  $e$  的中心圆锥曲线, 若已知它的一个焦点  $F$  和离  $F$  较远的端点  $A$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{FP} = \frac{(1-e)(1+iu)^2}{(1-e)+(1+e)u^2} \vec{FA} \quad (6.7.6)$$

对于 (6.7.5), 如果我们做代换  $u = \tan \frac{\theta}{2}$ , 则有

$$\vec{FP} = \frac{1+e}{1+e \cos \theta} e^{i\theta} \vec{FA}$$

这正是圆锥曲线的一个极坐标表示.

根据 (6.7.5) 及  $F - O = e(A - O)$ , 又容易导出

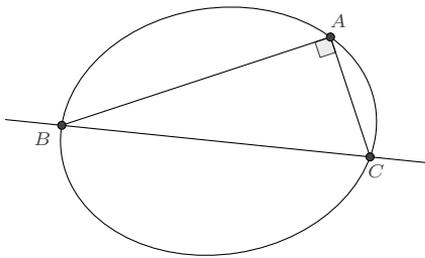
**推论 6.7.5** 若已知圆锥曲线的中心  $O$  及曲线的一个焦点  $F$ , 则圆锥曲线可表示为:

$$\vec{OP} = \left( 1 + \frac{(1 - e^2)(1 + iu)^2}{e(1 + e + u^2 - eu^2)} \right) \vec{OF} \quad (6.7.7)$$

**推论 6.7.6** 若已知抛物线的焦点  $F$  和端点  $A$ , 则抛物线可表示为:

$$\vec{FP} = (1 + iu)^2 \vec{FA} \quad (6.7.8)$$

**例 6.7.7 (Fregier 定理)** 给定圆锥曲线上的定点  $A$ , 作两条相互垂直的直线, 分别交圆锥曲线于  $B$ 、 $C$  两点, 则直线  $BC$  经过另一定点.



我们可以应用 (6.7.1) 方便地证明这个命题.

**证明** 设圆锥曲线的一个焦点是  $F$ , 则圆锥曲线上的  $B$ 、 $C$  两点可设为:

$$\vec{FB} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + 2pu + qu^2} \vec{FA}, \quad \vec{FC} = \frac{(1 + iv)^2}{1 + 2pv + qv^2} \vec{FA}$$

根据  $AB \perp AC$ , 得到

$$4 + 4p^2 + 2pu + 2pqu + 2pv + 2pqu + uv + 2quv + q^2uv = 0$$

现在设直线  $BC$  上的定点  $T$  为  $\vec{FT} = (x + yi) \vec{FA}$ , 根据  $B$ 、 $C$ 、 $T$  三点共线而有:

$$2 + 2uv - 2x + 2quvx - 2py - uy - quy - vy - qvy - 2puvy = 0$$

联合这二式消去变量  $v$ , 得关于  $u$  的二次方程:

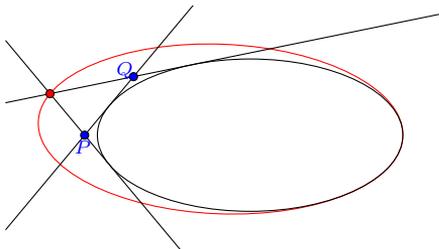
$$(1 + q)u^2(4p + 4pqx + y - 4p^2y + 2qy + q^2y) - 4(1 + q)(p - px + y) + 2u(3 + 4p^2 - 2q - q^2 + x + 6qx + 4p^2qx + q^2x - 3py - 4p^3y + 2pqy + pq^2y) = 0$$

因  $T$  是定点, 所以上式的各项系数为 0, 易求出

$$x = \frac{4p^2 + 3 - 2q - q^2}{4p^2 - 1 - 6q - q^2}, \quad y = \frac{4p(1+q)}{4p^2 - 1 - 6q - q^2}$$

恰好满足要求, 这就表明了命题成立.  $\square$

**例 6.7.8**  $l$  是二次曲线  $\Gamma$  的一条定切线, 动点  $P, Q$  在  $l$  上且  $PQ$  之长是定值, 过  $P, Q$  作  $\Gamma$  的另一切线, 交点轨迹为与  $\Gamma$  相切的二次曲线.



**证明** 因  $l$  是圆锥曲线的一条定切线, 其切点是固定的, 记为  $A$ , 又设焦点为  $F$ , 根据 (6.7.1) 所诱导的平面上任意点  $X$  的表示形式:

$$\vec{FX} = \frac{1 - uv + (u+v)i}{1 + p(u+v) + quv} \vec{FA}$$

记上式右方的复数部分为  $z(u, v)$ , 则  $P, Q$  两点可分别表示为:

$$\vec{FP} = z(m, 0) \vec{FA} = \frac{1 + im}{1 + pm} \vec{FA}$$

$$\vec{FQ} = z(n, 0) \vec{FA} = \frac{1 + in}{1 + pn} \vec{FA}$$

由  $PQ$  之长为定值, 记为  $L \cdot FA$ , 则

$$L^2 = \left| \frac{1 + im}{1 + pm} - \frac{1 + in}{1 + pn} \right|^2 = \frac{(m-n)^2(1+p^2)}{(1+mp)^2(1+np)^2}$$

过  $P, Q$  所作  $\Gamma$  的另一切线的交点  $T$  的表示为:

$$\vec{FT} = \frac{1 - mn + (m+n)i}{1 + p(m+n) + qmn} \vec{FA}$$

为求出  $T$  的轨迹, 我们又设  $\vec{FT} = (x + yi) \vec{FA}$ , 比较这两种表示, 易知

$$m + n = \frac{y + qy}{1 + qx - py}, \quad mn = \frac{1 - x - py}{1 + qx - py}$$

将此代入上面关于  $L$  的方程, 化简得到

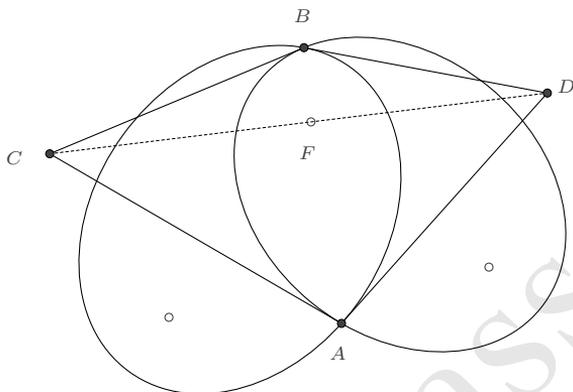
$$L^2(1+p^2-p^2x+qx-p^3y+pqy)^2+(1+p^2)(4-4x+4qx-4qx^2-8py+4pxy-4pqxy-y^2+4p^2y^2-2qy^2-q^2y^2)=0$$

由此显见交点轨迹是一条二次曲线. 至于相切的证明, 只需根据  $\Gamma$  的参数表示, 以

$$x = \frac{1-u^2}{1+2pu+qu^2}, \quad y = \frac{2u}{1+2pu+qu^2}$$

代入, 即知二者的交点仅在  $u = -\frac{1}{p}$  时取得. 证毕.  $\square$

**例 6.7.9 (图说几何 11.34)** 如图, 若两椭圆  $\Gamma$ 、 $\Omega$  有一个公共的焦点  $F$ , 并且相交于  $A$ 、 $B$  两点, 它们在  $A$ 、 $B$  两点处切线的交点为  $C$ 、 $D$ , 则  $F$ 、 $C$ 、 $D$  三点共线.



**证明** 根据 (6.7.1), 我们设椭圆  $\Gamma$  上的点  $P$ 、 $\Omega$  上的点  $Q$  分别有表示

$$\vec{FP} = \frac{(1+iu)^2}{1+2p_1u+q_1u^2} \vec{FA}, \quad \vec{FQ} = \frac{(1+iv)^2}{1+2p_2v+q_2v^2} \vec{FA}$$

椭圆相交时, 要求

$$\frac{(1+iu)^2}{1+2p_1u+q_1u^2} = \frac{(1+iv)^2}{1+2p_2v+q_2v^2}$$

分离实部和虚部后, 消元得到关于  $u$  的方程:

$$u(1+2up_1+u^2q_1)^2(1+u^2+2up_1-2up_2+u^2q_1+q_2)(2p_1-2p_2+uq_1-uq_2)=0$$

因为这二者皆是椭圆, 其判别式要求

$$\Delta_1 = p_1^2 - q_1 < 0, \quad \Delta_2 = p_2^2 - q_2 < 0$$

在此条件下, 因式  $(1 + 2up_1 + u^2q_1)^2$  和  $(1 + u^2 + 2up_1 - 2up_2 + u^2q_1 + q_2)$  皆是恒不为 0 的, 于是知交点  $A$  对应的参数值为  $u = v = 0$ , 交点  $B$  对应的参数值为  $u = v = -\frac{2(p_1 - p_2)}{q_1 - q_2}$ .

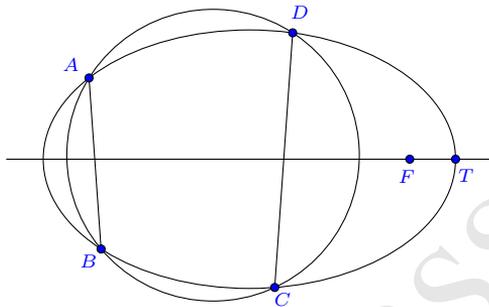
$$\vec{FB} = \frac{(2p_1 - 2p_2 + iq_1 - iq_2)^2}{4(p_1 - p_2)(p_2q_1 - p_1q_2) - (q_1 - q_2)^2} \vec{FA}$$

进而计算知, 在  $A$ 、 $B$  两点处切线的交点  $C$ 、 $D$  为:

$$\vec{FC} = \frac{2ip_1 - 2ip_2 - q_1 + q_2}{2p_1^2 - 2p_1p_2 - q_1 + q_2} \vec{FA}, \quad \vec{FD} = \frac{2ip_1 - 2ip_2 - q_1 + q_2}{2p_1p_2 - 2p_2^2 - q_1 + q_2} \vec{FA}$$

显然  $F$ 、 $C$ 、 $D$  三点共线. □

**例 6.7.10 (圆锥曲线上四点共圆的条件)** 对于任意圆锥曲线, 曲线上四点共圆的充要条件是其中两点的连线与焦点所在轴线的夹角和另外两点的连线与焦点所在轴线的夹角互补.



**证明** 我们选取圆锥曲线的一个焦点  $F$  及焦点所在对称轴上的一个端点  $T$  作为基向量, 根据 (6.7.4), 曲线上的点  $P$  有表示:  $\vec{FP} = \frac{(1+iu)^2}{1+qu^2} \vec{FT}$ , 从而可设曲线上的四点分别为:

$$\vec{FA} = \frac{(1+ia)^2}{1+qa^2} \vec{FT}, \quad \vec{FB} = \frac{(1+ib)^2}{1+qb^2} \vec{FT}, \quad \vec{FC} = \frac{(1+ic)^2}{1+qc^2} \vec{FT}, \quad \vec{FD} = \frac{(1+id)^2}{1+qd^2} \vec{FT}$$

由此, 四点共圆的条件是

$$a + b + c + d = q(abc + bcd + cda + dab)$$

另一方面, 因为  $\angle(BA, FT)$  与  $\angle(CD, FT)$  的取值范围是  $(0, 180^\circ)$ , 所以  $\angle(BA, FT) + \angle(CD, FT) = 180^\circ$  等价于

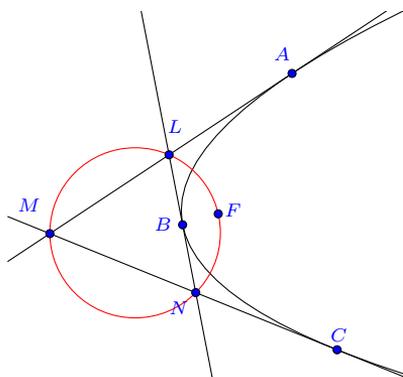
$$\operatorname{Im} \left( \frac{A - B}{F - T} \frac{D - C}{F - T} \right) = 0$$

它同样导致条件

$$a + b + c + d = q(abc + bcd + cda + dab)$$

这就说明了二者互为充要条件.  $\square$

**例 6.7.11 (抛物线三切线交点与焦点共圆)** 抛物线上三条切线的交点与焦点四点共圆.



**证明** 我们以  $\vec{FA}$  作为基向量, 根据 (6.7.1), 曲线上的另外两点  $B, C$  可设为

$$\vec{FB} = \frac{(1+iu)^2}{(1+pu)^2} \vec{FA}, \quad \vec{FC} = \frac{(1+iv)^2}{(1+pv)^2} \vec{FA}$$

由此求出三条切线的交点  $L, M, N$  分别为:

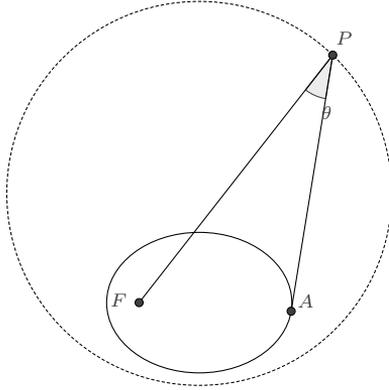
$$\vec{FL} = \frac{1+iu}{1+pu} \vec{FA}, \quad \vec{FM} = \frac{1+iv}{1+pv} \vec{FA}, \quad \vec{FN} = \frac{(1+iu)(1+iv)}{(1+pu)(1+pv)} \vec{FA}$$

计算知

$$\operatorname{Im} \left( \frac{M-F}{N-F} \frac{N-L}{M-L} \right) = 0$$

即  $F, L, M, N$  四点共圆.  $\square$

**例 6.7.12 (图说几何 11.14)** 已知圆锥曲线  $\Gamma$  及它的一个焦点  $F$ , 若动点  $P$  关于  $\Gamma$  的一条切线与直线  $PF$  的夹角  $\theta$  为定值, 则  $P$  的轨迹是圆.



**证明** 设焦点  $F$  所在对称轴上的一个端点为  $T$ , 根据 (6.7.4) 所诱导的平面点的表示, 可设

$$\vec{FP} = \frac{1 - uv + i(u + v)}{1 + quv} \vec{FT}$$

$P$  向  $\Gamma$  所引切线的切点  $A$  则为

$$\vec{FA} = \frac{(1 + iv)^2}{1 + qv^2} \vec{FT}$$

根据  $\angle FPA = \theta$ , 有

$$\operatorname{Im} \left( \frac{F - P}{A - P} e^{i\theta} \right) = 0$$

解出

$$v = \frac{u \sin \theta - \cos \theta}{q(u \cos \theta + \sin \theta)}$$

由此得到  $P$  的轨迹

$$\vec{FP} = \frac{qu \cos \theta + q \sin \theta + iu \sin \theta - i \cos \theta}{q \sin \theta (1 - iu)} \vec{FT}$$

右方是关于  $u$  的复线性分式, 故  $P$  的轨迹是一个圆.

若做代换  $\frac{1+iu}{1-iu} = z$ , 得

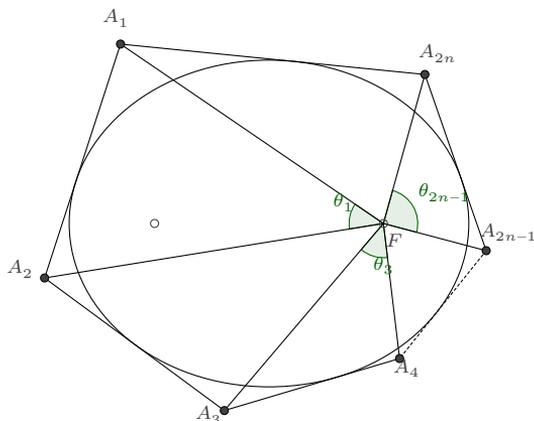
$$\vec{FP} = \left( \frac{(q-1)(1+i \cot \theta)}{2q} + \frac{(1+q)(1-i \cot \theta)}{2q} z \right) \vec{FT}$$

即知圆心  $O$  和半径  $R$  分别为

$$\vec{FO} = \frac{(q-1)(1+i \cot \theta)}{2q} \vec{FT}, \quad R = \frac{1+q}{2q \sin \theta} \vec{FT}$$

□

**例 6.7.13 (图说几何 11.8)** 对于椭圆的外切偶数边形, 若连接多边形的各顶点与椭圆的一个焦点, 则相间的夹角之和为  $\pi$ .



**证明** 如图, 设焦点为  $F$ , 一个端点为  $T$ , 则根据 (6.7.4), 椭圆的外切  $2n$  边形  $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$  的各顶点可表示为:

$$\vec{FA}_k = \left( \frac{1 - u_k u_{k+1}}{1 + qu_k u_{k+1}} + \frac{u_k + u_{k+1}}{1 + qu_k u_{k+1}} i \right) \vec{FT} = \frac{(1 + iu_k)(1 + iu_{k+1})}{1 + qu_k u_{k+1}} \vec{FT}$$

从而知各角度为

$$\begin{aligned} \theta_k = \angle A_k F A_{k+1} &= \arg \left( \frac{A_{k+1} - F}{A_k - F} \right) = \arg \left( \frac{(1 + qu_k u_{k+1})(1 + iu_{k+2})}{(1 + qu_{k+1} u_{k+2})(1 + iu_k)} \right) \\ &= \arg \left( \frac{1 + qu_k u_{k+1}}{1 + qu_{k+1} u_{k+2}} \right) + \arg \left( \frac{1 + iu_{k+2}}{1 + iu_k} \right) \end{aligned}$$

上式中,  $\frac{1 + qu_k u_{k+1}}{1 + qu_{k+1} u_{k+2}}$  为实数, 故

$$\theta_k = m_k \pi + \arg \left( \frac{1 + iu_{k+2}}{1 + iu_k} \right), \text{ 其中 } m_k \text{ 为某个整数}$$

于是所有相间的角度之和为:

$$\sum_{k=1}^n \theta_{2k-1} = \left( \sum_{k=1}^n m_{2k-1} \right) \pi + \sum_{k=1}^n \arg \left( \frac{1 + iu_{2k+1}}{1 + iu_{2k-1}} \right) = m\pi + \arg \frac{1 + iu_{2n+1}}{1 + iu_1}$$

对于封闭  $2n$  边形,  $u_{2n+1} = u_1$ , 因而上述角度之和是  $\pi$  的整数倍, 又易知上述角度之和介于  $0$  到  $2\pi$  之间, 所以其值等于  $\pi$ .  $\square$

**6.7.2 Marden 定理** 如果要对圆锥曲线极为丰富的性质依照优美度做一个排名的话, Marden 定理无疑是 Top 榜前列的存在. 它最早出现在 Morris Marden 于 1945 年发表的一篇文章里, 因而被 Dan Kalman 称为 Marden 定理. 而 Marden 本人早已声明此结论最早是由 Jörg Siebeck 在 1864 年发现并证明的. 传播最为广泛的是如下叙述:

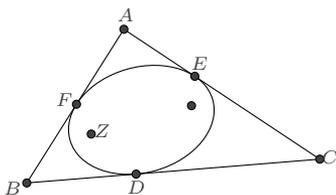
**命题 6.7.14 (最简情形的 Marden 定理)** 对于复平面上的  $\triangle ABC$ , 令  $p(z) = (z - A)(z - B)(z - C)$ , 若椭圆  $\Gamma$  内切于  $\triangle ABC$  三边的中点, 则  $\Gamma$  的两个焦点恰好是  $p'(z) = 0$  的两根.

如今, 这个定理早已被推广至更一般情形<sup>①</sup>:

**命题 6.7.15 (一般情形的 Marden 定理)** 函数  $f(z) = \frac{m_1}{z - \alpha_1} + \frac{m_2}{z - \alpha_2} + \cdots + \frac{m_n}{z - \alpha_n}$  (其中  $m_i$  是非 0 常数) 的零点, 是一条  $n - 1$  次曲线的焦点, 该曲线与各线段  $[\alpha_i, \alpha_j]$  相切, 且切点分割线段的比例为  $m_i : m_j$ .

这里, 我们利用前面的有理化表示来讨论圆锥曲线 (也即  $n = 3$ ) 时的情形.

设圆锥曲线与  $\triangle ABC$  的各边分别相切与  $D, E, F$ , 使得  $BD : DC = \lambda, CE : EA = \mu, AF : FB = \nu (\lambda\mu\nu = 1)$ , 求圆锥曲线的焦点.



**解** 设圆锥曲线的一个焦点为  $Z$ , 根据 (6.7.1), 圆锥曲线上的任意点  $P$  可表示为:

$$\vec{ZP} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + 2pu + qu^2} \vec{ZD}$$

此表示当  $u = 0$  时,  $P = D$ . 又设  $u = b, c$  时,  $P$  分别对应点  $E$  和  $F$ .  $\triangle ABC$  的各顶点是这三点的切线交点, 因而有:

$$\vec{ZA} = \frac{1 + i(b + c) - bc}{1 + p(b + c) + qbc} \vec{ZD}, \quad \vec{ZB} = \frac{1 + ic}{1 + pc} \vec{ZD}, \quad \vec{ZC} = \frac{1 + ib}{1 + pb} \vec{ZD}$$

根据切点所划分线段的比值, 有

$$-\frac{c(1 + bp)}{b(1 + cp)} = \lambda, \quad -\frac{b(1 + bp + cp + bcq)}{(b - c)(1 + bp)} = \mu, \quad \frac{(b - c)(1 + cp)}{c(1 + bp + cp + bcq)} = \nu$$

<sup>①</sup>参见 Vladimir Dragović 的文章《Marden theorem and Poncelet-Darboux curves》

在  $\lambda\mu\nu = 1$  的约束下, 不难解出  $p, q$ :

$$p = -\frac{c + b\lambda}{bc(1 + \lambda)}, \quad q = \frac{c^2 + b^2\lambda + b^2\lambda\mu - 2bc\lambda\mu + c^2\lambda\mu}{b^2c^2(1 + \lambda)}$$

因而

$$\vec{ZA} = \frac{bc(1 + ib)(1 + ic)(1 + \lambda)}{(b - c)^2\lambda\mu} \vec{ZD}, \quad \vec{ZB} = \frac{b(1 + ic)(1 + \lambda)}{b - c} \vec{ZD}, \quad \vec{ZC} = \frac{c(1 + ib)(1 + \lambda)}{(c - b)\lambda} \vec{ZD}$$

在复平面上, 我们可将各点作为复数参与运算. 根据以上三式消元, 即知

$$(Z - B)(Z - C) + \lambda\mu(Z - C)(Z - A) + \mu(Z - A)(Z - B) = 0 \quad (6.7.9)$$

它又容易写作更简洁些的形式:

$$\frac{1}{Z - A} + \frac{\lambda\mu}{Z - B} + \frac{\mu}{Z - C} = 0 \quad (6.7.10)$$

这就是 Marden 定理在圆锥曲线情形时所表述的内容.  $\square$

**推论 6.7.16** 与三角形各边相切的圆锥曲线, 其焦点是关于该三角形为等角共轭的.

**证明** 因为焦点  $Z_1, Z_2$  是 (6.7.9) 的两根, 根据韦达定理, 有

$$Z_1 + Z_2 = \frac{(1 + \lambda)\mu A + (1 + \mu)B + (1 + \lambda\mu)C}{1 + \mu + \lambda\mu}, \quad Z_1 Z_2 = \frac{BC + \lambda\mu CA + \mu AB}{1 + \mu + \lambda\mu}$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{Z_1 - A}{B - A} \frac{Z_2 - A}{C - A} &= \operatorname{Im} \frac{Z_1 Z_2 - A(Z_1 + Z_2) + A^2}{(B - A)(C - A)} = \operatorname{Im} \frac{1}{1 + \mu + \lambda\mu} = 0 \\ \operatorname{Im} \frac{Z_1 - B}{A - B} \frac{Z_2 - B}{C - B} &= \operatorname{Im} \frac{Z_1 Z_2 - B(Z_1 + Z_2) + B^2}{(A - B)(C - B)} = \operatorname{Im} \frac{\lambda\mu}{1 + \mu + \lambda\mu} = 0 \\ \operatorname{Im} \frac{Z_1 - C}{A - C} \frac{Z_2 - C}{B - C} &= \operatorname{Im} \frac{Z_1 Z_2 - C(Z_1 + Z_2) + C^2}{(A - C)(B - C)} = \operatorname{Im} \frac{\mu}{1 + \mu + \lambda\mu} = 0 \end{aligned}$$

由此即知焦点关于三角形是等角共轭的.  $\square$

利用 Marden 定理, 我们可以非常方便地对有理表示的圆锥曲线求焦点: 只需要在曲线上选择任意三点作切线三角形, 计算出切点所分线段的比例后, 应用定理即得焦点方程. 这里将前面一些典型的圆锥曲线的焦点方程列出, 以便查阅.

1. 由 (6.3.1) 所表示的过已知两点的圆锥曲线, 焦点  $Z = A + z(B - A)$ , 其中  $z$  满足方程:

$$(p^2 - q)z^2 + (q - 2ps - 2ip)z + (i + s)^2 = 0 \quad (6.7.11)$$

2. 由 (6.3.3) 所表示的三角形外接圆锥曲线, 记  $Z_A = p(Z-A)$ ,  $Z_B = q(Z-B)$ ,  $Z_C = Z-C$ , 则焦点方程为

$$Z_A^2 + Z_B^2 + Z_C^2 - 2Z_A Z_B - 2Z_B Z_C - 2Z_C Z_A = 0 \quad (6.7.12)$$

3. 由 (6.4.1) 所表示的与一直线相切的圆锥曲线, 焦点  $Z = A + z(B-A)$ , 其中  $z$  满足方程:

$$(q^2 - ps)z^2 - (2q - is)z + 1 = 0 \quad (6.7.13)$$

4. 由 (6.4.5) 所表示与角的两边相切的圆锥曲线, 焦点方程为

$$(Z-B)^2 = p(Z-A)(Z-C) \quad (6.7.14)$$

5. 由 (6.4.12) 所表示的四边形的相切圆锥曲线, 焦点方程为

$$(Z-A)(Z-C)\lambda\alpha_D + (Z-B)(Z-D) = 0 \quad (6.7.15)$$

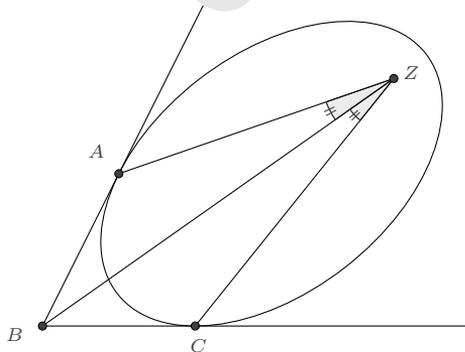
6. 由 (6.4.15) 所表示的五边形的相切圆锥曲线, 焦点方程为

$$\alpha_D(A-B)(Z-C)(Z-E) + \alpha_E(B-C)(Z-A)(Z-D) + (C-D)(Z-B)(Z-E) = 0 \quad (6.7.16)$$

7. 由 (6.7.1) 所表示的已知一个焦点的圆锥曲线, 其另一个焦点  $Z$  为

$$\vec{FZ} = \frac{1-q+2ip}{p^2-q} \vec{FA} \quad (6.7.17)$$

上面所列的焦点方程, 一些是具有明显几何性质的. 例如, 根据 (6.7.14) 知, 若圆锥曲线与一角相切, 则其焦点与角的顶点以及两边切点的连线所成的两角相等.



若与三角形相切的圆锥曲线是圆, 则两个焦点是重合的, 此时二次方程 (6.7.9) 可对  $Z$  求导, 即有

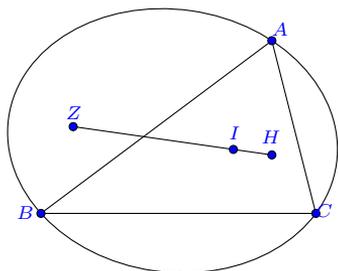
$$(1 + \lambda)\mu(Z - A) + (1 + \mu)(Z - B) + (1 + \lambda\mu)(Z - C) = 0$$

这两式与它们的共轭等式联立, 消元  $\lambda$ 、 $\mu$ 、 $\bar{Z}$  即得  $Z$  的方程:

$$\begin{aligned} \bar{A}(B - C)(Z^2 - 2AZ + AB - BC + CA)^2 \\ + \bar{B}(C - A)(Z^2 - 2BZ + AB + BC - CA)^2 \\ + \bar{C}(A - B)(Z^2 - 2CZ - AB + BC + CA)^2 = 0 \end{aligned}$$

这是三角形内心-旁心的一般方程表示 (3.11.2).

**例 6.7.17** 若椭圆的内接三角形以椭圆的一个焦点为垂心, 则该三角形的内心在两焦点的连线上.



**证明** 记  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$ , 则

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}$$

垂心  $H$  和内心  $I$  分别是:

$$\vec{BH} = -\frac{i(1+is)^2(1-t^2)}{2s(1-it)^2} \vec{BC}$$

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

$\triangle ABC$  的外接椭圆设为:

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

将垂心  $H$  代入其焦点方程式 (6.7.12), 在椭圆的判别式  $1 - 2p + p^2 - 2q - 2pq + q^2 < 0$

和固有条件  $s > 0, t > 0, 1 - st > 0$  下, 即可得到  $p, q$  的唯一解:

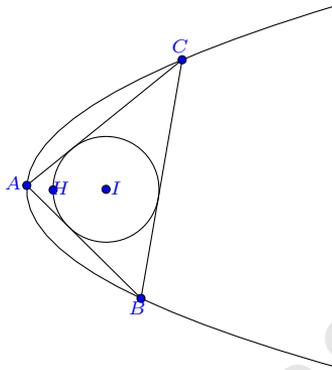
$$p = \frac{(1+s+t-st)(-1+s+t+st)}{(1-s)(1+s)(s+t)^2}, \quad q = \frac{(1+s+t-st)(-1+s+t+st)}{(1-t)(1-t)(s+t)^2}$$

然后求出椭圆的另一个焦点为

$$\vec{BZ} = \frac{i(1-t^2)(1-s^2-4st+2s^3t-t^2+3s^2t^2-is(1-s^2-2st+t^2+s^2t^2))^2}{2s(1-it)^2(1-2s^2+s^4-4st+4s^3t-2t^2+8s^2t^2-2s^4t^2+4st^3-12s^3t^3+t^4-2s^2t^4+5s^4t^4)} \vec{BC}$$

验证即知内心在垂心和它的连线上.  $\square$

**命题 6.7.18 (三角形内切圆恒定的问题)** 给定抛物线, 若其内接三角形  $ABC$  的垂心是抛物线的焦点, 则三角形的内切圆恒定.



**证明** 设抛物线的端点为  $T$ , 则抛物线的内接三角形  $ABC$  可令为:

$$\vec{HA} = (1+ia)^2 \vec{HT}, \quad \vec{HB} = (1+ib)^2 \vec{HT}, \quad \vec{HC} = (1+ic)^2 \vec{HT}$$

根据  $HA \perp BC, HB \perp CA, HC \perp AB$  得到方程组:

$$\begin{cases} 4a = (1-a^2)(b+c) \\ 4b = (1-b^2)(c+a) \\ 4c = (1-c^2)(a+b) \end{cases}$$

其中仅有两个方程是独立的. 不难解出

$$a+b = \frac{4c}{1-c^2}, \quad ab = \frac{c^2-5}{1-c^2}$$

根据三角形的内心所满足的方程 (3.11.2), 即可求出内心  $I$ :

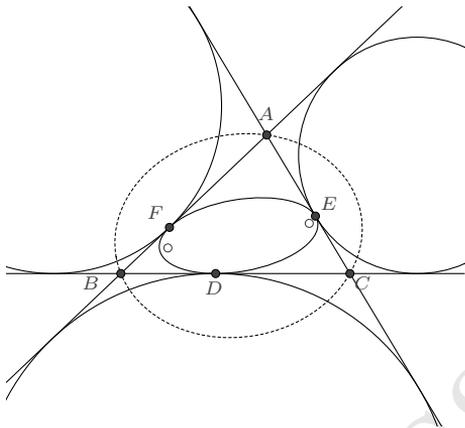
$$\vec{HI} = -2\vec{HT}$$

它在  $AB$  上的垂足点  $D$  为

$$\vec{HD} = -\frac{4}{1-ic}\vec{HT}$$

从而知半径  $r = ID = 2HT$ , 也是一个定值. □

**例 6.7.19 (图说几何 11.30)** 如图, 给定  $\triangle ABC$ , 若椭圆与各边相切于旁切圆在三边的切点  $D, E, F$ , 则  $\triangle ABC$  存在着另一个共焦的外接椭圆.



**证明** 利用前文常用的  $\triangle ABC$  的表示 (其中  $s = \tan \frac{A}{2}, t = \tan \frac{B}{2}$ ):

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)} \vec{BC}$$

旁切圆在三边的切点所切分的线段比例分别是:

$$\lambda = BD : DC = \frac{t(s+t)}{1-st}, \quad \mu = CE : EA = \frac{1-st}{s(s+t)}, \quad \nu = AF : FB = \frac{s}{t}$$

从而由 Marden 定理, 知内切椭圆的焦点  $Z$  (设为  $\vec{BZ} = z\vec{BC}$ ) 满足方程:

$$s(1-it)^2(1+s^2+st+t^2)z^2 - (1-it)(s+t)(1+s^2+it-is^2t-2ist^2)z + t(s+t)^2(1-st) = 0$$

又设  $\triangle ABC$  的外接椭圆为

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

根据 (6.7.12) 知, 焦点  $Z$  满足方程:

$$\begin{aligned} & (1 - 2p + p^2 - 2q - 2pq + q^2)s^2(1 - it)^4z^2 \\ & + 2s(1 - it)^2(-s + 2ps - p^2s + qs + pqs + pt - p^2t + pqt - ps^2t \\ & + p^2s^2t - pqs^2t + st^2 - 2pst^2 + p^2st^2 - qst^2 - pqt^2 \\ & + 2ist - 2ipst - 2iqst)z + (s - ps - pt - 2st + ps^2t - st^2 + pst^2)^2 = 0 \end{aligned}$$

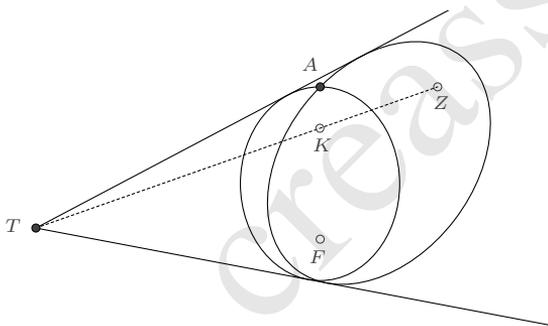
因为关于这两个关于  $z$  的二次方程有相同的根, 比较系数即得关于  $p, q$  的两个复系数方程. 唯一的有效解 (要求  $p, q$  为实数) 是

$$p = \frac{s(1 + t^2)}{(s + t)(1 - st)}, \quad q = \frac{t(1 + s^2)}{(s + t)(1 - st)}$$

从而我们就证明了确实存在一个共焦的椭圆, 它的表示是

$$P = \frac{s(1 + t^2)(1 - u)A + (1 + s^2)tuB - (s + t)(1 - st)(1 - u)uC}{s(1 + t^2)(1 - u) + (1 + s^2)tu - (s + t)(1 - st)(1 - u)u} \quad \square$$

**例 6.7.20 (图说几何 11.37)** 若两圆锥曲线有一个公共的焦点  $F$ , 并相交于一点  $A$ . 设它们的公切线交点为  $T$ , 两圆锥曲线的另一个焦点分别是  $Z$  和  $K$ , 则  $T, K, Z$  三点共线.



**证明** 设圆锥曲线  $\Gamma$  上的点  $P$ , 圆锥曲线  $\Omega$  上的点  $Q$  分别有参数表示:

$$\vec{FP} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + 2pu + qu^2} \vec{FA}, \quad \vec{FQ} = \frac{(1 + iv)^2}{1 + 2sv + tv^2} \vec{FA}$$

并设两圆锥曲线的公切线交点  $T$  有表示:

$$\vec{FT} = \frac{1 - mn + i(m + n)}{1 + p(m + n) + qmn} \vec{FA}$$

则公切线在  $\Gamma$  上的两个切点  $M, N$  分别是

$$\vec{FM} = \frac{(1+im)^2}{1+2pm+qm^2} \vec{FA}, \quad \vec{FN} = \frac{(1+in)^2}{1+2pn+qn^2} \vec{FA}$$

考察直线  $TM$  与  $\Omega$  的交点情况:  $\text{Im}\left(\frac{Q-M}{T-M}\right) = 0$ , 化简得到

$$m^2 + m^2q - 2mv - 2pv - 2m^2pv - 2mqv + 2sv + 2m^2sv + v^2 - m^2qv^2 + tv^2 + m^2tv^2 = 0$$

为使得交点唯一, 方程关于  $v$  的判别式应等于 0, 即

$$2mp + p^2 + m^2p^2 + m^2q + 2mpq + m^2q^2 - 2ms - 2ps - 2m^2ps - 2mqs + s^2 + m^2s^2 - m^2t - m^2qt = 0$$

同理, 考察直线  $TN$  与  $\Omega$  的交点情况, 又得

$$2np + p^2 + n^2p^2 + n^2q + 2npq + n^2q^2 - 2ns - 2ps - 2n^2ps - 2nqs + s^2 + n^2s^2 - n^2t - n^2qt = 0$$

两式联立, 解出

$$\begin{cases} s = \frac{2mn + mp + np + 2mnq}{m+n} \\ t = \frac{-4mn + 4m^2n^2 + m^2q - 2mnq + n^2q + 4m^2n^2q}{(m+n)^2} \end{cases}$$

根据 (6.7.17),  $\Gamma$  的另一个焦点  $Z$  为

$$\vec{FZ} = \frac{1-q+2ip}{p^2-q} \vec{FA}$$

$\Omega$  的另一个焦点  $K$  为

$$\begin{aligned} \vec{FK} &= \frac{1-t+2is}{s^2-t} \vec{FA} \\ &= \frac{(1+2ip-q)(m+n)^2 + 4(1+q)mn + 4i(1+q)mn(m+n) - 4(1+q)m^2n^2}{(p^2-q)(m+n)^2 + 4(1+q)mn + 4p(1+q)mn(m+n) + 4q(1+q)m^2n^2} \vec{FA} \end{aligned}$$

于是

$$\frac{K-Z}{T-K} = \frac{4mn(1+q)(1+mp+np+mnq)}{(m+n)^2(p^2-q)} \in \mathbb{R}$$

因而三点共线. □

### 6.7.3 已知两个焦点的圆锥曲线 根据(6.7.6),即可得到

**命题 6.7.21** 若已知圆锥曲线的两个焦点  $F_1, F_2$ , 则圆锥曲线可表示为如下的有理参数形式:

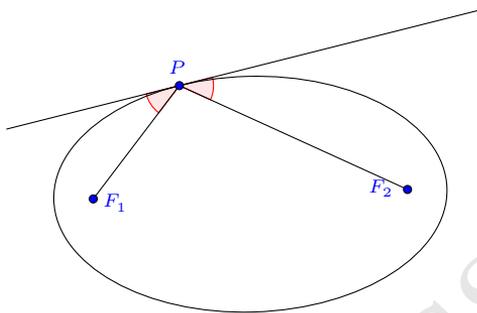
$$\vec{F_1P} = \frac{(1-e^2)(1+iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{F_1F_2} \quad (6.7.18)$$

涉及圆锥曲线两个焦点的性质也是非常丰富, 这里我们列一些这方面的命题.

**例 6.7.22** 给定一个椭圆, 其一点  $P$  与焦点  $F_1, F_2$  的连线再与椭圆交于  $A, B$ , 求证:

$$\frac{PF_1}{F_1A} + \frac{PF_2}{F_2B} = 2 \frac{1+e^2}{1-e^2}$$

**例 6.7.23 (反射定理)** 如图, 椭圆两焦点到曲线上点  $P$  的连线, 与  $P$  点处的切线形成的两夹角大小相等.



**证明** 根据中心圆锥曲线上点  $P$  的表示

$$\vec{F_1P} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{F_1F_2}$$

$P$  点处的切向量是

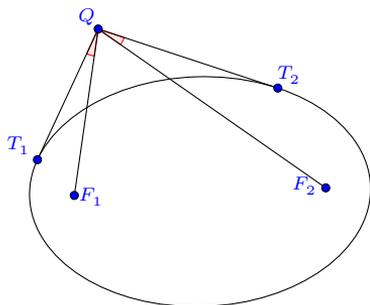
$$\mathbf{v} = \frac{d}{du} \vec{F_1P} = \frac{(e^2-1)(1-iu)(u+eu+i-ie)}{e(1-e+u^2+eu^2)^2} \vec{F_1F_2}$$

计算有

$$\frac{P-F_1}{\mathbf{v}} \cdot \frac{P-F_2}{\mathbf{v}} = \frac{(1-e+u^2+eu^2)^2}{4(e^2-1)} \in \mathbb{R}$$

由此即知, 对于椭圆和双曲线, 结论均成立. □

**例 6.7.24 (彭赛列小定理)** 以  $F_1, F_2$  为焦点的椭圆, 其外一点  $Q$  向椭圆作切线, 切点  $T_1, T_2$ . 那么  $\angle F_1QT_1 = \angle F_2QT_2$



**证明** 中心圆锥曲线外的一点, 可以表示为:

$$\vec{F_1Q} = \left( \frac{(1-e^2)(1-uv)}{2e(1-e+uv+euw)} - \frac{(1-e^2)(u+v)}{2e(1-e+uv+euw)}i \right) \vec{F_1F_2}$$

它的两个切点:

$$\vec{F_1T_1} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{F_1F_2}$$

$$\vec{F_1T_2} = \frac{(1-e^2)(1-iv)^2}{2e(1-e+v^2+ev^2)} \vec{F_1F_2}$$

计算即有:

$$\frac{Q - T_1}{Q - F_1} \frac{Q - T_2}{Q - F_2} = \frac{(1-e^2)(u-v)^2}{(1-e+u^2+eu^2)(1-e+v^2+ev^2)} \in \mathbb{R}$$

因而对于椭圆和双曲线均成立. □

容易看到, 反射定理是彭赛列小定理的一个特例.

**例 6.7.25 (彭赛列小定理之逆定理)** 点  $Q$  是平面上的光滑曲线  $\Gamma$  上的动点, 作  $Q$  点的切线  $T_1T_2$ , 若平面上存在两个不在曲线上的定点  $F_1$  和  $F_2$ , 使得恒有  $\angle F_1QT_1 = \angle F_2QT_2$ , 则  $\Gamma$  是以  $F_1, F_2$  为焦点的一条圆锥曲线.

**证明** 设曲线  $\Gamma$  上的点  $Q$  的表示为:

$$\vec{F_1Q} = (x + iy) \vec{F_1F_2}$$

则它在  $Q$  点处的微分为:

$$d\vec{F_1Q} = (dx + idy) \vec{F_1F_2}$$

根据  $\angle F_1QT_1 = \angle F_2QT_2$ , 得微分方程:

$$(1-2x)y(dx)^2 - (1-2x)y(dy)^2 - 2(x-x^2+y^2)(dx)(dy) = 0$$

我们先尝试直接解出  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2 + y^2 \pm \sqrt{(x^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2)}}{(2x-1)y}$$

注意到上式右方的根式是  $(x + iy)$  到 0 和 1 的距离之积, 因而我们考虑前面经常使用的有理代换:

$$x + iy = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2}$$

分离实部和虚部后即为:

$$x = \frac{(1-t^2)(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}, \quad y = \frac{2t(s+t)(1-st)}{s(1+t^2)^2}$$

在此代换下, 微分方程成为:

$$(t(1+t^2)ds + (s+2t-st^2)dt)(t(1+t^2)ds - s(1-2st-t^2)dt) = 0$$

容易解出

$$s = \frac{1}{t} + c \frac{1+t^2}{t} \quad \text{或} \quad s = \frac{t}{c+t^2c-1}$$

二者均使得曲线取如下的参数表示形式:

$$\vec{F_1Q} = \frac{K(1+K)(i-t)^2}{1+K+Kt^2} \vec{F_1F_2}$$

作代换:

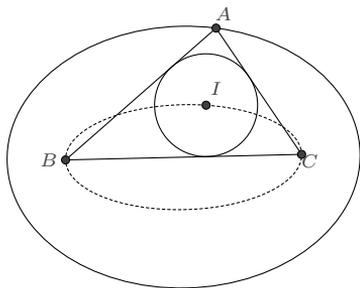
$$K = -\frac{1+e}{2e}, \quad t = -u$$

即化为前面已知两焦点的圆锥曲线的标准表示形式:

$$\vec{F_1Q} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{F_1F_2} \quad \square$$

给定一条中心圆锥曲线  $\Gamma$ , 若以它的两个焦点及曲线上一点为三角形的顶点, 则称该三角形为  $\Gamma$  的焦点三角形. 焦点三角形拥有非常良好的性质, 其中之一是三角形的所有二阶特征点均可有理参数化表示.

**例 6.7.26 (焦点三角形)** 如图, 设曲线  $\Gamma$  的两个焦点为  $B, C$ , 点  $A$  在  $\Gamma$  上. 证明  $\triangle ABC$  内心  $I$  的轨迹是也是一条圆锥曲线.



**证明** 令

$$\vec{BA} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{BC}$$

根据内心-旁心方程式 (3.11.2), 即可求出  $\triangle ABC$  的内心和旁心, 分别为:

$$\begin{aligned} \vec{BI} &= \frac{(1-e)(1-iu)}{1-e+u^2+eu^2} \vec{BC} \\ \vec{BI}_A &= \frac{(1+e)u(i+u)}{1-e+u^2+eu^2} \vec{BC} \\ \vec{BI}_B &= \frac{(1+e)(1-iu)}{2e} \vec{BC} \\ \vec{BI}_C &= \frac{(-1+e)(i+u)}{2eu} \vec{BC} \end{aligned}$$

根据 (3.11.3) 结论即知三角形的所有二阶特征点均可有理参数化表示. 因为焦点三角形内心和旁心也是参数  $u$  的二阶有理表示, 所以它们的轨迹仍是二次曲线.

若转化为直角坐标系下的描述, 例如对于椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , ( $a > b > 0$ ), 记  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 则它的两个焦点是  $B = -c, C = c$ , 离心率  $e = \frac{c}{a}$ . 又设  $\triangle ABC$  内心为:  $I = x + iy$ , 代入上述参数表示, 则有

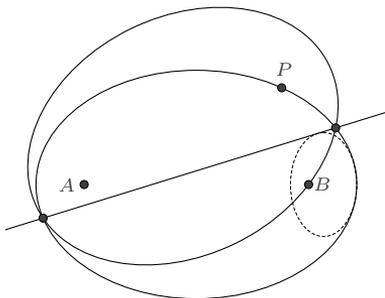
$$x + iy + c = \frac{(a-c)(1-iu)}{a-c+au^2+cu^2} 2c$$

分离虚部和实部, 然后消去  $u$ , 即得到

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{(a+c)y^2}{(a-c)c^2} = 1$$

□

**例 6.7.27 (包络椭圆问题)** 椭圆  $\Gamma$  左右焦点为  $A, B$ , 以  $A$  和椭圆上一点  $P$  为焦点作一个过点  $B$  的新椭圆  $\Omega$ ,  $\Omega$  与  $\Gamma$  相交两点连线为  $l$ , 求证  $l$  与定椭圆相切.



**证明** 设椭圆  $\Gamma$  上的点  $P$  有表示

$$\vec{AP} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{AB}$$

又设椭圆  $\Omega$  上的点  $B$  有表示

$$\vec{AB} = \frac{(1-s^2)(1-iv)^2}{2s(1-s+v^2+sv^2)} \vec{AP}$$

由此二式, 得方程

$$\frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \cdot \frac{(1-s^2)(1-iv)^2}{2s(1-s+v^2+sv^2)} = 1$$

分离实部和虚部, 我们可得到唯一符合要求 ( $0 \leq e < 1, 0 \leq s < 1$ ) 的解:

$$s = \frac{(1-e)(1+u^2)}{1-e+u^2+3eu^2}, v = -u$$

因而椭圆  $\Omega$  上的任意点  $Q$  可表示为:

$$\vec{AQ} = \frac{(1+e)u^2(1-iu)(1-iv)^2}{(1+iu)(2eu^2+w^2-ew^2+u^2w^2+eu^2w^2)} \vec{AB}$$

它与椭圆  $\Gamma$  的两个交点  $T_1, T_2$  是:

$$\begin{aligned} \vec{AT}_1 &= \frac{(1+e)(1-e+2eu-iu+ieu)^2}{2e(1-2e+e^2+4eu-4e^2u+u^2+3e^2u^2)} \vec{AB} \\ \vec{AT}_2 &= \frac{(1+e)(1-e-2eu-iu+ieu)^2}{2e(1-2e+e^2-4eu+4e^2u+u^2+3e^2u^2)} \vec{AB} \end{aligned}$$

经过  $T_1, T_2$  的直线  $l$  上的点  $Z$  设为  $\vec{AZ} = (x + yi)\vec{AB}$ , 则有

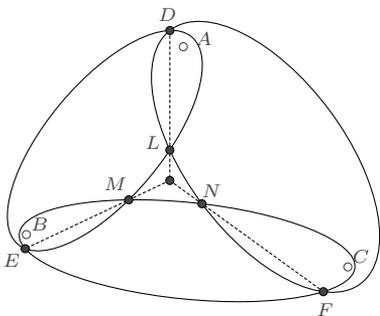
$$1 - e - e^2 + e^3 + u^2 - eu^2 - 5e^2u^2 - 3e^3u^2 - 2ex + 4e^2x - 2e^3x + 2eu^2x + 6e^3u^2x + 4euy - 4e^2uy = 0$$

其包络线方程为:

$$1 - 6e^2 - 8e^3 - 3e^4 + 4e^2x + 16e^3x + 12e^4x - 4e^2x^2 - 12e^4x^2 - 4e^2y^2 = 0$$

所表示的正是 一个固定椭圆. <sup>①</sup> □

**例 6.7.28 (Neville 定理)** 如图, 平面上给定三个不共线的点, 若三个椭圆分别以其中两点为焦点, 则两两椭圆的交点的连线共点.



**证明** 设三椭圆的表示分别是

$$\begin{cases} \vec{AP} = \frac{(1 - e_1^2)(1 + iu)^2}{2e_1(1 - e_1 + u^2 + e_1u^2)} \vec{AB} \\ \vec{BP} = \frac{(1 - e_2^2)(1 + iv)^2}{2e_2(1 - e_2 + v^2 + e_2v^2)} \vec{BC} \\ \vec{CP} = \frac{(1 - e_3^2)(1 + iw)^2}{2e_3(1 - e_3 + w^2 + e_3w^2)} \vec{CA} \end{cases}$$

为了便于后续关于解的取值的讨论, 通常可以选用前文三角形的常用表示, 即令

$$\vec{BA} = \frac{(s + t)(1 - st)}{s(1 - it)^2} \vec{BC}$$

<sup>①</sup> 若转化为直角坐标系下的表示, 设椭圆  $\Gamma$  的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 则定椭圆方程为:

$$\frac{(4a^2 - 3b^2)^2}{a^2b^4} \left( x - \frac{4a(a^2 - b^2)}{4a^2 - 3b^2} \right)^2 + \frac{(4a^2 - 3b^2)}{b^4} y^2 = 1$$

如此, 将各椭圆统一为以  $\vec{BC}$  为基向量的表示则分别是:

$$\begin{cases} \vec{BP} = \left( \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} - \frac{(s+t)(1-st)(1+iu)^2(1-e_1^2)}{2s(1-it)^2 e_1(1-e_1+u^2+e_1u^2)} \right) \vec{BC} \\ \vec{BP} = \left( \frac{(1+iv)^2(1-e_2^2)}{2e_2(1-e_2+v^2+e_2v^2)} \right) \vec{BC} \\ \vec{BP} = \left( 1 + \frac{(1+is)^2 t(1+iw)^2(1-e_3^2)}{2s(1-t)^2 e_3(1-e_3+w^2+e_3w^2)} \right) \vec{BC} \end{cases}$$

我们先看前两个椭圆的相交情况, 即须使得

$$\frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} - \frac{(s+t)(1-st)(1+iu)^2(1-e_1^2)}{2s(1-it)^2 e_1(1-e_1+u^2+e_1u^2)} = \frac{(1+iv)^2(1-e_2^2)}{2e_2(1-e_2+v^2+e_2v^2)}$$

分离实部和虚部, 再消元  $u$  可得关于  $v$  的一个可分解的四次方程, 它的因式分别是

$$\begin{aligned} & v^2(1+e_2)(se_1+st^2e_1-se_1^2+st^2e_1^2+se_2+te_2-s^2te_2-st^2e_2-se_1e_2-st^2e_1e_2-te_1^2e_2+s^2te_1^2e_2) \\ & \quad + 4stve_1^2(1-e_2)(1+e_2) \\ & + (1-e_2)(se_1+st^2e_1+se_1^2-st^2e_1^2+se_2+te_2-s^2te_2-st^2e_2+se_1e_2+st^2e_1e_2-te_1^2e_2+s^2te_1^2e_2) \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} & v^2(1+e_2)(se_1+st^2e_1+se_1^2-st^2e_1^2-se_2-te_2+s^2te_2+st^2e_2-se_1e_2-st^2e_1e_2+te_1^2e_2-s^2te_1^2e_2) \\ & \quad - 4stve_1^2(1-e_2)(1+e_2) \\ & + (1-e_2)(se_1+st^2e_1-se_1^2+st^2e_1^2-se_2-te_2+s^2te_2+st^2e_2+se_1e_2+st^2e_1e_2+te_1^2e_2-s^2te_1^2e_2) \end{aligned}$$

第一个因式关于  $v$  的判别式是

$$\begin{aligned} \Delta = & -4(1-e_1^2)(1-e_2^2)(se_1+st^2e_1+se_2+te_2-s^2te_2-st^2e_2+te_1e_2+s^2te_1e_2) \\ & (se_1+st^2e_1+se_2+te_2-s^2te_2-st^2e_2-te_1e_2-s^2te_1e_2) \end{aligned}$$

在条件  $s > 0, t > 0, 1-st > 0, 1 > e_1 > 0, 1 > e_2 > 0$  下,  $\Delta$  是恒小于 0 的, 因而椭圆交点至多有两个, 由上面的第二个因式给出相应的参数  $v$  值. 根据韦达定理, 它的两根  $v_1, v_2$  满足:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = \frac{4ste_1^2(1-e_2)}{se_1+st^2e_1+se_1^2-st^2e_1^2-se_2-te_2+s^2te_2+st^2e_2-se_1e_2-st^2e_1e_2+te_1^2e_2-s^2te_1^2e_2} \\ v_1v_2 = \frac{(1-e_2)(se_1+st^2e_1-se_1^2+st^2e_1^2-se_2-te_2+s^2te_2+st^2e_2+se_1e_2+st^2e_1e_2+te_1^2e_2-s^2te_1^2e_2)}{(1+e_2)(se_1+st^2e_1+se_1^2-st^2e_1^2-se_2-te_2+s^2te_2+st^2e_2-se_1e_2-st^2e_1e_2+te_1^2e_2-s^2te_1^2e_2)} \end{cases}$$

若点  $Q$  (设为  $\vec{BQ} = (x + yi)\vec{BC}$ ) 在这两个交点的连线上, 根据三点共线的条件, 有

$$(1 - 2xe_2 - e_2^2 + 2xe_2^2) + (1 + 2xe_2 - e_2^2 + 2xe_2^2)v_1v_2 - 2ye_2(v_1 + v_2) = 0$$

代入上面的关系式, 即得

$$(s+t)(1-st)e_2 - (s+t-s^2t-st^2-2sx+2st^2x-4sty)e_1^2e_2 - s(1+t^2)e_1(1-e_2^2+2xe_2^2) = 0$$

同理, 若点  $Q$  在另外两条椭圆交点的连线上, 有

$$(1+s^2)^2te_2 - (2s-2s^3+t-6s^2t+s^4t-2st^2+2s^3t^2-2sx+2s^3x+8s^2tx+2st^2x-2s^3t^2x-4s^2y-4sty+4s^3ty+4s^2t^2y)e_2e_3^2 - s(1+s^2)(1+t^2)(1+e_2^2-2xe_2^2)e_3 = 0$$

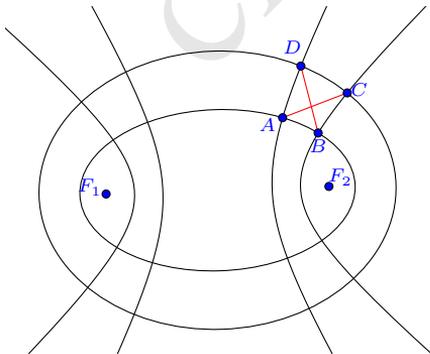
$$(1+s^2)^2te_1 + (2s-2s^3+t-6s^2t+s^4t-2st^2+2s^3t^2-2sx+2s^3x+8s^2tx+2st^2x-2s^3t^2x-4s^2y-4sty+4s^3ty+4s^2t^2y)e_1e_3^2 - (1+s^2)(s+t-s^2t-st^2+se_1^2+te_1^2-s^2te_1^2-st^2e_1^2-2sxe_1^2+2st^2xe_1^2-4stye_1^2)e_3 = 0$$

联立这三个方程, 知三直线相交于公共点  $Q$ :

$$\vec{BQ} = \left( \frac{i(1-is)^2}{4s} + \frac{i(1+s^2)(1+it)}{4s(1-it)e_2e_3} - \frac{i(1+is)^2(1+it)}{4s(1-it)e_1e_2} - \frac{i(1+s^2)}{4se_1e_3} \right) \vec{BC} \quad \square$$

## 6.7.4 共焦曲线

**例 6.7.29 (Ivory 定理)** 共焦的两椭圆与两双曲线的交点中, 位于同一象限的对角交点的连线长度相等.



**证明** 设四条共焦曲线  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  的离心率分别为  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , ( $0 \leq e_1, e_2 < 1$ ,

$1 < e_3, e_4$ ), 则各曲线上的点  $P_k (k = 1, 2, 3, 4)$  有表示:

$$\vec{F_1 P_k} = \frac{(1 - e_k^2)(1 - i u_k)^2}{2e_k(1 - e_k + u_k^2 + e_k u_k^2)} \vec{F_1 F_2}$$

在第一象限, 两椭圆和两双曲线的四个交点  $A, B, C, D$  分别为:

$$\vec{F_1 A} = \frac{(\sqrt{(1+e_1)(1+e_3)} + i\sqrt{(e_3-1)(1-e_1)})^2}{4e_1e_3} \vec{F_1 F_2}$$

$$\vec{F_1 B} = \frac{(\sqrt{(1+e_1)(1+e_4)} + i\sqrt{(e_4-1)(1-e_1)})^2}{4e_1e_4} \vec{F_1 F_2}$$

$$\vec{F_1 C} = \frac{(\sqrt{(1+e_2)(1+e_4)} + i\sqrt{(e_4-1)(1-e_2)})^2}{4e_2e_4} \vec{F_1 F_2}$$

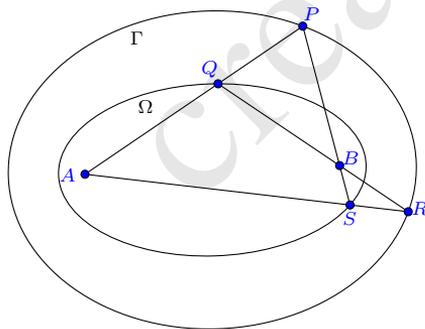
$$\vec{F_1 D} = \frac{(\sqrt{(1+e_2)(1+e_3)} + i\sqrt{(e_3-1)(1-e_2)})^2}{4e_2e_3} \vec{F_1 F_2}$$

由此计算即知

$$AC = BD = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} + \frac{1}{e_3^2} + \frac{1}{e_4^2}\right) - \frac{1 + \sqrt{(1-e_1^2)(1-e_2^2)(e_3^2-1)(e_4^2-1)}}{2e_1e_2e_3e_4}} \vec{F_1 F_2}$$

□

**例 6.7.30 (Urquhart 定理)** 如图, 设  $P, R$  是以  $A, B$  为焦点的二次曲线  $\Gamma$  上的两点,  $AP$  交  $BR$  于  $Q$ ,  $AR$  交  $BP$  于  $S$ , 则  $Q, S$  也在某一以  $A, B$  为焦点的二次曲线  $\Omega$  上.



**证明** 令

$$\vec{AP} = \frac{(1 - e^2)(1 - iu)^2}{2e(1 - e + u^2 + eu^2)} \vec{AB}$$

$$\vec{AR} = \frac{(1 - e^2)(1 - iv)^2}{2e(1 - e + v^2 + ev^2)} \vec{AB}$$

则  $AP$  与  $BR$  的交点  $Q$ ,  $AR$  与  $BP$  的交点  $S$  分别为:

$$\vec{AQ} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2 v}{(v-u+eu+ev)(1-e+uv+euw)} \vec{AB}$$

$$\vec{AS} = \frac{(1-e^2)(1-iv)^2 u}{(u-v+eu+ev)(1-e+uv+euw)} \vec{AB}$$

命题断言  $Q, S$  也在以  $A, B$  为焦点的二次曲线上, 即使得  $Q, S$  具有如下的表示形式 ( $s$  为曲线  $\Omega$  的离心率):

$$\vec{AQ} = \frac{(1-s^2)(1-ip)^2}{2s(1-s+p^2+sp^2)} \vec{AB}$$

$$\vec{AS} = \frac{(1-s^2)(1-iq)^2}{2s(1-s+q^2+sq^2)} \vec{AB}$$

事实上, 容易解出

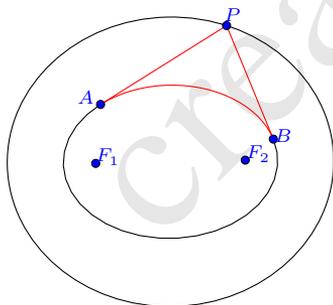
$$s = \frac{1-e+uv+euw}{1-e-uv-ewv}, \quad p = u, \quad q = v$$

或

$$s = -\frac{1-e+uv+euw}{1-e-uv-ewv}, \quad p = -\frac{1}{u}, \quad q = -\frac{1}{v}$$

上面的两组解能且仅取其中一组, 因为离心率要求  $s \geq 0$ , 这就说明了  $Q, S$  在某一以  $A, B$  为焦点的二次曲线  $\Omega$  上.  $\square$

**例 6.7.31 (Graves 定理)** 对于给定的共焦椭圆, 外椭圆上的一点向内椭圆引切线, 则两切线段的长度之和, 与两个切点间劣弧的长度之差是一个定值.



**证明** 设内椭圆上的点  $A$  和  $B$  分别为:

$$\vec{F_1A} = \frac{(1-e^2)(1-iu)^2}{2e(1-e+u^2+eu^2)} \vec{F_1F_2}$$

$$\vec{F_1B} = \frac{(1-e^2)(1-iv)^2}{2e(1-e+v^2+ev^2)} \vec{F_1F_2}$$

不妨设  $u < v$ , 则  $A, B$  处切线的交点  $P$  为:

$$\vec{F_1P} = \frac{(1-e^2)(1-iu)(1-iv)}{2e(1-e+uv+euw)} \vec{F_1F_2}$$

由此计算出

$$PA = \frac{(1-e^2)(v-u)\sqrt{(1+u^2)((1-e)^2+(1+e)^2u^2)}}{2e|1-e+uv+euw|(1-e+u^2+eu^2)} F_1F_2$$

$$PB = \frac{(1-e^2)(v-u)\sqrt{(1+v^2)((1-e)^2+(1+e)^2v^2)}}{2e|1-e+uv+euw|(1-e+v^2+ev^2)} F_1F_2$$

$$\widehat{AB} = \int_u^v \frac{(1-e^2)\sqrt{(1+t^2)((1-e)^2+(1+e)^2t^2)}}{e(1-e+t^2+et^2)^2} dt F_1F_2$$

另一方面,  $P$  点在同焦椭圆之上, 因此又可令:

$$\vec{F_1P} = \frac{(1-s^2)(1-iw)^2}{2s(1-s+w^2+sw^2)} \vec{F_1F_2}$$

其中  $s$  为外椭圆的离心率,  $s < e$ .

两式比较, 然后消去  $w$ , 将得到关于  $u, v$  的等式:

$$(1-e^2)^2s^2(u+v)^2 - (1-e)^2(e^2-s^2)(1-s^2) \\ - (1+e)^2(e^2-s^2)(1-s^2)(uv)^2 - 2(1-e^2)(1-s^2)(e^2+s^2)uv = 0$$

在此等式之下, 即是要证明  $PA + PB - \widehat{AB}$  恒为定值.

一个简便的计算方案是利用彭赛列小定理:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{P-A}{dP} \frac{P-B}{dP} \right) = 0$$

导出<sup>①</sup>

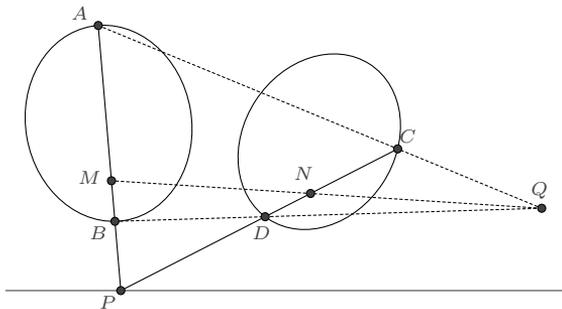
$$\frac{du}{\sqrt{(1+u^2)((1-e)^2+(1+e)^2u^2)}} = \pm \frac{dv}{\sqrt{(1+v^2)((1-e)^2+(1+e)^2v^2)}}$$

由此不难计算知待证等式是恒成立的. □

<sup>①</sup>注: 也可由上面关于  $u, v$  的方程直接导出. 这只需要对该等式微分后, 联立消元  $s$  即可.

## 6.8 已知准线的情形

例 6.8.1 已知直线  $l$  是两椭圆  $M, N$  的公共极线.



## 6.9 特征计算

前人已就直角坐标系下的二次曲线方程做了比较细致的探讨,但通常是将一般方程转化为标准方程进行的.这里我们直接根据有理表示来做计算.

**6.9.1 中心** 对于一般圆锥曲线的直角坐标方程 (6.0.1)

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

根据曲线的一般理论,其中心是方程对变量求偏导所得方程组的解

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(ax + by + d) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(bx + cy + e) = 0 \end{cases}$$

其解为

$$x = \frac{cd - be}{b^2 - ac}, \quad y = \frac{ae - bd}{b^2 - ac}$$

以复数表示则为

$$O = \frac{(cd - be) + i(ae - bd)}{b^2 - ac} \quad (6.9.1)$$

对于重心坐标表示的圆锥曲线方程 (6.1.1) 或 (6.1.2), 利用  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  化为二元二次方程后, 根据圆锥曲线中心的仿射不变性, 亦可同法求出.

对于有理表示的圆锥曲线, 根据“曲线上的点关于中心的对称点也在曲线上”这一性质直接求解更方便一些.

**例 6.9.1** 对于过已知两点的圆锥曲线表示 (6.3.1)

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} \vec{AB}$$

设其中心  $O$  为  $\vec{AO} = (m + ni) \vec{AB}$ , 并  $P$  关于中心  $O$  的对称点为  $Q$

$$\vec{AQ} = \frac{v^2 + 2sv + 2iv}{v^2 + 2pv + q} \vec{AB}$$

则根据  $P + Q = 2O$  而有

$$\frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} + \frac{v^2 + 2sv + 2iv}{v^2 + 2pv + q} = 2(m + ni)$$

分离实部和虚部后得到

$$\begin{cases} \frac{u^2 + 2su}{u^2 + 2pu + q} + \frac{v^2 + 2sv}{v^2 + 2pv + q} = 2m \\ \frac{2u}{u^2 + 2pu + q} + \frac{2v}{v^2 + 2pv + q} = 2n \end{cases}$$

由这两式消去变量  $v$ , 得到关于  $u$  的二次方程

$$\begin{aligned} & (2 - 6m + 4m^2 - 2np + 4mnp + n^2q + 6ns - 8mns - 4n^2ps + 4n^2s^2)u^2 \\ & + 2(-4mp + 4m^2p + 4mnp^2 - nq + n^2pq + 4nps - 8mnp s - 4n^2p^2s + 4n^2ps^2)u \\ & + q(-2m + 4m^2 + 4mnp + n^2q + 2ns - 8mns - 4n^2ps + 4n^2s^2) = 0 \end{aligned}$$

因变量  $u$  是任意, 故方程的各项系数为 0, 由此解出

$$m = \frac{2ps - q}{2(p^2 - q)}, \quad n = \frac{p}{p^2 - q}$$

曲线的中心  $O$  的表示即为

$$\vec{AO} = \frac{2ps - q + 2ip}{2(p^2 - q)} \vec{AB}$$

**6.9.2 半轴长** 中心圆锥曲线的半轴长是圆锥曲线上的点与中心的最值距离, 利用此性质求有理表示的圆锥曲线的半轴长是方便的.

**例 6.9.2** 对于过已知两点的圆锥曲线表示 (6.3.1)

$$\vec{AP} = \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} \vec{AB}$$

前面我们已知其中心为

$$\vec{AO} = \frac{2ps - q + 2ip}{2(p^2 - q)} \vec{AB}$$

于是

$$\vec{OP} = \left( \frac{u^2 + 2su + 2iu}{u^2 + 2pu + q} - \frac{2ps - q + 2ip}{2(p^2 - q)} \right) \vec{AB}$$

距离的平方是

$$OP^2 = \left( \frac{4p^2 + q^2 - 4pqs + 4p^2s^2}{4(p^2 - q)^2} - \frac{u(4p - 2qs + 4ps^2 - qu + 2psu)}{(p^2 - q)(q + 2pu + u^2)} + \frac{u^2(4 + 4s^2 + 4su + u^2)}{(q + 2pu + u^2)^2} \right) AB^2$$

由此知半轴长  $L$  满足方程

$$4L^4(p^2 - q)^3 - L^2(p^2 - q)q(4 + q - 4ps + 4s^2) - q^2 = 0$$

以有理重心坐标表示的圆锥曲线的求解亦是同样的, 这里叙述两个较为重要的结论.

**命题 6.9.3** 对于由 (6.3.3) 所表示的  $\triangle ABC$  外接圆锥曲线, 记

$$\begin{cases} \Delta = 1 + p^2 + q^2 - 2p - 2q - 2pq \\ S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ K = p(b^2 + c^2 - a^2) + q(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) \end{cases}$$

则圆锥曲线的半轴长  $L$  满足方程:

$$\Delta^3 L^4 - 2pqK\Delta L^2 - 16p^2q^2S^2 = 0 \quad (6.9.2)$$

例如, 对于  $\triangle ABC$  的最小面积外接椭圆,  $p = q = 1$ , 其半轴长为

$$L = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}}$$

**命题 6.9.4** 对于由 (6.4.9) 所表示的  $\triangle ABC$  内切圆锥曲线, 记

$$\begin{cases} \Delta = 1 + \mu + \lambda\mu \\ K = (1 + \lambda)^2\mu^2(b^2 + c^2 - a^2) + (1 + \mu)^2(c^2 + a^2 - b^2) + (1 + \lambda\mu)^2(a^2 + b^2 - c^2) \\ S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \end{cases}$$

则圆锥曲线的半轴长  $L$  满足方程:

$$8\Delta^3L^4 - K\Delta L^2 + 8\lambda\mu^2S^2 = 0 \quad (6.9.3)$$

例如, 对于  $\triangle ABC$  的最大面积内切椭圆,  $\lambda = \mu = 1$ , 其半轴长为

$$L = \frac{1}{6}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 \pm 2\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2}}$$

对于一般圆锥曲线的直角坐标方程 (6.0.1), 前面我们已经得到了中心  $O$  的表示 (6.9.1), 构造拉格朗日函数

$$J = \left(x - \frac{cd - be}{b^2 - ac}\right)^2 + \left(y - \frac{ae - bd}{b^2 - ac}\right)^2 - \lambda(ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f)$$

即可求得半轴长  $L$  所满足的方程, 从而得命题如下:

**命题 6.9.5** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 记<sup>①</sup>

$$\Delta = b^2 - ac, \quad K = ae^2 + b^2f + cd^2 - 2bde - acf$$

则圆锥曲线的半轴长  $L$  满足方程:

$$\Delta^3L^4 - (a+c)K\Delta L^2 - K^2 = 0 \quad (6.9.4)$$

**注记 6.9.6** 如果圆锥曲线是双曲线, 例如对于  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 则由 (6.9.4) 所得方程  $(L^2 - a^2)(L^2 + b^2) = 0$  的四个解中, 有两个解是虚数  $L = \pm bi$ , 其模长正是双曲线的虚半轴长.

<sup>①</sup> 后面关于 (6.0.1) 的特征计算中,  $\Delta$  和  $K$  的定义均与此相同. 事实上, 这两者是二次曲线的不变量

$$\Delta = - \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad K = - \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

**6.9.3 面积** 对于有理表示的椭圆, 直接利用格林面积公式计算是方便的. 而对于 (6.0.1), 根据半轴长所满足的方程 (6.9.4), 立即得到

$$S = \pi \frac{|K|}{\sqrt{-\Delta^3}} \quad (6.9.5)$$

**6.9.4 离心率** 离心率的求解可以根据半轴长的方程得到.

**命题 6.9.7** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 离心率  $\epsilon$  满足方程:

$$\Delta\epsilon^4 + ((a+c)^2 + 4\Delta)(1 - \epsilon^2) = 0 \quad (6.9.6)$$

其显式的表示则为

$$\epsilon^2 = \begin{cases} \frac{2\sqrt{(a+c)^2 + 4\Delta}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4\Delta} + a + c}, & \text{如果 } K \geq 0 \\ \frac{2\sqrt{(a+c)^2 + 4\Delta}}{\sqrt{(a+c)^2 + 4\Delta} - a - c}, & \text{如果 } K < 0 \end{cases} \quad (6.9.7)$$

**6.9.5 端点** 在 Marden 定理一节中, 我们用有理表示的方式导出了焦点的方程, 其主要思想是: 对于一个几何对象, 欲求它的某个特征, 若能找到一个含有该特征表示, 则可以通过寻求表示之间的转换关系而求出该特征. 下面我们对一般圆锥曲线的直角坐标方程  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$  的端点进行求解.

根据 (6.6.2), 曲线上的任意点  $P(= x + yi)$  可表示为

$$\vec{OP} = \frac{k - u^2 + 2iu}{k + u^2} \vec{OT}$$

因而

$$P = \frac{(cd - be) + i(ae - bd)}{b^2 - ac} + \frac{k - u^2 + 2iu}{k + u^2} \left( T - \frac{(cd - be) + i(ae - bd)}{b^2 - ac} \right)$$

设  $T$  的共轭点为  $Q$ , 对上式分离实部和虚部, 则得到

$$\begin{cases} x = \frac{(b^2 - ac)T(k + 2iu - u^2) + (b^2 - ac)Q(k - 2iu - u^2) - 4u(bd - ae - cdu + beu)}{2(b^2 - ac)(k + u^2)} \\ y = \frac{(b^2 - ac)T(2u + iu^2 - ik) + (b^2 - ac)Q(2u - iu^2 + ik) - 4u(cd - be + bdu - aeu)}{2(b^2 - ac)(k + u^2)} \end{cases}$$

代入圆锥曲线的直角坐标方程, 将得到关于  $u$  的一个四次多项式方程 (项数较多, 故不列出). 因  $u$  是可以任意取值的, 所以多项式的各项系数为 0, 于是得到关于  $k, T, Q$  的一个方程组, 消元  $k, Q$  即得关于  $T$  的方程.

**命题 6.9.8** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 端点  $T$  满足方程:

$$(a - 2ib - c)\Delta^3(T - O)^4 + ((a + c)^2 + 4\Delta)K\Delta(T - O)^2 + (a + 2ib - c)K^2 = 0 \quad (6.9.8)$$

这个式子虽然是在假定圆锥曲线有中心的情况下推导出来的, 但它实际上对于抛物线也同样适用. 事实上, 我们只需选取抛物线的一个有理表示 (例如 6.7.8), 类似推导即知.

**推论 6.9.9** 若  $b^2 = ac$ , 则端点为

$$T = \frac{(bd + ce)(2ae - bd + ce - iad - 2icd + ibe)}{2(a + c)^2(cd - be)} + \frac{(ib - c)f}{2(cd - be)} \quad (6.9.9)$$

**注记 6.9.10** 若曲线是双曲线, 由 (6.9.8) 所得到的两个虚端点与实端点是位于同一直线上的, 这与现行教材中定义的虚端点并不一致.

**6.9.6 焦点** 在介绍 Marden 定理一节, 我们已对有理表示形式的圆锥曲线的焦点做了求解, 这里再给出直角坐标方程表示的圆锥曲线的焦点. 同端点方程的导出类似, 根据 (6.7.7) 即可导出如下命题.

**命题 6.9.11** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 焦点  $z$  是下述方程的根:

$$\Delta^2(z - O)^2 + (a + 2ib - c)K = 0 \quad (6.9.10)$$

**推论 6.9.12** 若  $b^2 = ac$ , 则焦点为

$$z = -\frac{(ib + c)(d + ie)^2}{2(a + c)(cd - be)} + \frac{(ib - c)f}{2(cd - be)} \quad (6.9.11)$$

**6.9.7 对称轴** 除圆外, 中心圆锥曲线的对称轴是经过曲线中心的两条相互垂直的直线, 其中一条经过两焦点. 由此, 根据曲线中心的表示和焦点所满足的方程, 即可方便地导出曲线的对称轴表示.

**命题 6.9.13** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 记  $x_O = \frac{cd - be}{b^2 - ac}$ ,  $y_O = \frac{ae - bd}{b^2 - ac}$  分别表示中心  $O$  的横坐标和纵坐标, 则曲线的对称轴方程是:

$$b(x - x_O)^2 + (c - a)(x - x_O)(y - y_O) - b(y - y_O)^2 = 0 \quad (6.9.12)$$

**推论 6.9.14** 若  $b^2 = ac$ , 则对称轴方程是

$$(a+c)(ax+by) + ad + be = 0 \quad (6.9.13)$$

**6.9.8 渐近线** 双曲线存在两条过曲线中心的渐近线, 对于有理表示的双曲线, 其渐近线容易根据极限情形时的比例关系得到. 例如由 (6.3.3) 所表示的  $\triangle ABC$  外接圆锥曲线

$$P = \frac{p(1-u)A + quB - u(1-u)C}{p(1-u) + qu - u(1-u)}$$

若  $p^2 - 2pq + q^2 - 2p - 2q + 1 > 0$ , 则当  $u$  趋于  $p(1-u) + qu - u(1-u) = 0$  的两根  $u_k (k=1, 2)$  时, 点趋于无穷, 此时渐近线的方向为

$$\mathbf{v}_k = \lim_{u \rightarrow u_k} (u - u_k)P = \frac{p(1-u_k)A + qu_k B - u_k(1-u_k)C}{2u_k - 1 - p + q}$$

于是  $O + t\mathbf{v}_k$  ( $O$  为曲线中心) 即为曲线的渐近线.

**例 6.9.15** 对于  $\triangle ABC$  的一条外接双曲线

$$P = \frac{2(1-u)A + 2uB + (1-u)uC}{2+u-u^2}$$

它的中心是  $O = \frac{1}{9}(2A + 2B + 5C)$ , 两个渐近线方向分别是

$$\mathbf{v}_1 = \lim_{u \rightarrow 2} (u-2) \frac{2(1-u)A + 2uB + (1-u)uC}{2+u-u^2} = \frac{2}{3}(A - 2B + C)$$

$$\mathbf{v}_2 = \lim_{u \rightarrow -1} (u+1) \frac{2(1-u)A + 2uB + (1-u)uC}{2+u-u^2} = \frac{2}{3}(2A - B - C)$$

两条渐近线则为

$$O + t\mathbf{v}_1 = \frac{2(1+3t)A + 2(1-6t)B + (5+6t)C}{9}$$

$$O + t\mathbf{v}_2 = \frac{2(1+6t)A + 2(1-3t)B + (5-6t)C}{9}$$

对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ , 上述方法也是适用的. 不过更简单的做法是直接对方程本身出发: 首先求解出  $y$

$$y = \frac{-e + bx \pm \sqrt{(b^2 - ac)x^2 - 2(cd - be)x + e^2 - cf}}{c}$$

若要使得上述表示为直线, 则应使得根式可开方为  $mx + n$  的形式, 因而根式内关于  $x$  的二次多项式的判别式应为 0.

$$4c(cd^2 - 2bde + ae^2 + b^2f - acf) = 0$$

解出  $f$  即得渐近线方程

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + \frac{2bde - ae^2 - cd^2}{b^2 - ac} = 0$$

以上我们并没有严格进行讨论, 读者可自行补全.

**命题 6.9.16** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 其渐近线方程是:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + \frac{2bde - ae^2 - cd^2}{\Delta} = 0 \quad (6.9.14)$$

**6.9.9 准线** 在 (6.7.2), 我们叙述了准线的一个性质: 焦点对应的准线是也是它的极线. 根据 (6.2.9) 即有

**命题 6.9.17** 对于由 (6.0.1) 所表示的圆锥曲线, 若焦点  $z = m + ni$ , 则对应的准线方程是

$$amx + b(nx + my) + cny + d(m + x) + e(n + y) + f = 0 \quad (6.9.15)$$

**推论 6.9.18** 若  $b^2 = ac$ , 则准线方程是

$$2(cd - be)x - 2(bd - ae)y + af + cf - d^2 - e^2 = 0 \quad (6.9.16)$$

**例 6.9.19** 给定平面上的椭圆  $3x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 12y + 7 = 0$ , 求它的各特征量.

**解** 与  $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$  对比, 知

$$a = 3, \quad b = 2, \quad c = 5, \quad d = -4, \quad e = -6, \quad f = 7$$

令

$$\Delta = b^2 - ac = -11, \quad K = ae^2 + b^2f + cd^2 - 2bde - acf = 15$$

则由 (6.9.1) 得到中心

$$O = \frac{8}{11} + \frac{10}{11}i$$

由 (6.9.4) 得到半轴长的方程  $-225 + 1320L^2 - 1331L^4 = 0$ , 解出

$$L = \frac{1}{11} \sqrt{15(4 \pm \sqrt{5})}$$

由 (6.9.5) 得到椭圆的面积

$$S = \frac{15\pi}{11\sqrt{11}}$$

由 (6.9.7) 得到离心率

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2}{11}(4\sqrt{5}-5)}$$

由 (6.9.8) 得到端点的方程

$$(2662 + 5324i)\left(T - \frac{8}{11} - \frac{10}{11}i\right)^4 - 3300\left(T - \frac{8}{11} - \frac{10}{11}i\right)^2 + (-450 + 900i) = 0$$

解出

$$T = \frac{1}{11} \left( (8 + 10i) \pm \sqrt{(3 - 6i)(5 \pm 4\sqrt{5})} \right)$$

由 (6.9.10) 得到焦点的方程

$$121\left(z - \frac{8}{11} - \frac{10}{11}i\right)^2 - 30 + 60i = 0$$

解出

$$z = \frac{1}{11} (8 + 10i \pm \sqrt{30 - 60i})$$

由 (6.9.12) 得到对称轴的方程

$$4 - 26x + 11x^2 + 12y + 11xy - 11y^2 = 0$$

由 (6.9.15) 得到准线的方程

$$\sqrt{-285 + 195\sqrt{5}x} - \sqrt{-915 + 435\sqrt{5}y} - 2\sqrt{-435 + 195\sqrt{5}} \pm 15 = 0 \quad \square$$

**例 6.9.20** 求四边形  $ABCD$  外接圆锥曲线的最小离心率.

**解** 我们希望的是以四边形的特征量表示其最小离心率, 因而考虑 (4.1.1) 的表示

$$\vec{BA} = \lambda b \vec{BC}, \quad \vec{BD} = \frac{b(a^2b - a^2bc^2 + \lambda - a^2\lambda)}{1 - a^2b^2c^2} \vec{BC}$$

其中  $\lambda = \frac{AB}{BC}$ ,  $a = e^{iA}$ ,  $b = e^{iB}$ ,  $c = e^{iC}$ . 则由 (6.3.7) 知其外接圆锥曲线可表示为:

$$\vec{BP} = \frac{b^2(1-c^2)(1+c)s(1-u)\lambda(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda) - (1-a^2)b(1-u)u\lambda(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)}{s(1-a^2b^2-b\lambda+a^2b\lambda)(b-bc^2-u\lambda+b^2c^2u\lambda) - u(b-bc^2-\lambda+b^2c^2\lambda)(1-a^2b^2-bu\lambda+a^2bu\lambda)} \vec{BA}$$

若将其写为  $\vec{BP} = (x + yi)\vec{BC}$  的形式, 则  $x, y$  满足二次方程

$$s(x - b^2x + iy + ib^2y)(1 - c^2 - x + c^2x + iy + ic^2y)\lambda(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda) \\ + 2iy(x - a^2b^2x + iy + ia^2b^2y - b\lambda + a^2b\lambda)(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda) = 0$$

从而可直接利用 (6.9.6) 的结论, 得到离心率  $\epsilon$  关于参数  $s$  的表示:

$$\frac{\epsilon^4}{1 - \epsilon^2} = \frac{\left[ \frac{16b^2c^2s^2\lambda^2(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)^2 + 16a^2b^2(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)^2}{+ 16b^2(1 + a^2c^2)s\lambda(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)} \right]}{\left[ \frac{(1 - bc)^2(1 + bc)^2s^2\lambda^2(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)^2 + (1 - ab)^2(1 + ab)^2(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)^2}{+ 2(1 - 2b^2 + a^2b^2 + b^2c^2 - 2a^2b^2c^2 + a^2b^4c^2)s\lambda(1 - a^2b^2 - b\lambda + a^2b\lambda)(b - bc^2 - \lambda + b^2c^2\lambda)} \right]}$$

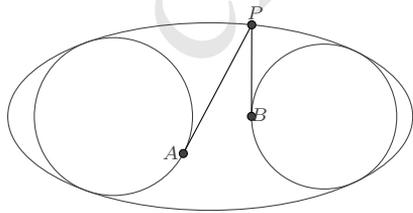
由此知  $\epsilon$  的极值为

$$\frac{\epsilon^4}{1 - \epsilon^2} = \frac{4b^2(1 - a^2c^2)^2}{(1 - a^2)(1 - b^2)(1 - c^2)(1 - a^2b^2c^2)} = \frac{\sin^2(A + C)}{\sin A \sin B \sin C \sin D} \quad \square$$

## 6.10 综合性命题

前面我们已从多个角度出发探讨了圆锥曲线的有理表示并给出了有关示例, 然而还存在着一些命题, 它们涉及到圆锥曲线的多种性质, 我们有必要单独用一节来进行阐述, 读者亦可由此深化对圆锥曲线丰富性质的认识.

**例 6.10.1 (图说几何 11.4)** 在给定的椭圆  $\Gamma$  内, 有两个相离的圆分别与椭圆相切于两点, 设  $P$  是椭圆上位于这两圆切点之间的任意点, 由  $P$  点分别向两圆作切线, 则切线段的长度之和为定值.



**证明** 设椭圆  $\Gamma$  的一个焦点为  $F$ , 一个端点为  $T$ , 则椭圆上的任意点  $P$  有表示

$$\vec{FP} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + qu^2} \vec{FT}$$

若圆与椭圆分别相切于两点,不妨记为  $X, Y$

$$\vec{FX} = \frac{(1+ia)^2}{1+qa^2} \vec{FT}, \quad \vec{FY} = \frac{(1+ib)^2}{1+qb^2} \vec{FT}$$

由 (??), 该圆可设为

$$Q = X + (Y - X) \frac{1+is}{1-iv}$$

根据圆与椭圆在切点  $X$  处的切向量方向一致, 得到

$$s = \frac{2+a^2+ab+a^2q^2+abq^2+2a^3bq^2}{(b-a)(1+q)(1+a^2q)}$$

又根据圆与椭圆在切点  $Y$  处的切向量方向一致, 得到

$$(a-b)(a+b)(1-abq) = 0$$

上述方程有两个有效解,  $b = -a$  和  $b = \frac{1}{aq}$ , 分别对应的是圆在椭圆内部的情形和圆在椭圆外部的情形. 由此, 我们设一个圆的表示是:

$$\vec{FQ} = \left( \frac{(1+ia)^2}{1+qa^2} - \frac{4(1+ia)(1+iga)}{(1+q)(1+qa^2)(1-it)} \right) \vec{FT}$$

另一个圆的表示是:

$$\vec{FQ} = \left( \frac{(1+ic)^2}{1+qc^2} - \frac{4(1+ic)(1+iqc)}{(1+q)(1+qc^2)(1-it)} \right) \vec{FT}$$

则  $P$  点向两圆所作的切线之长分别是:

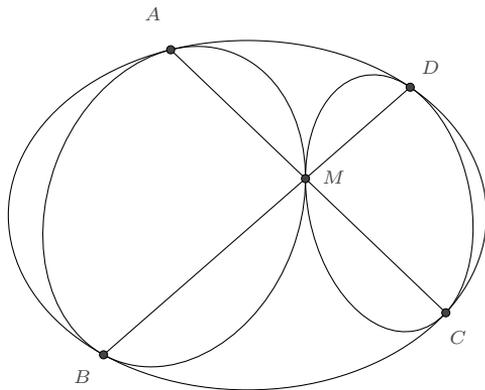
$$PA = \left| \frac{(1-q)(a-u)(a+u)}{(1+qa^2)(1+qu^2)} \right| \vec{FT} \quad \text{和} \quad PB = \left| \frac{(1-q)(c-u)(c+u)}{(1+qc^2)(1+qu^2)} \right| \vec{FT}$$

当  $P$  位于两圆切点之间时,  $\min\{|a|, |c|\} < |u| < \max\{|a|, |c|\}$ , 于是

$$PA + PB = \left| \frac{(1-q)(a-c)(a+c)}{(1+qa^2)(1+qc^2)} \right| \vec{FT}$$

表示与参数  $u$  无关, 因而是一个定值.  $\square$

**例 6.10.2 (图说几何 11.1.32)** 给定圆锥曲线  $\Gamma$ , 若另外两条圆锥曲线  $\Omega_1, \Omega_2$  分别与之相切于两点, 且  $\Omega_1, \Omega_2$  又相切于另一点  $M$ . 若  $\Omega_1$  与  $\Gamma$  的一个切点与  $M$  的连线经过  $\Omega_2$  与  $\Gamma$  的一个切点, 则  $\Omega_1$  与  $\Gamma$  的另一个切点与  $M$  的连线也经过  $\Omega_2$  与  $\Gamma$  的另一个切点.



**证明** 设  $\Gamma$  上四点的表示分别是

$$\vec{FA} = \frac{(1+ia)^2}{1+sa^2} \vec{FT}, \quad \vec{FB} = \frac{(1+ib)^2}{1+sb^2} \vec{FT}, \quad \vec{FC} = \frac{(1+ic)^2}{1+sc^2} \vec{FT}, \quad \vec{FD} = \frac{(1+id)^2}{1+sd^2} \vec{FT}$$

根据 (6.4.7),  $\Omega_1$  上的任意点  $Z$  (设为  $\vec{FZ} = (x+yi) \vec{FT}$ ) 有表示

$$p(2+2ab-2x+2absx-ay-by-asy-bsy)^2 - (1+a^2-x+a^2sx-ay-asy)(1+b^2-x+b^2sx-by-bsy) = 0$$

$\Omega_2$  上的任意点  $Z$  有表示

$$q(2+2cd-2x+2cdsx-cy-dy-csy-dsy)^2 - (1+c^2-x+c^2sx-cy-csy)(1+d^2-x+d^2sx-dy-dsy) = 0$$

$\Omega_1$  与  $\Omega_2$  的切点  $M$  若在  $AC$  直线上, 设为  $M = \lambda A + (1-\lambda)C$ , 则根据点在曲线上可解出  $p, q$ .

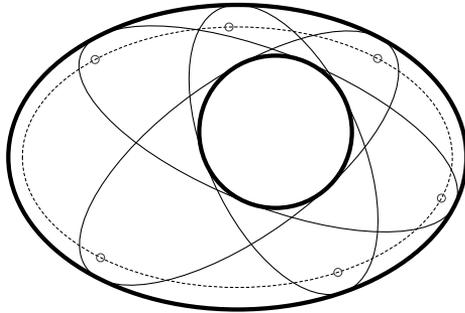
$$\begin{cases} p = \frac{(b-c)^2(1+a^2s) - (c-a)(a-2b+c-ab^2s+2abcs-b^2cs)\lambda}{4(b-c)^2(1+a^2s)(1-\lambda)} \\ q = \frac{(c-d)^2(1+a^2s) - (c-a)(a+c-2d+2acds-ad^2s-cd^2s)\lambda}{4(a-d)^2(1+c^2s)\lambda} \end{cases}$$

根据两圆锥曲线在  $M$  点处相切, 又得

$$\lambda = \frac{(b-c)(c-d)(1+a^2s)}{(a-c)(a-b+c-d+abcs-abds+acds-bcds)}$$

由此, 计算即知  $B$ 、 $D$ 、 $M$  三点共线.  $\square$

**例 6.10.3 (图说几何 11.50)** 给定椭圆  $\Gamma$  及其内部的一圆  $\Omega$ , 存在无数个这样的椭圆: 它们与椭圆  $\Gamma$  相切于两点, 同时与圆  $\Omega$  相切于两点, 并且这些椭圆的焦点的轨迹是一条与  $\Gamma$  共焦的椭圆.



**证明** 一般情形的证明较为繁琐, 我们以一个简单示例说明即可.

若给定外椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$  及内圆  $\Omega: x^2 + y^2 = 1$ , 先求满足条件的椭圆族的表示. 设外椭圆  $\Gamma$  上的两切点为:

$$A = 3\frac{1-a^2}{1+a^2} + 2\frac{2a}{1+a^2}i, \quad B = 3\frac{1-b^2}{1+b^2} + 2\frac{2b}{1+b^2}i$$

则  $A$  处的切线、 $B$  处的切线、以及  $AB$  的连线分别是:

$$\begin{cases} l_1 = 3 + 3a^2 - x + a^2x - 3ay = 0 \\ l_2 = 3 + 3b^2 - x + b^2x - 3by = 0 \\ l_3 = 6 + 6ab - 2x + 2abx - 3ay - 3by = 0 \end{cases}$$

根据命题 (6.4.7) 知, 所求的椭圆应具有如下形式:

$$p(6 + 6ab - 2x + 2abx - 3ay - 3by)^2 - (3 + 3a^2 - x + a^2x - 3ay)(3 + 3b^2 - x + b^2x - 3by) = 0$$

又设内圆  $\Omega$  上的两切点为:

$$C = \frac{1+ic}{1-ic}, \quad D = \frac{1+id}{1-id}$$

同理知, 所求的椭圆也应具有形式:

$$q(1 + cd - x + cdx - cy - dy)^2 - (1 + c^2 - x + c^2x - 2cy)(1 + d^2 - x + d^2x - 2dy) = 0$$

比较二者的各项系数, 可解得

$$b = -\frac{1}{a}, \quad p = \frac{8 + 11a^2 + 8a^4}{4(2 - a^2 + 2a^4)}$$

以及

$$(c, d) = \frac{9a \pm \sqrt{64 - 47a^2 + 64a^4}}{8 - 8a^2}, \quad q = \frac{8 + 11a^2 + 8a^4}{36(2 - a^2 + 2a^4)}$$

满足条件的椭圆曲线族即为

$$4(2 + 23a^2 + 2a^4)x^2 - 144a(1 - a^2)xy + 9(8 - 13a^2 + 8a^4)y^2 - 36(2 - a^2 + 2a^4) = 0$$

其焦点  $z$  满足方程:

$$(8 + 11a^2 + 8a^4)z^2 - (-8 - 9ia + 8a^2)^2 = 0$$

以  $z = x + yi$  代入, 分离实部和虚部后, 消去参数  $a$  即得焦点的轨迹方程, 为

$$3x^2 + 8y^2 = 24$$

它是与外椭圆共焦的.

对于一般的情形, 可设外椭圆  $\Gamma$  的表示为

$$\vec{FP} = \frac{(1 + iu)^2}{1 + su^2} \vec{FT}$$

其中  $F$ 、 $T$  分别是其焦点和焦点所在轴上的一个端点. 内圆  $\Omega$  的表示为

$$\vec{FP} = (m + ni + r \frac{1 + iu}{1 - iu}) \vec{FT}$$

比较方程系数的方法事实上不太有效, 它会导致过于繁重的计算. 如果我们再充分利用所求椭圆焦点的轨迹为与  $\Gamma$  共焦这一特性, 则可以较为轻松地求解:

设与  $\Gamma$  和  $\Omega$  均相切于两点的椭圆的两个焦点  $Z_1$ 、 $Z_2$  分别是

$$\vec{FZ}_1 = \frac{(1 + iu)^2}{1 + ku^2} \frac{k(1 - s)}{(1 - k)s} \vec{FT}, \quad \vec{FZ}_2 = \frac{(1 + iv)^2}{1 + kv^2} \frac{k(1 - s)}{(1 - k)s} \vec{FT}$$

根据椭圆焦点的关系则可导出,  $k$  是如下方程的根:

$$k(1 - k)^2(1 + k)^2 r^2(1 - s)^2 s^2 + (k - s)(1 - ks)(4k^2 - 8k^2 s - 4kms + 8k^2 ms - 4k^3 ms + 4k^2 s^2 + 4kms^2 - 8k^2 ms^2 + 4k^3 ms^2 - 4km^2 s^2 + 8k^2 m^2 s^2 - 4k^3 m^2 s^2 - n^2 s^2 + 2k^2 n^2 s^2 - k^4 n^2 s^2) = 0$$

$u, v$  的关系是:

$$(1 - k^2)ns(u + v) - 2k(1 - s + ms - kms)uv - 2(k - ks - ms + kms) = 0$$

在外椭圆  $\Gamma$  上的切点 (记为  $X$ ) 的表示是:

$$\vec{FX} = \frac{(1 + it)^2}{1 + st^2} \vec{FT}$$

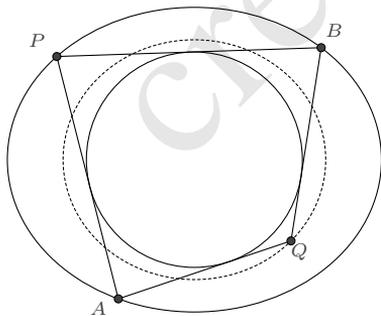
其中  $t$  是如下方程的两根

$$s(1 - ks - k^2uv + ksuvt)^2 - k(1 - s^2)(u + v)t - k + s + kuv - k^2suw = 0 \quad \square$$

## 6.11 彭赛列闭合定理

**6.11.1 彭赛列多边形** 在所有的初等几何命题中, 最为引人入胜的当属彭赛列闭合定理, 它揭示了圆锥曲线的一种特殊结构. 本节我们将用有理参数表示的方法来处理这个伟大的命题, 先从一个点的轨迹问题开始.

**例 6.11.1** 如图,  $P$  是椭圆  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$  上的一个动点, 过点  $P$  作单位圆  $x^2 + y^2 = 1$  的两条切线分别与椭圆交于  $A, B$  两点, 再过  $A, B$  分别作单位圆的另一条切线  $AQ$  和  $BQ$ ,  $Q$  是这两条切线的交点. 求点  $Q$  的轨迹.



**解** 利用单位圆的参数表示:

$$z(u) = \frac{1 + iu}{1 - iu} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} + \frac{2u}{1 + u^2}i$$

根据 §6.2 节的讨论, 我们知道, 由这个二阶有理表示诱导出单位圆外的任意点有表示:

$$z(u, v) = \frac{1 - uv}{1 + uv} + \frac{u + v}{1 + uv} i$$

若点在外椭圆上, 将该表示代入外椭圆的方程则得:

$$f(u, v) = 4 - 3u^2 + 10uv - 3v^2 + 4u^2v^2 = 0$$

设  $P = z(p, q)$ , 则由  $P$  向单位圆所引切线的两个切点分别为  $z(p)$ ,  $z(q)$ , 因而又可令  $A = z(p, a)$ ,  $B = z(b, q)$ , 由  $A$ 、 $B$  向单位圆所作切线的交点  $Q$  则是  $Q = z(a, b)$ . 将  $P$ ,  $A$ ,  $B$  在外椭圆上的条件方程逐一列出:

$$\begin{cases} f(p, q) = 4 - 3p^2 + 10pq - 3q^2 + 4p^2q^2 = 0 \\ f(p, a) = 4 - 3p^2 + 10pa - 3a^2 + 4p^2a^2 = 0 \\ f(b, q) = 4 - 3b^2 + 10bq - 3q^2 + 4b^2q^2 = 0 \end{cases}$$

消去参数  $p, q$  后得到:

$$(4 - 3a^2 + 10ab - 3b^2 + 4a^2b^2)(2896804 - 7216803a^2 + 15552970ab - 7216803b^2 + 2896804a^2b^2) = 0$$

左方第一个因式是不等于 0 的, 否则  $q = b$ , 即  $B$  点在单位圆上, 因而排除. 第二个因式是关于  $a, b$  的对称式, 可改写为:

$$2896804 + 29986576ab + 2896804a^2b^2 - 7216803(a + b)^2 = 0$$

再联合

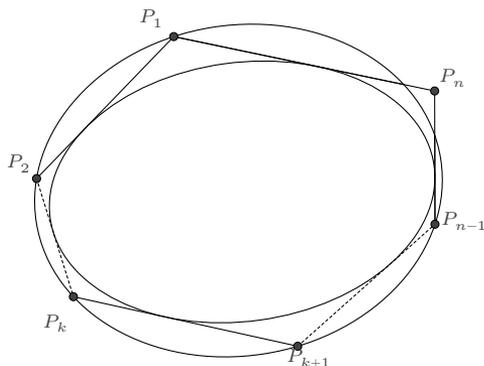
$$x = \frac{1 - ab}{1 + ab}, \quad y = \frac{a + b}{1 + ab}$$

将其转化为直角坐标系下的方程则是

$$\frac{2209x^2}{3267} + \frac{2209y^2}{2738} = 1$$

□

一般地, 若一个  $n$  边形, 它的各边均与一条圆锥曲线  $\Gamma$  相切, 并且至少有  $n - 1$  个顶点在另一条圆锥曲线  $\Omega$  上, 则称其为**彭赛列  $n$  边形**; 如果所有顶点均在  $\Omega$  上, 则称为**彭赛列闭合  $n$  边形**.



### 6.11.2 闭合性质及条件

**命题 6.11.2 (彭赛列闭合定理)** 对于平面上给定的两条圆锥曲线, 若它们之间存在一个彭赛列闭合  $n$  边形, 则存在无数个彭赛列闭合  $n$  边形.

前面示例所介绍的方法适用于  $n$  较小时的情形, 为了证明它对任意的  $n$  均是适用的, 我们还需要利用如下定理.

**引理 6.11.3 (Euler-Trudi 定理)** <sup>①</sup> 如果  $u, v$  满足双纽线方程:

$$A(uv)^2 + 2B(uv)(u+v) + C(u+v)^2 + 2D(u+v) + 2E(uv) + F = 0 \quad (6.11.1)$$

则有微分关系式:

$$\frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon}} = \frac{dv}{\sqrt{\alpha v^4 + \beta v^3 + \gamma v^2 + \delta v + \varepsilon}}$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 4\alpha(K + \gamma) - \beta^2 \\ B = 2\alpha\delta + K\beta \\ C = 4\alpha\varepsilon - K^2 \\ D = 2\beta\varepsilon + \delta K \\ E = \beta\delta + 2(K + \gamma)K \\ F = 4\varepsilon(K + \gamma) - \delta^2 \end{array} \right. \quad (6.11.2)$$

反之亦然.

<sup>①</sup>见《Poncelet's porism: a long story of renewed discoveries, I》(作者: Andrea Del Centina1) 第 47-49 页

下面我们来完成彭赛列闭合定理的证明.

**证明** 先导出外圆锥曲线上的点向内圆锥曲线引两条切线的切点之间的关系式. 设内圆锥曲线的一个有理参数表示是

$$x = \frac{a_1 u^2 + 2b_1 u + c_1}{a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3}, \quad y = \frac{a_2 u^2 + 2b_2 u + c_2}{a_3 u^2 + 2b_3 u + c_3}$$

则其诱导出内圆锥曲线外的任意一点  $P$  均可表示为:

$$x = \frac{a_1 uv + b_1(u+v) + c_1}{a_3 uv + b_3(u+v) + c_3}, \quad y = \frac{a_2 uv + b_2(u+v) + c_2}{a_3 uv + b_3(u+v) + c_3}$$

式中  $u, v$  是点  $P$  向内圆锥曲线所引切线的切点对应的参数值. 将其代入外圆锥曲线的方程, 即知  $u, v$  应满足一个形如

$$A(uv)^2 + 2B(uv)(u+v) + C(u+v)^2 + 2D(u+v) + 2E(uv) + F = 0$$

的方程.

对于这两条圆锥曲线的任意彭赛列  $n$  边形  $P_1 P_2 \dots P_n$ , 设  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  始终在外圆锥曲线上, 并记与  $P_1$  相关的两边在内圆锥曲线上的切点参数是  $u_1$  和  $u_2$ , 与  $P_2$  相关的两边在内圆锥曲线上的切点参数是  $u_2$  和  $u_3, \dots$ , 与  $P_{n-1}$  相关的两边在内圆锥曲线上的切点参数是  $u_{n-1}$  和  $u_n$ . 则根据 Euler-Trudi 定理知, 这些参数之间满足微分关系链:

$$\frac{du_1}{\sqrt{\alpha u_1^4 + \beta u_1^3 + \gamma u_1^2 + \delta u_1 + \varepsilon}} = \frac{du_2}{\sqrt{\alpha u_2^4 + \beta u_2^3 + \gamma u_2^2 + \delta u_2 + \varepsilon}} = \dots = \frac{du_n}{\sqrt{\alpha u_n^4 + \beta u_n^3 + \gamma u_n^2 + \delta u_n + \varepsilon}}$$

由此知  $u_1$  与  $u_n$  之间存在关系

$$A'(u_1 u_n)^2 + 2B'(u_1 u_n)(u_1 + u_n) + C'(u_1 + u_n)^2 + 2D'(u_1 + u_n) + 2E'(u_1 u_n) + F' = 0$$

这里系数  $A', B', C', D', E', F'$  的表示, 与前面系数  $A, B, C, D, E, F$  的表示, 仅可能存在  $K$  值的不同. 结合  $P_n$  点的表示

$$x_n = \frac{a_1 u_1 u_n + b_1(u_1 + u_n) + c_1}{a_3 u_1 u_n + b_3(u_1 + u_n) + c_3}, \quad y_n = \frac{a_2 u_1 u_n + b_2(u_1 + u_n) + c_2}{a_3 u_1 u_n + b_3(u_1 + u_n) + c_3}$$

消元  $u_1, u_n$  后立即可知  $x_n, y_n$  满足一个圆锥曲线方程. 它与外圆锥曲线之间的差异, 由  $K$  值完全决定. 如果在某一时刻, 点  $P_n$  在外圆锥曲线上, 那么二者的  $K$  值就是相同的. 从而可知, 在任意时刻, 无论  $P_1$  点在外圆锥曲线上如何运动,  $P_n$  点也将始终保持在圆锥曲线上, 这就证明了彭赛列闭合定理.  $\square$

上述证明过程中,注意到对于任意的  $1 \leq k \neq j \leq n$ , 均有

$$\frac{du_k}{\sqrt{\alpha u_k^4 + \beta u_k^3 + \gamma u_k^2 + \delta u_k + \varepsilon}} = \frac{du_j}{\sqrt{\alpha u_j^4 + \beta u_j^3 + \gamma u_j^2 + \delta u_j + \varepsilon}}$$

这表明彭赛列多边形任意两边 (或延长线) 的交点

$$x = \frac{a_1 u_k u_j + b_1 (u_k + u_j) + c_1}{a_3 u_k u_j + b_3 (u_k + u_j) + c_3}, \quad y = \frac{a_2 u_k u_j + b_2 (u_k + u_j) + c_1}{a_3 u_k u_j + b_3 (u_k + u_j) + c_3}$$

的轨迹也是一条圆锥曲线.

**命题 6.11.4 (广义彭赛列定理)** 对于平面上给定的两条圆锥曲线, 当其彭赛列多边形的一个顶点在外圆锥曲线上作连续运动时, 任意两边 (或延长线) 的交点轨迹也是一条圆锥曲线.

现在我们来重新求解前面交点的轨迹问题 (6.11.1).

**解** 由内圆的一个参数表示诱导而得圆外任意点的一个表示

$$z(u, v) = \frac{1 - uv}{1 + uv} + \frac{u + v}{1 + uv} i$$

将其代入外椭圆方程后得到  $u, v$  的关系:

$$4 - 3u^2 + 10uv - 3v^2 + 4u^2v^2 = 0$$

改写为对称的形式

$$4u^2v^2 - 3(u + v)^2 + 16uv + 4 = 0$$

后, 与标准形式 (6.11.1) 对比即知:

$$A = 4, \quad B = 0, \quad C = -3, \quad D = 8, \quad E = 0, \quad F = 4$$

根据 (6.11.2) 解出 (取其中一组解即可):

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad K = 2$$

若令  $Q = z(u, v)$ , 则由彭赛列闭合定理的证明过程知应有

$$A'(uv)^2 + 2B'(uv)(u + v) + C'(u + v)^2 + 2D'(u + v) + 2E'(uv) + F' = 0$$

其中新系数的表示,与前面系数  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$  的表示,仅可能存在  $K$  值的不同:

$$A' = 2K, \quad B' = 0, \quad C' = 1 - K^2, \quad D' = 0, \quad E' = 2K^2, \quad F' = 2K$$

即

$$2K(uv)^2 + (1 - K^2)(u + v)^2 + 4K^2(uv) + 2K = 0$$

现在我们任取一点作为初始点来确定常数  $K$  即可. 令  $u_0 = 0$ , 根据递推关系:

$$4 - 3u_k + 10u_k u_{k+1} - 3u_{k+1}^2 + 4u_k^2 u_{k+1}^2 = 0$$

计算出前 4 个值:

$$u_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \frac{20\sqrt{3}}{7}, \quad u_3 = \frac{1702}{1551\sqrt{3}}$$

此时  $Q$  点的表示为  $z(u_0, u_3)$ , 从而可确定出  $K = \frac{2738}{529}$ <sup>①</sup>. 再联合

$$x = \frac{1 - uv}{1 + uv}, \quad y = \frac{u + v}{1 + uv}$$

将其转化为直角坐标系下的轨迹方程则是

$$\frac{2209x^2}{3267} + \frac{2209y^2}{2738} = 1$$

□

对于两条圆锥曲线的彭赛列闭合  $n$  边形, 注意到它在各切点处的参数  $u_k$  所满足的微分式是相等的, 考察点从一个切点沿内圆锥曲线绕行至另一个切点的线段积分情况, 则有

**命题 6.11.5** 彭赛列闭合  $n$  边形在内圆锥曲线上的切点参数  $u_k$  满足如下积分关系

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon}} = \frac{m}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{\sqrt{\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon}} \quad (6.11.3)$$

其中  $m$  是从多边形上的一点出发, 逆时针沿多边形运动一周后所绕行内圆锥曲线的周数.

上述积分表示在一般情况下是椭圆函数积分, 但某些情况下它可以退化为简单的初等积分. 一个显然的情形是  $\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon = \lambda(u^2 + \zeta u + \eta)^2$ , 此时  $u_k$  存在初等的通项表示.

**例 6.11.6** 若内椭圆  $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$  与外椭圆  $\frac{(x-d)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  之间存在彭赛列闭合  $n$

<sup>①</sup>另一解  $K = -\frac{529}{2738}$  不符合要求.

边形, 且闭合积分条件为

$$\int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{du}{u^2 + \zeta u + \eta} = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + \zeta u + \eta}$$

其中  $\zeta^2 - 4\eta < 0$ , 试求外椭圆的表示.

**解** 由内椭圆的一个参数表示  $z(u) = p \frac{1-u^2}{1+u^2} + q \frac{2u}{1+u^2} i$  诱导而得平面点的表示是

$$z(u, v) = p \frac{1-uv}{1+uv} + q \frac{u+v}{1+uv} i$$

将其代入外椭圆的方程, 化简得到相邻切点的参数关系式

$$\begin{aligned} b^2(a-d-p)(a+d+p)(uv)^2 - a^2q^2(u+v)^2 \\ + 2b^2(a^2-d^2+p^2)uv + b^2(a+d-p)(a-d+p) = 0 \end{aligned}$$

与标准形式 (6.11.1) 对比, 即有:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 4\alpha(K + \gamma) - \beta^2 = b^2(a-d-p)(a+d+p) \\ B = 2\alpha\delta + K\beta = 0 \\ C = 4\alpha\varepsilon - K^2 = -a^2q^2 \\ D = 2\beta\varepsilon + \delta K = 0 \\ E = \beta\delta + 2(K + \gamma)K = b^2(a^2-d^2+p^2) \\ F = 4\varepsilon(K + \gamma) - \delta^2 = b^2(a+d-p)(a-d+p) \end{array} \right.$$

而根据条件式

$$\alpha u^4 + \beta u^3 + \gamma u^2 + \delta u + \varepsilon = \lambda(u^2 + \zeta u + \eta)^2$$

又知

$$\alpha = \lambda, \quad \beta = 2\lambda\zeta, \quad \gamma = \lambda(\zeta^2 + 2\eta), \quad \delta = 2\lambda\zeta\eta, \quad \varepsilon = \lambda\eta^2$$

由以上各式联立, 可解得

$$\lambda = \frac{b^2(a-d-p)(a+d+p)}{4\sqrt{a^2b^2 - b^2d^2 + b^2p^2 - a^2q^2}}, \quad \zeta = 0, \quad \eta = \frac{a^2b^2 - b^2d^2 + b^2p^2 - 2a^2q^2}{b^2(a-d-p)(a+d+p)}$$

并有

$$a^2b^2q^2 + b^2p^2q^2 - b^2d^2q^2 - a^2q^4 - b^4p^2 = 0 \quad \dots\dots(1)$$

另外, 根据彭赛列闭合定理, 我们可以任意选定一个初始点, 不妨取  $u_0 = 0$ , 则由相邻切点的参数关系式解出

$$u_1 = \pm \frac{b}{aq} \sqrt{a^2 - d^2 + 2dp - p^2}$$

再根据闭合条件的积分式, 有

$$\arctan \frac{b\sqrt{a^2 - d^2 + 2dp - p^2}}{aq\sqrt{\eta}} = \frac{\pi}{n}$$

从而又得到

$$\eta = \frac{b^2(a^2 - d^2 + 2dp - p^2)}{a^2q^2} \cot^2 \frac{\pi}{n} = \frac{a^2b^2 - b^2d^2 + b^2p^2 - 2a^2q^2}{b^2(a - d - p)(a + d + p)} \quad \dots\dots(2)$$

(1) 与 (2) 联立即可解出

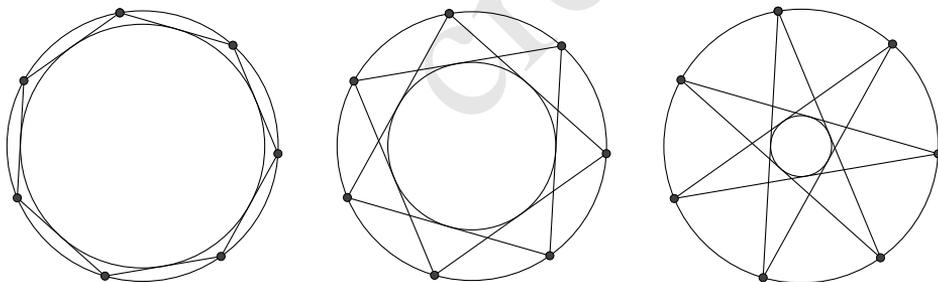
$$a = \frac{b^2p}{q^2} \cos \frac{\pi}{n}, \quad d = \frac{p}{q^2} \sqrt{(b^2 - q^2)(b^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - q^2)}$$

外椭圆的表示则是

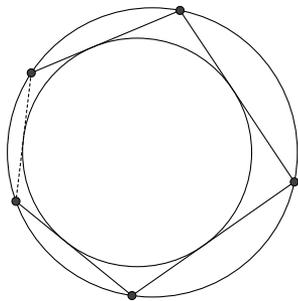
$$\left( q^2x - p\sqrt{(b^2 - q^2)(b^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} - q^2)} \right)^2 + b^2p^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} y^2 = b^4p^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \quad \square$$

(6.11.3) 式实际上也指明了闭合  $n$  边形的所有可能情形: 对于给定的  $n$ , 可能的  $m$  取值有  $1, 2, \dots, [\frac{n-1}{2}]$ , 而当  $m$  是  $n$  的一个不为 1 的因子时, 闭合情形是退化的, 因此所有的非退化情形数为:  $[\frac{n+1-\sum d|n}{2}]$ .

例如: 若两个同心圆之间存在彭赛列闭合 7 边形, 则仅可能有如下三种图形:



**6.11.3 双心多边形** 彭赛列闭合定理的最显著应用, 是寻找两条圆锥曲线的外切-内接  $n$  边形闭合时的条件, 其中之一是双心多边形情形:



若  $n$  边形外切于圆  $x^2 + y^2 = r^2$ , 并内接于圆  $(x - d)^2 + y^2 = R^2$ , 求闭合条件.

**解** 由内圆的一个参数表示  $x = r \frac{1-u^2}{1+u^2}, y = r \frac{2u}{1+u^2}$  诱导而得平面点的表示是

$$x = r \frac{1-uv}{1+uv}, \quad y = r \frac{u+v}{1+uv}$$

将其代入外圆的方程, 得到相邻切点的参数关系式:

$$d^2 - 2dr + r^2 - R^2 + r^2 u^2 + 2d^2 uv - 2R^2 uv + r^2 v^2 + d^2 u^2 v^2 + 2dru^2 v^2 + r^2 u^2 v^2 - R^2 u^2 v^2 = 0$$

可以作代换

$$p = \frac{R+d}{r}, \quad q = \frac{R-d}{r}$$

使之简化为:

$$1 - p + q - pq + u^2 - 2pquv + v^2 + pu^2v^2 - qu^2v^2 - pqu^2v^2 = 0$$

于是内圆上切点的参数  $u_k$  有递推关系:

$$1 - p + q - pq + u_k^2 - 2pqu_k u_{k+1} + u_{k+1}^2 + u_k^2 u_{k+1}^2 + pu_k^2 u_{k+1}^2 - qu_k^2 u_{k+1}^2 - pqu_k^2 u_{k+1}^2 = 0$$

相邻两个递推关系式相减则有

$$u_{k+2} = -u_k + \frac{2pqu_{k+1}}{1 + (1+p)(1-q)u_{k+1}^2}$$

因为结论并不依赖于初值的选取, 我们可以利用图形的对称性减少一半的计算: 取  $u_1 = -u_2 = \sqrt{\frac{q+1}{q-1}}$ , 则双心  $n$  边形的闭合条件是: 若  $n = 2m - 1$ , 则  $u_{m+1} = 0$ ; 若  $n = 2m$ , 则  $u_{m+1} + u_{m+2} = 0$ . 例如:

(1). 若  $n = 3$ , 根据  $u_3 = 0$  得到:  $p + q - pq = 0$ .

(2). 若  $n = 4$ , 根据  $u_3 + u_4 = 0$  得到:  $p^2 + q^2 - p^2q^2 = 0$ .

(3). 若  $n = 5$ , 根据  $u_4 = 0$  得到:  $p^3 + q^3 + p^3q + pq^3 + 2p^2q^2 - p^2q - pq^2 - p^2q^3 - p^3q^2 - p^3q^3 = 0$ .

另外, 若记

$$s = \frac{\sqrt{p-1}}{\sqrt{q+1}}, \quad k = \frac{\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{p^2-1}}$$

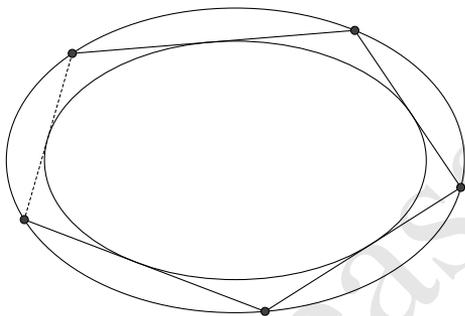
则闭合条件的一个积分表示是:

$$\int_0^s \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2u^2)}} du = \frac{m}{n} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{(1+u^2)(1+k^2u^2)}} du$$

□

**注记 6.11.7** 若做代换  $\sqrt{\frac{q+1}{q-1}} = t$  (即  $q = \frac{t^2+1}{t^2-1}$ ) 使初值有理化, 可以极大地简化运算.

**6.11.4 同心椭圆情形** 同心椭圆之间的彭赛列闭合也是常见的情形.



若  $n$  边形外切于椭圆  $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$  并内接于椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 求闭合条件.

**解** 内椭圆的一个二阶有理参数表示:

$$x = p \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad y = q \frac{2u}{1+u^2}$$

由此诱导出内椭圆外的一点, 其有理参数表示是:

$$x = p \frac{1-uv}{1+uv}, \quad y = q \frac{u+v}{1+uv}$$

代入外椭圆方程, 得到约束条件:

$$a^2b^2 - b^2p^2 - a^2q^2u^2 + 2a^2b^2uv + 2b^2p^2uv - 2a^2q^2uv - a^2q^2v^2 + a^2b^2u^2v^2 - b^2p^2u^2v^2 = 0$$

因而内椭圆上切点的参数  $u_k$  有递推关系:

$$a^2b^2 - b^2p^2 - a^2q^2u_k^2 + 2a^2b^2u_ku_{k+1} + 2b^2p^2u_ku_{k+1} \\ - 2a^2q^2u_ku_{k+1} - a^2q^2u_{k+1}^2 + a^2b^2u_k^2u_{k+1}^2 - b^2p^2u_k^2u_{k+1}^2 = 0$$

相邻两个递推关系式相减得到:

$$u_{k+2} = -u_k + \frac{2(a^2b^2 + b^2p^2 - a^2q^2)u_{k+1}}{a^2q^2 + b^2(p^2 - a^2)u_{k+1}^2}$$

同前面一样, 根据对称性选取初值:

$$u_1 = -u_2 = \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$$

则闭合条件为: 若  $n = 2m - 1$ , 则  $u_{m+1} = 0$ ; 若  $n = 2m$ , 则  $u_{m+1} + u_{m+2} = 0$ . 例如

(1). 若  $n = 3$ , 根据  $u_3 = 0$  得到:  $aq + bp - ab = 0$ .

(2). 若  $n = 4$ , 根据  $u_3 + u_4 = 0$  得到:  $a^2q^2 + b^2p^2 - a^2b^2 = 0$ .

(3). 若  $n = 5$ , 根据  $u_4 = 0$  得到:  $a^3b^3 + a^2b^3p - ab^3p^2 - b^3p^3 + a^3b^2q - 2a^2b^2pq + ab^2p^2q - a^3bq^2 + a^2bpq^2 - a^3q^3 = 0$ .

另外, 若记

$$s = \frac{\sqrt{a-p}}{\sqrt{a+p}}, \quad k = \frac{(a^2q^2 + p^2q^2 - 2b^2p^2)}{(a^2 - p^2)q^2}$$

则闭合条件的一个积分表示是:

$$\int_0^s \frac{du}{\sqrt{1 - 2ku^2 + u^4}} = \frac{m}{n} \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{1 - 2ku^2 + u^4}} \quad \square$$

**6.11.5 光反射多边形** 椭圆内的光反射多边形一般是指椭圆的内接最大周长多边形, 它实际上属于同心椭圆的特殊情形. 我们先从基本的表示出发来逐渐深入地探讨这个问题.

设给定椭圆  $\Gamma$  的直角坐标方程是:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 求它的内接  $n$  边形的周长最大值所满足的条件.

**解** 椭圆的内接多边形的各顶点  $P_k$  有参数表示:

$$P_k = a \frac{1 - u_k^2}{1 + u_k^2} + ib \frac{2u_k}{1 + u_k^2}$$

因而与  $P_k$  为端点的两边长度之和为:

$$P_{k-1}P_k + P_kP_{k+1} = \frac{2\sqrt{(u_k - u_{k-1})^2(b^2 + a^2u_{k-1}^2 + 2a^2u_{k-1}u_k - 2b^2u_{k-1}u_k + a^2u_k^2 + b^2u_{k-1}^2u_k^2)}}{(1 + u_{k-1}^2)(1 + u_k^2)} + \frac{2\sqrt{(u_{k+1} - u_k)^2(b^2 + a^2u_k^2 + 2a^2u_ku_{k+1} - 2b^2u_ku_{k+1} + a^2u_{k+1}^2 + b^2u_k^2u_{k+1}^2)}}{(1 + u_k^2)(1 + u_{k+1}^2)}$$

其余各边边长均与点  $P_k$  无关, 也即与参数  $u_k$  无关, 因此当多边形的周长为最大时, 上式也应是  $u_k$  的极值, 从而得到极值条件:

$$b^2u_{k-1} - 2b^2u_k - 4a^2u_k^3 + 2b^2u_k^3 - b^2u_{k-1}u_k^4 + b^2u_{k+1} + 4a^2u_{k-1}u_ku_{k+1} - 2b^2u_{k-1}u_ku_{k+1} + 2b^2u_{k-1}u_k^3u_{k+1} - b^2u_k^4u_{k+1} = 0 \quad (6.11.4)$$

这个极值条件实际上就是光反射条件, 即椭圆在点  $P_k$  处的切线与线段  $P_{k-1}P_k$  和  $P_{k+1}P_k$  之间的夹角相等:

$$\operatorname{Im} \left( \frac{(P_{k-1} - P_k)}{\mathbf{v}_k} \frac{(P_{k+1} - P_k)}{\mathbf{v}_k} \right) = 0$$

这里  $\mathbf{v}_k$  是椭圆在点  $P_k$  处的切向量:

$$\mathbf{v}_k = -\frac{4au_k}{(1 + u_k^2)^2} + i \frac{2b(1 - u_k^2)}{(1 + u_k^2)^2} \quad \square$$

理论上, 应用光反射条件式 (6.11.4) 可以对椭圆的最大周长内接  $n$  边形问题进行求解, 以  $n = 3, a = 2, b = 1$  为例, 其极值条件是:

$$\begin{cases} u_1 - 2u_2 + u_3 - u_1u_2^4 - u_2^4u_3 - 14u_2^3 + 2u_1u_2^3u_3 + 14u_1u_2u_3 = 0 \\ u_2 - 2u_3 + u_1 - u_2u_3^4 - u_3^4u_1 - 14u_3^3 + 2u_2u_3^3u_1 + 14u_1u_2u_3 = 0 \\ u_3 - 2u_1 + u_2 - u_3u_1^4 - u_1^4u_2 - 14u_1^3 + 2u_3u_1^3u_2 + 14u_1u_2u_3 = 0 \end{cases}$$

由此解出

$$u_1 = -\frac{50u_3 + 14\sqrt{13}u_3 + \sqrt{7 + 2\sqrt{13}}\sqrt{1 + 350u_3^2 + 96\sqrt{13}u_3^2 + u_3^4}}{-1 + 7u_3^2 + 2\sqrt{13}u_3^2}$$

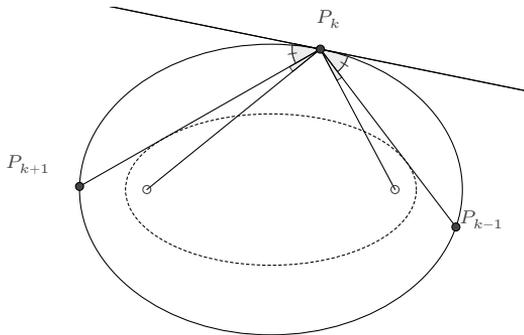
$$u_2 = \frac{-50u_3 - 14\sqrt{13}u_3 + \sqrt{7 + 2\sqrt{13}}\sqrt{1 + 350u_3^2 + 96\sqrt{13}u_3^2 + u_3^4}}{-1 + 7u_3^2 + 2\sqrt{13}u_3^2}$$

因而最大周长的内接三角形有无数个, 它们的周长值均为

$$L_{max} = \sqrt{\frac{280}{9} + \frac{104\sqrt{13}}{9}}$$

但是这样求解的计算量太大, 并不实用.

事实上, 根据彭赛列小定理 (6.7.24), 若椭圆  $\Gamma$  的一个共焦椭圆  $\Omega$  与线段  $P_{k-1}P_k$  相切, 则它也将与线段  $P_kP_{k+1}$  相切,



如此递归, 则知椭圆  $\Omega$  与椭圆的最大周长内接  $n$  边形均相切. 又根据共焦椭圆的 Graves 定理知, 共焦椭圆的任意彭赛列闭合多边形具有相同的周长. 于是有

**命题 6.11.8** 椭圆的最大周长内接  $n$  边形有无数个, 它们是该椭圆的光反射多边形, 且均外切于与该椭圆共焦的另一椭圆.

据此命题, 我们就可以给出一个较为容易的计算方案, 以  $n = 3$  为例.

**解** 设椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的最大周长内接三角形外切于椭圆  $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ , 根据共焦条件  $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$  和彭赛列闭合条件  $aq + bp = ab$  解出

$$p = \frac{a^3}{b^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}, \quad q = \frac{b^3}{a^2 + \sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}$$

三角形的顶点设为

$$P_k = p \frac{1 - u_k u_{k+1}}{1 + u_k u_{k+1}} + iq \frac{u_k + u_{k+1}}{1 + u_k u_{k+1}}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

因为初值的选取并不影响最大周长的计算, 为简便, 可按前面的取法而令

$$u_1 = -u_2 = \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$$

根据对称性又知  $u_3 = 0$ . 此时三角形各顶点的表示为

$$P_1 = -a, \quad P_2 = p - iq \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}, \quad P_3 = p + iq \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$$

于是椭圆内接三角形的最大周长值

$$L_{\max} = |P_1 P_2| + |P_2 P_3| + |P_3 P_1| = 2(b+q) \sqrt{\frac{a+p}{a-p}} = \frac{2\sqrt{3}(a^2 + b^2 + \sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4})}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^4 - a^2 b^2 + b^4}}}$$

特别地, 若  $a = 2, b = 1$ , 则

$$L_{\max} = \sqrt{\frac{280}{9} + \frac{104\sqrt{13}}{9}}$$

与前面计算结果相同. □

另外, 根据 Graves 定理, 椭圆内接  $n$  边形的最大周长值也可用积分表示为

$$L_{\max} = 2n \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - p^2} + \int_0^{2\pi} \sqrt{p^2 \sin^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta} d\theta - 2n \int_0^{\arccos \frac{p}{a}} \sqrt{p^2 \sin^2 \theta + q^2 \cos^2 \theta} d\theta \quad (6.11.5)$$

**6.11.6 闭合条件的加倍关系** 前面提到, 对于任意的  $1 \leq k \neq j \leq n$ , 均有

$$\frac{du_k}{\sqrt{\alpha u_k^4 + \beta u_k^3 + \gamma u_k^2 + \delta u_k + \varepsilon}} = \frac{du_j}{\sqrt{\alpha u_j^4 + \beta u_j^3 + \gamma u_j^2 + \delta u_j + \varepsilon}}$$

因而  $u_k$  与  $u_j$  之间满足双纽线方程:

$$A'(u_k u_j)^2 + 2B'(u_k u_j)(u_k + u_j) + C'(u_k + u_j)^2 + 2D'(u_k + u_j) + 2E'(u_k u_j) + F' = 0$$

这里系数  $A', B', C', D', E', F'$  的表示, 与前面系数  $A, B, C, D, E, F$  的表示 (6.11.2), 仅可能存在  $K$  值的不同.

而对于等差的序列  $u_k, u_{k+m}, u_{k+2m}, \dots$ , 相邻两项所满足的代数关系则是相同的, 即

$$A'(u_{k+(j-1)m} u_{k+jm})^2 + 2B'(u_{k+(j-1)m} u_{k+jm})(u_{k+(j-1)m} + u_{k+jm}) + C'(u_{k+(j-1)m} + u_{k+jm})^2 + 2D'(u_{k+(j-1)m} + u_{k+jm}) + 2E'(u_{k+(j-1)m} u_{k+jm}) + F' = 0$$

对于任意的正整数  $j, m$  均成立. 通过消元, 我们就可以导出闭合条件的加倍关系.

例如对于同心椭圆情形 (§6.11.4), 前面我们已导出相邻切点参数  $u, v$  之间满足

关系式

$$a^2b^2 - b^2p^2 - a^2q^2u^2 + 2a^2b^2uv + 2b^2p^2uv - 2a^2q^2uv - a^2q^2v^2 + a^2b^2u^2v^2 - b^2p^2u^2v^2 = 0$$

根据 (6.11.2) 解出

$$\alpha = \frac{q(a^2 - p^2)}{4p}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \frac{2b^2p^2 - a^2q^2 - p^2q^2}{2pq}, \quad \delta = 0, \quad \varepsilon = \frac{(a^2 - p^2)q}{4p}$$

于是

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = \frac{(a^2 - p^2)(2b^2p^2 + 2Kpq - a^2q^2 - p^2q^2)}{2p^2} \\ B' = 0 \\ C' = -\frac{(2Kp + a^2q - p^2q)(2Kp - a^2q + p^2q)}{4p^2} \\ D' = 0 \\ E' = \frac{K(2b^2p^2 + 2Kpq - a^2q^2 - p^2q^2)}{pq} \\ F' = \frac{(a^2 - p^2)(2b^2p^2 + 2Kpq - a^2q^2 - p^2q^2)}{2p^2} \end{array} \right.$$

从而对任意的正整数  $m$ , 有

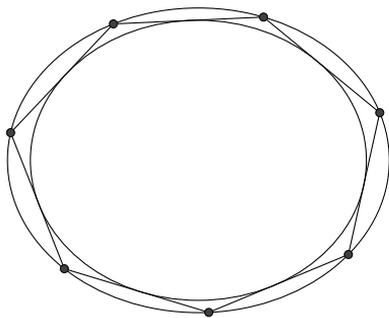
$$q(2Kp + a^2q - p^2q)(2Kp - a^2q + p^2q)(u_1 + u_{m+1})^2 + 2(a^2 - p^2)q(a^2q^2 + p^2q^2 - 2b^2p^2 - 2Kpq)(u_1 u_{m+1})^2 - 8Kp(2b^2p^2 + 2Kpq - a^2q^2 - p^2q^2)(u_1 u_{m+1}) + 2(a-p)(a+p)q(-2b^2p^2 - 2Kpq + a^2q^2 + p^2q^2) = 0$$

$$q(2Kp + a^2q - p^2q)(2Kp - a^2q + p^2q)(u_{m+1} + u_{2m+1})^2 + 2(a^2 - p^2)q(a^2q^2 + p^2q^2 - 2b^2p^2 - 2Kpq)(u_{m+1} u_{2m+1})^2 - 8Kp(2b^2p^2 + 2Kpq - a^2q^2 - p^2q^2)(u_{m+1} u_{2m+1}) + 2(a-p)(a+p)q(-2b^2p^2 - 2Kpq + a^2q^2 + p^2q^2) = 0$$

以上两式消元参数  $K$ , 得到  $u_1$ 、 $u_{m+1}$ 、 $u_{2m+1}$  的关系式. 这个关系式较长, 但若取初值  $u_1 = \sqrt{\frac{a+p}{a-p}}$ , 则可简化为

$$4b^2(1 - u_1^2)^2 u_{m+1}^2 (u_{m+1}^2 - u_1 u_{2m+1})(1 - u_1 u_{m+1}^2 u_{2m+1}) - q^2(u_1^2 - 2u_{m+1}^2 + u_1^2 u_{m+1}^4 + u_1 u_{2m+1} - 2u_1^3 u_{m+1}^2 u_{2m+1} + u_1 u_{m+1}^4 u_{2m+1})^2 = 0$$

由此即可对闭合条件做快速地计算. 例如, 对于同心椭圆的彭赛列闭合 7 边形情形:



前面已知, 若初值设为

$$u_1 = -u_2 = \frac{\sqrt{a+p}}{\sqrt{a-p}}$$

则闭合条件为  $u_5 = 0$ , 在上述加倍关系中令  $m = 2$ , 即有

$$4b^2(1 - u_1^2)^2 u_3^4 - q^2(u_1^2 - 2u_3^2 + u_1^2 u_3^4)^2 = 0$$

代入  $u_3$  的表示

$$u_3 = \frac{(ab + bp - aq)(ab + bp + aq)}{(ab - bp - aq)(ab - bp + aq)} \sqrt{\frac{a-p}{a+p}}$$

后化简并筛选因式, 则得到所求闭合条件为:

$$\begin{aligned} & a^6 b^6 + 2a^5 b^6 p - a^4 b^6 p^2 - 4a^3 b^6 p^3 - a^2 b^6 p^4 + 2ab^6 p^5 + b^6 p^6 + 2a^6 b^5 q - 2a^5 b^5 p q \\ & - 2a^2 b^5 p^4 q + 2ab^5 p^5 q - a^6 b^4 q^2 + 2a^4 b^4 p^2 q^2 - a^2 b^4 p^4 q^2 - 4a^6 b^3 q^3 - 4a^3 b^3 p^3 q^3 \\ & - a^6 b^2 q^4 - 2a^5 b^2 p q^4 - a^4 b^2 p^2 q^4 + 2a^6 b q^5 + 2a^5 b p q^5 + a^6 q^6 = 0 \end{aligned}$$

**注记 6.11.9** 上述讨论适用于此类双纽线形式的数列

$$A(a_n a_{n+1})^2 + 2B(a_n a_{n+1})(a_n + a_{n+1}) + C(a_n + a_{n+1})^2 + 2D(a_n + a_{n+1}) + 2E(a_n a_{n+1}) + F = 0$$

由此可以导出一些有趣的结果. 例如若数列  $\{a_n\}$  定义为:

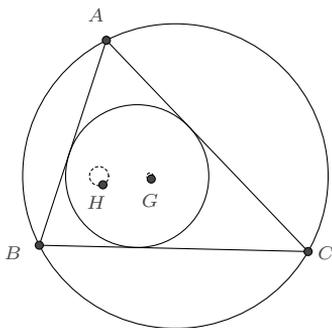
$$a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{2a_n}{4 - a_n^2}; \quad a_0 = 0; \quad a_1 = \frac{1}{2};$$

则

$$(1 - a_n^4)^2 a_{2n}^2 = 4a_n^2 - 16a_n^4 + 4a_n^6$$

**6.11.7 闭合多边形的特征点** 通过前面的讨论, 我们知道, 彭赛列闭合多边形可由单一的参数决定, 因而该多边形的特征点的轨迹是一条曲线 (或是一个定点), 探讨其表示和性质是一件有趣的事情. 先从较简单的情形 ( $n = 3$ ) 开始讨论.

**例 6.11.10** 若  $\triangle ABC$  外切于圆  $x^2 + y^2 = r^2$ , 并内接于圆  $(x - d)^2 + y^2 = R^2$ , 求三角形的重心、垂心等第一类特征点的表示.



**解** 闭合条件要求  $d^2 = R(R - 2r)$ , 这也正是三角形的欧拉定理. 设三角形的各顶点表示分别为

$$A = r \frac{1 - uv}{1 + uv} + r \frac{u + v}{1 + uv} i, \quad B = r \frac{1 - vw}{1 + vw} + r \frac{v + w}{v + w} i, \quad C = r \frac{1 - wu}{1 + wu} + r \frac{w + u}{1 + wu} i$$

则有以下等式

$$\begin{cases} (d - r - R)(d - r + R) + r^2(u + v)^2 + 2(d^2 - r^2 - R^2)uv + (d + r - R)(d + r + R)(uv)^2 = 0 \\ (d - r - R)(d - r + R) + r^2(v + w)^2 + 2(d^2 - r^2 - R^2)vw + (d + r - R)(d + r + R)(vw)^2 = 0 \\ (d - r - R)(d - r + R) + r^2(w + u)^2 + 2(d^2 - r^2 - R^2)wu + (d + r - R)(d + r + R)(wu)^2 = 0 \end{cases}$$

我们先来简化它们之间的关系, 应用闭合条件消元  $r$ :

$$\begin{cases} (d + R)(d + 3R) - 2(d^2 - 5R^2)(uv) + (d - 3R)(d - R)(uv)^2 + (d - R)(d + R)(u + v)^2 = 0 \\ (d + R)(d + 3R) - 2(d^2 - 5R^2)(vw) + (d - 3R)(d - R)(uv)^2 + (d - R)(d + R)(v + w)^2 = 0 \\ (d + R)(d + 3R) - 2(d^2 - 5R^2)(wu) + (d - 3R)(d - R)(wu)^2 + (d - R)(d + R)(w + u)^2 = 0 \end{cases}$$

由上面的第一式与第三式相减得

$$8R^2u + d^2(v + w) - R^2(v + w) + d^2u^2(v + w) - 4dRu^2(v + w) + 3R^2u^2(v + w) = 0$$

它与第二式联立即可解出<sup>①</sup>

$$\begin{cases} v+w = \frac{8R^2u}{(R-d)(R+d+du^2-3Ru^2)} \\ vw = \frac{(d+R)(d+3R+du^2-Ru^2)}{(d-R)(d+R+du^2-3Ru^2)} \end{cases}$$

根据这个关系, 就可以导出一些具有对称性质的第一类特征点关于参数  $u$  的有理表示.  
重心  $G$ :

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{3}(A+B+C) \\ &= \frac{d(R^2-d^2-d^2u^2+4dRu^2-3R^2u^2-id^2u-4idRu-3iR^2u-id^2u^3+iR^2u^3)}{3R(1-iu)^2(R+d+idu-iRu)} \end{aligned}$$

若转化为直角坐标方程, 则有较简单的形式:

$$\left(x - \frac{d}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{d^4}{9R^2}$$

垂心  $H$ :

$$\begin{aligned} H &= \frac{(B-C)(B+C-A)\bar{A} + (C-A)(C+A-B)\bar{B} + (A-B)(A+B-C)\bar{C}}{(B-C)\bar{A} + (C-A)\bar{B} + (A-B)\bar{C}} \\ &= \frac{d(R^2-d^2-d^2u^2+4dRu^2-3R^2u^2-id^2u-4idRu-3iR^2u-id^2u^3+iR^2u^3)}{R(1-iu)^2(R+d+idu-iRu)} \end{aligned}$$

转化为直角坐标方程则是:

$$(x+d)^2 + y^2 = \frac{d^4}{R^2} \quad \square$$

**注记 6.11.11** 对于  $\triangle ABC$  的非对称特征点 (例如布洛卡点), 其轨迹则复杂许多, 通常是高次的非有理曲线.

**例 6.11.12** 若  $\triangle ABC$  外切于圆  $x^2 + y^2 = r^2$ , 并内接于圆  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$ , 求三角形的旁心、葛尔刚点等第二类特征点的表示.

**解** 沿用上例  $\triangle ABC$  的表示, 对于第二类特征点, 我们先求  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$  的表示. 根据内心  $I$  的表示

$$\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

<sup>①</sup>另一组解:  $\begin{cases} v+w = \frac{8R^2u}{(R-d)(R+d+du^2-3Ru^2)} \\ vw = \frac{d^3+d^2R-dR^2-R^3+d^3u^2-3d^2Ru^2-9dR^2u^2+27R^3u^2}{(d-3R)(d-R)(d+R+du^2-3Ru^2)} \end{cases}$  并不符合要求.

其中  $I$  为内圆的中心, 即  $I = 0$ , 于是解出

$$s = \frac{R+d+(R-d)uw}{(R-d)u-(R+d)w}, \quad t = \frac{(R-d)u-(R+d)w}{3R+d+(3R-d)uw}$$

根据旁心  $I_A$  的表示

$$\vec{BI}_A = \frac{s+t}{i+t} \vec{BC}$$

即可得到

$$I_A = \frac{r(1+iu)(1+iw)(du-Ru+dw+Rw+id+3iR-iduw+3iRu)}{(du-Ru+dw+Rw)(1+uw)}$$

而  $w$  与  $u$  的关系是可由前面  $v+w$  和  $vw$  的表示结合韦达定理而得:

$$(d-R)(d+R+du^2-3Ru^2)w^2+8R^2uw+(d+R)(d+3R+du^2-Ru^2)=0$$

以上两式联立消元  $w$  后得到  $I_A$  与  $u$  的方程

$$(1-iu)(d+R+idu-iRu)I_A^2+4R(r+2idu+ru^2)I_A+8rR^2(1+iu)^2=0$$

若转化为直角坐标方程, 即令  $I_A = x + yi$ , 代入后分离实部和虚部后消元参数  $u$ , 则得到其轨迹方程为

$$(x-2d)^2+y^2=4R^2$$

同理, 根据葛尔刚点的表示

$$\vec{BG}_e = \frac{(1+is)(1-is-2it)(1-st)}{(1-it)^2(1+s^2+st+t^2)} \vec{BC}$$

可导出

$$G_e = \frac{2dr(d^2+4dR+3R^2+d^2u^2-9R^2u^2+id^2u-9iR^2u+id^2u^3-4idRu^3+3iR^2u^3)}{(d-3R)(d+3R)(1-iu)^2(d+R+idu-iRu)}$$

转化为直角坐标方程则为

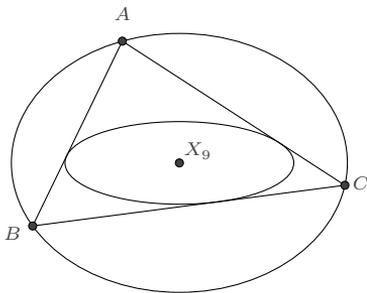
$$\left(x + \frac{6drR}{9R^2-d^2}\right)^2 + y^2 = \frac{4d^4r^2}{(9R^2-d^2)^2}$$

□

上述方法对于一般圆锥曲线情形都是适用的. 我们再举一个示例.

**例 6.11.13** 若  $\triangle ABC$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的内接最大周长三角形, 证明它的 Mitten-

punkt 点  $X_9$  是椭圆的中心.



**证明 (法一)** 根据前面的讨论, 椭圆的内接最大周长三角形外切于一个共焦的椭圆  $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$ , 其中  $p, q$  之值满足共焦条件和彭赛列闭合条件:

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2 \quad (1)$$

$$aq + bp = ab \quad (2)$$

由此, 可设光反射三角形的三个顶点分别为

$$\begin{cases} A = p \frac{1-uv}{1+uv} + q \frac{u+v}{1+uv} i \\ B = p \frac{1-vw}{1+vw} + q \frac{v+w}{1+vw} i \\ C = p \frac{1-wu}{1+wu} + q \frac{w+u}{1+wu} i \end{cases}$$

参数  $u, v, w$  满足以下方程

$$a^2b^2 - b^2p^2 + (2a^2b^2 + 2b^2p^2)uv + (a^2b^2 - b^2p^2)u^2v^2 - a^2q^2(u+v)^2 = 0 \quad (3)$$

$$a^2b^2 - b^2p^2 + (2a^2b^2 + 2b^2p^2)vw + (a^2b^2 - b^2p^2)v^2w^2 - a^2q^2(v+w)^2 = 0 \quad (4)$$

$$a^2b^2 - b^2p^2 + (2a^2b^2 + 2b^2p^2)wu + (a^2b^2 - b^2p^2)w^2u^2 - a^2q^2(w+u)^2 = 0 \quad (5)$$

我们先来简化它们之间的关系. 对 (4) 应用 (2) 消元  $p$ , 化简得到

$$(2b-q)qv^2w^2 - q^2(v+w)^2 + 2(2b^2 - 2bq + q^2)vw + (2b-q)q = 0 \quad (6)$$

由 (3) 与 (5) 相减得

$$2(a^2b^2 + b^2p^2 - a^2q^2)u - a^2q^2(v+w) + b^2(a-p)(a+p)u^2(v+w) = 0$$

再应用 (2) 消元  $p$ , 化简得到

$$4b^2u - 4bqu + (-q^2 + 2bqu^2 - q^2u^2)(v + w) = 0 \quad (7)$$

联立 (6) 和 (7) 即可解得

$$\begin{cases} v + w = \frac{4b(b-q)u}{q(qu^2 - 2bu^2 + q)} \\ vw = \frac{qu^2 - 2b + q}{qu^2 - 2bu^2 + q} \end{cases}$$

根据韦达定理而知,  $w$  与  $u$  的关系是 ( $v$  也是同样的):

$$q(2b - q - qu^2) + 4b(b - q)uw - q(q - 2bu^2 + qu^2)w^2 = 0$$

接下来我们再求  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$  的表示. 因为  $\triangle ABC$  的内心  $I$  也是椭圆在各顶点处的法线的交点, 考虑  $A$ 、 $C$  两点处的法线, 即可求出

$$I = \frac{(a^2 - b^2)p(1 - u^2)(1 - uv)(1 - uw)}{a^2(1 + u^2)(1 + uv)(1 + uw)} - \frac{2(a^2 - b^2)qu(u + v)(u + w)}{b^2(1 + u^2)(1 + uv)(1 + uw)}i$$

利用  $v$ 、 $w$  的关系进一步简化得到它关于单参数  $u$  的表示

$$I = \frac{a(b - 2q)(1 - u^2)(q - 2bu + qu^2)(q + 2bu + qu^2)}{(b + q)(1 + u^2)(q^2 + 4b^2u^2 - 8bqu^2 + 2q^2u^2 + q^2u^4)} - \frac{2b(b - 2q)u(q - 2bu^2 + qu^2)(q - 2b + qu^2)}{(2b - q)(1 + u^2)(q^2 + 4b^2u^2 - 8bqu^2 + 2q^2u^2 + q^2u^4)}i$$

从而由  $\vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$  求解得到<sup>①</sup>

$$\begin{cases} s = \frac{b(b-q)(4b^2u - 6bqu + 2bqu^3 - q^2w + 2bqu^2w - 2q^2u^2w + 2bqu^4w - q^2u^4w)}{a(2b-q)(q^2 + 4b^2u^2 - 8bqu^2 + 2q^2u^2 + q^2u^4)} \\ t = \frac{a(2b^2u - 2bqu - q^2w + 2bqu^2w - q^2u^2w)}{b(b-q)(b+q)(1+u^2)} \end{cases}$$

Mittelpunkt 点  $X_9$  的表示可查表得到, 根据其重心坐标转化而有

$$\vec{BX}_9 = \frac{(s+t)(1+s^2+it-is^2t-2ist^2)}{2s(1-it)(1+s^2+st+t^2)} \vec{BC}$$

将以上表示代入, 并利用  $w$ 、 $u$  的关系化简可得  $X_9 = 0$ . □

<sup>①</sup> 注: 这里为了表示的简洁, 利用了前面的关系进行化简.

这个证明是直接的, 但计算量非常大. 如果我们做逆向的考察: “给定一个三角形  $\triangle ABC$ , 若它是某个外接椭圆的光反射三角形, 则其 Mittenpunkt 点  $X_9$  为椭圆的中心”. 则证明会容易得多.

**证明 (法二)** 令  $s = \tan \frac{A}{2}$ ,  $t = \tan \frac{B}{2}$ , 则  $\triangle ABC$  的顶点及其内心有表示:

$$\vec{BA} = \frac{(s+t)(1-st)}{s(1-it)^2} \vec{BC}, \quad \vec{BI} = \frac{1-st}{1-it} \vec{BC}$$

根据 (6.3.3), 三角形的外接椭圆可表示为

$$\vec{BP} = \frac{(1-u)(ps+pt-ps^2t-pst^2-su+2istu+st^2u)}{s(1-it)^2(p-u-pu+qu+u^2)} \vec{BC}$$

它在各顶点处的一个切向量分别是

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_A = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{-qs+t-qt+2ist-s^2t+qs^2t+qst^2}{ps(1-it)^2} \vec{BC} \\ \vec{v}_B = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{s-ps-pt-2ist+ps^2t-st^2+pst^2}{qs(1-it)^2} \vec{BC} \\ \vec{v}_C = \lim_{u \rightarrow \infty} u^2 \frac{d}{du} \vec{BP} = \frac{qs+pt+2ipst-2iqst-ps^2t-qst^2}{s(1-it)^2} \vec{BC} \end{array} \right.$$

这三者各自与线段  $IA$ 、 $IB$ 、 $IC$  垂直, 由此解出

$$p = \frac{s(1+t^2)}{(s+t)(1-st)}, \quad q = \frac{(1+s^2)t}{(s+t)(1-st)}$$

椭圆的中心  $O$  的表示恰好就是  $X_9$  的表示

$$\vec{BX}_9 = \frac{(s+t)(1+s^2+it-is^2t-2ist^2)}{2s(1-it)(1+s^2+st+t^2)} \vec{BC}$$

□

**注记 6.11.14** 对于内切的共焦椭圆, 根据 (6.4.9) 可设为

$$\vec{BP} = \frac{\lambda(-s+2ist+st^2-su^2\mu-tu^2\mu+s^2tu^2\mu+st^2u^2\mu)}{s(i+t)^2(1-2u+u^2+\lambda+u^2\lambda\mu)} \vec{BC}$$

根据共焦的条件, 由 Marden 定理而求解出

$$\lambda = \frac{t(s+t)}{1-st}, \quad \mu = \frac{1-st}{s(s+t)}$$

即得内切共焦椭圆的表示

$$\vec{BP} = \frac{t(s+t)(s-ist-iu+istu)(s-ist+iu-istu)}{s(1-it)^2(s+st^2-2su+2s^2tu+su^2+tu^2-s^2tu^2-st^2u^2)} \vec{BC}$$

对于较小边数的彭赛列多边形,一般可依照上述方法计算求解,但对于任意的  $n$  边形,还需要利用一些椭圆函数的知识.

**例 6.11.15** 若  $n$  边形外切于圆  $x^2 + y^2 = r^2$ , 并内接于圆  $(x-d)^2 + y^2 = R^2$ , 求该  $n$  边形重心的轨迹.

**解** 延续前面双心多边形 (6.11.3) 的讨论, 根据闭合多边形的积分表示, 知各切点的参数  $u_k$  满足

$$\int_{u_1}^{u_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q-1}{p-1}u^2}\sqrt{1+\frac{p+1}{q+1}u^2}} du = \frac{k}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{q-1}{p-1}u^2}\sqrt{1+\frac{p+1}{q+1}u^2}} du$$

它可被改写为

$$\int_{\sqrt{\frac{p+1}{q+1}}u_1}^{\sqrt{\frac{p+1}{q+1}}u_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+(1-m)t^2)}} = \frac{k}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(1+(1-m)t^2)}}$$

其中  $m = \frac{p^2-q^2}{p^2-1}$ , 若令

$$z = \int_0^{\sqrt{\frac{p+1}{q+1}}u_1} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2-mt^2)}}$$

则

$$u_k = \sqrt{\frac{q+1}{p+1}} \operatorname{sc} \left( z + \frac{2(k-1)}{n} K(m) \right)$$

其中  $\operatorname{sc}(z)$  是雅克比椭圆函数, 它的定义是如下椭圆积分的反演:

$$z = \int_0^{\operatorname{sc}(z)} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+t^2-mt^2)}}$$

而  $K(m)$  是第一类完全椭圆函数积分:

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-m\sin^2\theta}} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1-t^2+mt^2)}}$$

于是,  $n$  边形的重心可表示为

$$x_G = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - u_k u_{k+1}}{1 + u_k u_{k+1}} = \frac{r}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p+1) - (q+1)sc(z + \frac{2k}{n}K(m))sc(z + \frac{2(k+1)}{n}K(m))}{(p+1) + (q+1)sc(z + \frac{2k}{n}K(m))sc(z + \frac{2(k+1)}{n}K(m))}$$

$$y_G = \frac{r}{n} \sum_{k=1}^n \frac{u_k + u_{k+1}}{1 + u_k u_{k+1}} = \frac{r}{n} \sqrt{(p+1)(q+1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{sc(z + \frac{2k}{n}K(m)) + sc(z + \frac{2(k+1)}{n}K(m))}{(p+1) + (q+1)sc(z + \frac{2k}{n}K(m))sc(z + \frac{2(k+1)}{n}K(m))}$$

雅克比椭圆函数  $sc(z)$  的实周期和虚周期分别为  $2K(m)$ 、 $4iK(1-m)$ , 由此易知  $x_G$  与  $y_G$  有相同的周期:  $\frac{2}{n}K(m)$  和  $2iK(1-m)$ . 另外二者也有相同的二阶极点:

$$\frac{1}{n}(2k+1)K(m) + (2j+1)iK(1-m); \{k \in N, j \in N\}$$

在周期平行四边形内, 设两个极点分别为  $z_1$  和  $z_2$ . 在  $z_1$  处, 它们的洛朗展开分别是:

$$x_G = \frac{-\lambda}{(z - z_1)^2} - a + \dots, \quad y_G = \frac{-\lambda i}{(z - z_1)^2} - bi + \dots$$

其中  $\lambda, a, b$  均为实数. 在  $z_2$  处, 洛朗展开又为:

$$x_G = \frac{-\lambda}{(z - z_2)^2} - a + \dots, \quad y_G = \frac{\lambda i}{(z - z_2)^2} + bi + \dots$$

因此, 构造函数  $f(z) = (x_G + a - b)^2 + y_G^2$ , 可使得  $f(z)$  的极点消失<sup>①</sup>, 根据刘维尔定理, 没有奇点的双周期函数必是常数, 因此重心的轨迹是一个圆.  $\square$

<sup>①</sup>参考: 《Centers of mass of Poncelet polygons, 200 years after》(by Richard Schwartz and Serge Tabachnikov)

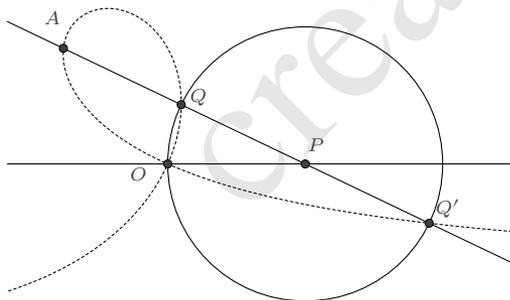
# 第 7 章 一般有理曲线

本章我们先介绍一些经典的有理曲线, 它们曾是古典几何研究的一部分, 亦在某些方面有切实的应用. 为使行文简洁, 我们仅介绍它们的有理参数表示, 而不介绍其几何性质, 感兴趣的读者可参阅相关文献资料.

## 7.1 三次有理曲线

**7.1.1 环索线** 环索线是著名的三次有理曲线, 在工程上也有广泛的应用.

**定义 7.1.1** 给定直线  $l$  及其上一定点  $O$ , 另一定点  $A$  在直线外, 动点  $P$  在直线  $l$  上, 在直线  $AP$  上的点  $Q$  使得  $|PQ| = |OP|$ , 则  $Q$  点的轨迹称为环索线.



**解** 因为  $O$  和  $A$  均是定点, 所以我们选取  $\vec{OA}$  为基向量. 定直线  $l$  上的点  $P$  可视为由  $OA$  经固定的角度  $\theta$  旋转和任意长度的缩放而得, 故可设  $\vec{OP} = te^{i\theta} \vec{OA}$ . 根据  $|PQ| = |OP|$  知  $Q$  在以  $P$  为圆心,  $OP$  为半径的圆上, 又令

$$\vec{PQ} = \frac{1+iu}{1-iu} \vec{PO}$$

将其改写为基向量  $OA$  的表示则是

$$\vec{OQ} = \frac{2tu}{i+u} e^{i\theta} \vec{OA}$$

由  $A$ 、 $P$ 、 $Q$  三点共线知

$$2tu - 2u \cos \theta - \sin \theta + u^2 \sin \theta = 0$$

解出  $t$ , 代回则得到点  $Q$  的表示

$$\vec{OQ} = \frac{(2u \cos \theta + \sin \theta - u^2 \sin \theta)}{i+u} e^{i\theta} \vec{OA}$$

若要将上式用有理参数进行表示, 可再令  $e^{i\theta} = \frac{1+is}{1-is}$ , 则

$$\vec{OQ} = \frac{2(s+u)(1-su)}{(1-is)^2(i+u)} \vec{OA} \quad (7.1.1)$$

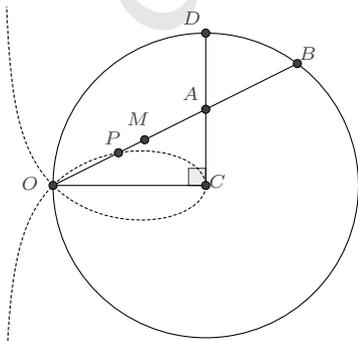
当  $\theta = \frac{\pi}{2}$  时,  $Q$  点的轨迹称为正环索线, 其表示为

$$\vec{OQ} = \frac{1-u^2}{1-iu} \vec{OA}$$

□

**7.1.2 叶形线** 叶形线是著名科学家笛卡尔研究一簇花瓣和叶形曲线特征时所列给出的, 它的另一个较为诗意的名字是“茉莉花瓣曲线”, 其中一个定义是

**定义 7.1.2** 给定以  $C$  为中心且经过点  $O$  的圆, 作  $CD \perp OC$  交圆于点  $D$ , 过  $O$  点的直线  $l$  与  $CD$  和圆分别交于点  $A$ 、 $B$ . 在  $l$  上作点  $M$ , 使得  $OM = AB$ . 若直线  $l$  上的动点  $P$  使得  $(OMPA) = -1$ , 则  $P$  点的轨迹是为叶形线.



**解** 以  $\vec{OC}$  为基向量, 易知  $\vec{OD} = (1+i)\vec{OC}$ . 根据 (2.2.3) 又可设圆上的点  $B$  的表示为:

$$\vec{OB} = \frac{2}{1-iu} \vec{OC}$$

进而求出  $OB$  与  $CD$  的交点  $A$  为

$$\vec{OA} = (1+iu)\vec{OC}$$

根据  $OM = AB$ , 若限定  $M$  点在线段  $OB$  内, 则又可解出

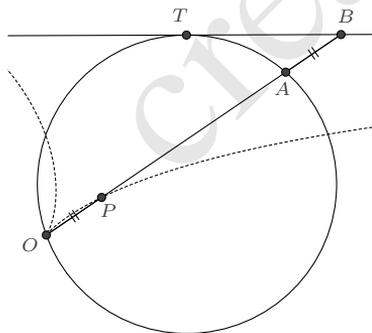
$$\vec{OM} = \frac{1-u^2}{1-iu} \vec{OC}$$

再由  $(OMPA) = -1$ , 即  $\frac{O-P}{O-A} \frac{M-A}{M-P} = -1$  得到叶形线的表示

$$\vec{OP} = \frac{(1+iu)(1-u^2)}{1+3u^2} \vec{OC} \quad (7.1.2) \quad \square$$

**7.1.3 蔓叶线** 据史料记载, 早在公元前 250 100 年前, 古希腊狄克雷斯为了解决倍立方问题, 已对此曲线展开了研究.

**定义 7.1.3** 给定一个圆, 及圆上的两个定点  $O$  和  $T$ , 设  $A$  是圆上的一个动点, 直线  $OA$  与设圆在  $T$  处的切线相交于点  $B$ , 若直线  $OA$  上的点  $P$  使得  $OP = AB$ , 则  $P$  的轨迹是一条蔓叶线.



**解** 以  $\vec{OT}$  为基向量, 则圆上点  $A$  的表示可设为

$$\vec{OA} = \frac{1+is}{1-iu} \vec{OT}$$

圆在  $T$  处的一个切向量是

$$\mathbf{v}_T = \lim_{u \rightarrow -s} \frac{d}{du} \left( \frac{1+is}{1-iu} \right) \vec{OT} = \frac{1}{s-i} \vec{OT}$$

设  $\vec{OB} = \lambda \vec{OA}$ , 根据  $\mathbf{v}_T // \vec{OB}$  即可解出

$$\lambda = \frac{1+u^2}{1-s^2-2su}$$

再由  $OP = AB$  知  $\vec{OP} = \vec{AB}$ , 从而得到  $P$  点的参数表示

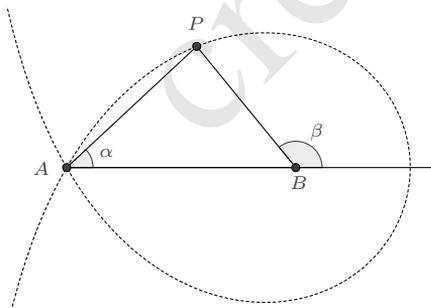
$$\vec{OP} = \frac{(1+is)(s+u)^2}{(1-iu)(1-s^2-2su)} \vec{OT} \quad (7.1.3)$$

特别地, 如果  $OT$  是圆的直径,  $P$  点的轨迹称为正蔓叶线. 此时  $s=0$  并有

$$\vec{OP} = \frac{u^2}{1-iu} \vec{OT} \quad \square$$

**7.1.4 三等分角线** 顾名思义, 三等分角线是为了解决“三等分角难题”而构造出的曲线. 历史上数学家们曾对此问题的研究非常热衷, 虽然现已证明仅用尺规作图无法达成这一目的, 但这些成果却得以保留. 其中, 麦克劳林三等分角线是比较知名的, 它的表述如下:

**定义 7.1.4** 给定一条线段  $AB$ , 过端点  $A, B$  分别作直线  $l, l'$ , 它们与  $AB$  的夹角分别为  $\alpha, \beta$ , 若  $\alpha : \beta = 1 : 3$ , 则两直线的交点轨迹为麦克劳林三等分角线.



**解** 根据三角形的角角边表示, 有

$$\vec{AP} = \frac{e^{i2\alpha}(1-e^{-i2\beta})}{1-e^{i(2\alpha-2\beta)}} \vec{AB} = \frac{e^{i2\alpha}(1-e^{-i6\alpha})}{1-e^{-i4\alpha}} \vec{AB}$$

作代换

$$e^{i2\alpha} = \frac{1+iu}{1-iu}$$

即可将其化为有理参数表示的形式

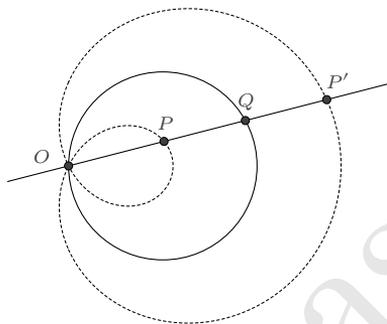
$$\vec{AP} = \frac{3-u^2}{2(1-iu)} \vec{AB} \quad (7.1.4)$$

□

## 7.2 四次有理曲线

### 7.2.1 蜗牛线

**定义 7.2.1** 给定一圆及其上的一个定点  $O$ , 任作一条直线  $l$  交圆周于另一点  $Q$ . 若在  $l$  上取点  $P$ , 使得  $PQ$  之长为定值, 则  $P$  点的轨迹称为蜗牛线.



**解** 设  $O$  点关于圆的对径点为  $A$ , 则圆上的点  $Q$  可表示为

$$\vec{OQ} = \frac{1}{1-it} \vec{OA}$$

又设  $|PQ|$  与直径之比为  $\lambda$ , 以及  $\vec{OP} = k\vec{OQ}$ , 不难得到方程:

$$1 - 2k + k^2 - \lambda^2 - t^2\lambda^2 = 0$$

为了有理地表示出  $k$ , 考虑代换  $t \rightarrow \frac{2u}{1-u^2}$ , 则

$$k = 1 \pm \lambda \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

因为我们尚未限定  $u$  的取值范围, 所以任选其中一解即可, 于是就得到了蜗牛线的一个

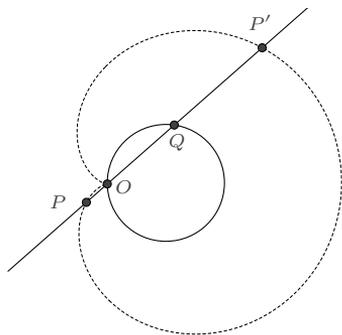
参数表示

$$\vec{OP} = \frac{(1-u^2) + \lambda(1+u^2)}{(1-iu)^2} \vec{OA} \quad (7.2.1)$$

式中  $u$  的取值范围是整个实数域. □

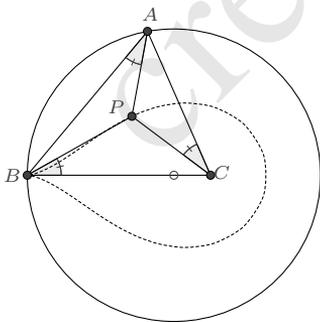
特别地,  $\lambda = 1$  时的情形也称为**心脏线**, 其参数表示为

$$\vec{OP} = \frac{2}{(1-iu)^2} \vec{OA}$$



**7.2.2 水滴线** 固定三角形的其中两个顶点, 并指定另一个顶点在某条曲线上做运动, 考察它的特征点随之变化所产生的曲线, 这是一类比较有意思的问题.

**定义 7.2.2** 对于  $\triangle ABC$ , 固定  $B, C$  两点, 若点  $A$  在经过点  $B$  且圆心在  $BC$  上的一个圆上做运动, 则  $\triangle ABC$  的正布洛卡点所描绘的是一条水滴形曲线.



**解** 我们假设圆的直径与线段  $BC$  之比为  $\lambda$ , 则圆上的点  $A$  可表示为

$$\vec{BA} = \frac{\lambda}{1-iu} \vec{BC}$$

根据 (3.4.5),  $\triangle ABC$  的正布洛卡点  $P$  的表示即为

$$\vec{BP} = \frac{\lambda^2}{1 + u^2 - \lambda + \lambda^2 - iu\lambda} \vec{BC} \quad (7.2.2)$$

上述水滴线与直线  $BC$  的另一个交点  $T$  是

$$\vec{BT} = \lim_{u \rightarrow 0} \vec{BP} = \frac{\lambda^2}{1 - \lambda + \lambda^2} \vec{BC}$$

如果我们考虑以  $\vec{BT}$  作为基向量, 则水滴线的表示可简化为

$$\vec{BP} = \frac{1}{1 - 2ikv + v^2} \vec{BT} \quad (7.2.3)$$

其中

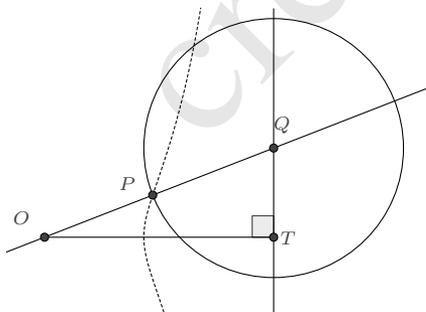
$$k = \frac{\lambda}{2\sqrt{1 - \lambda + \lambda^2}}, \quad v = \frac{u}{\sqrt{1 - \lambda + \lambda^2}} \quad \square$$

## 7.3 其他有理曲线

### 7.3.1 蚌线

**定义 7.3.1** 设某一曲线  $C$  和一个定点  $O$  (这一定点称为“极”), 过点  $O$  引一束射线, 并且在每一条射线上从它和已知曲线的交点向两边作等长的线段  $l$ , 这些线段末端的轨迹就是一种新的曲线, 叫作原曲线关于已知极的蚌线.

前面所述的蜗牛线即是蚌线的一种. 若  $C$  是一条直线, 对应的是为尼科米兹蚌线.



若设直线上与  $O$  最近的点是  $T$ , 线段  $l$  的长度等于  $\lambda OT$ , 则它的一个参数表示是:

$$\vec{OP} = \left( \frac{(1 + iu)^2}{1 - u^2} + \lambda \frac{1 + iu}{1 - iu} \right) \vec{OT}$$

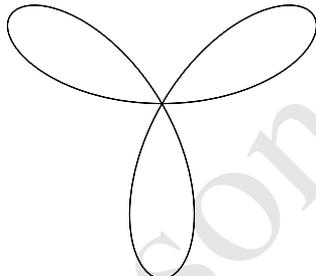
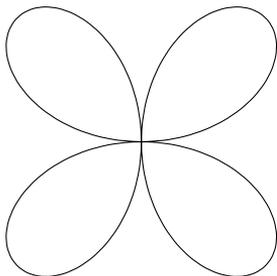
又若  $C$  是一条以  $O$  点为顶点的抛物线, 设其焦点为  $T$ , 线段  $l$  的长度等于  $\lambda OT$ , 则该蚌线的一个参数表示是:

$$\vec{OP} = \left( \frac{8iu(1-iu)^2}{(1-u^2)^2} + \lambda \frac{i+u}{1+iu} \right) \vec{OT}$$

**7.3.2 玫瑰线** 玫瑰线曾被中世纪的葡萄牙水手用于航海方向的指引, 故又称为“罗盘线”. 其一般的表示是极坐标方程:  $\rho = a \sin n\theta$ , 一般这里  $n$  是某个正整数. 我们容易将其改写为有理参数表示的形式, 这只需要令  $e^{i\theta} = \frac{1+iu}{1-iu}$  即可, 其表示为

$$z = a \sin n\theta e^{i\theta} = \frac{a}{2i} \left( \left( \frac{1+iu}{1-iu} \right)^{n+1} - \left( \frac{1+iu}{1-iu} \right)^{-n+1} \right)$$

$n = 2$  时, 对应的是四叶玫瑰线,  $n = 3$  时, 是三叶玫瑰线.



**7.3.3 旋轮线** 旋轮线又称为转迹线或轮转曲线, 是指一条动曲线沿一条定曲线无滑动地滚动时, 动曲线上的某一定点 (或与之关联的某个定点)  $T$  所形成的轨迹. 它所包含的内容十分丰富, 摆线、外摆线、内摆线、次摆线、渐伸线等等皆属于旋轮线.

我们先来导出旋轮线的一般表示:

设与定曲线关联的一个基向量是  $\vec{AB}$ , 定曲线上的任意点  $P$  有表示  $\vec{AP} = z_1(u) \vec{AB}$ ; 又设动曲线关联的一个基向量是  $\vec{CD}$ , 动曲线上的任意点  $Q$  有表示  $\vec{CQ} = z_2(v) \vec{CD}$ , 与之关联的定点  $T$  有表示  $\vec{CT} = w \vec{CD}$ .

当动曲线沿定曲线作无滑动地滚动时, 在相切处  $P$ 、 $Q$  两点重合, 此时点  $T$  以基向量  $\vec{AB}$  的表示设为  $\vec{AT} = z \vec{AB}$ , 则由以上表示知

$$\vec{TP} = (z_1 - z) \vec{AB} = (z_2 - w) \vec{CD} \quad (\text{a})$$

定曲线与动曲线在  $P$  点处的切向量是平行的

$$\frac{dz_1}{du} \vec{AB} = k \frac{dz_2}{dv} \vec{CD}$$

这里的  $k$  应大于 0, 因为在滚动时它们行进的方向是一致的. 另外, 二者滚动的微元距离也应相等

$$ds = |dz_1 \vec{AB}| = |dz_2 \vec{CD}|$$

于是由这两式又知

$$dz_1 \vec{AB} = dz_2 \vec{CD} \quad (\text{b})$$

根据 (a) 和 (b) 即得方程

$$\frac{dz_1}{(z_1 - z)} = \frac{dz_2}{(z_2 - w)}$$

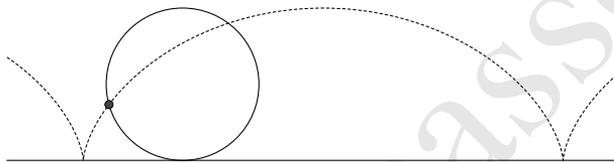
在实际的应用中, 通常基向量  $\vec{AB}$  和  $\vec{CD}$  的模长均是单位 1. 因此, 我们可在复平面上重新表述结论如下:

**命题 7.3.2** 复平面上, 若动曲线  $z_2$  沿定曲线  $z_1$  作无滑动地滚动, 则与动曲线关联的定点  $T$  所形成的轨迹  $z$  为:

$$z = z_1 + \frac{dz_1}{dz_2}(T - z_2); \quad |dz_1| = |dz_2| \quad (7.3.1)$$

下面我们来看一些具体的示例.

**例 7.3.3 (摆线)** 摆线是指一个圆在一条定直线上滚动时, 圆周上一个定点的轨迹.



**解** 在复平面上求解: 定直线可表示为  $z_1 = u$ , 圆可表示为  $z_2 = re^{i\theta}$ , 圆周上的定点  $T$  不妨设为  $T = r$ , 则有

$$z = u + i \frac{du}{d\theta}(1 - e^{-i\theta}); \quad |du| = |rd\theta|$$

由此得到摆线的一般表示是

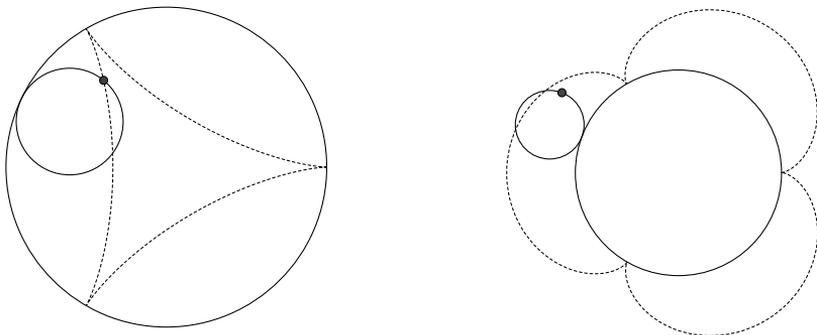
$$z = (C + r\theta - r \sin \theta) + ir(1 - \cos \theta)$$

另一个解

$$z = (C - r\theta + r \sin \theta) - ir(1 - \cos \theta)$$

对应的是圆在直线之下滚动, 通常这是不会出现的情形. □

**例 7.3.4 (内摆线/外摆线)** 一个动圆沿一个定圆作无滑动的滚动, 若动圆位于定圆之内, 则动圆上定点的轨迹称为内摆线, 反之称为外摆线.



**解** 不妨设定圆的表示为  $z_1 = Re^{i\theta}$ , 动圆的表示为  $z_2 = re^{i\varphi}$ , 动圆上的定点  $T = r$ , 则根据 (7.3.1) 容易得到内摆线的表示

$$z = (R - r) \cos \theta + r \cos\left(C + \frac{R - r}{r} \theta\right) + i(R - r) \sin \theta - ir \sin\left(C + \frac{R - r}{r} \theta\right)$$

和外摆线的表示

$$z = (R + r) \cos \theta - r \cos\left(C - \frac{R + r}{r} \theta\right) + i(R + r) \sin \theta + ir \sin\left(C - \frac{R + r}{r} \theta\right) \quad \square$$

显然, 当  $R$  与  $r$  的比值为有理数时, 内摆线/外摆线是一条有理曲线, 上图所示的是  $R : r = 3$  的情形.

若读者想了解更多的曲线, 可前往 <https://mathcurve.com>.