

# CORRECTIONS DES SUJETS D'EXAMENS DE GÉODÉSIE ET DE CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE - PARTIE III -

Par

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM,  
Ingénieur Géographe Général**

**ABSTRACT :** This is the part III of the correction of the collection of exams of geodesy and mathematical cartography. These exams are from the German school, namely from the Institute of Geodesy of the University of Stuttgart where the eminent professor Erik W. Grafarend (1939-2020) taught geodesy courses and in particular mathematical cartography. This is an opportunity for French-speaking students to share the German methodology.

**RÉSUMÉ :** Ce papier contient la troisième partie de la correction de la collection choisie d'examens de géodésie et de cartographie mathématique. Ces examens sont de l'école allemande à savoir de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminent professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. C'est l'occasion pour les étudiants francophones de partager la méthodologie allemande.

**Version 1, Juillet 2023**



FIGURE 1 – Prof. Erik Grafarend et son collègue Prof. Helmut Moritz écoutent attentivement les contributions d’une conférence [1]

**Abdelmajid BEN HADJ SALEM**

Résidence Bousten 8, Bloc B, Avenue Mosquée Raoudha,  
1181 Soukra Raoudha,  
Tunisia.

e-mail : abenhadjsalem@gmail.com

*A Mes Amis Et Collègues Abdelaziz  
Nbiba et Lazhar Nachi*



---

## TABLE DES MATIÈRES

---

Préface	7
1 Sujets de Géodésie	9
2 Sujets de Cartographie Mathématique	11



---

## PRÉFACE

---

Dans ce document, j'ai voulu présenter aux élèves ingénieurs géomètres et géomaticiens la troisième et finale partie de la correction de quelques exemples de sujets de problèmes de géodésie et de cartographie mathématique de l'école allemande plus précisément de l'Institut de Géodésie de l'Université de Stuttgart où l'éminent professeur Erik W. Grafarend (1939-2020) enseignait les cours de géodésie et notamment la cartographie mathématique. Ce dernier était connu pour ses articles demandant une rigoureuse connaissance en particulier en mathématiques.

Je souhaite que la correction soit bien reçue par les différents lecteurs. J'ai gardé le même classement des sujets proposés.

*Abdelmajid Ben Hadj Salem, Dipl. Ing.  
Ingénieur Géographe Général  
Juillet 2023*



---

## SUJETS DE GÉODÉSIE

---

**Problème 1.0.1. VOIR - PARTIE I - <https://vixra.org/pdf/2307.0051v1.pdf>**

**Problème 1.0.2. VOIR - PARTIE I - <https://vixra.org/pdf/2307.0051v1.pdf>**

**Problème 1.0.3. VOIR - PARTIE II - <https://vixra.org/pdf/2307.0079v1.pdf>**

**Problème 1.0.4. VOIR - PARTIE II - <https://vixra.org/pdf/2307.0079v1.pdf>**

**Problème 1.0.5. VOIR - PARTIE II - <https://vixra.org/pdf/2307.0079v1.pdf>**



---

## SUJETS DE CARTOGRAPHIE MATHÉMATIQUE

---

**Problème 2.0.1.** 1)- Le modèle de la terre n'est pas le sphéroïde de révolution WGS84, mais une sphère de rayon  $a$ . On a une représentation plane conique conforme sécante, dans ce cas l'isomètre central est le parallèle de latitude  $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ . Les latitudes des deux parallèles automécoïques ( $m_\varphi = 1$ ) sont les suivantes :

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta\varphi$$

On rappelle la définition d'une représentation Lambert conique conforme :

- conique : on utilise les coordonnées polaires  $R$  et  $\Omega$  ;
- conforme : conservation des angles ou l'altération angulaire est nulle ;
- directe : les coordonnées polaires sont des fonctions de la forme :

$R = R(\varphi)$ $\Omega = \Omega(\lambda)$
---

où  $(\varphi, \lambda)$  sont les coordonnées d'un point sur le modèle sphérique de référence.

Une interprétation de la représentation plane Lambert est comme suit :

- on considère un cône (C) (**Fig. 2.1**) de sommet  $S$  tangent au parallèle origine de latitude  $\varphi_0$  de la sphère de référence  $\mathcal{S}$ . A un point  $M(\varphi, \lambda)$  de  $\mathcal{S}$ , on lui fait correspondre son image  $m$  sur la demi-droite d'origine  $S$  tangente à la méridienne de longitude  $\lambda$  et au parallèle origine.
- on développe le cône (C) sur le plan, on obtient l'image d'une portion de la sphère (**Fig. 2.2**).

Les images des parallèles sont des arcs de cercles concentriques de centre  $s$  l'image du sommet du cône (C), celles des méridiens sont des droites concordantes passant par  $s$  (**Fig. 2.2**).

Les courbes coordonnées  $\varphi = \text{constante}$  et  $\lambda = \text{constante}$  sur le modèle sont orthogonales et leurs images le sont aussi dans le plan.

D'après la propriété précédente des courbes coordonnées, on déduit que les directions principales sont les tangentes au méridien et au parallèle passant par le point.

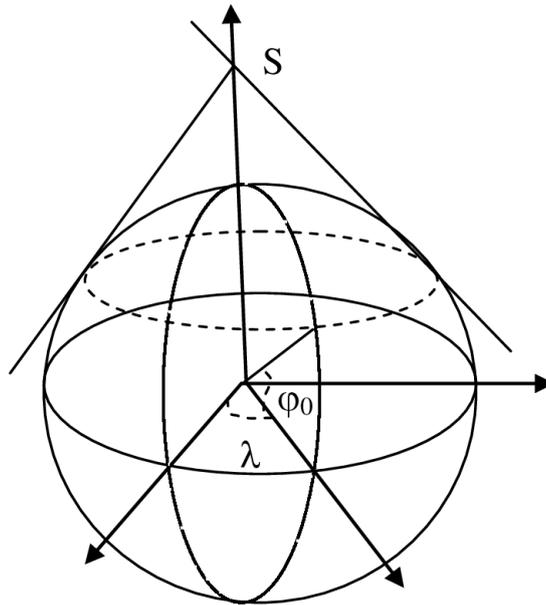


FIGURE 2.1 – Interprétation géométrique

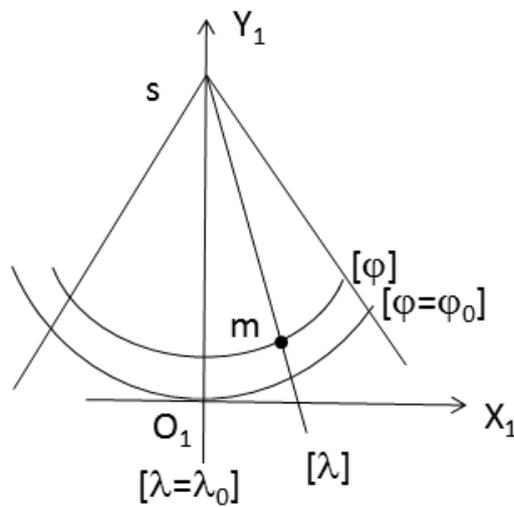


FIGURE 2.2 – Images des parallèles et des méridiens

La représentation est conforme, par suite l'altération angulaire est nulle, l'indicatrice de Tissot est un cercle et le module linéaire ne dépend pas de la direction mais seulement du point et on a l'équivalence :

$$\text{Altération angulaire nulle} \Leftrightarrow m_\varphi = m_\lambda \Leftrightarrow \forall \delta, m_\delta = m$$

où  $\delta$  désigne 'la direction'.

#### CALCUL DES MODULES PRINCIPAUX

On commence par le calcul du module  $m_\varphi$ . Par définition :

$$m_\varphi = \frac{dS}{ds}$$

avec  $dS$  pris sur l'image de la méridienne et  $ds$  sur la méridienne du modèle, or  $ds = a d\varphi$  avec  $a$  le rayon de la sphère et  $dS = -dR$ , le signe - provient du fait que les déplacements infinitésimaux  $dR$  et  $d\varphi$  sont de signe contraire.

$$m_\varphi = \frac{dS}{ds} = \frac{-dR}{a d\varphi}$$

Maintenant on calcule le module principal  $m_\lambda$ , on a :

$$m_\lambda = \frac{dS}{ds} = \frac{R d\Omega}{r d\lambda} = \frac{R d\Omega}{a \cos\varphi d\lambda}$$

avec  $r = a \cdot \cos\varphi$  le rayon du parallèle de latitude  $\varphi$ .

#### ETABLISSEMENT DES FORMULES $R(\varphi)$ ET $\Omega(\lambda)$

Comme on a :

$$m_\lambda = m_\varphi$$

d'où :

$$\frac{R d\Omega}{a \cos\varphi d\lambda} = \frac{-dR}{a d\varphi} \Rightarrow \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{-\cos\varphi dR}{R d\varphi}$$

Le terme à gauche est une fonction de  $\lambda$  seulement car  $\Omega$  ne dépend que de  $\lambda$ , le terme à droite est fonction de  $\varphi$  seulement, donc l'égalité est toujours vérifiée que si les deux termes sont constants, on appelle  $n$  cette constante, d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\lambda} &= n \\ \frac{-\cos\varphi dR}{R d\varphi} &= n \end{aligned}$$

Par suite, en intégrant la première équation et prenant  $\Omega(\lambda_0) = 0$  avec  $\lambda_0$  la longitude du méridien origine, on obtient :

$$\Omega = n(\lambda - \lambda_0) \tag{2.1}$$

La deuxième équation différentielle s'écrit sous la forme :

$$\frac{dR}{R} = \frac{-n d\varphi}{\cos\varphi} = -n dL$$

avec :  $dL = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ . La variable  $L$  appelée la latitude croissante donnée par la formule :

$$L(\varphi) = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$$

On revient à l'équation :

$$\frac{dR}{R} = \frac{-n d\varphi}{\cos\varphi} = -n dL$$

En posant :

$$L_0 = L(\varphi_0)$$

où  $\varphi_0$  est la latitude du parallèle origine, l'intégration de  $dR/R$  donne :

$$\text{Log} \frac{R}{R_0} = -n(L - L_0) \implies R = R_0 \exp(-n(L - L_0)) = R_0 e^{-n(L - L_0)}$$

#### DÉTERMINATION DES CONSTANTES $R_0$ ET $n$

Pour déterminer les constantes  $R_0$  et  $n$ , on a les parallèles  $\varphi = \varphi_1$  et  $\varphi = \varphi_2$  qui sont automécoïques, c'est-à-dire :

$$m(\varphi_1) = m(\varphi_2) = 1$$

Or  $m = m_\varphi = m_\lambda$ . Comme  $m_\lambda = \frac{R d\Omega}{r d\lambda} \implies m_\lambda = \frac{nR}{a \cos\varphi}$ , par suite :

$$m(\varphi) = \frac{nR}{a \cos\varphi}$$

Notons  $L_1 = L(\varphi_1)$  et  $L_2 = L(\varphi_2)$ . Alors  $m(\varphi_1) = m(\varphi_2) = 1$  donne :

$$\frac{nR(\varphi_1)}{a \cos\varphi_1} = \frac{nR(\varphi_2)}{a \cos\varphi_2}$$

Par un calcul facile, on obtient :

$$n = \frac{1}{L_2 - L_1} \cdot \text{Log} \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2}$$

On calcule  $R_0$  en utilisant  $\frac{nR_0 e^{-n(L_1 - L_0)}}{a \cos\varphi_1} = 1$ , soit :

$$R_0 = \frac{a \cos\varphi_1 (L_2 - L_1)}{\text{Log} \left( \frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2} \right)} e^{-n(L_1 - L_0)}$$

Si on veut utiliser l'angle complémentaire à  $\varphi$  c'est-à-dire  $\Delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ , on aura  $L = \text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = \text{Logcotg}(\Delta/2)$ . Ainsi  $L_2 - L_1 = \text{Log} \frac{\text{cotg}(\Delta_2/2)}{\text{cotg}(\Delta_1/2)}$  et :

$$n = \frac{1}{\text{Log} \frac{\text{cotg}(\Delta_2/2)}{\text{cotg}(\Delta_1/2)}} \text{Log} \frac{\sin\Delta_1}{\sin\Delta_2}$$

**Problème 2.0.2.** En 1937, l'Allemand Karl Siemon (?-1937) présente une nouvelle représentation plane de la sphère de rayon  $R$ , la projection authalique dite biquadratique (quartic authalic projection [2]) (voir figure ci-dessous), qui est déterminée par les équations de cartographie ci-après :

$$X = R(\lambda - \lambda_0) \frac{\cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \quad (2.2)$$

$$Y = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$$

1 - Soit  $m$  le module linéaire, on a  $m^2 = \frac{dS^2}{ds^2}$ . Pour la sphère  $ds^2 = R^2 d\varphi^2 + R^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2$ . Pour le plan  $dS^2 = dX^2 + dY^2$ . Soit :

$$\begin{cases} dX = \frac{R(\lambda - \lambda_0) \sin \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi + \frac{R \cos \varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\lambda \\ dY = R \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$dS^2 = R^2 \left( \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4 \cos^4 \frac{\varphi}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi^2 + \frac{R^2 (\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} d\varphi d\lambda + \frac{R^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\lambda^2$$

D'où :

$$m^2 = \frac{\left( \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4 \cos^4 \frac{\varphi}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi^2 + \frac{(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} d\varphi d\lambda + \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\lambda^2}{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2}$$

2) - Considérons en un point  $M(\varphi, \lambda)$  une courbe de direction ayant un azimut  $\theta$  tel que  $\sin \theta = \frac{\cos \varphi d\lambda}{d\varphi}$ . Le module linéaire en  $M$  suivant la direction est tel que :

$$m^2(\varphi, \lambda) = \frac{\left( \frac{(\lambda - \lambda_0)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{4 \cos^4 \frac{\varphi}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{(\lambda - \lambda_0) \sin \theta \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos^3 \frac{\varphi}{2}} + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}}{1 + \sin^2 \theta}$$

On déduit que  $m(\varphi, \lambda)$  dépend de l'azimut de la direction, par suite la représentation n'est pas conforme.

3) - Quand  $\varphi = \text{cte}$ , l'image des parallèles sont des droites parallèles à l'axe des  $X$  et l'image des méridiens ( $\lambda = \text{cte}$ ) sont des courbes, la présence du terme  $\lambda - \lambda_0$  dans la formule du  $X$ , indique que dans les zones extrêmes de la carte en particulier les images des méridiens, les distorsions qui se produisent sont maximales.

4) - Au méridien central  $\lambda = \lambda_0 = 0$ , on trouve que le module linéaire  $m(\varphi, \lambda = 0) = \cos \frac{\varphi}{2} < 1$  et sur l'équateur, le module linéaire est  $m(\varphi = 0, \lambda) = \left( \frac{1}{\cos \varphi / 2} \right)_{\varphi=0} = 1$ , il s'ensuit qu'une longueur  $L$  sur l'équateur est conservée mais sur le méridien central cette longueur est réduite à  $L \cos(\varphi/2) < L$ .

5) - Considérons le parallèle  $\varphi = \varphi_1 = \text{cte}$ , par suite  $Y = 2R\sin(\varphi_1/2) = Y_1 = \text{cte}$ , c'est-à-dire que l'image du parallèle  $\varphi = \varphi_1 = \text{cte}$  est la droite  $Y = Y_1 = \text{cte}$  parallèle à l'axe des X.

6) - Pour le parallèle  $\varphi$ , l'image est la droite  $Y = 2R\sin(\varphi/2)$ . Considérons maintenant le parallèle  $\varphi + \Delta\varphi$ , son image est la droite d'ordonnée  $Y_1 = 2R\sin\frac{(\varphi + \Delta\varphi)}{2}$ . La distance entre les deux droites est  $d = Y_1 - Y = 2R \left( \sin\frac{(\varphi + \Delta\varphi)}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} \right)$ . Si on suppose que  $\Delta\varphi \ll \varphi$ , on obtient au premier ordre :

$$d = Y_1 - Y = 2R \left( \sin\frac{(\varphi + \Delta\varphi)}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} \right) = R\Delta\varphi\cos\frac{\varphi}{2} \implies d \text{ non constante}$$

Donc la distance entre les images des cercles parallèles n'est pas constante.

7) - Soit l'image d'un méridien donnée par  $X_1 = R(\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$ , et  $X_2 = R(\lambda_2 - \lambda_0) \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$

l'équation de l'image d'un deuxième méridien, alors la distance entre les images des 2 méridiens est :

$$d = X_2 - X_1 = R(\lambda_2 - \lambda_0) \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} - R(\lambda_1 - \lambda_0) \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}} = R(\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\cos\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}$$

Si on prend  $\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2 = \dots = \Delta\lambda = \text{constante}$ , et  $\varphi = 0$ , alors  $d = R\Delta\lambda = \text{constante}$ .

**Problème 2.0.3.** 1) - On réfute l'exactitude de la déclaration donnée dans le texte du problème. En effet, la représentation plane conforme directe cylindrique de Mercator est définie comme suit :

- Le modèle de la Terre est une sphère de rayon  $a$ , le point est défini par la latitude et longitude sphériques  $(\varphi, \lambda)$  (Fig. 2.3) :

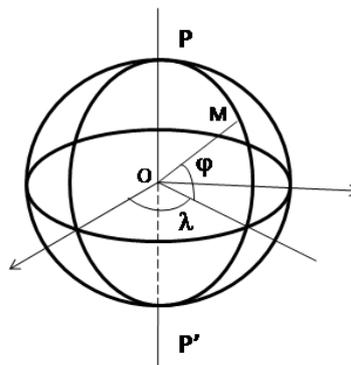


FIGURE 2.3 – Le Modèle Sphérique

Les équations de la représentation Mercator directe, avec méridien central le méridien  $\lambda = 0$ , sont :

$$\begin{aligned} X &= a\lambda \\ Y &= a \operatorname{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\operatorname{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$  est dite *latitude croissante ou de Mercator*.

- Le modèle de la Terre est un ellipsoïde de révolution défini par les paramètres connus  $(a, e)$ . Un point M sur l'ellipsoïde est défini par la latitude et longitude géodésiques telles qu'elles sont notées dans la figure ci-dessous (Fig. 2.4) :

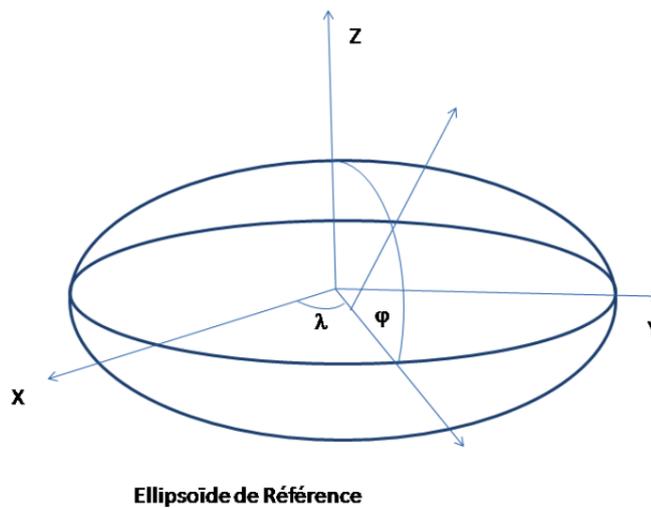


FIGURE 2.4 – Le Modèle Ellipsoïdique

Les coordonnées planimétriques de l'image du point sont :

$$\begin{aligned} X' &= a\lambda \\ Y' &= a \left[ \operatorname{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Log} \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right] = a \operatorname{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\operatorname{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \frac{e}{2} \operatorname{Log} \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi}$  est dite *latitude isométrique*, avec  $e$  la première excentricité de l'ellipsoïde de référence.

Les  $(\varphi, \lambda)$  du modèle sphérique sont indépendantes de celles du modèle ellipsoïdique. Dans le cas de l'ellipsoïde, on a les relations suivantes entre  $\varphi$  et  $\psi$  (Fig. ??) :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \varphi, & 1 - e^2 \sin^2 \varphi &= \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos^2 \psi} \\ \sin \varphi &= \frac{\sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}}, & \cos \varphi &= \frac{\cos \psi \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \end{aligned}$$

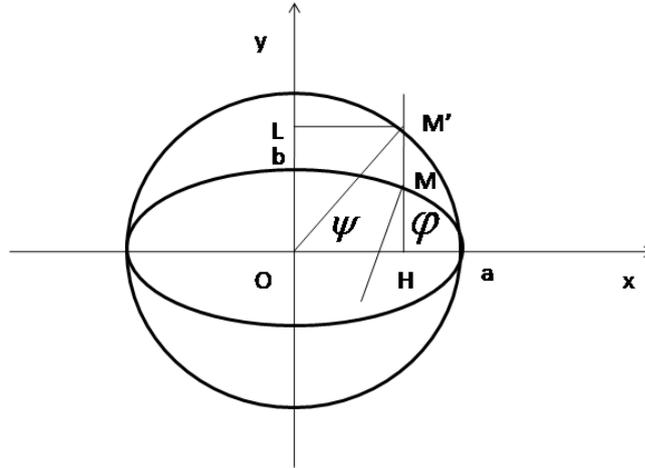


FIGURE 2.5 – Angles  $\varphi$  et  $\psi$ .

Alors par un calcul facile, on arrive à :

$$\frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{d\psi}{\cos\psi\sqrt{1 - e^2\cos^2\psi}}$$

Donc, il y a aucune interférence de  $\psi$  dans les formules (2.3) et (2.4).

**Problème 2.0.4.** En 1935, l'Allemand Karl Siemon (?-1937) introduisit une nouvelle représentation plane de la sphère de rayon  $R$ , dite projection loximutale [2], page 90, (voir figures ci-dessous) exprimée par les équations suivantes :

$$x = R(\lambda - \lambda_0) \begin{cases} \cos\varphi_0, & \varphi = \varphi_0, \\ \frac{\varphi - \varphi_0}{\text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}, & \varphi \neq \varphi_0 \end{cases}$$

$$y = R(\varphi - \varphi_0)$$

On va commencer par étudier  $\lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} x(\varphi, \lambda)$ . Soit le cas  $\varphi \rightarrow \varphi_0^-$  et notons  $f(\varphi) = \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow f'(\varphi) = 1/\cos\varphi$ . On a :

$$x = R(\lambda - \lambda_0) \frac{\varphi - \varphi_0}{\text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \text{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)} = R(\lambda - \lambda_0) \frac{\varphi - \varphi_0}{f(\varphi) - f(\varphi_0)}$$

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, \pi/2[$ , donc dérivable sur  $[0, \varphi_0[$ , on peut écrire :

$$f(\varphi) - f(\varphi_0) = (\varphi - \varphi_0)f'(\alpha) = (\varphi - \varphi_0) \frac{1}{\cos\alpha}$$

avec  $\alpha \in ]\varphi, \varphi_0[$ . Par suite,  $x$  devient :

$$x = R(\lambda - \lambda_0) \frac{\varphi - \varphi_0}{\varphi - \varphi_0} \cos\alpha = R(\lambda - \lambda_0) \cos\alpha \Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_0} x = R(\lambda - \lambda_0) \cos\varphi_0$$

Donc la continuité à gauche de  $x(\varphi, \lambda)$  en  $\varphi_0^-$  est vérifiée, de la même façon, on démontre que  $x$  est continue à droite au point  $(\varphi_0, \lambda)$ .

1)- Au point  $\varphi_0, \lambda_0$ , l'équation de la loxodromie d'azimut  $A$  est donnée par :

$$\operatorname{tg} A = \frac{d\varphi}{\cos\varphi_0 d\lambda} = C = \text{constante}$$

Sur la carte, on  $x = R(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi_0$  car  $\varphi = \varphi_0$  et  $y = R(\varphi - \varphi_0)$ , on déduit que :

$$dx = R\cos\varphi_0 d\lambda, \quad dy = R d\varphi \implies \frac{dy}{dx} = C \implies y = Cx + c \implies x = y = 0 \implies c = 0$$

L'image de la loxodromie est une droite  $y = Cx = x \operatorname{tg} A$ .

2) et 3) - Calcul du module linéaire :

On a :

$$dx = \frac{R(\varphi - \varphi_0)d\lambda}{f(\varphi) - f(\varphi_0)} + \frac{R(\lambda - \lambda_0)d\varphi}{(f(\varphi) - f(\varphi_0))^2} ((f(\varphi) - f(\varphi_0))\cos\varphi - (\varphi - \varphi_0))$$

$$dy = R d\varphi$$

Posons  $T(\varphi) = f(\varphi) - f(\varphi_0)$ ,  $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ ,  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ , on obtient :

$$m^2 = \frac{\left(1 + \frac{\Delta\lambda^2}{T^4(\varphi)} (T(\varphi)\cos\varphi - \Delta\varphi)^2\right) d\varphi^2 + 2 \frac{\Delta\varphi \cdot \Delta\lambda \cdot d\varphi d\lambda}{T^3(\varphi)} (T(\varphi)\cos\varphi - \Delta\varphi) + \frac{\Delta\varphi^2 d\lambda^2}{T^2(\varphi)}}{d\varphi^2 + \cos^2\varphi d\lambda^2}$$

Les distorsions sont extrêmes quand  $\varphi \rightarrow 0$ , prenons  $\lambda = \text{cte} \neq \lambda_0$ , le module linéaire est :

$$m = \sqrt{1 + \frac{\Delta\lambda^2}{T^4(\varphi)} (T(\varphi)\cos\varphi - \Delta\varphi)^2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta\lambda^2 \cdot (\varphi_0 - 2\operatorname{tg}(\varphi_0/2))^2}{16\operatorname{tg}^4(\varphi_0/2)}$$

4 - Pour le parallèle  $\varphi$ , l'image est la droite  $y = R(\varphi - \varphi_0)$ . Considérons maintenant le parallèle  $\varphi + \Delta\varphi$ , son image est la droite d'ordonnée  $y_1 = R(\varphi + \Delta\varphi - \varphi_0)$ . La distance entre les deux droites est  $d = y_1 - y = R\Delta\varphi$ . Si on suppose que  $\Delta\varphi$  est prise en une valeur constante, alors les distances entre les images des parallèles  $\varphi, \varphi + \Delta\varphi, \varphi + 2\Delta\varphi, \dots$ , sont constantes.

5) - La longueur sur le méridien central est  $L_{mc} = \pi R \cdot m_\varphi$ , mais  $m_\varphi = 1$  en prenant  $\lambda = \lambda_0$  et  $d\lambda = 0$  dans la formule donnant  $m^2$  ci-dessus. Alors la longueur du méridien central est égale à  $L_{mc} = \pi R$ .

Sur l'équateur, la longueur est  $\pi R \cdot m_\lambda$  avec  $\varphi = 0$ , on obtient le module linéaire suivant l'équateur  $m_\lambda = \frac{\varphi_0}{\operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}$  d'où  $L_{eq} = \pi R \frac{\varphi_0}{\operatorname{Logtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2}\right)}$ .

Le rapport demandé est :

$$\frac{\pi R}{\frac{\pi R \varphi_0}{\text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}} = \frac{\text{Logtg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\varphi_0}$$

Prenant l'exemple  $\varphi_0 = 30^\circ = \pi/6$  rd, le rapport vaut  $\frac{6}{\pi} \text{Logtg} \left( \frac{5\pi}{12} \right) = 2.515$ .

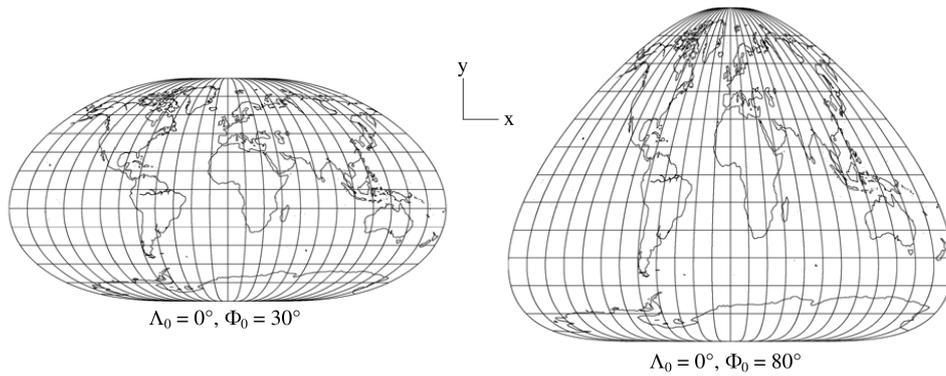


FIGURE 2.6 – Deux exemples de la carte étudiée :  $\varphi_0 = 30^\circ$  et  $\varphi_0 = 80^\circ$

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] [https://leibnizsozietat.de/kolloquium-der-leibniz-sozietat-am-13-02-2015-zum-thema-geodaesie-mathematik-physik-geophysik-kurzbericht/\(2015\)](https://leibnizsozietat.de/kolloquium-der-leibniz-sozietat-am-13-02-2015-zum-thema-geodaesie-mathematik-physik-geophysik-kurzbericht/(2015))
- [2] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2023. A Selected Collection of Exams of Geodesy and Mathematical Cartography From The German School. Version 1. June, in French. <https://vixra.org/pdf/2306.0029v1.pdf>
- [3] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2023. The Part I of the Correction of The Selected Collection of Exams of Geodesy and Mathematical Cartography From The German School. Version 1. July, 21 pages, in French. <https://vixra.org/pdf/2307.0051v1.pdf>
- [4] Abdelmajid Ben Hadj Salem. 2023. The Part II of the Correction of The Selected Collection of Exams of Geodesy and Mathematical Cartography From The German School. Version 1. July, 17 pages, in French. <https://vixra.org/pdf/2307.0079v1.pdf>