

절대 정지 관성계와 이에 대해 상대 운동하는 관성계에서의 상대속도, 관성 질량, 운동량 그리고 운동에너지에 대한 연구

A Study on the Absolute Stationary Inertial Frame and the Relative Velocity, Inertia Mass, Momentum and Kinetic Energy in the Inertial Frame moving relative to it

Jinil Mok (E-mail address : mokji@hotmail.com, phone: 1-647-856-8899)

Abstract

절대 정지 관성계가 우주에 존재하고, 빛의 속도는 절대 정지 관성계에서만 일정하다는 가정하에, 움직이는 관성계에서의 관성질량, 운동량 그리고 운동에너지에 대한 새로운 식을 유도하였다.

이 새로운 식을 유도하는 과정에서, 절대 정지 관성계에 대해 상대적으로 운동하는 관성계의 속도를 구할수 있는 실험방법이 제시되었다. 이 실험이 성공한다면, 우리 지구는 우주에서 어느 방향으로 얼마나 빠르게 날아가는지 알아낼수 있다.

Assuming that an absolute stationary inertial frame exists in the universe and the speed of light is constant only in the absolute stationary inertial frame, new equations for inertial mass, momentum and kinetic energy in a moving inertial frame are derived.

In the process of deriving the new equations, an experiment was presented to obtain the velocity of the inertial frame moving relative to the absolute stationary inertial frame. If this experiment is successful, we could find out how fast and in which direction our Earth is moving in space.

1.0 Introduction

알버트 아인슈타인은 1905 년에 발표한 특수 상대성이론에서, 광속불변 원칙과 절대 정지관성계는 존재하지 않는다는 가정하에, 시간 지연, 질량증가 및 운동에너지에 대한 식을 유도하였다 [R-1].

이 연구에서는 절대 정지 관성계가 존재한다는 가정과, 빛의 속도에 대해 다음과 같은 2 개의 가정을 사용하여, 절대 정지 관성계에 대해 상대운동하는 관성계에서의 관성질량, 운동량 및 운동에너지에 대한 새로운 식을 유도하였다.

- 가정 1. 우주에는 절대 정지 관성계가 존재한다.
- 가정 2. 절대 관성계에서 빛의 속도는 광원의 운동에 상관없이 일정하다. 즉 움직이는 물체에서 발생한 빛이나 정지한 물체에서 발생한 빛이나 절대 정지 관성계에서는 같은 속도로 관측된다.
- 가정 3. 마이컬슨-몰리 실험 [R-2] 에 기초하여, 움직이는 관성계에서, 모든 방향에 대한 빛의 왕복속도는 동일하고 절대 정지 관성계에서 빛의 속도와 같다.

2.0 절대 정지 관성계 변환 인자

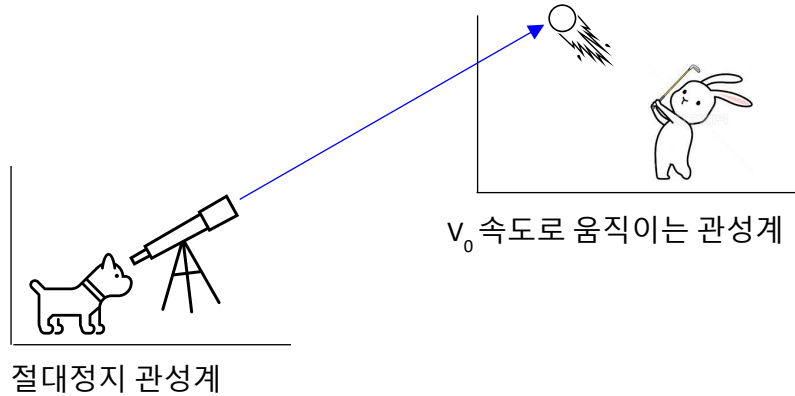


Figure 1. 속도 v_0 로 날아가는 관성계에서 친 골프공을 절대관성계에서 관측

Figure 1 처럼, 움직이는 관성계에서 던져진 물체의 운동에너지를 절대 정지 관성계 관점에서 계산하기 위해, 다음과 같은 4 개의 절대 정지 관성계 값으로 변환하는 인자가 사용되었다.

- 길이 변환 인자.
- 시간 변환 인자
- 속도 변환 인자
- 질량 변환 인자.

이 식을 유도하는 과정에서, 절대 정지 관성계에 대해 상대 운동하는 관성계 속도를 알아낼수 있는 실험 방법이 제시되었고, 움직이는 관성계에 관측한 물체의 절대 정지 관성계에 대한 새로운 상대속도 식이 유도되었다.

2.1 움직이는 관성계 길이를 절대 정지 관성계 길이로 변환

Figure 2 과 같이 반원 반사체를 가진 우주선이 v_0 속도로 날아가면서 우주선 중심에서 빛이 발생한다고 생각하자.

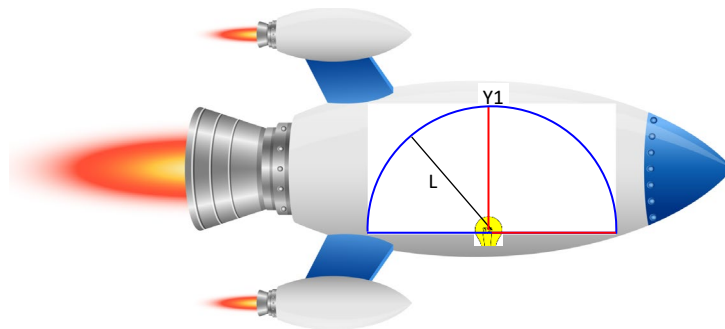


Figure 2. 절대관성계에 대해 속도 v_0 로 날아가는 우주선

우주선의 중심에서 발생한 빛이 Y1 과 반사체의 어느 한 점에서 각각 반사되어 우주선 중심으로 돌아오는 경로는 절대 정지 관성계에서 Figure 3 같이 관측된다.

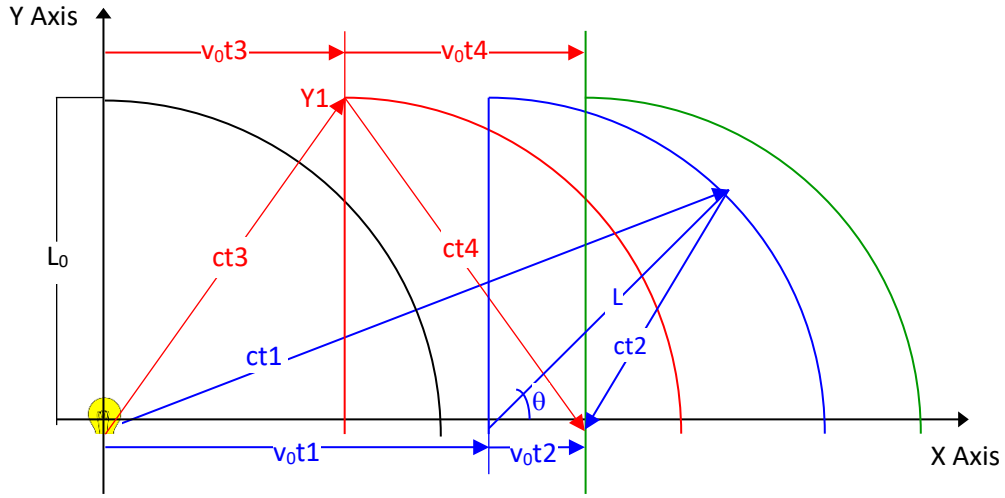


Figure 3. 절대관성계에서 관측한 우주선 안에서의 빛의 경로

반사체 Y1 에 반사되서 우주선 중심으로 돌아오는 빛의 경로

Y 축 방향으로는 길이 수축이 없다고 가정하고, 우주선의 중심에서 발생한 빛이 Y1 지점에서 반사되어 우주선 중심으로 돌아오는 시간, $t_3 + t_4$, 는 절대 정지 관성계에서 다음과 같이 계산할 수 있다.

t_3 : 우주선 중심에서 발생한 빛이 반사체 Y1 에 도달하는 시간

$$(L_0)^2 + (v_0 t_3)^2 = (c t_3)^2$$

t_4 : 반사체 Y1 에서 반사된 빛이 우주선 중심으로 다시 돌아오는 시간

$$(L_0)^2 + (v_0 t_4)^2 = (c t_4)^2$$

$$t_3 + t_4 = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \quad (1)$$

반사체의 어느 한점에서 반사되서 우주선 중심으로 돌아오는 빛의 경로

우주선의 중심에서 발생한 빛이 반사체의 어느 한 점에서 반사되어 우주선 중심으로 돌아오는 시간, $t_1 + t_2$ 는 절대 정지 관성계에서 다음과 같다.

$$(c t_1)^2 = (L \sin \theta)^2 + (L \cos \theta + v_0 t_1)^2 = L^2 + 2L \cos \theta v_0 t_1 + (v_0 t_1)^2$$

$$t_1 = \frac{L v_0 \cos \theta + \sqrt{L^2 (\cos \theta)^2 v_0^2 + L^2 (c^2 - v_0^2)}}{c^2 - v_0^2} \quad (2)$$

$$(c t_2)^2 = (L \sin \theta)^2 + (L \cos \theta - v_0 t_2)^2 = L^2 - 2L \cos \theta v_0 t_2 + (v_0 t_2)^2$$

$$t_2 = \frac{-L v_0 \cos \theta + \sqrt{L^2 (\cos \theta)^2 v_0^2 + L^2 (c^2 - v_0^2)}}{c^2 - v_0^2} \quad (3)$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2L\sqrt{(\cos\theta)^2 v_0^2 + (c^2 - v_0^2)}}{c^2 - v_0^2} \quad (4)$$

가정 3 에 따라, 모든 방향으로 빛의 속도는 같아야 하므로, 어느 한 점에 대한 왕복시간 t_1+t_2 , 식 (4) 와 γ_1 으로 왕복시간 t_3+t_4 , 식 (1) 은 같아야 한다.

$$\frac{2L\sqrt{v_0^2(\cos\theta)^2 + (c^2 - v_0^2)}}{c^2 - v_0^2} = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2 - v_0^2}}$$

그러므로, 움직이는 관성계에서의 길이 L_0 는 절대 정지 관성계에서는 다음과 같이 수축되어 L 로 관측된다.

$$L = \frac{L_0 \sqrt{c^2 - v_0^2}}{\sqrt{c^2 - v_0^2 + v_0^2(\cos\theta)^2}} = \frac{L_0}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2}}} \quad (5)$$

움직이는 관성계 길이를 절대 정지 관성계 길이로 변환하는 길이 수축 인자 R_L 은 다음과 같이 정의한다.

$$R_L = \frac{L}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2}}} \quad (6)$$

2.2 움직이는 관성계 시간을 절대 정지 관성계 시간으로 변환

움직이는 관성계에서 단위시간을 Figure 4 과 같이 빛이 관성계 안에서 거리 L_0 를 왕복하는 시간으로 정의하자,

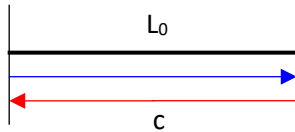


Figure 4. 관성계에서의 단위시간

한 관성계에서의 단위시간은 다음과 같이 표현된다.

$$t_0 = \frac{2L_0}{c} \quad (7)$$

절대 정지 관성계에서는 움직이는 관성계 왕복시간은, 식 (1) 와 같이 관측되고, 식 (1) 의 시간은 항상 식 (7) 의 시간 보다 크다. 그러므로, 움직이는 관성계 단위시간은 절대관성계 단위시간보다 느리게 가는것으로 유추할수 있다.

절대관성계 시간 t 을 식 (1), 움직이는 관성계 시간 t_0 을 식 (7) 으로 사용하여, 움직이는 관성계시간을 절대정지 관성계 시간으로 변환하는인자 R_T 를 다음과 같이 정의한다.

$$R_T = \frac{t}{t_0} = \frac{\frac{2L_0}{c\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}}{\frac{2L_0}{c}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} \quad (8)$$

움직이는 관성계 속도 v_0 측정

식 (2) 과 (3) 로 부터, 한쪽 표면적에 도달하는 시간 t_1 과 다시 원점에 돌아가는 시간 t_2 의 차이는 절대 정지 관성계에서 다음과 같다.

$$\Delta t_a = t_1 - t_2 = \frac{2Lv_0\cos\theta}{c^2 - v_0^2} = \frac{2L_0v_0\cos\theta}{(c^2 - v_0^2)\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2}}} = \frac{2L_0v_0\cos\theta}{c^2\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v_0^2(\sin\theta)^2}{c^2}}} \quad (9)$$

움직이는 관성계에서 시간차는 시간팽창을 고려하면, 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\Delta t_s = \Delta t_a \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{2L_0v_0\cos\theta}{c^2\sqrt{1 - \frac{v_0^2(\sin\theta)^2}{c^2}}} \quad (10)$$

최대 Δt_s 는 $\theta=0$ 에서 발생하므로

$$\Delta t_{s_max} = \frac{2L_0v_0}{c^2} \quad (11)$$

실험에 의해, 최대 Δt_{s_max} 을 측정할수 있으면, 움직이는 관성계 속도는 다음과 같이 구 할수 있다.

$$v_0 = \Delta t_{s_max} \frac{c^2}{2L_0} \quad (12)$$

이 실험이 성공하면, 우리가 우주에서 어떤 방향으로 어떤 속도로 움직이는지 알수 있다.

2.3 움직이는 관성계 속도를 절대 정지 관성계 속도로 변환

위에서 구한 길이 변환 인자 R_L 식 (6) 와 시간 변환 인자 R_T 식 (8) 을 이용해, 움직이는 관성계에서 관측된 속도는 다음과 같은 속도 변환 인자 R_v 을 사용하여 절대 정지 관성계에서 관측되는 속도로 변환할수 있다.

$$R_v = \frac{R_L}{R_T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2}}} \cdot \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2(\sin\theta)^2}{c^2}}} \quad (13)$$

2.4 움직이는 관성계 속도로 인한 질량증가인자, γ

절대 정지 관성계에서 질량 m_0 인 폭탄이 v_0 의 속도로 날아가면서, Figure 5 과 같이 모든 방향으로 빛의 속도보다 상대적으로 굉장히 느린 속도 v_1 로 폭발할때,

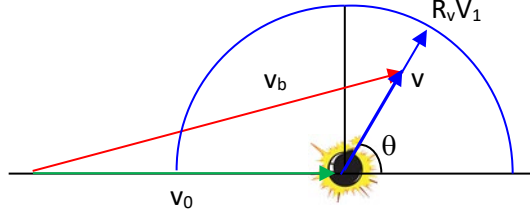


Figure 5. 정지질량 m_0 인 폭탄이 속도 v_0 로 날아가면서 v_1 속도로 폭발

Figure 5 에 보여진것 처럼, 절대 정지 관성계에서 관측한 파편의 속도, v_b 는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$v_b = \sqrt{v_0^2 + 2v_0 v \cos(\theta) + v^2} \quad (14)$$

질량증가 인자 γ 를 다음과 같은 두개의 접근방식을 사용하여 추론하였다.

2.4.1 Approach 1

움직이는 관성계 속도 v 로 인한 질량증가인자 γ 를 다음과 같이 가정한다.

$$\gamma = \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} \right)^n \quad (15)$$

속도 v_0 로 움직이는 관성계에서 폭탄 질량이 γ_0 배 증가 한다고 가정하여, 폭발 운동에너지를 다음과 같이 가정하자.

$$E_{k_bomb_m} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \gamma_0 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \left(\frac{c^2}{c^2 - v_0^2} \right)^n \quad (16)$$

Where γ_0 : v_0 로 움직이는 관성계에서 질량증가 인자

파편 속도 v_1 이 빛의 속도에 비해 상대적으로 0 에 가까운 속도라고 하면, 식 (15) 에서 가정한 질량증가인자 γ 를 사용하여, 절대 정지계에 관측한 임의의 방향에 대한 파편 운동에너지를 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\begin{aligned} E_{k_frag} &= \int_0^{R_v v_1} v_b d(P) = \int_0^{R_v v_1} v_b d \left(\frac{m_0}{4\pi} \gamma v_b \right) = \frac{m_0}{4\pi} \int_0^{R_v v_1} v_b d \left[\left(\frac{c^2}{c^2 - v_b^2} \right)^n v_b \right] \\ &= \frac{m_0}{4\pi} c^{2n} \int_0^{R_v v_1} \frac{v_0 \cos(\theta) + v}{[c^2 - (v_0^2 + 2v_0 v \cos(\theta) + v^2)]^{n+1}} [c^2 + (2n - 1)(v_0^2 + 2v_0 v \cos(\theta) + v^2)] dv \quad (17) \\ &= \frac{m_0 c^{2n}}{8\pi(n-1)} \left[\frac{(2n-1)(v_0^2 + 2v_0 v_1 \cos(\theta) + v_1^2) - c^2}{[c^2 - (v_0^2 + 2v_0 v_1 \cos(\theta) + v_1^2)]^n} - \frac{(2n-1)v_0^2 - c^2}{(c^2 - v_0^2)^n} \right] \end{aligned}$$

식 (17) 을 모든 3 차원 방향에 대해 적분하면, n=1/2 에 대한 폭발의 총 폭발에너지는 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\begin{aligned}
E_{k_{bomb}} &= \int_0^\pi E_{k_{frag}} \cdot 2\pi \cdot \sin(\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi \frac{m_0 c^3}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{c^2 - (v_0^2 + 2v_0 R_v v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2)}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \right] \cdot \sin(\theta) d\theta \\
&\approx \int_0^\pi \frac{m_0 c^3}{2\sqrt{c^2 - v_0^2}} \left[\frac{2v_0 R_v v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2}{2(c^2 - v_0^2)} \right] \cdot \sin(\theta) d\theta \\
&\approx \frac{m_0 c^3}{2\sqrt{c^2 - v_0^2}} \left[\frac{v_1^2}{2(c^2 - v_0^2)} \cdot 2 \frac{(c^2 - v_0^2)}{c^2} \right] \approx \frac{m_0 v_1^2}{2} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} = \frac{m_0 v_1^2}{2} \left(\frac{c^2}{c^2 - v_0^2} \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{18}$$

n=1/2 에 대해 식 (18) 이 식 (16) 을 만족하므로, 질량증가 인자를 다음과 같이 추론할수 있다.

$$\gamma = \left(\frac{c^2}{c^2 - v^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{19}$$

2.4.2 Approach 2

속도 v_0 로 움직이는 관성계에서 폭발이 v_1 속도로 폭발할때 질량이 γ_1 배 증가 한다고 가정하여, 폭발 운동에너지를 다음과 같이 가정하자.

$$E_{k_{bomb}} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \gamma_1 = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \left[\frac{c^2}{c^2 - (v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2})} \right]^n \tag{20}$$

Where γ_1 : the mass increase factor γ at the velocity of square root of average v_b^2 for the fragment

$$\begin{aligned}
\text{Average of } v_b^2 &= \int_0^\pi [v_0^2 + 2v_0 R_v v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2] \frac{\sin(\theta)}{2} d\theta \\
&= v_0^2 + v_1^2 \frac{[c^2 - v_0^2]^{\frac{3}{2}}}{c^2 v_0} \tan^{-1} \left(\frac{v_0}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \right) \approx v_0^2 + v_1^2 \frac{(c^2 - v_0^2)}{c^2} \approx v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2}
\end{aligned}$$

파편 속도 v_1 이 빛의 속도에 비해 상대적으로 0 에 가까운 속도라고 하면, 질량증가인자 γ 를 사용하여, 절대 정지계에 본 임의의 방향에 대한 파편 운동에너지를 근사식으로 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$\begin{aligned}
E_{k_{frag}} &= \int_0^{R_v v_1} v_b d(P) = \int_0^{R_v v_1} v_b d \left(\frac{m_0}{4\pi} \gamma v_b \right) = \frac{m_0}{4\pi} \int_0^{R_v v_1} \{v_b^2 d\gamma + \gamma [v_0 \cos(\theta) + v_1] dv\} \\
&\approx \frac{m_0}{4\pi} \left\{ \frac{[2v_0^2 + 2v_0 R_v v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2]}{2} (\gamma_1 - \gamma_0) + \frac{[\gamma_1 v_0 \cos(\theta) + \gamma_1 R_v v_1 + \gamma_0 v_0 \cos(\theta)]}{2} R_v v_1 \right\} \tag{21}
\end{aligned}$$

Where γ_0 : the mass increase factor γ at the velocity of the moving inertial frame, v_0

식 (21) 을 모든 3 차원 방향에 대해 적분하면, 폭발의 총 폭발에너지는 다음과 같이 구할수 있다.

$$E_{k_bomb} = \int_0^\pi \lim_{v_1 \rightarrow 0} E_{k_frag} \cdot 2\pi \sin(\theta) d\theta \quad (22)$$

$$= \frac{1}{2} m_0 \left\{ \left(2v_0^2 + 2v_1^2 - \frac{2v_0^2 v_1^2}{c^2} \right) \gamma_1 - \left(2v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2} \right) \gamma_0 \right\}$$

절대 정지관성계 관점에서 계산한 폭발에너지 식 (22) 은 움직이는 정지관성계 관점에서 가정한 폭발에너지 식 (20), $E_{k_bomb} = \frac{1}{2} m_0 v_1^2 \gamma_1$ 과 같아야 하므로, $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ 을 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\left(2v_0^2 + v_1^2 - \frac{2v_0^2 v_1^2}{c^2} \right) \gamma_1 = \left(2v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2} \right) \gamma_0$$

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = 1 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2 \left(2v_0^2 + v_1^2 + \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2} \right)} \approx 1 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2 (2v_0^2 + v_1^2)} \approx 1 - \frac{v_1^2}{2c^2} \approx \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} \quad (23)$$

식 (23) 에 근거하여, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 으로 가정하고, 식(19) 로 부터 직접, $\frac{\gamma_0}{\gamma_1}$ 을 계산하면, 식 (23) 과 동일한 결과를 얻는다. 그러므로 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ 을 추론할수 있다.

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2}}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{c^2 - v_0^2 + v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2}}}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2 - \frac{v_0^2 v_1^2}{c^2}}{c^2 - v_0^2}} \quad (24)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v_1^2 (c^2 - v_0^2)}{c^2 (c^2 - v_0^2)}} = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

3.0 절대 정지 관성계에 대해 상대 운동하는 관성계에서의 운동에너지, 운동량 및 관성질량

3.1 절대 정지계에서 관측한 운동에너지

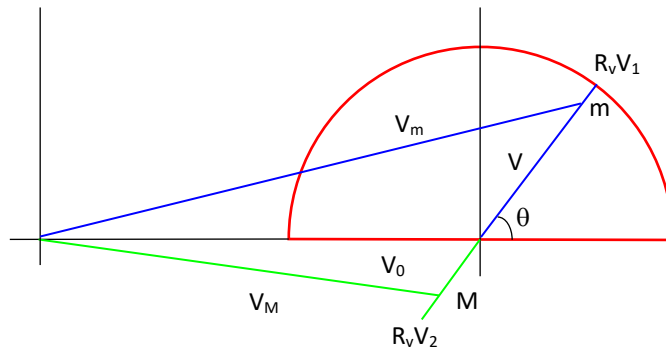


Figure 6. 절대정지 관성계에서 관측한, 속도 v_0 로 움직이는 관성계 M 에서 v_1 속도로 던져진 물체 m 속도와, 그로 인한 관성계의 속도변화

Figure 6 와 같이, v_0 속도로 움직이는 질량 M 인 관성계에서 질량 m 인 물체를 각도 θ 로 v_1 로 던져졌다.

이것을 절대 정지 관성계에서 관측하면, 질량 m 인 물체는 속도 변환 인자 R_v 식 (13) 에 의해 $R_v v_1$ 로 날아가고, 운동량이 보존되기 위해 질량 M 인 관성계는 반대방향으로 $v_2 = \frac{m_0 v_1}{M_0}$ 속도로 움직인다.

그러므로, 절대 정지 관성계에서 관측한 m 과 M 의 속도는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$v_m = \sqrt{v_0^2 + 2v_0 v \cos(\theta) + v^2} \quad (25)$$

$$v_M = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \frac{m_0 v}{M_0} \cos(\theta) + \left(\frac{m_0 v}{M_0}\right)^2} \quad (26)$$

식 (19) 에서 추론한 질량증가인자 γ 를 사용하여, m 와 M 을 다음과 같이 가정한다.

$$m = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}} \quad (27)$$

$$M = M_0 \gamma = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}}} \quad (28)$$

이 식들, (25) ~ (28)을 이용해, 절대 정지 관성계에서 관측한 운동에너지를 다음과 계산할수 있다.

$$\begin{aligned} E_{ka}(v_1) &= \int_0^{R_v v_1} v_m d(mv_m) + \int_0^{R_v v_2} v_M d(Mv_M) \\ &= \int_0^{R_v v_1} v_m d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_m^2}{c^2}}} v_m\right) + \int_0^{R_v v_2} v_M d\left(\frac{M_0}{\sqrt{1 - \frac{v_M^2}{c^2}}} v_M\right) \\ &= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2v_0 R_v v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2)}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right] - \frac{m_0 v_0 R_v v_1 \cos(\theta)}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (29)$$

3.2 움직이는 관성계 운동량

움직이는 관성계 운동에너지, E_{ks} 는 운동량, P_s 와 속도, v 로 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$E_{ks}(v_1) = \int_0^{v_1} v d(P_s) \quad (30)$$

절대 정지계에서 계산된 운동에너지, E_{ka} 와 움직이는 관성계 계산한 운동에너지, E_{ks} 는 같아야 하므로, 식 (30) 와 (29) 을 미분하여 $d(P_s)$ 을 다음과 같이 구할수 있다.

$$d(E_{ks}(v)) = v d(P_s) = d(E_{ka}(v))$$

$$\begin{aligned}
d(P_S) &= \frac{d(E_{Ka}(v))}{v} \\
&= \frac{m_0 c^3}{v} d \left\{ \frac{1}{\sqrt{c^2 - (v_0^2 + 2v_0 R_v v \cos(\theta) + R_v^2 v^2)}} - \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} - \frac{v_0 R_v v_1 \cos(\theta)}{(c^2 - v_0^2)^{3/2}} \right\} \quad (31)
\end{aligned}$$

식 (31) 으로부터 $d(P_S)$ 를 적분하여 움직이는 관성계 운동량, P_S 을 다음과 같이 구할수 있다.

$$\begin{aligned}
P_S(v_1) &= \int_0^{v_1} d(P_S) = m_0 c^3 R_v \int_0^{v_1} \frac{1}{v} \left\{ \frac{v_0 \cos(\theta) + R_v v}{[c^2 - (v_0^2 + 2R_v v_0 v \cos(\theta) + R_v^2 v^2)]^{3/2}} - \frac{v_0 \cos(\theta)}{(c^2 - v_0^2)^{3/2}} \right\} dv \\
&= \frac{m_0 R_v}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} \left\{ \frac{R_v v_1 + 2v_0 \cos(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2R_v v_0 v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2)}{c^2}}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{v_0 \cos(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left[2 - \ln(2) + \ln \left(\sqrt{1 - \frac{2R_v v_0 v_1 \cos(\theta) + R_v^2 v_1^2}{c^2 - v_0^2}} - \frac{v_0 R_v v_1 \cos(\theta)}{c^2 - v_0^2} + 1 \right) \right] \right\} \quad (32)
\end{aligned}$$

3.3 움직이는 관성계에서 관성질량

움직이는 관성계 운동량, P_S , 식 (32) 을 사용하여, 움직이는 관성계에서의 관성질량은 다음과 같이 구할수 있다.

$$m = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{P_S(v_1)}{v_1} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{2v_0^2 (\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2 (\sin\theta)^2} \right) \quad (33)$$

식 (33) 으로부터, 관성질량은 관성계의 속도와 방향의 함수임을 알수 있다.

4.0 3 차원 관성계에서 해석

4.1 3 차원 속도 변환 인자

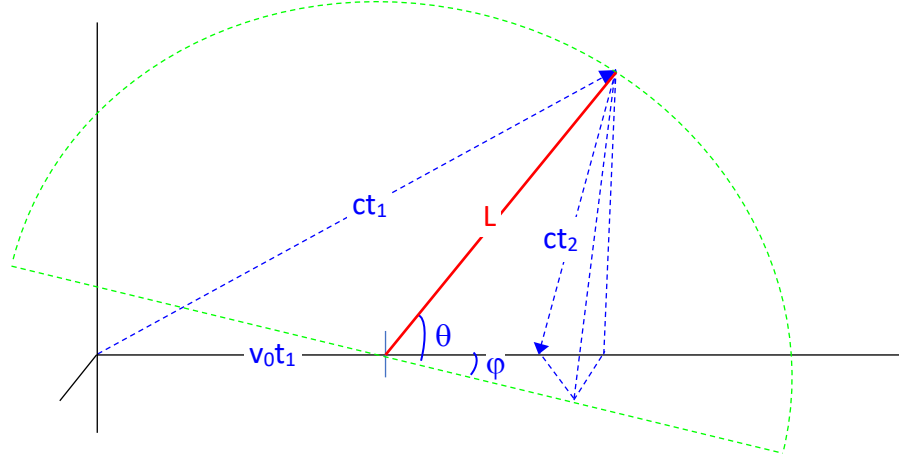


Figure 7. 절대관성계에서 관측한 우주선 안에서의 3 차원 빛의 경로

Section 0 방법에 근거하여, 3 차원 길이 변환 인자, $R_{L_{3D}}$ 는 다음과 같이 구할수 있다.

$$(ct_1)^2 = (v_0t_1)^2 + 2v_0t_1L\cos\theta\cos\varphi + (L\cos\theta)^2 + (L\sin\theta)^2 = (v_0t_1)^2 + 2v_0t_1L\cos\theta\cos\varphi + L^2$$

$$(ct_2)^2 = (v_0t_2)^2 - 2v_0t_2L\cos\theta\cos\varphi + (L\cos\theta)^2 + (L\sin\theta)^2 = (v_0t_2)^2 - 2v_0t_2L\cos\theta\cos\varphi + L^2$$

$$t_1 + t_2 = \frac{2L\sqrt{(\cos\theta\cos\varphi)^2v_0^2 + (c^2 - v_0^2)}}{c^2 - v_0^2} \quad (34)$$

가정 3 에 의해 식 (34) t_1+t_2 는식 (1) t_3+t_4 가 같아야 되므로

$$R_{L_{3D}} = \frac{L}{L_0} = \frac{\sqrt{c^2 - v_0^2}}{\sqrt{(\cos\theta\cos\varphi)^2v_0^2 + (c^2 - v_0^2)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2(\cos\theta\cos\varphi)^2}{c^2 - v_0^2}}} \quad (35)$$

시간변환 인자 R_T , 식 (8) 식 과 $R_{L_{3D}}$ 식 (35) 을 이용하여 3 차원 속도 변환 인자를 다음과 같이 구할수 있다.

$$\begin{aligned} R_{v_{3D}} &= \frac{R_{L_{3D}}}{R_T} = \left(\frac{c^2 - v_0^2}{c}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi\cos^2\theta)}} \\ &= \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2(1 - \cos^2\varphi\cos^2\theta)}{c^2}}} = \left(\frac{c^2 - v_0^2}{c}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{c^2 - v_0^2\sin^2\varphi - v_0^2\cos^2\varphi\sin^2\theta}} \end{aligned} \quad (36)$$

4.2 3 차원 관성계 상대 속도 및 최대속도

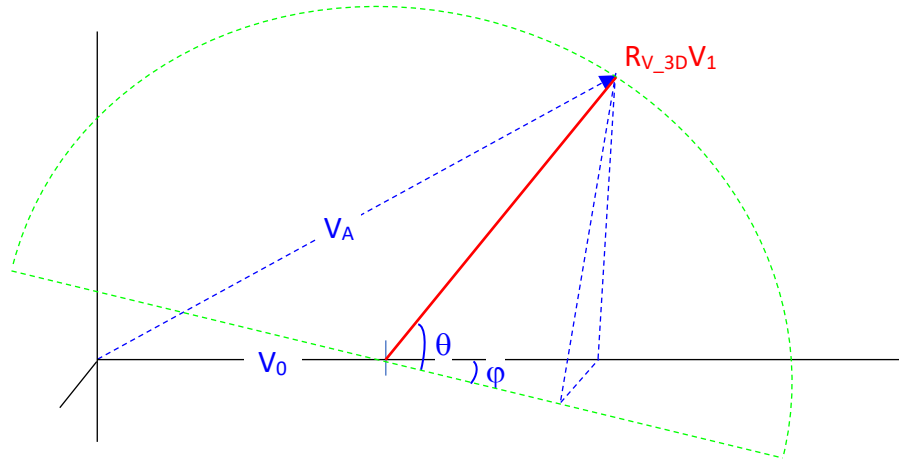


Figure 8. 속도 v_0 로 움직이는 관성계에서 v_1 으로 던져진 물체에 대한 절대 정지 관성계에서의 속도
 속도가 v_0 로 움직이는 관성계에서 물체를 v_1 로 던졌을때, 절대 정지 관성계에서는 $R_v v_1$ 로
 던져진것으로 관측되므로, 절대 정지 관성계에서의 물체의 절대 관성계 속도, v_A 는 다음과 같이
 나타낼수 있다.

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + 2v_0 R_{v_3D} v_1 \cos\varphi \cos\theta + R_{v_3D}^2 v_1^2}$$

$$= \sqrt{v_0^2 + 2v_0 v_1 \frac{c^2 - v_0^2}{c\sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}} \cos\varphi \cos\theta + \left(\frac{c^2 - v_0^2}{c\sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}}\right)^2 v_1^2} \quad (37)$$

절대 정지 관성계에서 관측한 속도 v_A 는 빛의 속도 c 를 넘을수 없으므로, 식 (37)에 $v_A = c$ 대입하여,
 v_1 을 구하면, 다음 같이 v_1 의 최대값을 구할수 있다.

$$v_{1_max} = \frac{c}{c^2 - v_0^2} \sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)} \cdot [-v_0 \cos\varphi \cos\theta + \sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}] \quad (38)$$

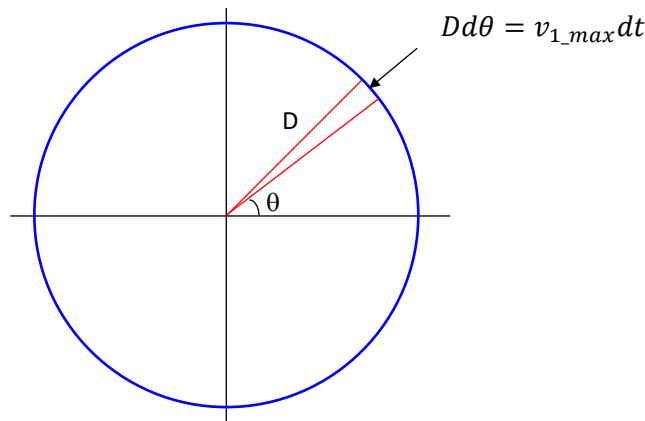


Figure 9. 관성계 최대속도로 원운동

임의의 φ 에서, $0 < \theta < 2\pi$ 에서 최대속도 v_{1_max} 의 평균값은 반지름 D 인 원둘레, 즉 $2\pi D$ 를 원운동 하는데 걸리는 시간 $T_{2\pi D}$ 으로 나누어 주면 된다. Figure 9 에 그려진것 처럼, 속도 v_{1_max} 로 거리 $Dd\theta$ 를 가는데 걸리는 시간, 즉 $\frac{Dd\theta}{v_{1_max}}$ 을 구간 $0 < \theta < 2\pi$ 에 대해 적분해 주면 $T_{2\pi D}$ 을 얻을수 있다.

$$T_{2\pi D} = \int_0^{2\pi} \frac{Dd\theta}{v_{1_max}} = \frac{D}{c} \int_0^{2\pi} \left[1 + \frac{v_0 \cos\varphi \cos\theta}{\sqrt{c^2 - v_0^2 \sin^2\varphi - v_0^2 \sin^2\theta}} \right] d\theta = \frac{2\pi D}{c} \quad (39)$$

이와 같이, 관성계 최대속도로 원운동하는 시간은 방향에 상관없이 일정하므로, 평균 최대속도 $v_{1_ave_max}$ 은 항상 c 가 된다. 이것은 움직이는 관성계에서 물체의 원 운동 속도는 어느 방향으로든 빛의 속도 c 를 넘을 수 없다는 것을 의미한다.

$$v_{1_ave_max} = \frac{2\pi D}{T_{2\pi D}} = c \quad (40)$$

거의 빛의 속도 날아가는 우주선에서 앞쪽 빛, 즉 $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 방향 빛을 관찰한다고 생각하자.

v_0 가 c 에 근접하면, $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 방향에 대해 로피탈 정리에 의해 식 (38) 은 $c/2$ 에 다음과 같이 수렴한다.

$$\begin{aligned} v_{1_max_c_front} &= \lim_{v_0 \rightarrow c} v_{1_max} \\ &= \lim_{v_0 \rightarrow c} \frac{c}{-2v_0} \left\{ \frac{-v_0(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}{\sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}} \left[-v_0 \cos\varphi \cos\theta + \sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)} \left[-\cos\varphi \cos\theta - \frac{v_0(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}{\sqrt{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta)}} \right] \right\} = \frac{c}{2} \end{aligned} \quad (41)$$

4.3 3 차원 관성계 운동에너지, 운동량 그리고 관성질량

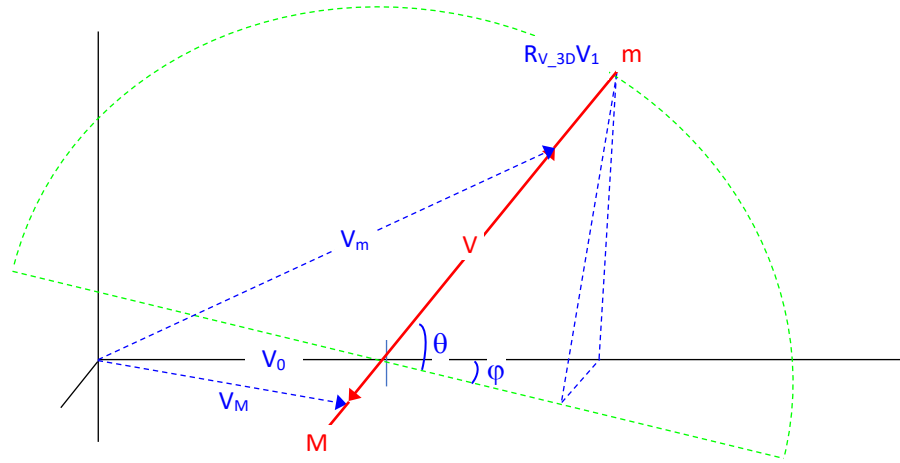


Figure 10. 3 차원 절대정지 관성계에서 관측한, 속도 v_0 로 움직이는 관성계 M에서 v_1 속도로 던져진 물체 m 속도와, 그로 인한 관성계 M의 속도변화

움직이는 관성계에서 던져진 물체 m의 속도와 관성계 M의 속도는 다음과 같이 구할수 있다.

$$v_m = \sqrt{v_0^2 + 2v_0v\cos\theta\cos\varphi + v^2}$$

$$v_M = \sqrt{v_0^2 - 2v_0\frac{m_0v}{M_0}\cos\theta\cos\varphi + \left(\frac{m_0v}{M_0}\right)^2}$$

Section 3.1에서 사용한 방법에 의해, 3 차원 관성계에서 운동에너지는 다음과 같이 계산할수 있다.

$$E_{ka}(v_1) = \int_0^{R_{v,3D}v_1} v_m d(mv_m) + \int_0^{R_{v,3D}v_2} v_M d(Mv_M)$$

$$= m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2v_0R_vv_1\cos\theta\cos\varphi + R_v^2v_1^2)}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right] - \frac{m_0v_0R_vv_1\cos\theta\cos\varphi}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (42)$$

Section 3.2 에서 사용한 방법에 의해, 3 차원 관성계에서 운동량은 다음과 같이 계산할수 있다.

$$P_{S_{3D}}(\theta, \varphi, v_1) = \frac{m_0 R_v}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} \left\{ \frac{R_v v_1 + 2v_0 \cos\theta \cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2R_v v_0 v_1 \cos\theta \cos\varphi + R_v^2 v_1^2)}{c^2}}} \right. \\ \left. - \frac{v_0 \cos\theta \cos\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left[2 - \ln(2) + \ln \left(\sqrt{1 - \frac{2R_v v_0 v_1 \cos\theta \cos\varphi + R_v^2 v_1^2}{c^2 - v_0^2}} - \frac{v_0 R_v v_1 \cos\theta \cos\varphi}{c^2 - v_0^2} + 1 \right) \right] \right\} \quad (43)$$

Section 3.3 에서 사용한 방법에 의해, 3 차원 관성계에서 관성질량은 운동량은 다음과 같이 계산할수 있다.

$$m_{3D} = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{P_{S_{3D}}(v_1)}{v_1} = \lim_{v_1 \rightarrow 0} \frac{dP_{S_{3D}}(v_1)}{dv_1} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{2v_0^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi}{c^2 - v_0^2(1 - \cos^2\theta \cos^2\varphi)} \right) \quad (44)$$

4.4 하펠-키팅 실험 (Hafele-Keating Experiment)

하펠-키팅 실험 (Hafele-Keating experiment) [R-3], [R-4] 이란, 1971 년 진행된 실험으로, 상대성이론을 검증하기 위해 이루어졌다. 이 실험은 세슘 원자시계를 가지고 진행되었는데, 4 개의 원자 시계는 공항에 두고, 4 개 원자시계를 비행기에 싣고 동쪽, 서쪽으로 지구를 한바퀴 도는 실험이었다.

실험 결과는 다음과 같다.

	예상 값 (단위: 나노 초) nanoseconds, predicted			실험 결과 (단위: 나노 초)
	일반상대성 이론 (중력에 의한)	특수상대성 이론 (속도에 의한)	총합	4 개 원자시계 평균 측정값
동쪽	+144 ±14	-184 ±18	-40 ±23	-59 ±10
서쪽	+179 ±18	+96 ±10	+275 ±21	+273 ±7

일반상대성 이론에 예측한 시간차이가 발생한다면, 실험 결과는 특수상대성 이론에 따른 시간 변화는 동쪽방향 비행기에서는 $-0.59 \times 10^{-7} - 1.44 \times 10^{-7} = -2.03 \times 10^{-7}$ 느리게 갔고, 서쪽 방향 비행기에서는 $2.73 \times 10^{-7} - 1.79 \times 10^{-7} = 9.4 \times 10^{-8}$ 빠르게 간것이다. 하지만, 시간이 정말 상대적이라면, 특수상대성 이론에 따라, 동쪽, 서쪽방향으로 날아간 비행기의 시간차는 둘다 음수가 나와야 한다.

이 실험 결과를 이 논문의 이론에 따라 다음과 같이 해석하여 보았다.

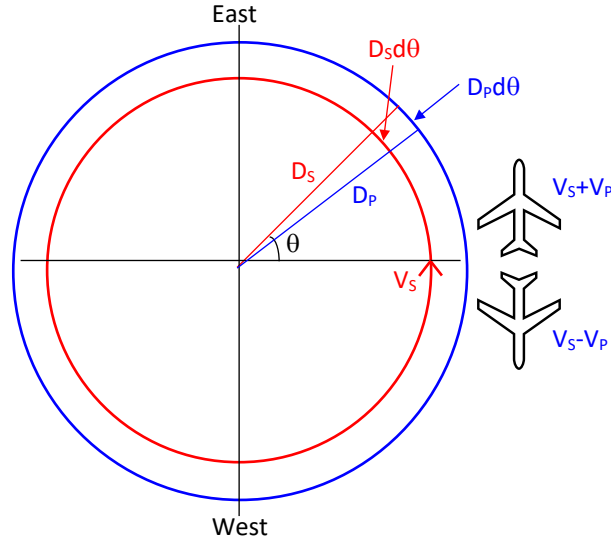


Figure 11. 동쪽으로 자전하는 지구를 한바퀴 도는 비행기 여행

Figure 11 에서 다음과 같은 조건을 가정하자,

지구 반지름 $D_S = 6371 \text{ km}$

지구 자전속도 및 방향 $v_S = 1670 \text{ km/hr, East}$

지구 중심으로 부터 비행기 비행고도 $D_P = 6381 \text{ km/hr}$

지구지상에 대한 비행기 상대속도 $v_P = 1000 \text{ km/hr}$

안쪽 원 (반지름 D_S) 은 지구 표면적이고, 속도, v_S 로 자전하고 있다, 바깥쪽 원 (반지름 D_P) 은 비행기 경로이다.

지구 표면적이 자전 속도 v_S 로 $D_S d\theta$ 지나는데 걸리는 지구 중심 (지구자전이 없는)에서 시간은 다음과 같다.

$$dt_{EC} = \frac{D_S d\theta}{v_S}$$

이 시간은 절대관성계에서의 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$dt_{Abs_EC} = dt_{EC} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} = \frac{D_S d\theta}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}}$$

지구 표면에서 시간, dt_{ES} 은 절대정지관성계 시간과 식 (37) 에 근거한 지구표면적 속도 v_{Abs_ES} 을 이용해 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$v_{Abs_ES} = v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} v_S \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 v_S^2$$

$$dt_{ES} = \frac{D_S d\theta}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \sqrt{1 - \frac{v_{Abs_ES}^2}{c^2}} \quad (45)$$

동쪽 여행하는 비행기에서 시간은 자전과 같은 방향이므로 절대정지관성계 시간과 식 (37) 에 근거한 비행기속도 v_{Abs_PE} 을 이용해 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$v_{Abs_PE} = v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} (v_S + v_P) \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 (v_S + v_P)^2$$

$$dt_{PE} = \frac{D_P d\theta}{v_S + v_P} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \sqrt{1 - \frac{v_{Abs_PE}^2}{c^2}} \quad (46)$$

서쪽 여행하는 비행기에서 시간은 자전과 반대 방향이므로 절대정지관성계 시간과 비행기 속도 v_{Abs_PW} 을 이용해 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$v_{Abs_PW} = v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} (v_S - v_P) \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 (v_S - v_P)^2$$

$$dt_{PW} = \frac{D_P d\theta}{v_S - v_P} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \sqrt{1 - \frac{v_{Abs_PW}^2}{c^2}} \quad (47)$$

지구가 자전을 하므로 동쪽으로 출발한 비행기는 지구를 2 바퀴돌고, 출발점은 한바퀴돌고, θ_{EM} 에서 다시 만나게 된다.

$$\theta_{EM} = \frac{2\pi[2D_P v_S - D_S(v_S + v_P)]}{D_S(v_S + v_P) - D_P v_S} = 243.73$$

$\varphi = 0$, $v_0 = 300 \text{ km/sec}$ 로 가정하고, 동쪽으로 여행한 비행기와 지상에서 시간은 다음과 같이 계산할수 있다.

$$T_{Plane_East} = 2 \int_0^{2\pi} dt_{PE} + \int_0^{\theta_{EM}} dt_{PE}$$

$$= \frac{2D_P}{(v_S + v_P)} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} (v_S + v_P) \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 (v_S + v_P)^2}{c^2}} d\theta \quad (48)$$

$$+ \frac{D_P}{(v_S + v_P)} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{\theta_{EM}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} (v_S + v_P) \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 (v_S + v_P)^2}{c^2}} d\theta$$

$$= 40.19837554470179 \text{ hour}$$

$$\begin{aligned}
T_{Earth_East} &= \int_0^{2\pi} dt_{ES} + \int_0^{\theta_{EM}} dt_{ES} \\
&= \frac{D_S}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} v_S \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 v_S^2}{c^2}} d\theta \\
&\quad + \frac{D_S}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{\theta_{EM}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} v_S \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 v_S^2}{c^2}} d\theta \\
&= 40.19837554476826 \text{ hour}
\end{aligned} \tag{49}$$

동쪽 여행에서 시간차는 다음과 같다.

$$T_{Plane_East} - T_{Earth_East} = -2.39 \cdot 10^{-7}$$

서쪽으로 출발한 비행기는 지구를 한바퀴 돌기전에 지구를 한바퀴 돌은 출발점과, θ_{WM} 에서 다시만나게 된다.

$$\theta_{WM} = \frac{2\pi[0 \cdot D_P v_S - D_S(v_S - v_P)]}{D_S(v_S - v_P) - D_P v_S} = 240.57$$

서쪽으로 여행한 비행기와 지상에서 시간은 다음과 같이 계산할수 있다.

$$\begin{aligned}
T_{Plane_West} &= 0 \int_0^{2\pi} dt_{PW} + \int_0^{\theta_{WM}} dt_{PW} \\
&= \frac{D_P}{(v_S - v_P)} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{\theta_{WM}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} (v_S - v_P) \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 (v_S - v_P)^2}{c^2}} d\theta \\
&= 39.98818631489202 \text{ hour}
\end{aligned} \tag{50}$$

$$\begin{aligned}
T_{Earth_West} &= \int_0^{2\pi} dt_{ES} + \int_0^{\theta_{EW}} dt_{ES} \\
&= \frac{D_S}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} v_S \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 v_S^2}{c^2}} d\theta \\
&\quad + \frac{D_S}{v_S} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \int_0^{\theta_{EW}} \sqrt{1 - \frac{v_0^2 + 2v_0 R_{v_{3D}} v_S \cos\varphi \cos\theta + R_{v_{3D}}^2 v_S^2}{c^2}} d\theta \\
&= 39.98818631484384 \text{ hour}
\end{aligned} \tag{51}$$

서쪽 여행에서 시간차는 다음과 같다.

$$T_{Plane_West} - T_{Earth_West} = 1.74 \cdot 10^{-7}$$

이와 같이, 동쪽 방향 여행에서는 지상에서의 시간보다 시간이 느리고 가고 서쪽 방향에서는 빠르게 가는것을 예측할수 있고 이것은 하펠-키팅 실험결과와도 일치한다.

4.5 쌍둥이 역설

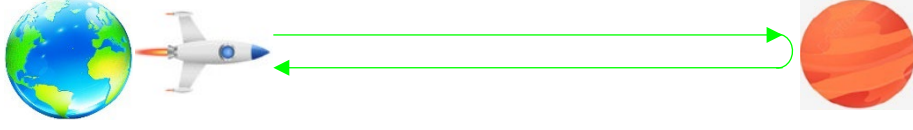


Figure 12. 쌍둥이 형이 우주선을 타고 어느 주황색 별로의 여행

쌍둥이 형제중 동생은 지구에 남아있고, 형은 우주선을 타고 어느 주황색 별까지 날아갔다 온다고 상상하자, 이때 지구에 있는 쌍둥이 동생한테 흐른 시간을 T_{twin_earth} 이라고 할때, 절대정지 관성계에서의 시간은 $T_{twin_abs} = T_{twin_earth} \frac{\sqrt{c^2 - v_A^2}}{c}$ 이므로, 별까지 가는데 우주선에서 쌍둥이 형한테 흐른 시간은 다음과 같고

$$T_{twin_rocket_1} = \frac{T_{twin_earth}}{2} \frac{c}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}} = \frac{T_{twin_earth}}{2} \frac{\sqrt{c^2 - (v_0^2 + 2v_0R_{v_{3D}}v_1\cos\varphi\cos\theta + R_{v_{3D}}^2v_1^2)}}{\sqrt{c^2 - v_0^2}}$$

다시 별에서 지구까지 돌아오는데 우주선에서 흐른 시간은 반대방향으로 돌아오므로 다음과 같이 계산할수 있다.

$$T_{twin_rocket_2} = \frac{T_{twin_earth}}{2} \frac{\sqrt{c^2 - (v_0^2 - 2v_0R_{v_{3D}}v_1\cos\varphi\cos\theta + R_{v_{3D}}^2v_1^2)}}{\sqrt{c^2 - v_0^2}}$$

그러므로 주황색 별을 왕복하는데 우주선안의 형한테 흐른 시간은 다음과 같이 예상된다.

$$T_{twin_rocket} = \frac{T_{twin_earth}}{2\sqrt{c^2 - v_0^2}} \left(\sqrt{c^2 - (v_0^2 + 2v_0R_{v_{3D}}v_1\cos\varphi\cos\theta + R_{v_{3D}}^2v_1^2)} + \sqrt{c^2 - (v_0^2 - 2v_0R_{v_{3D}}v_1\cos\varphi\cos\theta + R_{v_{3D}}^2v_1^2)} \right) \quad (52)$$

예를 들어, $v_0 = 0.01c$, $\theta = 0$, $\varphi = 0$ 로 가정하고, 지구로부터 7 광년 떨어진 별에, 쌍둥이 형이 $v_1 = 0.7c$ 우주선을 타고 우주여행하고 돌아왔을때, 지구에 있는 쌍둥이 동생이 20 년이 흐르고, 쌍둥이 형은 식 (52) 에 의해 14 년 지날것으로 예측된다.

5.0 결론 Conclusion

이 연구의 결론과 특수상대성 이론과 차이점은 다음과 같다.

	특수 상대성 이론 Theory of Special Relativity	이 연구의 결론 Conclusion of this study
절대 정지 관성계 Absolute Stationary Inertial Frame	없다 None	있다 Exists
광속불변 Constancy of Light Speed	모든 관성계에서 일정 Constant in all inertial frames	절대 정지 관성계에서만 일정 움직이는 관성계에서는 빛의 왕복속도가 일정 Constant only in the absolute stationary inertial frame. In a moving inertial frame, the round-trip speed of light is constant.
움직이는 관성계 속도 Velocity of a moving inertial frame	No way to measure	Measurable by experiment $v_0 = \Delta t_{s_max} \frac{c^2}{2L_0}$
빛의 속도로 날아가는 우주선에서 본 빛속도	c	$\frac{c}{2}$
쌍둥이 역설 Twin Paradox	It is not explained clearly	$\frac{T_{twin_earth}}{2\sqrt{c^2 - v_0^2}} \left(\sqrt{c^2 - (v_0^2 + 2v_0R_{v_3D}v_1\cos\phi\cos\theta + R_{v_3D}^2v_1^2)} + \sqrt{c^2 - (v_0^2 - 2v_0R_{v_3D}v_1\cos\phi\cos\theta + R_{v_3D}^2v_1^2)} \right)$
하펠-키팅 실험 Hafele-Keating Experiment	Not explained for westward plane clock	Explained why the westward plane clock is faster than the clock in earth
운동량 Momentum	$\frac{m_0v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$	$\frac{m_0R_v}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} \left\{ \frac{R_vv_1 + 2v_0\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2R_vv_0v_1\cos(\theta) + R_v^2v_1^2)}{c^2}}} - \frac{v_0\cos(\theta)}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left[2 - \ln(2) + \ln \left(\sqrt{1 - \frac{2R_vv_0v_1\cos(\theta) + R_v^2v_1^2}{c^2 - v_0^2}} - \frac{v_0R_vv_1\cos(\theta)}{c^2 - v_0^2} + 1 \right) \right] \right\}$
운동에너지 Kinetic Energy	$m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} - 1 \right]$	$m_0c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v_0^2 + 2v_0R_vv_1\cos(\theta) + R_v^2v_1^2)}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right] - \frac{m_0v_0R_vv_1\cos(\theta)}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}$
관성 질량 Inertial Mass	$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$	$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{2v_0^2(\cos\theta)^2}{c^2 - v_0^2(\sin\theta)^2} \right)$

6.0 References

- [R-1] A. Einstein (1905) On The Electrodynamics of moving bodies,
<https://www.fourmilab.ch/etexts/einstein/specrel/specrel.pdf>
- [R-2] Michelson-Morley Experiments,
https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson%E2%80%93Morley_experiment
- [R-3] Hafele, J. C.; Keating, R. E. (July 14, 1972). "Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gains". *Science*. 177 (4044): 166–168. doi:10.1126/science.177.4044.166.
- [R-4] Hafele, J. C.; Keating, R. E. (July 14, 1972). "Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gains". *Science*. 177 (4044): 168–170. doi:10.1126/science.177.4044.168.