

# Von Lichtkegeln

## im Standardmodell der Kosmologie ( $\Lambda$ CDM-Modell)

Version Juli 2023

Autor: Werner Lange, Altos/Paraguay, langealtos  
werner.lange.altos@gmail.com

### Zusammenfassung

Lehrbücher oder wissenschaftliche Arbeiten behandeln Lichtkegel im Allgemeinen nur rudimentär und unter sehr spezifischen Voraussetzungen. Der hier vorliegende Artikel hingegen strebt eine vollständige Darstellung aller relevanten Aspekte an.

Dargestellt werden Lichtkegel im räumlich flachen Standard-Modell der Kosmologie ( $\Lambda$ CDM-Modell). Der Scheitelpunkt der Rückwärts-Lichtkegel (Vergangenheits-Lichtkegel) kann bei beliebigen Zeitpunkten der kosmologischen Zeit seit dem Urknall angesiedelt sein. Herausgearbeitet wird das Zusammenwirken dieser Lichtkegel (Vorwärts- und Rückwärts-Lichtkegel) mit Hubblesphäre, kosmologischem Ereignishorizont, Partikelhorizont und Beobachtbarem Universum sowie mit den Weltlinien von Galaxien. Unter anderen wird auch die Frage beantwortet, bei welchem Lichtkegel-Scheitel eine z.B. heute sichtbare Galaxie nach Verstreichen einer vorgegebenen kosmologischen Zeit dann wahrnehmbar ist und bei welcher Emissionszeit das dann sichtbare Licht übermittelt wurde. Und es wird detailliert herausgearbeitet, aus welchen ruhenden Objekten und beweglichen Partikeln das Beobachtbare Universum zu einem bestimmten Zeitpunkt nach dem Urknall aufgebaut ist und wie Objekte und Partikel an ihren jeweiligen Ort gelangen.

### Änderungsverfolgung

Version	Änderungen
22. Dezember 2022	Erste Version
11. März 2023	Generelle Überarbeitung
02. April 2023	Zeichnungen überarbeitet, insbesondere Achsenbeschriftungen
27. Mai 2023	Zusätzliche Bemerkungen zu den Beziehungen zum Partikelhorizont
09. Juli 2023	Zeichnung 6.2 ersetzt

**Schlüsselwörter:** Lichtkegel,  $\Lambda$ CDM, mitbewegte Distanz, Eigendistanz, Hubblesphäre, Ereignishorizont, Partikelhorizont, Beobachtbares Universum, Abbremsparameter, kosmologische Parameter, Weltlinie, Geodäte, Planck18

**English translation of title and abstract for publication on viXra.****On light cones  
in the Standard Model of Cosmology (Lambda-CDM Model)****Abstract**

This paper strives for a complete analysis of all relevant aspects of light cones in the spatially flat standard model of cosmology (Lambda-CDM model). The apex of the past light cone may be located at any cosmological time since the Big Bang. The presentation expounds the interaction of these light cones (past and future light cones) with the Hubblesphere, cosmological event horizon, particle horizon and observable universe as well as with the world lines of galaxies. Alongside this, the study also answers the question at which light cone apex a galaxy visible today can be perceived after a given cosmological time has elapsed and at which emission time the then visible light was emitted. In addition, some drawings elucidate in detail from which resting objects and moving particles the observable universe is built up at a certain time after the Big Bang and how objects and particles get to their respective locations.

**Change tracking**

<b>Version</b>	<b>Changes</b>
22 December 2022	First Version
11 March 2023	General Revision
02 April 2023	Drawings revised, especially axis labelling
27 May 2023	Additional remarks on the relationship to the particle horizon
09 July 2023	Figure 6.2 replaced

Keywords: light cone,  $\Lambda$ CDM, comoving distance, proper distance, Hubble sphere, event horizon, particle horizon, observable universe, deceleration parameter, cosmological parameters, worldline, geodesic, Planck18

**Inhaltsverzeichnis**

1	Zusammenfassung .....	4
2	Parametersatz.....	4
3	Kosmologische Annahmen.....	5
4	Zeit und Skalenfaktor .....	6
5	Präferenzen bei der Auswahl kosmologischer Formeln .....	7
6	Lichtausbreitung.....	7
6.1	Voraussetzungen für alle weiteren Berechnungen .....	7
6.2	Allgemeine Lichtausbreitungsformel .....	9
6.3	Zusammenhänge zwischen Formeln für Partikelhorizont und Lichtkegel.....	11
6.4	Gemeinsame Eigenschaften der Kugeloberflächen.....	12
7	Definition von Rückwärts-Lichtkegel, Hubblesphäre und Horizonten .....	12
7.1	Hubblesphäre.....	12
7.2	Partikelhorizont und Beobachtbares Universum .....	13
7.2.1	Definition Partikelhorizont .....	13
7.2.2	Partikelhorizont HEUTE .....	15
7.2.3	Beobachtbares Universum.....	15
7.2.4	Hinweis auf eine alternative Definition des Partikelhorizonts .....	16
7.3	Kosmologischer Ereignishorizont .....	16
7.4	Lichtkegel.....	17
8	Zusammenspiel von Rückwärts-Lichtkegeln, Hubblesphäre, Horizonten und Galaxien .18	
8.1	Hinweis auf Zeichnungen anderer Autoren.....	18
8.2	Lichtkegel und Hubblesphäre.....	18
8.2.1	Lichtkegel und Hubblesphäre: Zeichnungen .....	18
8.2.2	Lichtkegel und Hubblesphäre: Tabellen.....	21
8.2.3	Expansion von Vielfachen der Hubblesphäre.....	23
8.3	Zweiseitige und einseitige Zeichnungen .....	24
8.4	Lichtkegel und Galaxien.....	24
9	Rückwärts-Lichtkegel und Partikelhorizont.....	29
9.1	Einige Zusatzbemerkungen zur Definition.....	29
9.2	Lichtkegel, Weltlinien ruhender Objekte und Beobachtbares Universum .....	30
9.3	Beobachtbares Universum und Lichtlaufzeit .....	34
10	Vorwärts-Lichtkegel.....	36
10.1	Vorwärts-Lichtkegel und Beobachtbares Universum CMB.....	36
10.2	Alternative Definitionen von Partikelhorizont und Beobachtbarem Universum.....	38
10.3	Interpretation des Partikelhorizonts als Lichtkegel .....	40
10.4	Vorwärts-Lichtkegel und Ereignishorizont .....	40
11	Verwendete Begriffe, Symbole und Abkürzungen.....	42
12	Literatur .....	44

## 1 Zusammenfassung

Lehrbücher oder wissenschaftliche Arbeiten behandeln Lichtkegel im Allgemeinen nur rudimentär und unter sehr spezifischen Voraussetzungen. Der hier vorliegende Artikel hingegen strebt eine vollständige Darstellung aller relevanten Aspekte an.

Dargestellt werden Lichtkegel im räumlich flachen Standard-Modell der Kosmologie ( $\Lambda$ CDM-Modell). Der Scheitelpunkt der Rückwärts-Teillichtkegel (Vergangenheits-Lichtkegel) kann bei beliebigen Zeitpunkten der kosmologischen Zeit seit dem Urknall angesiedelt sein. Herausgearbeitet wird das Zusammenwirken dieser Lichtkegel (Vorwärts- und Rückwärts-Lichtkegel) mit Hubblesphäre, kosmologischem Ereignishorizont, Partikelhorizont und Beobachtbarem Universum sowie mit den Weltlinien von Galaxien. Unter anderen wird auch die Frage beantwortet, bei welchem Lichtkegel-Scheitel eine z.B. heute sichtbare Galaxie nach Verstreichen einer vorgegebenen kosmologischen Zeit dann wahrnehmbar ist und bei welcher Emissionszeit das dann sichtbare Licht übermittelt wurde. Und es wird detailliert herausgearbeitet, aus welchen ruhenden Objekten und beweglichen Partikeln (im Allgemeinen Photonen) das Beobachtbare Universum zu einem bestimmten Zeitpunkt nach dem Urknall aufgebaut ist und wie Objekte und Partikel an ihren jeweiligen Ort gelangen.

Auch um mit der Terminologie von Veröffentlichungen zu Lichtkegeln im Minkowski-Raum der Speziellen Relativitätstheorie verträglich zu bleiben, wollen wir in diesem Artikel genau einen Beobachter annehmen, dessen heutiger Ort in der Milchstraße (z.B. auf der Erde) gelegen ist. Der Begriff „Beobachter“ wird in diesem Artikel nicht anders verwendet werden. Anstelle von „fundamentalen Beobachtern“ verwenden wir die Bezeichnung „ruhende Objekte“ oder „mitbewegte Objekte“, die zusammen mit dem Beobachter im Hubble-Flow treiben.

## 2 Parametersatz

Wir setzen für alle Berechnungen den Parametersatz Planck18 (vgl. Planck 18 [1], Abstract) für das  $\Lambda$ CDM Modell voraus.  $t$  steht für die kosmologische Zeit seit dem Urknall,  $a$  für den Skalenfaktor.

**Tabelle 1: Planck18 –Parametersatz für das  $\Lambda$ CDM-Modell**

$H_0$	Hubble-Parameter heute	67.4 km/Mpc/s
$\Omega_M$	Materie-Anteil heute an der Materie/Energie-Dichte des Universums	0.315
$\Omega_R$	Strahlungs-Anteil heute	0.9209605429E-04
$\Omega_\Lambda$	Anteil dunkler Energie heute, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M - \Omega_R$	0.6849079039

$H_0$ , und  $\Omega_M$  wurden durch Planck18 vorgegeben.

Alle Berechnungen wurden mit dem Kosmologie-Rechner WELTTABELLEN [2] durchgeführt. WELTTABELLEN hat über die Stefan-Boltzmann-Konstante zusätzlich den Strahlungsanteil  $\Omega_R$  ermittelt.

Es lassen sich folgende Werte ableiten:

**Tabelle 2: Berechnete Werte für  $t=HEUTE$ ,  $a=1$ , Parametersatz = Planck18 [1]**

Zeit seit dem Urknall	13.790687 Mrd. Jahre
Entfernung des Beobachters zur Hubblesphäre	14.507303 Mrd. Lichtjahre
Entfernung des Beobachters zum Ereignishorizont	16.679351 Mrd. Lichtjahre
Entfernung des Beobachters zum Partikelhorizont	46.132820 Mrd. Lichtjahre

**Tabelle 3: Weitere berechnete Werte, Parametersatz = Planck18**

Übergang von verlangsamer zu beschleunigter Expansion (Abbremsparameter $q=0$ )	7.6931755 Mrd. Jahre nach dem Urknall ( $a=0.61284999$ )
Entfernung des Beobachters zur Hubblesphäre (physikal.) (mitbewegt)	10.122295 Mrd. Lichtjahre 16.516757 Mrd. Lichtjahre
<u>Schnittpunkt des heutigen Lichtkegels mit der Hubblesphäre (größte frühere physikalische Entfernung von heute sichtbaren Photonen vom Beobachter)</u>	4.0534118 Mrd. Jahre nach dem Urknall ( $a=0.38645306$ , $z=1.576364$ )
Entfernung des Beobachters zur Hubblesphäre (physikal.)	5.8513981 Mrd. Lichtjahre
<u>Zeitpunkt <math>t_{\text{CMB}}</math> der Emission CMB</u> CMB Last Scattering " $z^*=1090$ " (vgl. Planck 18 [1], Table 2, S. 16, dort keine weitere Erläuterung von „ $z^*$ “)	371'127 Jahre nach dem Urknall
<u>Entfernung des Beobachters zur Oberfläche Last Scattering</u> $t_{\text{CMB}}=371'127$ Jahre nach dem Urknall (Oberfläche zum Zeitpunkt der Emission)	41.447549 <u>Millionen</u> Lichtjahre
<u>Entfernung des Beobachters zur Oberfläche Last Scattering bei <math>t=HEUTE</math></u>	45.219275 Mrd. Lichtjahre

Die Vereinbarung  $a=1$  für  $t=HEUTE$  ist in Kap. 4 erläutert. Wegen dieser Vereinbarung sind physikalische (Eigendistanz) und mitbewegte Entfernung für  $t=HEUTE$  identisch. Die Rolle des Beobachters ist in Kap. 3 erwähnt. Die (physikalische) Entfernung zu den Kugeloberflächen Hubblesphäre, Ereignishorizont und Partikelhorizont ist jeweils der Radius dieser Kugeloberflächen mit dem Beobachter im Zentrum.

### 3 Kosmologische Annahmen

Auf großen Skalen wird das seit dem Urknall expandierende Universum als isotrop und homogen angenommen. Der lediglich durch expansionsbedingte Abstandsänderungen charakterisierte Raum wird auch als Hubble-Flow bezeichnet. Die anwachsenden Abstände zwischen im Hubble-Flow treibenden, als ruhend angenommenen Objekten können durch einen Skalenfaktor  $a(t)$  beschrieben werden, der allein von der Zeit  $t$  seit dem Urknall abhängt. Im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Zeit als Eigenzeit der im Hubble-Flow treibenden ruhenden Objekte (mit synchronisierten Uhren) verstanden.

Koordinatensysteme für die Raumzeit des Universums bestehen aus 3 Raumachsen und einer Zeitachse. Die Raumachsen kann man im Fall des räumlich flachen  $\Lambda$ CDM-Modells in natürlicher Form als gemäß  $a(t)$  expandierende euklidische Koordinatenachsen interpretieren, wobei ruhende Objekte der Expansion der Achsen folgen. Basis für die Entwicklung des durch die Koordinaten abgebildeten expandierenden Universums ist dabei die Friedmann-Gleichung, zeitlicher Verlauf und Abstände sind durch die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik (FLRW-Metrik) umschrieben.

Anders als für die Zeitachse gibt es für die Raumachsen kein natürliches Maß. Entfernungen zwischen Objekten zu konstanter gemeinsamer Zeit existieren, sind jedoch nicht messbar. Vielmehr müssen diese Distanzen über die kosmologische Theorie erschlossen werden. Mitbewegte Koordinaten treiben mit dem Hubble-Flow. Die mitbewegte Distanz (englisch: comoving distance) zwischen Objekten, die ebenfalls im Hubble-Flow treiben, ändert sich trotz der Expansion des Universums nie. Im Gegensatz dazu spiegeln physikalische Koordinaten die mit der Expansion des Universums anwachsenden Entfernungen als Eigendistanz (englisch: proper distance) zwischen ruhenden Objekten wider. Aufgrund von Isotropie und Homogenität

des Universums kann der räumliche Ursprung des Koordinatensystems im Prinzip an einem beliebigen Ort des Universums angesetzt werden.

Der Beobachter selbst unterscheidet sich von einem ruhenden Objekt nur dadurch, dass er lediglich mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen (i.a. Photonen) empfängt, während die mitbewegten Objekte (i.a. Galaxien) solche Informationen auch emittieren.

Genaugenommen gelten die Hubble-Gesetze, über die die Rezessionsgeschwindigkeiten von Objekten hergeleitet werden, nur für den Beobachter und die ruhenden Objekte.

In der Praxis betrachten wir jedoch im Allgemeinen die Abstände von Galaxien von diesem Beobachter sowie die Geodäten von auf den Beobachter gerichteten Photonen, die von diesen Galaxien emittiert werden.

Anders als die als ruhend angenommenen Objekte sind die Galaxien jedoch in gravitativ bedingte Bewegungen eingebunden. Diese Pekuliarbewegungen werden durch die hier zugrundeliegende Theorie nicht abgebildet. Je länger das Licht benötigt hat, den heutigen Ort der Milchstraße zu erreichen, desto geringer sind im Durchschnitt die durch Pekuliarbewegungen bedingten relativen Fehler. Einige Autoren verwenden hier den Begriff der „Hubble-Flow-Galaxie“.

Der Beobachter, dessen heutiger Ort in der Milchstraße gelegen ist, wird heute, in der Vergangenheit und in der Zukunft im Ursprung des durch den Partikelhorizont begrenzten Beobachtbaren Universums angenommen. Wer mit der theoretischen Annahme keine Schwierigkeiten hat, dass für die Milchstraße keine gravitativ bedingten Pekuliarbewegungen stattgefunden haben, kann die Weltlinie des Beobachters unter dieser Annahme als Weltlinie der Milchstraße interpretieren. Da wir allerdings in diesem Artikel den Ort des Beobachters über sehr lange Zeiträume (z.B. mehrere 10 oder 100 Milliarden Jahre) betrachten wollen, ist die Gleichsetzung der Weltlinie des Beobachters mit der Weltlinie der Milchstraße nicht angemessen.

## 4 Zeit und Skalenfaktor

Der Skalenfaktor  $a$  für den Zeitpunkt  $t=HEUTE$  wird mit  $a=1$  festgelegt. Die Festlegung  $a(HEUTE)=1$  ist bedingt durch eine der möglichen Transformationen, die die FLRW-Metrik invariant lässt. Bei allen diesen Transformationen bleibt das Produkt aus Skalenfaktor und mitbewegter Entfernung stets gleich.

Zeit  $t$  und Skalenfaktor  $a$  sind globale Größen, die beide von  $NULL$  bis  $UNENDLICH$  bijektiv aufeinander abbildbar sind. Die Abbildungen sind in beide Richtungen streng monoton steigend. In vielen Berechnungen der Kosmologie wird von der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit der Funktion  $a(t)$  Gebrauch gemacht.

Die Zeit  $t$  ist aus dem Skalenfaktor  $a$  durch

$$t(a) = \int_0^a \frac{d\alpha}{\alpha H(\alpha)} \quad (1)$$

mit dem vom Skalenfaktor abhängigen Hubble-Parameter

$$H(a) = H_0 E(a) \quad (2)$$

und der Dichtefunktion

$$E(a) = (\Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_\Lambda)^{1/2} \quad (3)$$

numerisch relativ einfach berechenbar. Für  $H_0$ ,  $\Omega_R$ ,  $\Omega_M$  und  $\Omega_\Lambda$  siehe Tabelle 1.

Die Umkehrfunktion  $a(t)$  erfordert mehr Rechenaufwand. Z.B. ist  $a$  bei vorgegebenem  $t$  und variablem  $t^*$  als Nullstelle von  $t(a)-t^*$  herleitbar.

$E(a)$  zeichnet die Entwicklung des Hubble-Parameters und auch aller späteren Integrale, in denen die Dichtefunktion auftritt, vom Skalenfaktor  $a$  und wegen der Bijektivität der Abbildungen  $t(a)$  und  $a(t)$  auch von der Zeit  $t$  nach.

Es ist bekannt, dass das Integral (1) für die untere Integrationsgrenze existiert. Bei der numerischen Berechnung wird man so nahe an *NULL* herangehen, wie es die Genauigkeit der aktuell bearbeiteten Aufgabe erfordert.

Als Integrationsvariable im Integranden verwenden wir  $a$  anstelle von  $a$  (und später auch anstelle  $\tau$  von  $t$ ), um zwischen Integrationsvariable und Integrationsgrenzen klar zu unterscheiden.

## 5 Präferenzen bei der Auswahl kosmologischer Formeln

Aufgrund der einfacheren Berechenbarkeit verwenden wir im Weiteren und im Einklang mit dem Kosmologie-Rechner WELTTABELLEN [2] für Integrale vom Skalenfaktor  $a$  abhängige Formeln. Diese Festlegung schließt nicht aus, dass für andere, aber hier nicht explizit erwähnte Berechnungen die Funktion  $a(t)$  einmal oder zweimal nach  $t$  differenziert werden muss.

Ein besonderes Ziel dieses Artikels ist die Herausarbeitung der Eigenschaften von Lichtkegeln beliebiger Scheitelpunkte. Unter einem Scheitelpunkt oder Scheitel ist stets der Scheitelpunkt eines Rückwärts-Lichtkegels (Vergangenheits-Lichtkegels) gemeint. Die Rotverschiebung  $z=z(\text{Scheitelzeit})$  ist damit eine vom Scheitel abhängige Größe. Die Scheitelabhängigkeit der Rotverschiebung legt nahe, Formeln für die Rotverschiebung bei der Darstellung dieses Themas nur in unverzichtbaren Fällen zu verwenden.

Wie bereits erwähnt, entspricht der Wert mitbewegter Koordinaten dem Wert der physikalischen Koordinaten bei  $a=1$  (und nicht etwa beim Scheitel eines vom heutigen Lichtkegel verschiedenen Lichtkegels). Es wäre äußerst verwirrend, wenn man neben  $z$  auch noch  $a$  in Abhängigkeit von Lichtkegel-Scheitelpunkten variabel festlegen würde.

## 6 Lichtausbreitung

### 6.1 Voraussetzungen für alle weiteren Berechnungen

Bevor wir einige weitere Formeln erwähnen, wollen wir uns noch einmal unsere Voraussetzungen ins Gedächtnis rufen. **Wir setzen das räumlich flache, ewig expandierende  $\Lambda$ CDM-Modell (also ohne Krümmungsparameter) des Universums mit dem Parameter-satz Planck18 (vgl. Planck 18 [1], Abstract) voraus und betrachten einen im Hubble-Flow schwebenden Beobachter, dessen heutiger Ort in der Milchstraße (z.B. auf der Erde)**

**gelegen ist und der im räumlichen Ursprung eines Koordinatensystems angenommen wird.** Zu einem beliebigen Zeitpunkt  $T$  ( $0 < T < \infty$ ) empfängt dieser Beobachter Licht, das von als ruhend angenommenen Galaxien oder anderen mitbewegten Objekten emittiert wurde. Zum Zeitpunkt *HEUTE* ist der Skalierungsparameter mit  $a=1$  festgelegt, was bedingt, dass die mitbewegte Entfernung dem Wert der physikalischen Entfernung (Eigendistanz) bei  $a=1$  (und für  $t \neq \text{HEUTE}$  nicht der Entfernung am Scheitelpunkt des Lichtkegels) entspricht.

Genaugenommen brauchen wir die Emission von Photonen erst seit der Rekombinationsepoche zu betrachten. Bei Planck18 (vgl. Planck 18 [1], Table 2, S. 16) wird die Emission der Strahlung des Mikrowellen-Hintergrundes bei  $z(\text{HEUTE})=1090$  angegeben, was einer Zeit von  $t = 371'127$  Millionen Jahren nach dem Urknall entspricht (siehe Tabelle 3).

Der exakte Ablauf der Emission der kosmologischen Mikrowellen-Hintergrund-Strahlung (Cosmic Microwave Background Radiation, kurz: CMB) ist nicht Thema dieses Artikels. Der CMB wird als ein zeitlich punktuell Ereignis modelliert, das  $371'127$  Jahre nach dem Urknall das gesamte Universum erfasst.

Horizonte und andere Konstrukte sind häufig Kugeloberflächen mit dem Beobachter im Zentrum. Sollen Abstände zwischen transversal gelegenen Objekten berechnet werden, so werden im Allgemeinen (räumliche) Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) für Abstandsmessungen herangezogen. Ist man jedoch an einem speziellen Objekt wie z.B. einer Galaxie, deren Abstandsänderungen zum Beobachter sowie an der Geodäte von auf den Beobachter gerichteten, von dieser Galaxie emittierten Photonen interessiert, so spricht nichts dagegen, das räumliche Koordinatensystem mit seinen drei Koordinatenachsen so zu positionieren, dass die Galaxie auf der positiven Halbachse jener Koordinatenachse gelegen ist, die man in der Mathematik üblicherweise als x-Achse bezeichnet. Diese Koordinatenachse kann dadurch gekennzeichnet werden, dass für auf der Achse gelegene Objekte die zweite und dritte Koordinate jeweils mit *NULL* besetzt sind. Ist die Galaxie auf einer Kugeloberfläche mit dem Beobachter im Zentrum gelegen, so ist die radiale erste Koordinate gleich dem Radius der Kugel und zugleich der (physikalische) Abstand der Galaxie zum Beobachter.

Da Kugelradius und radiale Koordinate übereinstimmen, wollen wir diese Koordinatenachse als **radiale Koordinatenachse** bezeichnen. Für Fragen der Kosmologie, bei denen wie im hier vorliegenden Artikel keine Raumwinkel beachtet werden müssen, kann man Berechnungen auf diese Achse beschränken und mit nur reellen Werten rechnen. Die Galaxie entfernt sich aufgrund der Expansion des Universums auf dieser Achse vom im Ursprung des räumlichen Koordinatensystems gelegenen Beobachter. Ein von dieser Galaxie emittiertes, auf den Beobachter gerichtetes Photon strebt auf dieser Achse auf den Beobachter zu und geht, sofern es diesen erreicht, anschließend auf den negativen Bereich der Achse über. Zeichnungen in diesem Artikel verwenden eine vertikale Zeitachse in Milliarden Jahren und die radiale Koordinatenachse als horizontale Achse in Milliarden Lichtjahren. Für Zeichnungen, die keine konkrete Galaxie abbilden, kann eine beliebige (durch den Koordinatenursprung verlaufende) Achse als radiale Koordinatenachse gewählt werden, deren Koordinaten stellvertretend für Kugeloberflächen um den Beobachter mit dem Radius der Koordinate stehen.

Im hier vorliegenden Artikel werden keine Polarkoordinaten benötigt. Möchte man eine gemeinsame radiale Achse bestimmen, die für alle Zeichnungen und alle Erläuterungen dieses Artikels Gültigkeit besitzen soll, so kann man den Pfad zur Galaxie SPT0418-47 (siehe Kap. 8.4) zur Wahl der geeigneten Koordinatenachse heranziehen.

## 6.2 Allgemeine Lichtausbreitungsformel

Mit  $c$  wird im Weiteren die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Anders als im Minkowski-Raum der Speziellen Relativitätstheorie muss bei der Lichtausbreitung im  $\Lambda$ CDM-Modell der Kosmologie noch die Expansion des Universums mitberücksichtigt werden.

Empfängt der Beobachter zu einem Zeitpunkt  $t_r$  Licht von einer Galaxie, das zu einem Zeitpunkt  $t_e$  (also  $t_e < t_r$ ) emittiert wurde, so beträgt der mitbewegte Abstand  $D_C(t_e, t_r)$  des Beobachters im räumlichen Koordinatenursprung zu dieser Galaxie

$$D_C(t_e, t_r) = c \int_{t_e}^{t_r} \frac{d\tau}{a(\tau)} = c \int_{a(t_e)}^{a(t_r)} \frac{d\alpha}{\alpha^2 H(\alpha)} \quad (4)$$

Als Integrationsvariablen im Integranden verwenden wir wiederum  $\alpha$  anstelle von  $a$  und zusätzlich  $\tau$  anstelle von  $t$ , um zwischen Integrationsvariable und Integrationsgrenzen klar zu unterscheiden. Selbstverständlich gelten zwischen  $\alpha$  und  $\tau$  die gleichen Beziehungen wie zwischen  $a$  und  $t$ .

Es sei daran erinnert, dass der Skalenfaktor  $a$  für den Zeitpunkt  $t=HEUTE$  mit  $a=1$  festgelegt ist. Der Wert des mitbewegten Abstands  $D_C(t_e, t_r)$  ist eine von dieser globalen Festlegung betroffene Größe. Die Festlegung  $a(HEUTE)=1$  wird durch eine der zulässigen Transformationen ermöglicht, die die FLRW-Metrik invariant lässt. Bei allen diesen Transformationen bleibt die physikalische Entfernung als Produkt aus Skalenfaktor und mitbewegter Entfernung stets gleich (siehe Kap. 4).

Unter Verwendung des Ausdrucks

$$d(a_1, a_2, a_3) = c a_3 \int_{a_1}^{a_2} \frac{d\alpha}{\alpha^2 H(\alpha)} \quad (5)$$

ergeben sich für den Beobachter im Ursprung des räumlichen Koordinatensystems zum Zeitpunkt  $t$  für den mitbewegten bzw. physikalischen Abstand zu den Kugeloberflächen von Partikelhorizont, Ereignishorizont und Hubblesphäre die folgenden Formeln:

**Tabelle 4: Formeln für Lichtkegel, Hubblesphäre und Horizonte**

Entfernung	mitbewegt	physikalisch
Partikelhorizont	$D_{PH}(t)=d(0, a(t), 1)$	$d_{PH}(t)=d(0, a(t), a(t))$
Partikelhorizont $t_{min}$	$D_{PHmin}(t)=d(a(t_{min}), a(t), 1)$	$d_{PHmin}(t)=d(a(t_{min}), a(t), a(t))$
Ereignishorizont	$D_{EH}(t)=d(a(t), \infty, 1)$	$d_{EH}(t)=d(a(t), \infty, a(t))$
Hubblesphäre	$D_{HS}(t)=c / (a(t) H(a(t)))$	$d_{HS}(t)=c / H(a(t))$
Lichtkegel $LK(T)$	$D_{LK}(T, t)=d(a(t), a(T), 1)$	$d_{LK}(T, t)=d(a(t), a(T), a(t))$

Der physikalische Abstand vom Beobachter ist der Radius der jeweiligen Kugeln.

$t_{min}$  stellt unter der Nebenbedingung  $t_{min} < t$  einen Zeitpunkt im frühen Universum dar. Das am häufigsten verwendete Beispiel für  $t_{min}$  ist dabei der Zeitpunkt der Emission der Hintergrundstrahlung  $t_{CMB}$ , für den wir eigenständige Symbole bereitstellen.

**Ergänzung Tabelle 4: Untere Grenze  $t_{CMB}$  als Beispiel für den Partikelhorizont  $t_{min}$**

Entfernung	mitbewegt	physikalisch
Partikelhorizont CMB	$D_{PHCMB}(t)=d(a(t_{CMB}),a(t),1)$	$d_{PHCMB}(t)=d(a(t_{CMB}),a(t),a(t))$ (6)

Die Formeln für den Lichtkegel  $LK(T)$  mit einem Scheitel beim Zeitpunkt  $T$  umschreiben in physikalischen Koordinaten den Abstand  $d(a(t),a(T),a(t))$  des Beobachters zum Zeitpunkt  $t$  von einer Galaxie, von der der Beobachter zum Zeitpunkt  $T$  mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen (im Allgemeinen Photonen) empfängt, die zum Zeitpunkt  $t$  emittiert wurden. Der zugehörige mitbewegte Abstand  $d(a(t),a(T),1)$  zeigt (aufgrund der Voraussetzung  $a(HEUTE)=1$ ) den physikalischen Abstand der Galaxie vom Beobachter zum Zeitpunkt  $HEUTE$  an. Im Allgemeinen wird der Zeitpunkt  $t$  über die beobachtete Rotverschiebung  $z(t)=a(T)/a(t)-1$  ermittelt –  $z(t)$  und  $a(T)$  sind bekannt, über das berechnete  $a(t)$  wird  $t$  via (1) bereitgestellt.

Das Raumzeit-Konstrukt des Lichtkegels  $LK(T)$  ist in Kap. 7.4 genauer erläutert. Für jeden Zeitpunkt  $t < T$  sind alle emittierenden Objekte auf einer von  $T$  und  $t$  abhängigen Kugeloberfläche um den Beobachter gelegen. Jeder Lichtkegel  $LK(T)$  als Ganzes umschreibt eine von  $t$  abhängige Sequenz von Kugeloberflächen.

Wird ein Lichtkegel  $LK(T)$  in seiner Raumzeitstruktur als Ganzes betrachtet, so wird dieser im Weiteren durch seinen Scheitel  $T$  in Mrd. Jahren seit dem Urknall identifiziert.  $LK(28)$  ist der Lichtkegel, dessen Rückwärts-Lichtkegel einen Scheitel 28 Mrd. Jahre nach dem Urknall aufweist.  $LK(HEUTE)$  kennzeichnet den Lichtkegel mit  $HEUTIGEM$  Scheitel (13.790687 Mrd. Jahre nach dem Urknall, siehe Tabelle 2). Insbesondere in Zeichnungen wird von dieser Nomenklatur Gebrauch gemacht. Wie in Tabelle 4 dargelegt, wird der mitbewegte Abstand des Lichtkegels  $LK(T)$  vom Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  in Mrd. Lichtjahren in der Form  $D_{LK}(T,t)$  und der entsprechende physikalische Abstand in der Form  $d_{LK}(T,t)$  geschrieben.

Es ist bekannt, dass alle Integrale für endliches  $t$  existieren, jedoch in physikalischen Koordinaten gegen  $UNENDLICH$  verlaufen können, wenn  $t$  gegen  $UNENDLICH$  strebt.

Die Voraussetzung  $t < T$  für Lichtkegel haben wir bisher verwendet, um den Standardfall eines Photonen emittierenden Objekts und eines Photonen empfangenden Beobachters genauer darzulegen. Für die Formeln von Tabelle 4 ist diese Voraussetzung jedoch nicht zwingend erforderlich. Passieren die empfangenen Photonen den Beobachter, wechseln die Koordinaten des Lichtkegels von der positiven radialen Achse zur negativen. Die Formeln können auch für den Vorwärts-Lichtkegel verwendet werden. Dieser wird ab Kap. 10 genauer untersucht.

**Tabelle 5:  $t=0$  und  $t=\infty$  für Lichtkegel, Hubblesphäre und Horizonte für Parametersatz Planck18 (siehe Tabelle 1)**

Entfernung in Mrd. Lichtjahren	mitbewegt $t=0$	physikalisch $t=0$	mitbewegt $t=\infty$	physikalisch $t=\infty$
Partikelhorizont	0	0	62.812172	$\infty$
Ereignishorizont	62.812172	0	0	17.529543 *1)
Hubblesphäre	0	0	0	17.529543 *1)
Lichtkegel festes T	$D_{PH}(T)$	0	$-D_{EH}(T)$	$-\infty$

\*1)  $c / (H_0 * \Omega_\Lambda^{1/2})$  in Mrd. Lichtjahren.

### 6.3 Zusammenhänge zwischen Formeln für Partikelhorizont und Lichtkegel

In unserer Nomenklatur haben wir den Partikelhorizont  $t_{min}$  von einem Parameter  $t$  und einem Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  abhängig gemacht, den Lichtkegel von einem Scheitelpunkt  $T$  und einem Parameter  $t$ . Sollen beide Konstrukte verglichen werden, muss von dieser Nomenklatur abgewichen werden.

Standardfall: Lichtkegel-Scheitelpunkt  $t$ , Lichtkegel-Parameter  $t_{min} < t$

Wie ein Vergleich der Formeln für den Partikelhorizont  $t_{min}$  und den Lichtkegel zeigt, ist der Partikelhorizont  $t_{min}$  in mitbewegten Koordinaten  $D_{PHmin}(t) = d(a(t_{min}), a(t), I)$  für jedes  $t$  gleich dem mitbewegten Abstand  $D_{LK}(t, t_{min}) = d(a(t_{min}), a(t), I)$  des Lichtkegels  $LK(t)$  vom Beobachter zum Zeitpunkt  $t_{min}$ . Es wird also beim Partikelhorizont die untere Grenze festgehalten, und die obere Grenze wächst mit wachsendem  $t$ . In einem zweiten Schritt kann man  $t_{min}$  gegen  $NULL$  streben lassen. Der allgemeine Partikelhorizont mit Bezugszeitpunkt Urknall ist in mitbewegten Koordinaten für jedes  $t$  gleich dem mitbewegten Abstand  $D_{LK}(t, 0)$  des Lichtkegels  $LK(t)$  zum Zeitpunkt des Urknalls. Wegen der Nebenbedingung  $t_{min} < t$  sind Partikelhorizont und der damit verbundene mitbewegte Abstand  $D_{LK}(t, t_{min})$  des Beobachters vom Lichtkegel zum Zeitpunkt  $t_{min}$  stets positiv.

Man erhält den Partikelhorizont in physikalischen Koordinaten, indem man  $D_{LK}(t, t_{min})$  bzw.  $D_{LK}(t, 0)$  für das jeweilige  $t$  mit  $a(t)$  multipliziert.

Allgemeine Bemerkungen: Lichtkegel-Scheitelpunkt  $T$ , Lichtkegel-Parameter  $t$

Während bei der Betrachtung des Partikelhorizonts im Allgemeinen die obere Grenze bewegt wird, wird beim Lichtkegel im Normalfall der Scheitel  $T$  als obere Grenze festgehalten. Die untere Grenze  $t$  beschreibt in physikalischen Koordinaten den Abstand zum Beobachter eines zum Zeitpunkt  $t$  auf dem Lichtkegel gelegenen ruhenden Objekts, das auf den Beobachter gerichtete Photonen emittiert, die den Beobachter zum Zeitpunkt  $T$  erreichen. Der mitbewegte Abstand umschreibt den physikalischen Abstand des Objekts zum Beobachter zum Zeitpunkt *HEUTE*. Bewegt man  $t$  in Richtung  $T$ , so streben auf der positiven radialen Koordinatenachse physikalische und mitbewegte Entfernung gegen  $NULL$ , um ihren Weg anschließend auf der negativen Achse fortzusetzen. Die Koordinaten nehmen also negative Werte an. Im Weiteren soll in Vorbereitung für Kap. 10.1 und Kap. 10.2 kurz der negative Teil des Lichtkegels (der Vorwärts-Lichtkegel) für den Fall  $t > T$  betrachtet werden.

Vorbereitung Kap. 10.1 und 10.2: Lichtkegel-Scheitelpunkt  $t_{min}$ , Lichtkegel-Parameter  $t > t_{min}$

In Kap. 10.1 werden Lichtkegel mit im Allgemeinen sehr frühen Scheitelpunkten  $t_{min}$  behandelt. Die Koordinaten dieser Lichtkegel sind für den kurzen Zeitbereich zwischen  $t^*=0$  und  $t^*=t_{min}$  positiv und gehen dann in den Vorwärts-Lichtkegel mit negativen Koordinatenwerten über. Die Photonen waren auf der positiven Koordinatenachse auf den Beobachter gerichtet. Ein Vergleich der Formeln von Tabelle 4 für Lichtkegel und Partikelhorizont  $t_{min}$  ergibt

$$\begin{aligned} d_{LK}(t_{min}, t) &= -d(a(t_{min}), a(t), a(t)) = -d_{PHmin}(t) && \text{(physikalisch)} && (7) \\ D_{LK}(t_{min}, t) &= -d(a(t_{min}), a(t), I) = -D_{PHmin}(t) && \text{(mitbewegt)} && (8), \end{aligned}$$

wobei das negative Vorzeichen durch Vertauschen der Integrationsgrenzen zustande kommt. Im Allgemeinen wird hier nur der Bereich  $t > t_{min}$  betrachtet.

Für den Sonderfall  $t_{min} = t_{CMB}$  kann man diese Formel in der Form

$$\begin{aligned}
 d_{LK}(t_{CMB}, t) &= -d(a(t_{CMB}), a(t), a(t)) = -d_{PHCMB}(t) && \text{(physikalisch)} && (7_{CMB}) \\
 D_{LK}(t_{CMB}, t) &= -d(a(t_{CMB}), a(t), I) = -D_{PHCMB}(t) && \text{(mitbewegt)} && (8_{CMB})
 \end{aligned}$$

schreiben und den Lichtkegel  $LK(T)$  mit  $T=t_{CMB}$  (siehe Tabelle 3) über den negativen Wert des Partikelhorizonts berechnen. Diesen Lichtkegel bezeichnen wir später auch als  $LK(CMB)$ .

#### 6.4 Gemeinsame Eigenschaften der Kugeloberflächen

In Kap. 6.1 wurde die radiale Koordinatenachse in Abhängigkeit von einer auf dieser Achse gelegenen Galaxie definiert. Die Koordinate der Galaxie ist der (physikalische) Abstand der Galaxie vom Beobachter. Diese Achse wird in Zeichnungen als horizontale Achse (neben der vertikalen Zeitachse) verwendet. Die Galaxie entfernt sich auf dem positiven Teil dieser Achse vom Beobachter. Von der Galaxie emittierte, auf den Beobachter gerichtete Photonen bewegen sich ebenfalls auf dieser Achse.

Diese Formulierungen sind in erster Linie nur für den Lichtkegel relevant, denn nur, wenn die Galaxie auf einem Lichtkegel gelegen ist, wird sie den Beobachter auch erreichen. Von den Kugeloberflächen von Hubblesphäre, Ereignishorizont und Partikelhorizont können vom Beobachter zu einem vorgegebenen mit dem Beobachter gemeinsamen Zeitpunkt  $t$  keine mit Lichtgeschwindigkeit übermittelten Informationen empfangen werden. (Ausnahmen bilden die Schnittpunkte von Hubblesphäre bzw. Partikelhorizont mit dem Lichtkegel.)

Jedoch können viele der Überlegungen von Kap. 6.1 auch auf die erwähnten drei Kugeloberflächen angewandt werden. An die Stelle der sichtbaren Galaxie tritt hier ein hypothetisches ruhendes Objekt auf einer der Kugeloberflächen, dessen Entfernung und dessen Verhalten allgemein über die kosmologische Theorie erschlossen werden können. Auch hier können ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Formeln für die Schnittpunkte der jeweiligen von  $t$  bzw.  $a(t)$  abhängigen räumlichen Flächen mit der positiven radialen Achse herangezogen werden. In Kap. 6.2 wurden Formeln für die Abstände der Kugeloberflächen vom Beobachter hergeleitet.

Der Abstand vom Beobachter eines ruhenden Objekts oder eines Photons auf einem Lichtkegel oder auf einer der drei erwähnten Kugeloberflächen wird zu einer gemeinsamen Zeit  $t$  auf der radialen Koordinatenachse gemessen. Gedachte Objekte oder Photonen müssen also ohne Raumwinkel stets auf der gleichen Achse durch den Koordinatenursprung gelegen sein. Der mitbewegte Abstand zu Galaxien oder anderen im Hubble-Flow treibenden ruhenden Objekten ist unabhängig von der kosmologischen Zeit und auch unabhängig vom Skalenfaktor. Diese Aussage gilt nicht für bewegte Objekte wie z.B. Photonen.

## 7 Definition von Rückwärts-Lichtkegel, Hubblesphäre und Horizonten

### 7.1 Hubblesphäre

Die Hubblesphäre zum Zeitpunkt  $t$  ist jene Kugeloberfläche mit dem Beobachter im Mittelpunkt, auf der sich (mit dem Beobachter) mitbewegte Objekte wie als ruhend angenommene Galaxien aufgrund der Expansion des Universums genau mit Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernen. Ein auf den Beobachter gerichteter Lichtstrahl im Innern der Hubblesphäre wird den Beobachter im  $\Lambda$ CDM-Modell unter allen Voraussetzungen

auch erreichen. Die Entfernung des Beobachters im Scheitel des HEUTIGEN Lichtkegels zur Hubblesphäre ist in Tabelle 2 erwähnt.

Das Verhalten der Hubblesphäre im Zeitablauf ist entscheidend mit dem Zeitpunkt  $t_{ii}$  (ü für Übergang) des Übergangs von verlangsamer zu beschleunigter Expansion verbunden – siehe Tabelle 3.

Nach der primären Beschleunigung durch den Urknall verlangsamt sich die Expansion für mehrere Milliarden Jahre, erkennbar am Kleinerwerden des Abbremsparameters  $q$

$$q(t) = - a(t) a''(t) / a'(t)^2, \quad (9)$$

wobei bei  $t_{ii}$  der Wert  $q(t_{ii}) = 0$  angenommen wird.

Die Rezessionsgeschwindigkeit der Hubblesphäre  $d_{HS}(t)$  (radiale Koordinatenachse, physikalische Koordinaten) beträgt  $d_{HS}'(t) = c (1+q(t))$  (vgl. Harrison 1991 [9], Kap. 2.1). Da die Rezessionsgeschwindigkeit von Galaxien auf der Hubblesphäre genau  $c$  beträgt, expandiert die Hubblesphäre schneller als der sie umgebende Raum (schneller als ruhende Objekte, die sich allein durch die Expansion des Universums vom Beobachter entfernen), solange  $q(t) > 0$ . Dadurch werden bei wachsendem  $t$ , solange  $t < t_{ii}$ , Galaxien, die sich zuvor mit mehr als Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernt haben, von der Kugeloberfläche der Hubblesphäre überholt und geraten ins Innere der Sphäre. Häufiger und für die praktische Arbeit in der Astronomie wichtiger ist der Umstand, dass von Galaxien jenseits der Hubblesphäre emittiertes, auf den Beobachter gerichtetes Licht, das sich bisher vom Beobachter entfernt hatte, nun von der Hubblesphäre eingefangen wird, wodurch diese Galaxien für den Beobachter sichtbar werden, auch dann, wenn die Galaxien selbst weiterhin außerhalb der Hubblesphäre gelegen sind (vgl. Davis/Lineweaver 2003 [4], Kap. 3.3 oder Davis 2003 [5], Kap. 2-1.3).

Wird  $t > t_{ii}$ , wird also  $q(t) < 0$ , tritt in Bezug auf die Rezessionsgeschwindigkeit von Galaxien nun der gegenteilige Effekt ein: der Raum expandiert schneller als die Hubblesphäre. In mitbewegten Koordinaten nimmt der Radius der Hubblesphäre sein Maximum bei  $t_{ii}$  an, zieht sich also für  $t > t_{ii}$  zurück (siehe z.B. Abbildung 5). Früher innerhalb der Hubblesphäre und nahe der Kugeloberfläche gelegene Galaxien verlassen diese nun (wieder) und entfernen sich in physikalischen Koordinaten mit Überlichtgeschwindigkeit vom Beobachter.

Da jedoch die Hubblesphäre für  $-1 < q(t) < 0$  weiter mit  $c (1+q(t))$  expandiert (jetzt also geringer als mit  $c$ ), fängt die Hubblesphäre mit wachsendem  $t$  weiter auf den Beobachter gerichtete Photonen für einen gewissen Bereich jenseits der Hubblesphäre (genauer: für den für große  $t$  immer kleiner werdenden Bereich zwischen Hubblesphäre und Ereignishorizont) ein, die sich zuvor vom Beobachter entfernt hatten.

## 7.2 Partikelhorizont und Beobachtbares Universum

Der Partikelhorizont blickt in die Vergangenheit, der Ereignishorizont in die Zukunft.

### 7.2.1 Definition Partikelhorizont

Auch der Partikelhorizont ist eine Kugeloberfläche mit dem Beobachter im Ursprung des Koordinatensystems. Es ist ausreichend, die durch den Ursprung verlaufende positive radiale Achse zur Bestimmung der Entfernung des Partikelhorizonts von Beobachter heranzuziehen.

Dieses Thema ist in Kap. 6.1 behandelt. Die Unterscheidung zwischen der positiven und negativen radialen Achse ermöglicht uns, die in diesem Kapitel erwähnten Definitionen von denen in Kap. 7.2.4 und 10.2 zu unterscheiden. Positiver und negativer Radius gemeinsam umschreiben den Durchmesser der Kugeloberfläche des Partikelhorizonts. Nur die beiden Schnittpunkte des Durchmessers mit der Kugeloberfläche sind Teil des Partikelhorizonts.

*Hinweis:* Wir definieren im weiteren Teil dieses Kapitels den Partikelhorizont nur für die positive radiale Achse. Dass die Aussagen für den Durchmesser allgemein gültig sind, kann man in einer ersten Argumentation damit begründen, dass die Wahl der positiven Halbachse willkürlich ist und dass man die gleiche Herleitung auch für die jetzt als „negativ“ titulierte Halbachse durchführen könnte. In den Kapiteln 10.1 und 10.2 wird dann für die negative Halbachse eine alternative Definition für den Partikelhorizont formuliert.

Der (allgemeine physikalische) Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$  ist die größte-Entfernung zum Zeitpunkt  $t$ , aus der den Beobachter seit dem Urknall emittierte, mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen erreichen können.

Man kann (anstelle des Urknalls) auch einen anderen Vergangenheitszeitpunkt  $t_{min}$ , im Weiteren als Bezugszeitpunkt oder frühester Emissionszeitpunkt bezeichnet, zur Definition eines Partikelhorizonts, bezogen auf diesen Zeitpunkt, definieren. Ab dem Zeitpunkt der Emission der Hintergrundstrahlung kann man die Definition, bezogen auf den Bezugszeitpunkt, auch verständlicher formulieren (vgl. Roos 2003 [8], S. 39 ff).

**Definition 1 Partikelhorizont  $t_{min}$ :** *Der (physikalische) Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  ( $t_{min} < t$ ) ist die größte räumliche Entfernung zum gemeinsamen Zeitpunkt  $t$  zwischen dem Beobachter und einem als mitbewegt angenommenen Objekt, das in der Vergangenheit seit dem Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  Licht (oder mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen) in Richtung auf den Beobachter emittiert haben könnte und dessen Licht den Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  erreicht.*

Die Formulierung „seit dem Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ “ ist so gewählt, dass die Definition für den frühesten Emissionszeitpunkt  $t_{min}$  mit der anfänglichen Definition für eine Emission seit dem Urknall unmittelbar verträglich ist. Selbstverständlich korrespondiert die größte Entfernung genau mit dem Emissionszeitpunkt  $t_{min}$ . Man könnte die „größte Entfernung“ in der Definition auch eliminieren, wenn man nur (ohne das Wort „seit“) den Emissionszeitpunkt  $t_{min}$  und den Empfangszeitpunkt  $t$  in die Definition einbeziehen würde. Außerdem muss angenommen werden, dass genau zum Zeitpunkt  $t_{min}$  ein ruhendes Objekt (im betrachteten Umfeld, z.B. auf der positiven radialen Koordinatenachse), das Licht auf den Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  richtet, tatsächlich existiert hat.

Nach der Emission zum Zeitpunkt  $t_{min}$  haben sich Beobachter und emittierendes Objekt allein durch die Expansion des Universums immer weiter voneinander entfernt, zum Zeitpunkt  $t$  erreicht das emittierte Licht schließlich den Beobachter.

Die Berechnung des Partikelhorizonts, bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ , erfolgt über die entsprechende Formel in Tabelle 4. Man gewinnt den allgemeinen Partikelhorizont mit dem Bezugszeitpunkt Urknall, indem man  $t_{min}$  gegen  $NULL$  streben lässt. Es ist bekannt, dass dieser Grenzwert im  $\Lambda$ CDM-Modell existiert.

**Supremum-Definition des (allgemeinen) Partikelhorizonts (Bezugszeitpunkt Urknall):** *Der Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt Urknall, ist die kleinste obere Schranke (Supremum) für Partikelhorizonte zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf*

**Bezugszeitpunkte  $t_{min}$  gemäß Definition 1 Partikelhorizont  $t_{min}$  (hier würde  $t_{min}$  als Variable betrachtet), mit  $0 < t_{min} < t$ .**

Ein Problem bei der Definition des Partikelhorizonts mit einem sehr frühen Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  in der Anfangsphase des Universum ist darin zu sehen, dass die Existenz ruhender Objekte, von denen mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen emittiert werden, nicht ohne Weiteres angenommen werden kann. Man kann jedoch anstelle dessen das ruhende Objekt einfach hypothetisch postulieren. (Man könnte auch einen im Hubble-Flow treibenden „Beobachter“ am Ort der Emission postulieren und den Abstand dieses „Beobachters“ von unserem zentralen Beobachter in der Milchstraße im Zeitablauf verfolgen. Da wir aber den Begriff BEOBACHTER auf unseren zentralen Beobachter in der Milchstraße beschränken wollen, soll von dieser Terminologie kein Gebrauch gemacht werden.)

Als häufigstes Beispiel für den Zeitpunkt  $t_{min}$  wird der Zeitpunkt  $t_{CMB}$  des Emission der Hintergrundstrahlung zur Definition des (physikalischen) Partikelhorizonts CMB gewählt, der gemäß Formel (6) berechnet werden kann.

### 7.2.2 Partikelhorizont HEUTE

Gemäß Planck18 (vgl. Planck 18 [1], Table 2, S. 16) weisen die *HEUTE* empfangenen Photonen des CMB (der Mikrowellenhintergrundstrahlung) eine Rotverschiebung von  $z=1090$  auf, was einer Emissionszeit von *371'127 Jahren* nach dem Urknall und einer damaligen Entfernung von *41.447549 Millionen Lichtjahren* vom Beobachter entspricht. Der *HEUTIGE* Ort jener damals *41.447549 Millionen Lichtjahre* vom Beobachter entfernten Position ist aufgrund der Expansion des Universums *HEUTE 45.219275 Mrd. Lichtjahre* vom Beobachter entfernt. Der Partikelhorizont CMB *HEUTE*, bezogen auf die untere Emissionsgrenze bei *371'127 Jahren*, beträgt also *45.219275 Mrd. Lichtjahre*.

Das Universum vor jenem Zeitpunkt bei *371'127 Jahren* nach dem Urknall war lichtundurchlässig. Man kann jedoch den heutigen Ort von Positionen berechnen, von denen vor diesem Zeitpunkt emittierte, auf den Beobachter gerichtete, sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzende Informationen von jener Position vor diesem Zeitpunkt emittiert wurden bzw. emittiert worden wären. Geht man mit diesen Zeitpunkten gegen  $t=0$ , so gelangt man den *HEUTIGEN* Partikelhorizont von *46.132820 Mrd. Lichtjahren*.

Die *HEUTIGE* Entfernung des Beobachters zum Partikelhorizont ist zusätzlich in Tabelle 2 erwähnt.

### 7.2.3 Beobachtbares Universum

Das Beobachtete Universum kann als das Innere der Kugel mit der Oberfläche des Partikelhorizonts (inklusive Oberfläche, bei der Supremum-Definition – siehe Kap. 7.2.1 – des Partikelhorizonts wird die Oberfläche per Definition eingeschlossen) aufgefasst werden. Zunächst wird wie in Kap. 7.2.1 die positive radiale Achse betrachtet. Anders als bei der Definition des Partikelhorizonts sind alle Koordinaten des Durchmessers Teil des Beobachtbaren Universums.

Der Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ , begrenzt den Raum des Beobachtbaren Universums  $t_{min}$  zum Zeitpunkt  $t$ , d.h. der Partikelhorizont begrenzt den Radius jenes Teils des Universums, das seit dem Zeitpunkt  $t_{min}$  in kausalen Kontakt mit dem Beobachter gekommen ist. Der auf dem positiven Teil der radialen Achse des Koordinatensystems (mit dem Beobachter im Ursprung) gelegene Radius des Beobachtbaren Universums  $t_{min}$  zum Zeitpunkt  $t$  umschließt alle Orte zum Zeitpunkt  $t$  von ruhenden Objekten,

die zu Zeitpunkten  $t^*$  mit  $t_{min} \leq t^* < t$  mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen auf den Beobachter gerichtet haben. (Ruhende Objekte haben wir stets auf der positiven radialen Koordinatenachse angenommen.)

Für den Sonderfall  $t_{min} = t_{CMB}$  verwenden wir die Bezeichnung Beobachtbares Universum CMB.

Man gewinnt wieder das (allgemeine) Beobachtbare Universum (zum Bezugszeitpunkt Urknall), indem man  $t_{min}$  gegen  $NULL$  streben lässt. Der durch den Ursprung des Koordinatensystems verlaufende Durchmesser (siehe Hinweis in Kap. 7.2.1) des (allgemeinen) Beobachtbaren Universums ist durch den Partikelhorizont mit dem Bezugszeitpunkt Urknall begrenzt.

Das Beobachtbare Universum zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t^{**}$  ( $0 < t^{**} < t$ ), ist Teil des Beobachtbaren Universums zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t^*$  ( $0 < t^* < t^{**}$ ). Jedes beobachtbare Universum zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t^*$  ( $0 < t^* < t$ ), ist Teil des (allgemeinen) Beobachtbaren Universums zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt Urknall.

#### 7.2.4 Hinweis auf eine alternative Definition des Partikelhorizonts

In Kap. 10.1 zeigen wir zusätzlich, dass der negative Radius des auf der radialen Koordinatenachse gelegenen Teils des Beobachtbaren Universums jene mit Lichtgeschwindigkeit übertragenen Partikel (i.a. Photonen) umschließt, die den Beobachter zu einem Zeitpunkt  $t^* < t$  passiert haben. Auf diese Weise wird in Kap. 10.2 eine alternative Definition des Partikelhorizonts hergeleitet.

Da positive und negative Koordinatenachse willkürlich gewählte Richtungen darstellen, besteht das Beobachtbare Universum generell aus beiden Bestandteilen.

### 7.3 Kosmologischer Ereignishorizont

Der Partikelhorizont blickt in die Vergangenheit, der Ereignishorizont in die Zukunft.

Bei der Definition des kosmologischen Ereignishorizonts stellt man die Frage nach der kleinsten oberen Schranke dafür, wie weit ein mitbewegtes Objekt zum Zeitpunkt  $t$  vom Beobachter entfernt sein darf, damit von diesem Objekt emittierte, auf den Beobachter gerichtete Photonen den Beobachter in endlicher Zukunft noch erreichen können.

Die Formulierung der kleinsten oberen Schranke ist erforderlich, da ein vom Ereignishorizont emittierter, auf den Beobachter gerichteter Lichtstrahl diesen gerade nicht mehr erreicht. Salopp formuliert kann man sagen, dass dieser Lichtstrahl den Beobachter zum Zeitpunkt *UNENDLICH* erreicht, während ein von jenseits des Ereignishorizonts emittierter Lichtstrahl den Beobachter auch zum Zeitpunkt *UNENDLICH* nicht mehr erreicht. (Diese Sonderrolle des Ereignishorizonts und die grenzwertigen Charakteristiken des „zum Zeitpunkt *UNENDLICH* ankommenden“ Lichts sollen bei der hier nur kurz vorgenommenen Definition nicht weiter ausgebreitet werden.)

Der Raum zwischen Hubblesphäre und Ereignishorizont wird mit wachsendem  $t$  zunehmend kleiner. (Für sehr große  $t$  sind Hubblesphäre und Ereignishorizont in Zeichnungen praktisch nicht mehr voneinander zu unterscheiden.) Der Ereignishorizont kann auch dadurch charakterisiert werden, dass die Rezessionsgeschwindigkeit des Ereignishorizonts für jedes  $t$

genau um  $1/c$  (Lichtgeschwindigkeit  $c$ ) geringer ist als die Rezessionsgeschwindigkeit einer Galaxie auf dem Ereignishorizont.

Die *HEUTIGE* Entfernung des Beobachters zum kosmologischen Ereignishorizont ist in Tabelle 2 erwähnt.

#### 7.4 Lichtkegel

Wenn wir hier vom Lichtkegel  $LK(T)$  sprechen, so ist damit der Mantel des Lichtkegels mit dem Scheitel des Rückwärts-Teilkegels zum Zeitpunkt  $T$  gemeint. Für jedes  $t < T$  überstreicht der Mantel die räumlichen Koordinaten jener Ereignisse zum Zeitpunkt  $t$ , die aufgrund einer Übermittlung mit Lichtgeschwindigkeit am Scheitel SICHTBAR sind. Zu jedem Zeitpunkt  $t$  ist dieser Mantel eine Kugeloberfläche (d.h. die Grenzfläche, nicht das Kugellinnere) mit dem Beobachter im Zentrum und dem Radius  $d_{LK}(T, t)$  (siehe Tabelle 4).

Galaxien, die der Beobachter zum Zeitpunkt  $T$  SEHEN kann (d.h. von denen er mit Lichtgeschwindigkeit auf geodätischem Pfad übermittelte Informationen empfangen kann), sind auf dem Rückwärts-Lichtkegel (genauer: auf dem Mantel des Rückwärts-Lichtkegels) gelegen, auf dessen Scheitel sich der Beobachter gerade befindet. Der Lichtkegel  $LK(T)$  mit Scheitel beim Zeitpunkt  $T$  zeichnet also in Bezug auf die Vergangenheit alle zum Zeitpunkt  $T$  SICHTBAREN Ereignisse nach.

Jede zum Zeitpunkt  $T$  SICHTBARE Galaxie (wie auch jedes andere Objekt, von dem der Beobachter mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen empfangen werden kann) ist durch ihre Lichtlaufzeit zum Beobachter und ihre physikalische Entfernung zur Weltlinie des Beobachters gekennzeichnet. Da physikalische Entfernungen für Inertialsysteme mit gleicher kosmologischer Zeit definiert sind, wird die Eigendistanz oder physikalische Distanz zwischen dem Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  und der betreffenden Galaxie zum Zeitpunkt  $t$  ermittelt. Die zugehörige mitbewegte Distanz entspricht der Eigendistanz, geteilt durch  $a(t)$ .

Hubblesphäre, Ereignishorizont und Partikelhorizont sind globale Konstrukte der Raumzeit, die zu jedem Zeitpunkt  $t$  durch die physikalische Entfernung zum Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  umschrieben werden können. Jedem Zeitpunkt ist genau eine Entfernung (der Kugelradius) zugeordnet.

Die raumzeitliche Struktur des Lichtkegels hingegen ist komplexer gestaltet. Betrachtet man Lichtkegel  $LK(T)$  mit veränderlichem Scheitelpunkt  $T$ , so ändert sich die gesamthafte Struktur für alle Zeitpunkte  $t$ , zu denen Objekte auf dem jeweiligen Lichtkegel Photonen emittieren, die zum Zeitpunkt  $T$  empfangen werden. Ist  $T^* < T$  und wird mit  $LK(T)$  bzw.  $LK(T^*)$  der jeweilige Lichtkegel mit Scheitel bei  $T$  bzw.  $T^*$  bezeichnet, so ist zu jedem Zeitpunkt  $t < T^*$  die physikalische Entfernung  $d_{LK}(T^*, t)$  (siehe Tabelle 4) auf dem Lichtkegel  $LK(T^*)$  kleiner als die Entfernung  $d_{LK}(T, t)$  auf dem Lichtkegel  $LK(T)$ .

Es gilt also: ist  $T^* < T$ , so folgt  $d_{LK}(T^*, t) < d_{LK}(T, t)$  für alle  $t < T^*$ . Diese Aussage kann man anhand von Abbildung 1 überprüfen.

Wie man z.B. Abbildung 7 entnehmen kann, kann man diese Aussage auf alle  $t$  seit dem Urknall bis  $t$  gegen *UNENDLICH* fortsetzen. Die Bedingung „für alle  $t < T^*$ “ kann also durch „für alle  $t$  ( $0 < t < \infty$ )“ ersetzt werden.

Hilfreich zum Verständnis können die insbesondere die animierten Zeichnungen von Yukterez [3] dienen, die in Kap. 8.1 genauer erläutert sind.

Betrachtet man nun einen festen Scheitelpunkt  $T$ , so zeigt Abbildung 1 auch, dass das Innere des Lichtkegels  $LK(T)$  von Ereignissen gebildet wird, die dem Beobachter zu Zeitpunkten  $T^* < T$  durch Übermittlung mit Lichtgeschwindigkeit zur Kenntnis gelangt sind.

## 8 Zusammenspiel von Rückwärts-Lichtkegeln, Hubblesphäre, Horizonten und Galaxien

### 8.1 Hinweis auf Zeichnungen anderer Autoren

Das Zusammenwirken von Lichtkegeln, Hubblesphäre, Horizonten und Galaxien werden wir im Folgenden auch anhand von Zeichnungen exemplarisch darlegen. Einige dieser Zeichnungen basieren zum Teil auf Vorlagen, die hier kurz dargelegt werden sollen.

Besondere Erwähnung finden sollen dabei zunächst die animierten Zeichnungen von Yukterez (Simon Tyran, Wien) [3].

Die beiden Zeichnungen (eine für physikalische, die andere für mitbewegte Koordinaten) zeigen auf der waagerechten Achse eine durch das Zentrum der expandierenden Kugeloberflächen von Hubblesphäre (englisch: hubble sphere), Ereignishorizont (englisch: event horizon) und Partikelhorizont (englisch: particle horizon) verlaufende Gerade, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit als eine der 3 räumlichen Koordinatenachsen aufgefasst werden kann. Animiert dargestellt ist der Lichtkegel (englisch: light cone), der seine Gestalt im Zeitverlauf für alle Vergangenheitszeitpunkte (und auch alle Zukunftszeitpunkte) insgesamt ändert. Der Mantel des Rückwärts-Lichtkegels zeichnet alle Ereignisse nach, die man im Scheitelpunkt des Lichtkegels SEHEN kann. In der Grafik wandert dieser Scheitel von der frühen Vergangenheit bis in die fernere Zukunft, wobei der *HEUTIGE* Zeitpunkt durch eine waagerechte Linie besonders gekennzeichnet ist.

Zusätzlich zu den animierten Zeichnungen von Yukterez liefert Figure 1 des Artikels von Davis/Lineweaver, 2003 [4] bzw. Figure 1.1 der Dissertation von T. M. Davis, 2003 [5] mehrere ausgezeichnete Zeichnungen. Es handelt sich um die Darstellung analoger kosmologischer Konstrukte wie jene von Yukterez. Anders als bei Yukterez kann man die (unbewegliche) Zeichnung samt ausführlichen Erläuterungen in Ruhe studieren.

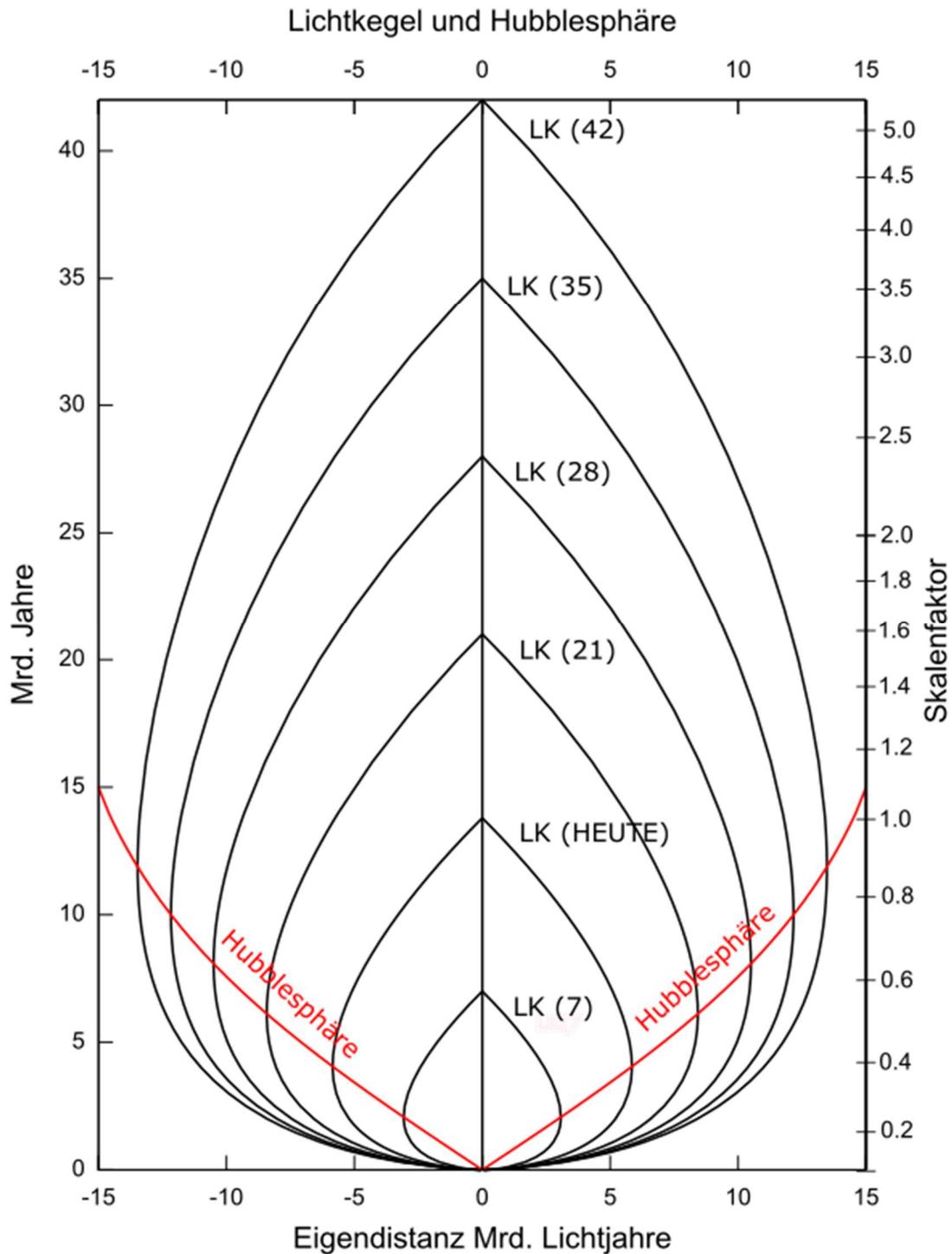
### 8.2 Lichtkegel und Hubblesphäre

#### 8.2.1 Lichtkegel und Hubblesphäre: Zeichnungen

Abbildung 1 zeigt die ineinander verschachtelten Rückwärts-Lichtkegel für verschiedene Scheitelpunkte. Jeder Lichtkegel mit einem höhergelegenen (zeitlich weiter vom Urknall entfernten) Scheitelpunkt schließt den tiefergelegenen vollständig ein. Die Form der Lichtkegel wird mit Begriffen wie Träne, Tropfen (englisch oft: teardrop) oder auch Birne bezeichnet.

Alle Lichtkegel sind im unteren Bereich der Zeichnung jeweils unterhalb der Hubblesphäre gelegen. Die Hubblesphäre schneidet jeden eingezeichneten Lichtkegel, und zwar stets zum Zeitpunkt der größten Entfernung des Lichtkegels vom Beobachter. Auf einem Lichtkegel gelegene Galaxien entfernen sich also unterhalb des Schnittpunkts  $t_i$  (zeitlich vor Erreichen des Schnittpunkts) mit Überlichtgeschwindigkeit vom Beobachter. Von der Galaxie emittierte, auf den Beobachter gerichtete, sich einst vom Beobachter entfernende Photonen wurden von der sich vergrößernden Hubblesphäre überholt, wodurch diese sich dem Beobachter annäherten und

die Galaxie SICHTBAR wurde. Dieses Verhalten ist in größerer Genauigkeit in Kap. 7.1 dargelegt.

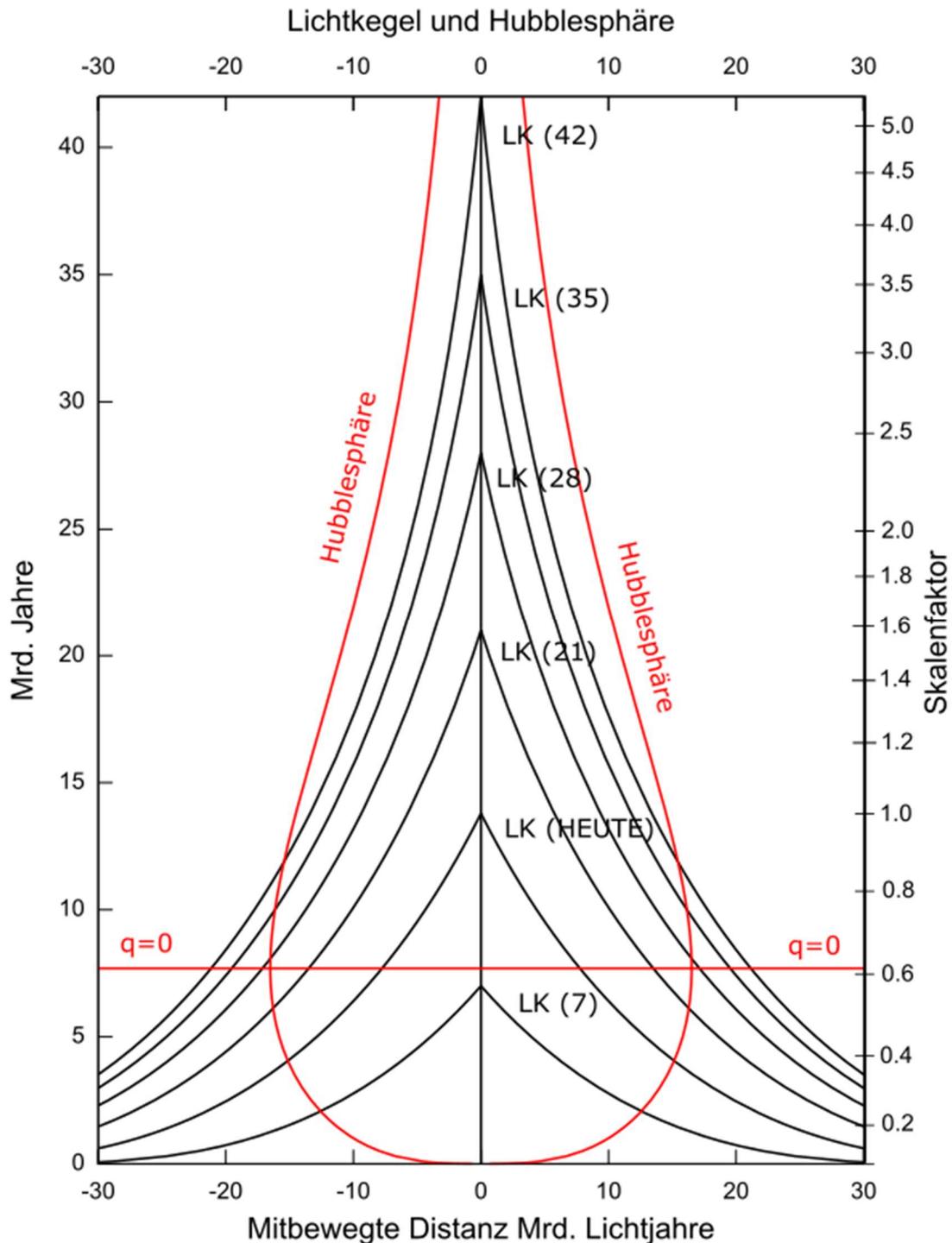


**Abbildung 1:** Rückwärts-Lichtkegel und Hubblesphäre in physikalischen Koordinaten.  $LK(T)$  bezeichnet den Rückwärts-Lichtkegel mit einem Scheitel bei  $T$  Milliarden Jahren nach dem Urknall. Die senkrechte Mittellinie ist die Weltlinie des Beobachters.

Alle heute mit einer Rotverschiebung  $z(HEUTE) > 1.576364$  SICHTBAREN Galaxien (Schnittpunkt  $t_i$  zwischen Lichtkegel mit Scheitelpunkt  $HEUTE$  und der Hubblesphäre:  $t_i = 5.8513981$  Mrd. Jahre nach dem Urknall, beim Skalenfaktor  $a = 0.38645306$ , haben sich zum

Zeitpunkt der Lichtemission mit Überlichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernt, die meisten davon (alle, die nie von der Hubblesphäre überholt wurden) zu allen Zeiten.

Im Falle unseres *HEUTIGEN* Lichtkegels gilt also  $t_i < t_{ii}$ . Diese Bedingung ist, wie in Kap. 7.1 erläutert, dem Überholen von Photonen durch die Hubblesphäre zwar sehr förderlich, aber nicht zwingend notwendig.



**Abbildung 2:** Rückwärts-Lichtkegel und Hubblesphäre in mitbewegten Koordinaten.  $LK(T)$  bezeichnet den Rückwärts-Lichtkegel mit einem Scheitel bei  $T$  Milliarden Jahren nach dem Urknall. Die senkrechte Mittellinie ist die Weltlinie des Beobachters.

Abbildung 2 zeigt alle Konstrukte von Abbildung 1 nun in mitbewegten Koordinaten. Insbesondere ist jetzt jene Linie ausgearbeitet, bei der der Abbremsparameter  $q$  den Wert  $NULL$  annimmt. Unterhalb der „ $q=0$ “-Linie expandiert die Hubble-Sphäre schneller als der Raum (schneller als ruhende Objekte, die sich allein durch die Expansion des Universums vom Beobachter entfernen), oberhalb expandiert der Raum schneller als die Hubblesphäre. Die Konsequenzen sind im Detail in Kap. 7.1 dargelegt.

**Tabelle 6: Schnittpunkte Lichtkegel-Hubblesphäre**

Schnittpunkt Hubble-sphäre LK(Mrd. Jahre)	t Mrd. Jahre nach dem Urknall	Physikalische Entfernung Mrd. Lichtjahre	Mitbewegte Entfernung Mrd. Lichtjahre
LK(7)	2.0682864	3.0738076	12.574356
LK(HEUTE)	4.0534118	5.8513981	15.141291
LK(21)	6.1204295	8.4280617	16.295219
$q=0$ (siehe Tabelle 3)	7.6931755	10.122295	16.516757
LK(28)	8.0814764	10.503146	16.504904
LK(35)	9.9990437	12.168466	16.148150
LK(42)	11.878923	13.472776	15.443147
LK(56)	15.552914	15.242900	13.541327
LK(70)	19.151137	17.195583	12.163203
Folge der Schnittpunkte für $t \rightarrow \infty$	$\infty$	17.529543	0

Die folgende Tabelle zeigt die mitbewegte Entfernung vom Beobachter bei  $t=0$ . Die Lichtkegel  $LK(56)$  und  $LK(70)$  sind in den Abbildungen 4 und 5 vorzufinden.

**Tabelle 7: Mitbewegte Lichtkegel-Distanz vom Beobachter bei  $t=0$**

	Mrd. Lichtjahre		Mrd. Lichtjahre
Ereignishorizont	62.812172	LK(28)	55.506670
LK(70)	62.147666	LK(21)	51.885625
LK(56)	61.335265	LK(HEUTE)	46.132820
LK(42)	59.529309	LK(7)	37.208341
LK(35)	57.916589		

In Kap. 8.4 wird das Thema behandelt, wo sich eine vom Scheitel bei  $T$  SICHTBARE, als ruhend angenommene Galaxie zu einem späteren Zeitpunkt aufhalten wird.

### 8.2.2 Lichtkegel und Hubblesphäre: Tabellen

In Kap. 7.1 wurde die Expansion der Hubblesphäre erläutert. In Kap. 8.2.1 wurden die Folgen dieser Expansion auf die Schnittpunkte zwischen Hubblesphäre und Lichtkegel in Form von Zeichnungen dargelegt. Diese Zusammenhänge sollen noch durch zwei Tabellen erläutert werden, in denen zusätzliche Werte aufgeführt sind (Hubble-Parameter, Rezessionsgeschwindigkeiten), die den Zeichnungen nicht entnommen werden können. Entfernungen sind in physikalischen Koordinaten dargestellt.  $H$  bezeichnet den Hubble-Parameter in Abhängigkeit von  $a$  bzw.  $t$ ,  $H_S \times LK(HEUTE)$  den Schnittpunkt zwischen Hubblesphäre und  $LK(HEUTE)$  und  $H_s \times LK(42)$  den zwischen Hubblesphäre und  $LK(42)$ . Nicht aufgeführt sind Werte von  $LK(HEUTE)$  später als  $HEUTE$ . Zu  $t_{\ddot{u}}$  siehe Kap. 7.1.

**Tabelle 8.1: Rezessionsgeschwindigkeiten (Rez), Hubble-Parameter (H), Hubblesphäre (HS), LK(HEUTE), LK(42) in Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit.**

a	t Mrd. Jahre	H km / s / Mpc	Rez HS in $c$	Rez LK(Hte) in $c$	Rez LK(42) in $c$
0.00091659028	CMB	1565562.5	1.6209175	66.362491	86.022787
0.15028845	1	652.29272	1.4899949	2.7036283	4.0467412
0.31435636	3	221.85225	1.4056118	1.2948450	2.2503446
0.38645306	<b>4.0534118</b> ( $<t_{\ddot{u}}$ ) HS x LK(HEUTE)	167.10403	1.3332001	<b>1.0000000</b>	1.8847653
0.44752947	5	138.15453	1.2557540	0.81369986	1.6607930
0.57084796	7	103.96075	1.0683606	0.54165926	1.3547411
0.61284999	<b>7.6931755</b> $t_{\ddot{u}}: (q=0)$	96.597882	<b>1.0000000</b>	0.46939001	1.2804747
0.69217833	9	86.186720	0.87182924	0.35065875	1.1679987
0.81617343	11	75.791144	0.68761399	0.19537060	1.0428815
0.87241130	<b>11.878923</b> ( $>t_{\ddot{u}}$ ) HS x LK(42)	72.575408	0.61400627	0.13252862	<b>1.0000000</b>
0.94625338	13	69.287877	0.52791456	0.054502810	0.95277735
1	HEUTE	67.4	0.47268419	0	0.92343066
1.5821007	21	58.930373	0.15611614		0.72883538
2.3895306	28	56.712124	0.048921846		0.55751041
3.5762041	35	56.059448	0.014934972		0.33066128
5.3376959	42	55.863962	0.0045230186		0
$\infty$	$\infty$	55.779676 $H_0 * \Omega_{\Lambda}^{1/2}$	0	$-\infty$	$-\infty$

**Tabelle 8.2: Eigendistanzen (Ed.) Hubblesphäre (HS), LK(HEUTE), LK(42) in Mrd. Lichtjahren**

a	t Mrd. Jahre	$a'(t) = H(t) a(t)$ km / s / Mpc	Ed. HS Mrd. Lichtj.	Ed. LK(Hte) Mrd. Lichtj.	Ed. LK(42) Mrd. Lichtj.
0.00091659028	CMB	1435.0	0.00062456288	0.041447549	0.053726640
0.15028845	1	98.032	1.4990083	4.0527614	6.0660988
0.31435636	3	69.741	4.4074027	5.7069034	9.9181747
0.38645306	<b>4.0534118</b> HS x LK(HTE.)	64.578	<b>5.8513981</b>	<b>5.85139801</b> Maximum	11.028512
0.44752947	5	61.828	7.0775256	5.7589816	11.754305
0.57084796	7	59.346	9.4053975	5.0945206	12.741879
0.61284999	<b>7.6931755</b> $q=0$	<b>59.200</b> Minimum	10.122295	4.7513039	12.961342E
0.69217833	9	59.657	11.345045	3.9782393	13.250998
0.81617343	11	61.859	12.901141	2.5205036	13.454361
0.87241130	<b>11.878923</b> HS x LK(42)	63.316	<b>13.472776</b>	1.7855284	<b>13.472776</b> Maximum
0.94625338	13	65.564	14.112024	0.76914499	13.445617
1	HEUTE	67.4	14.507303	0	13.396488
1.5821007	21	93.234	16.592330		12.093077
2.3895306	28	135.52	17.241326		9.6122188
3.5762041	35	200.48	17.442059		5.7674137
5.3376959	42	298.18	17.503095		0
$\infty$	$\infty$	$\infty$	17.529543 $c / (H_0 * \Omega_{\Lambda}^{1/2})$	$-\infty$	$-\infty$

### 8.2.3 Expansion von Vielfachen der Hubblesphäre

Hubblesphäre und Ereignishorizont sind Kugeloberflächen, der Lichtkegel  $LK(T)$  beschreibt eine Sequenz von Kugeloberflächen. Die weitere Darstellung ist am Verhalten dieser Kugeloberflächen auf der positiven radialen Achse im Zeitablauf dieser Kugeloberflächen (z.B. „unterhalb des Schnittpunkts“) orientiert, die man auch den Zeichnungen entnehmen kann.

Der Verlauf von Lichtkegeln  $LK(T)$ , Hubblesphäre und Ereignishorizont ist durch die Formeln von Tabelle 4 vollständig belegt. **Weitere zusätzliche Beweise für bestimmte erwähnte Verhaltensweisen wie z.B. die Rezession mit Überlichtgeschwindigkeit von Galaxien unterhalb des Schnittpunkts zwischen Hubblesphäre und Lichtkegel sind nicht erforderlich.** Die im Folgenden genannten Eigenschaften sollen lediglich verschiedene dieser Verhaltensweisen besser verständlich machen.

Die Rezessionsgeschwindigkeiten von Galaxien können über das Hubble-Lemaître-Gesetz berechnet werden. Die Rezessionsgeschwindigkeit des Ereignishorizonts beträgt die einer Galaxie auf dem Ereignishorizont minus  $c$ , die des Partikelhorizonts die einer Galaxie auf dem Partikelhorizont plus  $c$ . Jeder Lichtkegel ist kurz nach dem Urknall zwischen Hubblesphäre und Ereignishorizont gelegen und verbleibt zunächst zwischen beiden Kugeloberflächen, bis der Lichtkegel die Hubblesphäre schneidet. Sichtbar unterhalb des Schnittpunkts sind auf dem Lichtkegel gelegene Galaxien, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernen. Für die Sichtbarkeit verantwortlich sind von der jeweiligen Galaxie emittierte, auf den Beobachter gerichtete Photonen, die von der sich vergrößernden Hubblesphäre überholt wurden. Galaxien oberhalb dieses Schnittpunkts, also im Inneren der Hubblesphäre, entfernen sich mit einer Rezessionsgeschwindigkeit  $< c$  vom Beobachter.

Die Rezessionsgeschwindigkeit eines auf den Beobachter gerichteten Photons beträgt an jedem Ort zu jeder Zeit genau jene hypothetische Rezessionsgeschwindigkeit eines ruhenden Objekts am gleichen Ort zur gleichen Zeit, minus  $c$ . Entfernt sich ein hypothetisches ruhendes Objekt innerhalb der Hubblesphäre mit einer Geschwindigkeit  $v_{rez}$  vom Beobachter, so nähert sich ein von diesem Objekt in Richtung auf den Beobachter emittiertes Photon dem Beobachter zum Emissionszeitpunkt mit einer Geschwindigkeit von  $c - v_{rez}$  an.

Das Expansionsverhalten der Hubblesphäre ist kein Vorgang, der allein die Kugeloberfläche mit der Expansionsgeschwindigkeit  $c$  betrifft. Wendet man das Hubble-Lemaître-Gesetz  $v = HD$  auf  $v = \gamma c$  mit  $\gamma > 1$  an, so ist die Lösung  $D = \gamma c / H = \gamma d_{HS}$  (zur Notation siehe Tabelle 4) auch für Vielfache von  $c$  ( $\gamma c$ -Kugeloberfläche) anwendbar. Weil auf der radialen Achse  $d_{HS}'(t) = c(1+q(t))$  (vgl. Harrison 1991 [9], Kap. 2.1) gilt, ist selbstverständlich auch  $\gamma c(1+q(t))$  die Rezessionsgeschwindigkeit von  $\gamma d_{HS}(t)$ .

Da die Rezessionsgeschwindigkeit von Galaxien auf der  $\gamma c$ -Kugeloberfläche genau  $\gamma c$  beträgt, expandiert die  $\gamma c$ -Kugeloberfläche, solange  $q(t) > 0$ , schneller als eine Galaxie, die sich mit dem  $\gamma$ -fachen der Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter entfernt. Wieder überholt die  $\gamma c$ -Kugeloberfläche, sofern  $-1 < q(t)$  (was im  $\Lambda$ CDM-Modell für endliche  $t$  immer der Fall ist), nahe der Fläche gelegene, auf den Beobachter gerichtete Photonen und, sofern  $0 < q(t)$  (also  $t < t_{\ddot{u}}$ ), auch nahegelegene Galaxien. Mit zunehmendem  $\gamma$  wird der Faktor  $\gamma c(1+q(t))$ , mit dem die  $\gamma c$ -Kugeloberfläche expandiert, anstiegsmäßig linear größer als die Rezessionsgeschwindigkeit von Galaxien auf dieser Fläche.

Ziel dieser Darstellung war, das Rezessionsverhalten von Galaxien und Photonen auf einem Lichtkegel verständlicher zu machen. Ein weiterer Beweis war, wie anfangs erwähnt, weder erforderlich noch geplant. Alle auf dem Lichtkegel gelegenen (auf den Beobachter gerichteten) Photonen sind von diesen Überholvorgängen bzw. vom Abbremsen aller Rezessionsgeschwindigkeiten im gesamten Universum seit einem Zeitpunkt kurz nach dem

Urknall bis zum Zeitpunkt  $t_{ii}$  betroffen. Die Abbremsvorgänge sind umso stärker, je weiter ein ruhendes Objekt oder ein Photon vom Beobachter entfernt ist.

Galaxien verlassen durch ihre Rezession den Lichtkegel  $LK(T)$  und schneiden in der Folge andere Lichtkegel  $LK(T^*)$  mit  $T^* > T$ . Auf den Beobachter gerichtete Photonen formen den Lichtkegel.

Hilfreich kann hier ein Blick auf die Abbildungen 3 und 4 sein. Die Galaxie SPT0418-47 entfernt sich dort 1.4 Mrd. Jahre nach dem Urknall mit 2.2-facher Lichtgeschwindigkeit vom Beobachter. Weitere Details sind in Kap. 8.4 erwähnt.

Als ein zusätzliches Verständniselement kann das Verhalten von Photonen in Bezug auf dem Ereignishorizont dienen. Jedes Photon diesseits des Ereignishorizonts wird den Beobachter auch erreichen. Liegt das Photon außerhalb der Hubblesphäre, muss es auf seinem Weg zum Beobachter die Hubblesphäre schneiden, was zum Verständnis insbesondere für sehr große  $T$  als Scheitelpunkte von Lichtkegeln und  $t > t_{ii}$  hilfreich ist. Hubblesphäre innen und Ereignishorizont außen konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gegen den gleichen endlichen Grenzwert  $c / (H_0 * \Omega_A^{1/2})$ .

Die obige Darstellung ist am Fall  $t < t_{ii}$  orientiert, um die Entwicklung von Rezessionsgeschwindigkeiten beim Entstehen des *HEUTIGEN* Lichtkegels (Schnittpunkt mit der Hubblesphäre zum Zeitpunkt  $t_i < t_{ii}$ , siehe Kap. 8.2.1) nachzuzeichnen. Die zu Kap. 7.1 analogen Aussagen für den Fall  $t > t_{ii}$  lassen sich ebenfalls ohne Schwierigkeiten herleiten.

### 8.3 *Zweiseitige und einseitige Zeichnungen*

Abbildungen 1 und 2 folgen dem Vorbild von Yukterez [3] und Davis/Lineweaver 2003 [4] bzw. T. M. Davis 2003 [5] (siehe Kap. 8.1) dahingehend, dass neben der positiven radialen Achse zusätzlich die zugehörige negative Achse abgebildet ist. Die Zeichnungen haben so einen symmetrischen Aufbau. Ganz offensichtlich liefert die negative Achse aber keine Zusatzinformationen.

Im nächsten Kapitel wollen wir jedoch zusätzlich das Verhalten von Galaxien studieren. Eine (als ruhend angenommene) Galaxie entfernt sich auf der positiven Achse vom Beobachter, eine Symmetrie ist daher nicht mehr gegeben. Wir verwenden daher im Weiteren Zeichnungen, in denen nur die positive Achse abgebildet ist.

Erst in Kap. 10 bei der Behandlung des Vorwärts-Lichtkegels (Zukunfts-Lichtkegels) wird die negative Achse wieder eingeführt. Ein Photonenstrahl, der den Scheitelpunkt eines Lichtkegels passiert hat, setzt sich auf der negativen Achse fort.

### 8.4 *Lichtkegel und Galaxien*

Jede Galaxie auf einem Lichtkegel entfernt sich aufgrund der Expansion des Universums vom Beobachter, während von der jeweiligen Galaxie emittierte, auf den Beobachter gerichtete Photonen Teil des Lichtkegels sind und den Beobachter schließlich erreichen.

Als Beispiel für die Auswahl von Galaxien soll der Wikipedia-Artikel über die Galaxie SPT0418-47 [6] herangezogen werden. Diese Galaxie ist *HEUTE* unter einer Rotverschiebung von  $z(\text{HEUTE})=4.2248$  SICHTBAR. Eine in Sichtlinie befindliche Galaxie bei

$z(\text{HEUTE})=0.263$  konnte als Gravitationslinse dienen. Erst diese gravitative Vergrößerung ermöglichte es Forschern, die Galaxie in ihrem Zustand *1.4 Milliarden Jahre* nach dem Urknall (dem Emissionszeitpunkt des *HEUTE* empfangenen Lichts) genauer zu untersuchen.

Der Wikipedia-Artikel enthält die folgende Zeichnung des Autors des hier vorliegenden Artikels. Die Wikipedia-Erläuterung [7] zu dieser Zeichnung enthält eine große Anzahl von kosmologischen Details, die für die SPT0418-47 relevant sind. Man kann die folgenden Zeichnungen aber auch ohne Lektüre der beiden erwähnten Wikipedia-Veröffentlichungen verstehen.

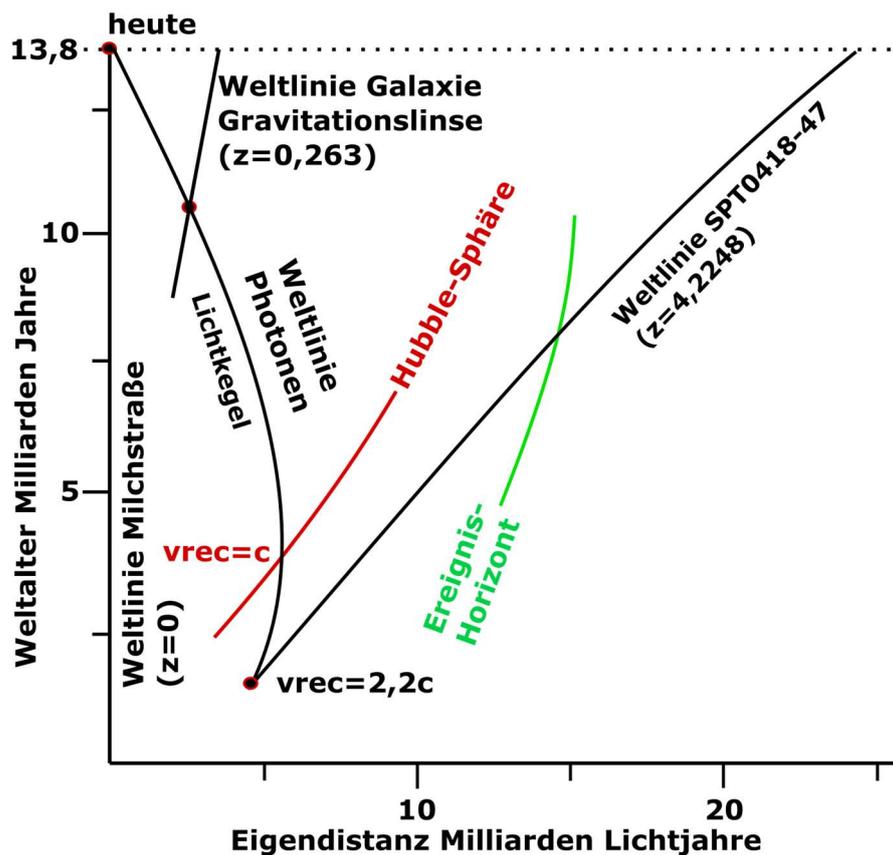


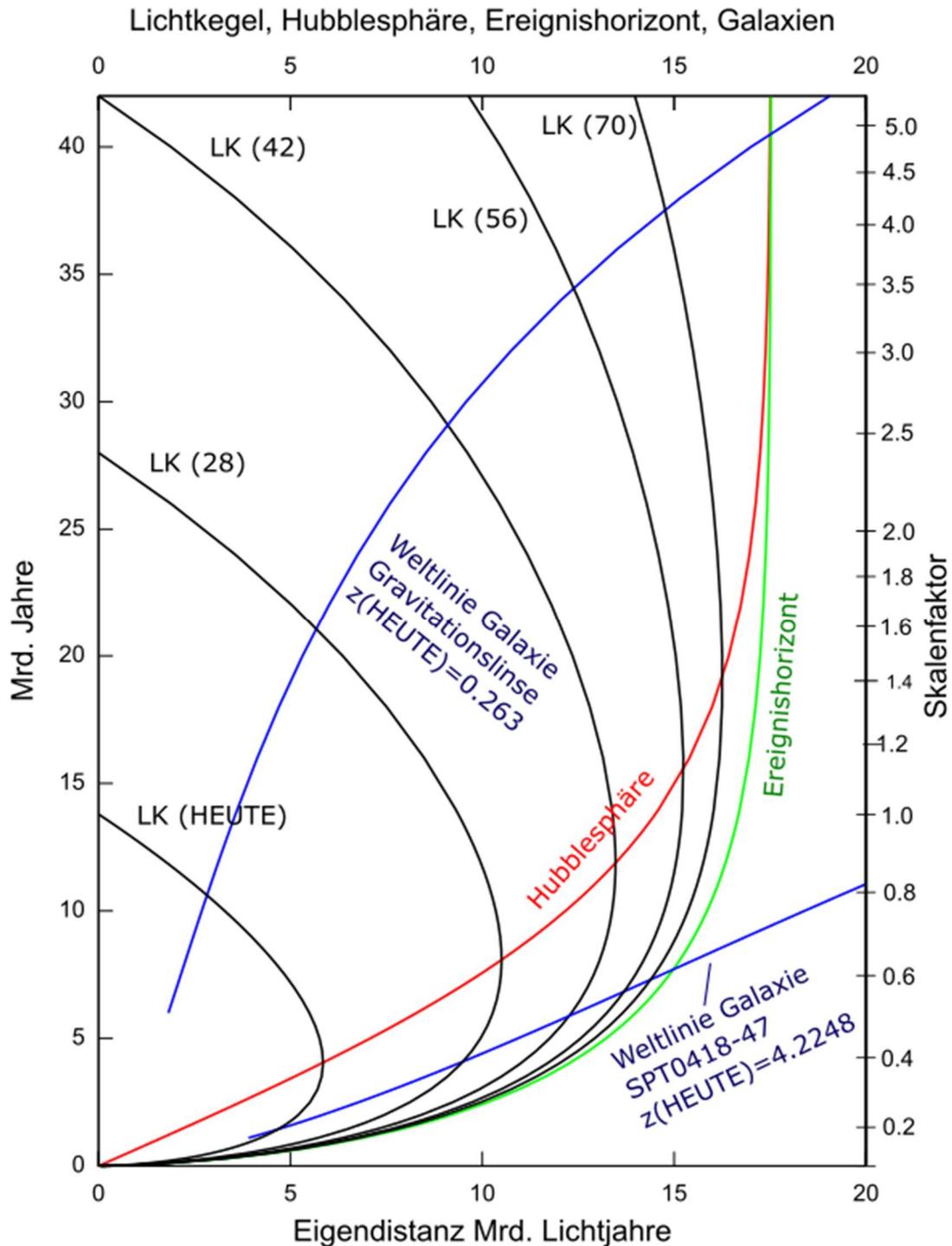
Abbildung 3: Für SPT0418-47 relevante Weltlinien (aus Wikipedia [6])

SPT0418-47 und Gravitationslinse werden in den folgenden Zeichnungen bis in die fernere Zukunft verfolgt. Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Gravitationslinse selbstverständlich genau auf der lichtartigen Geodäte von SPT0418-47 zum Beobachter, also ohne Raumwinkel ebenfalls auf der Koordinatenachse, gelegen ist.

Das Zusammenspiel zwischen Lichtkegeln und (in rot) Hubblesphäre wurde bereits in Kap. 8.2 ausführlich erläutert. In den Abbildungen 4 und 5 ist zusätzlich (in grün) der Ereignishorizont eingezeichnet, der alle Lichtkegel und die Hubblesphäre von außen einschließt. Mit größer werdendem  $t$  nähert sich die Hubblesphäre immer mehr dem Ereignishorizont und ist schließlich in der Zeichnung vom Ereignishorizont nicht mehr zu unterscheiden.

Die Lichtkegel  $LK(T)$  konvergieren für  $T \rightarrow \infty$  für jedes feste  $t$  gegen den Ereignishorizont von  $t$ . (Achtung: Für jedes feste  $T$  schneidet der Lichtkegel für  $t \rightarrow \infty$  irgendwann die Hubblesphäre, erreicht den Beobachter und setzt anschließend seinen Weg mit negativen Koordinaten auf der radialen Koordinatenachse fort. Bei Verwendung physikalischer Koordinaten strebt  $d_{LK}(T,t)$  gegen  $-\infty$ .)

Das untere Ende der Weltlinien der Galaxien in den Abbildungen 4 und 5 ist willkürlich gewählt.



**Abbildung 4:** Rückwärts-Lichtkegel, Hubblesphäre, Ereignishorizont und Weltlinien von Galaxien in physikalischen Koordinaten.  $LK(T)$  bezeichnet den Rückwärts-Lichtkegel mit einem Scheitel bei  $T$  Milliarden Jahren nach dem Urknall. Die senkrechte linke Koordinatenachse ist zugleich die Weltlinie des Beobachters.

Man sieht in Abbildung 4 im unteren Bereich die Weltlinie der Galaxie SPT0418-47, ausgehend von ihrem Schnittpunkt mit dem Lichtkegel  $LK(\text{HEUTE})$ . Die Geodäte der Photonen, die bei

diesem Schnittpunkt emittiert wurden und heute sichtbar sind, ist vollständig auf *LK(HEUTE)* gelegen. Bei ihrer weiteren Entfernung vom Beobachter schneidet die Galaxie nun andere Lichtkegel. Beim Scheitel von *LK(28)* ist die Galaxie nun im Schnittpunkt der Weltlinie von SPT0418-47 und dem Lichtkegel *LK(28)* zu beobachten. Genauer: Der Beobachter SIEHT 28 Milliarden Jahre nach dem Urknall nun Ereignisse, die an jenem Schnittpunkt stattgefunden haben und durch auf den Beobachter gerichtete Photonen übermittelt wurden. Diese Überlegungen können für alle weiteren Schnittpunkte der Weltlinien der beiden Galaxien (SPT0418-47 und Gravitationslinse) mit Lichtkegeln fortgesetzt werden.

**Tabelle 9: Schnittpunkt Lichtkegel-Weltlinie SPT0418-47**

Schnittpunkt Weltlinie SPT0418-47 - LK(Mrd. Jahre)	t Mrd. Jahre	Physikalische Entfernung Mrd. Lichtjahre	Rezessionsgeschwindigkeit Galaxie in <i>c</i>	Mitbewegte Entfernung Mrd. Lichtjahre
LK(7)	0.31584035	1.7033891	3.5831075	24.407338
LK(HEUTE)	1.4361299	4.6714397	2.1763846	
LK(21)	2.8455184	7.4017051	1.7667070	
LK(28)	4.0952206	9.4996056	1.6081753	
LK(35)	5.1104136	11.093075	1.5373640	
LK(42)	5.8816039	12.265192	1.5049525	
LK(56)	6.8412810	13.697611	1.4832933	
LK(70)	7.3086362	14.389652	1.4788271	
Ereignishorizont	7.7083941	14.980526	1.4777335	

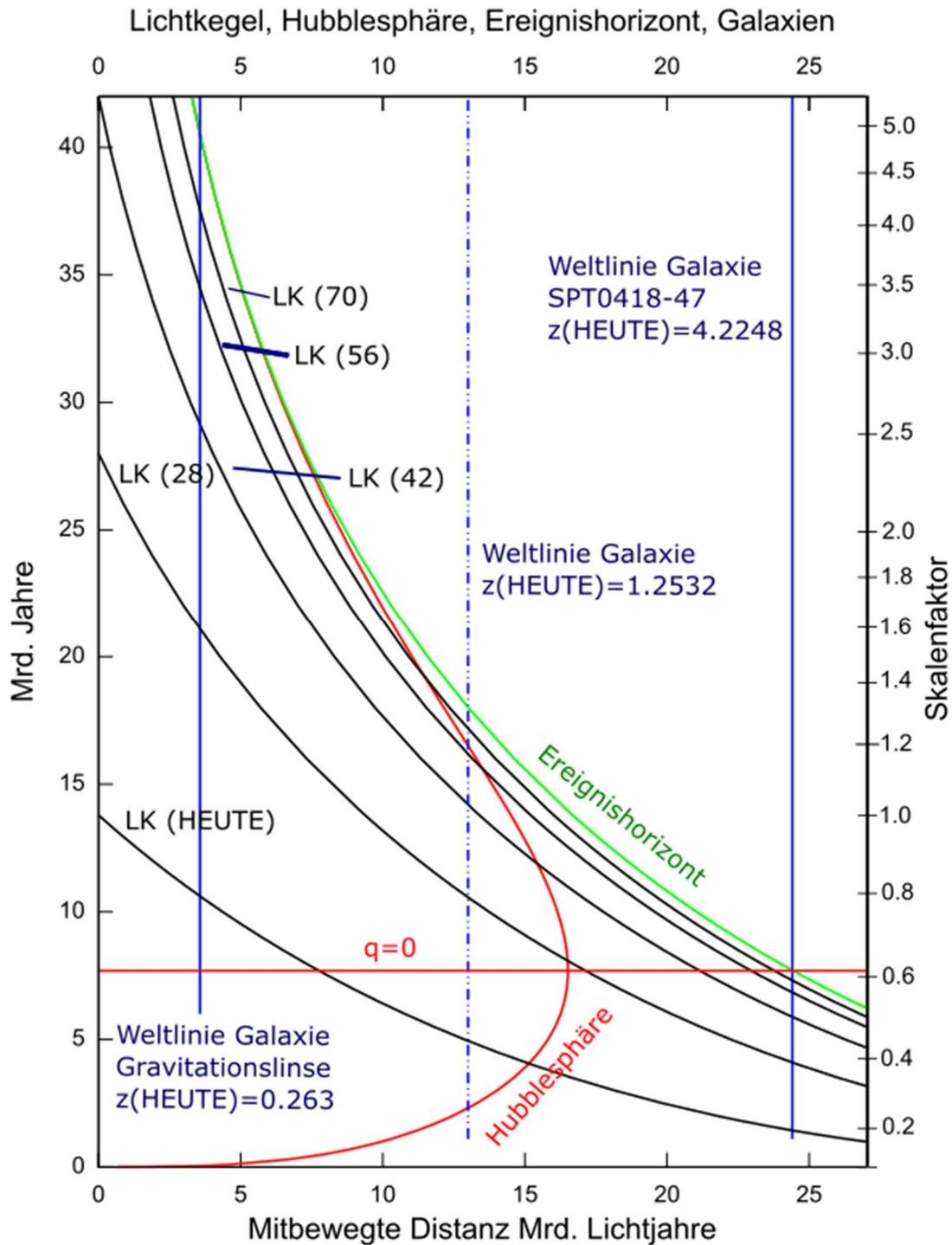
Naturgemäß gelten diese Eigenschaften analog für die Gravitationslinse.

**Tabelle 10: Schnittpunkt Lichtkegel-Weltlinie Gravitationslinse**

Schnittpunkt Weltlinie Gravitationslinse - LK(Mrd. Jahre)	t Mrd. Jahre	Physikalische Entfernung Mrd. Lichtjahre	Rezessionsgeschwindigkeit Galaxie in <i>c</i>	Mitbewegte Entfernung Mrd. Lichtjahre
LK(7)	5.1691795	1.6359020	0.22444286	3.5703150
LK(HEUTE)	10.612430	2.8268527	0.22385459	
LK(21)	16.151342	4.1787393	0.27042794	
LK(28)	21.080454	5.6760435	0.34183130	
LK(35)	25.429320	7.3449709	0.42993108	
LK(42)	29.116169	9.1010755	0.52634440	
LK(56)	34.465968	12.383080	0.71029521	
LK(70)	37.539070	14.766925	0.84513584	
Ereignishorizont	40.529239	17.521030	1.0014574	

Beide Galaxien in Abbildung 4 durchschneiden schließlich den Ereignishorizont. Je mehr sich die Galaxien dem Ereignishorizont nähern, desto später kann der Beobachter mit Lichtgeschwindigkeit emittierte Informationen von diesen Galaxien am Scheitelpunkt jenes Lichtkegels empfangen, den die Weltlinie der jeweiligen Galaxie schneidet. Salopp formuliert empfängt der Beobachter Informationen von einer Galaxie bei  $T=\infty$ , wenn die Weltlinie der Galaxie den Ereignishorizont schneidet. Im Sinne dieser theoretischen Überlegungen ist eine Galaxie, die der Beobachter einmal wahrgenommen hat, für alle Zeiten zu sehen, wenn sie beim Überschreiten des Ereignishorizonts noch existiert.

Praktisch – aber dieses Thema wird hier nicht behandelt – nimmt die Leuchtkraft der Galaxie mit zunehmender Lichtlaufzeit mehr und mehr ab, so dass die Überlegungen für sehr große *T* theoretischer Natur bleiben.



**Abbildung 5:** Rückwärts-Lichtkegel, Hubblesphäre, Ereignishorizont und Weltlinien von Galaxien in mitbewegten Koordinaten.  $LK(T)$  bezeichnet den Rückwärts-Lichtkegel mit einem Scheitel bei  $T$  Milliarden Jahren nach dem Urknall. Die senkrechte linke Koordinatenachse ist zugleich die Weltlinie des Beobachters.

Abbildung 5 zeichnet die gleichen Konstrukte wie Abbildung 4 nun in mitbewegten Koordinaten. In roter Farbe sieht man die Hubblesphäre, die bei  $q=0$  ihr Maximum annimmt und sich im oberen Bereich dem Ereignishorizont annähert. Hubblesphäre und Ereignishorizont konvergieren beide gegen *NULL*. Es bleibt die Hubblesphäre jedoch – in der Zeichnung nicht mehr erkennbar - stets innerhalb des Ereignishorizonts.

Die Zeichnung enthält 3 durch senkrechte blaue Linien gekennzeichnete Weltlinien von Galaxien, und zwar rechts die Weltlinie von SPT0418-47 und links die der zugehörigen Gravitationslinse. Die mittlere Weltlinie ist die einer potentiellen Galaxie mit einem mitbewegten Abstand von *13 Mrd. Lichtjahren* vom Beobachter ( $z(\text{HEUTE})=1.2532$ ). Diese zusätzliche Weltlinie soll als Beispiel für eine hypothetische Galaxie dienen, die außerhalb der Hubblesphäre entstanden ist, von der Hubblesphäre eingeholt worden ist (stets bei  $q>0$ ) und die Hubblesphäre wieder verlassen hat (stets bei  $q<0$ ). Die Hubblesphäre ist also von beiden Seiten her durchlässig und deshalb kein Horizont.

Betrachtet man eine mitbewegte räumliche Position im beobachterzentrierten Universum, so gibt es 3 Möglichkeiten:

- 1) Der mitbewegte Abstand zum Beobachter ist  $> 16.516757 \text{ Mrd. Lichtjahre}$  (mitbewegte Entfernung der Hubblesphäre zum Beobachter bei  $q=0$ , siehe Tabelle 3). Dann liegt diese Position (wie der Ort von SPT0418-47) für alle kosmologischen Zeiten außerhalb der Hubblesphäre. (Emittiert eine Galaxie auf den Beobachter gerichtete Photonen von einem solchen Ort, der aber innerhalb des Ereignishorizonts gelegen ist, so werden diese Photonen den Beobachter trotzdem erreichen.)
- 2) Der mitbewegte Abstand zum Beobachter ist  $< 16.516757 \text{ Mrd. Lichtjahre}$ . Dann schneidet dieser Ort die Hubblesphäre zwei Mal, einmal für  $q>0$ , einmal für  $q<0$ . Das gilt z.B. für die eingezeichnete hypothetische Galaxie mit einem mitbewegten Abstand von *13 Mrd. Lichtjahren* vom Beobachter. Auch die Geodäte der Gravitationslinse schneidet die Hubblesphäre zwei Mal. Es ist allerdings nicht auszuschließen, dass die Galaxie am unteren Schnittpunkt noch nicht gebildet war.
- 3) Es gibt noch den Sonderfall einer Galaxie mit einem mitbewegten Abstand von *genau 16.516757 Mrd. Lichtjahren*. Diese berührt die Hubblesphäre bei  $q=0$ .

## 9 Rückwärts-Lichtkegel und Partikelhorizont

### 9.1 Einige Zusatzbemerkungen zur Definition

Der (allgemeine) Partikelhorizont zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$  ist in physikalischen Koordinaten eine Kugeloberfläche um den Beobachter, dessen Radius gleich der physikalischen Distanz (Eigendistanz) zum entferntesten Objekt ist, das der Beobachter SEHEN kann.

In Kap. 7.2.1 hatten wir zunächst den Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$  mit dem Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  definiert und in einem zweiten Schritt den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  gegen *NULL* streben lassen, um den (allgemeinen) Partikelhorizont zum Bezugszeitpunkt Urknall herzuleiten.

Der Beobachter SIEHT im Falle des Bezugszeitpunkts  $t_{min}$  zum Zeitpunkt  $t$  ein ruhendes Objekt in seiner Ausprägung zum Zeitpunkt  $t_{min}$  (d.h. wie es zum Zeitpunkt  $t_{min}$  ausgesehen hat). Dieses Objekt hat sich bis zum Zeitpunkt  $t$  allein durch die Expansion des Universums vom Beobachter entfernt. In physikalischen Koordinaten ist der Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ , die physikalische Entfernung zu diesem Objekt zum Zeitpunkt  $t$ , selbstverständlich in seiner gealterten Ausprägung zum Zeitpunkt  $t$ .

Denkt man diesen Gedanken weiter fort, so ist der allgemeine Partikelhorizont zum Bezugszeitpunkt Urknall die Entfernung zu einem hypothetischen ruhenden Objekt, das sich seit dem Urknall vom Beobachter entfernt hat, in seiner gealterten Ausprägung zum Zeitpunkt  $t$ . Was der Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  SIEHT, ist die Ausprägung des hypothetischen ruhenden Objekts zum Zeitpunkt Urknall. (Hier ist noch zu bemerken, dass die Rotverschiebung  $z(t)$  für jedes  $t$  gegen *UNENDLICH* strebt, wenn sich der Bezugszeitpunkt  $t_{min}$  dem Urknall annähert.)

De facto kann der Beobachter aber zumindest Photonen nie früher als in ihrer Ausprägung zum Zeitpunkt  $t_{min} = t_{CMB}$  SEHEN.

Der (allgemeine) Partikelhorizont (bezogen auf den Bezugszeitpunkt Urknall) zum Zeitpunkt  $t$  begrenzt das (allgemeine) Beobachtbare Universum (bezogen auf den Bezugszeitpunkt Urknall) zum Zeitpunkt  $t$ , der Partikelhorizont CMB zum Zeitpunkt  $t$  das Beobachtbare Universum CMB zum Zeitpunkt  $t$ . Eine exakte Definition von Partikelhorizont und Beobachtbarem Universum ist in Kap. 7.2 aufzufinden. In den weiteren Unterkapiteln dieses Kapitels 9 greifen wir allein auf den (allgemeinen) Partikelhorizont (zum Bezugszeitpunkt Urknall) und das zugeordnete Beobachtbare Universum zurück. In Kap. 10.1 arbeiten wir dann mit dem Partikelhorizont CMB, in Kap. 10.2 allgemeiner mit dem Partikelhorizont  $t_{min}$ .

**9.2 Lichtkegel, Weltlinien ruhender Objekte und Beobachtbares Universum**

In Abbildung 6.1 sollen die erwähnten Eigenschaften exemplarisch erläutert werden. Eingezeichnet ist in physikalischen Koordinaten zunächst der Partikelhorizont sowie das Beobachtbare Universum *HEUTE* und das Beobachtbare Universum *21 Mrd. Jahre* nach dem Urknall.

Eingezeichnet sind weiter die beiden Lichtkegel  $LK(HEUTE)$  und  $LK(21)$ . Die größte physikalische Entfernung zum gemeinsamen Zeitpunkt des Beobachter und eines Objekts, das der Beobachter *HEUTE* oder *21 Mrd. Jahre* nach dem Urknall SEHEN kann, ist durch den Schnittpunkt zwischen dem jeweiligen Lichtkegel und der Hubblesphäre bestimmt, also *5.8513981 Mrd. Lichtjahre* für  $LK(HEUTE)$  und *8.4280617 Mrd. Lichtjahre* für  $LK(21)$  (siehe Tabelle 6). Die Zahlen stehen offensichtlich im Kontrast zu den Partikelhorizont-Werten von *46.132820 Mrd. Lichtjahren* (*HEUTE*) und *82.088286 Mrd. Lichtjahren* (*21 Mrd. Jahre* nach dem Urknall).

**Tabelle 11: Abstand Beobachter von ruhendem Objekt auf Lichtkegel und Partikelhorizont, Ausprägung Objekt ( $T=HEUTE$  oder  $T=21$  Mrd. Jahre nach dem Urknall)**

Physikalische Koordinaten	Abstand wird gemessen zwischen Beobachter und Objekt zum Zeitpunkt	Ausprägung: Beobachter SIEHT zum Zeitpunkt $T$ Objekt zum Zeitpunkt
Lichtkegel $d_{LK}(T,t)$	$t$	$t$
Partikelhorizont $d_{PH}(T)$	$T$	Urknall (Hinweis: $z(T)=\infty$ )

Als Beispiele für auf Lichtkegeln sichtbare Objekte sollen die bereits in Kap. 8.4 erläuterte Galaxie SPT0418-47 sowie die auf der gleichen radialen Achse gelegene Gravitationslinse dienen. Die Beziehung vom SICHTBAREN Ort auf  $LK(HEUTE)$  und  $LK(21)$  zum Ort im Beobachtbaren Universum erfolgt wie in Kap. 8.4 über die Weltlinie ruhender Objekte, deren Abstandsänderungen zum Beobachter ausschließlich expansionsbedingt sind.

Je größer die Lichtlaufzeit von einem auf einem Lichtkegel  $LK(T)$  gelegenen ruhenden Objekt zum Scheitel von  $LK(T)$  ist, desto mehr verschiebt sich dessen physikalische Entfernung im Beobachtbaren Universum in Richtung auf den Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $T$ . Diese

Verschiebung ist monoton, d.h. je länger die Lichtlaufzeit ist, desto mehr nähert sich die Position im Beobachtbaren Universum dem Partikelhorizont an.

Bisweilen wird in kosmologischen Veröffentlichungen die Frage gestellt, ob es Galaxien oder andere Objekte auch jenseits des Partikelhorizonts bzw. des Beobachtbaren Universums geben kann. Gemeint ist hier in Wirklichkeit die Frage, ob das Universum jenseits dessen fortgesetzt werden kann, was man als durch das  $\Lambda$ CDM-Modell als abgesichert betrachtet. Der Partikelhorizont und das Beobachtbare Universum sind zur Diskussion dieser Frage denkbar ungeeignet. Die Definition des Partikelhorizonts stellt allein die Frage nach dem Ort des für den Beobachter entferntesten sichtbaren Objekts (genaugenommen im Sinne der Lichtlaufzeit) zu einem bestimmten Zeitpunkt. Ob es jenseits des Partikelhorizonts durch das  $\Lambda$ CDM-Modell abgesicherte Objekte geben kann, wird durch die Definition nicht behandelt.

Dies wird spätestens dann klar, wenn man die Frage stellt, wie ein Objekt auf dem Partikelhorizont dorthin gekommen sein kann. Genau wie für andere ruhende Objekte (wie z.B. für als ruhend angenommene Galaxien) kann man auch die Weltlinie von Objekten herleiten, die auf dem Partikelhorizont gelegen sind. Dies ist in Abbildung 6.1 für  $T=HEUTE$  und  $T=21$  Mrd. Jahre nach dem Urknall geschehen. Man sieht, dass die entsprechenden Weltlinien vor dem jeweiligen Erreichen des Schnittpunkts mit dem Partikelhorizont weiter vom Beobachter entfernt sind als der Partikelhorizont selbst.

Dieses Thema ist in Davis Lineweaver, 2003 [4], Kap. 4.3, Fig. 3 und Davis, 2003 [5], Kap. 2-1.4, Fig. 2.2 in größerem Detail behandelt. Dort ist auch jeweils eine Zeichnung für mitbewegte Koordinaten vorhanden.

Ein kurzer Blick auf die Abbildungen 6.2 und 6.3 belegt, dass in der Anfangsphase des Universums unsere beiden Lichtkegel und der Ereignishorizont außerhalb des Partikelhorizonts gelegen waren. Auch beim Sichtbarkeitspunkt von SPT0418-47 auf  $LK(HEUTE)$  bei  $t=1.4361299$  Mrd. Jahren nach dem Urknall ist der Lichtkegel weiter vom Beobachter entfernt ( $4.6714397$  Mrd. Lichtjahre) als der Partikelhorizont ( $4.1581461$  Mrd. Lichtjahre).

**Tabelle 12: Exakte Werte für einige Distanzen in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3**

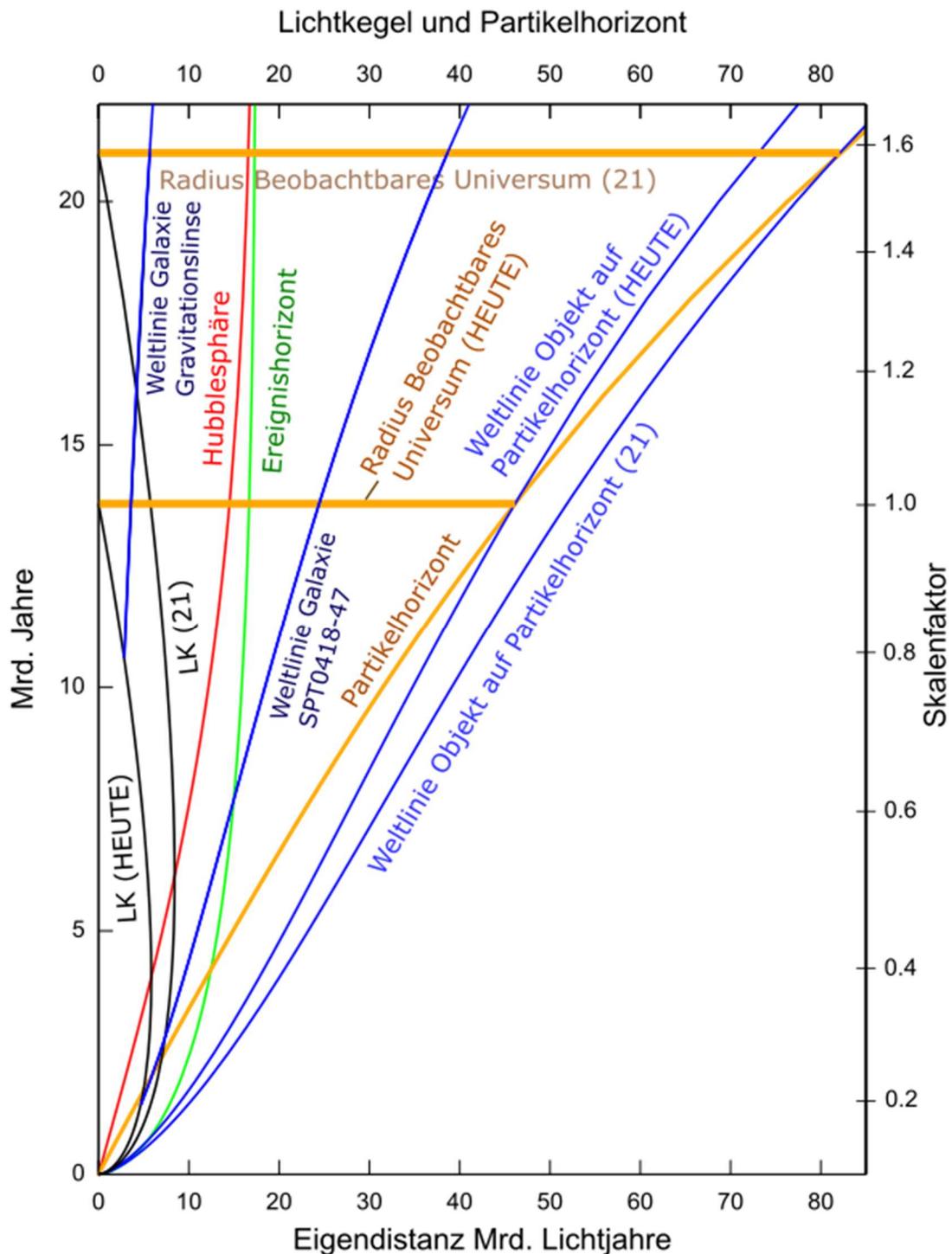
Partikelhorizont oder Galaxie	Physikalischer Abstand vom Beobachter
Partikelhorizont 21 Mrd. Jahre nach dem Urknall	82.088286 Mrd. Lichtjahre
Partikelhorizont HEUTE	46.132820 Mrd. Lichtjahre
Eigendistanz SPT0418-47 HEUTE (=mitbewegte Distanz)	24.407338 Mrd. Lichtjahre (siehe Tabelle 9)
Eigendistanz SPT0418-47 21 Mrd. Jahre nach dem Urknall	38.614868 Mrd. Lichtjahre
Eigendistanz Gravitationslinse HEUTE (=mitbewegte Distanz)	3.5703150 Mrd. Lichtjahre (siehe Tabelle 10)
Eigendistanz Gravitationslinse 21 Mrd. Jahre nach dem Urknall	5.6485980 Mrd. Lichtjahre
Zu den Schnittpunkten der Weltlinien von SPT0418-47 und Gravitationslinse mit $LK(HEUTE)$ und $LK(21)$ siehe Tabellen 8 und 9.	

Es ist technisch schwierig, kosmologische Eigenschaften in einer Zeichnung für ein Universum unterzubringen, das seit der Emission des CMB um das 1091-fache angewachsen ist. Aus diesem Grunde haben wir für die erste Million und die erste Milliarde Jahre nach dem Urknall zwei zusätzliche Zeichnungen 6.2 und 6.3 erstellt.

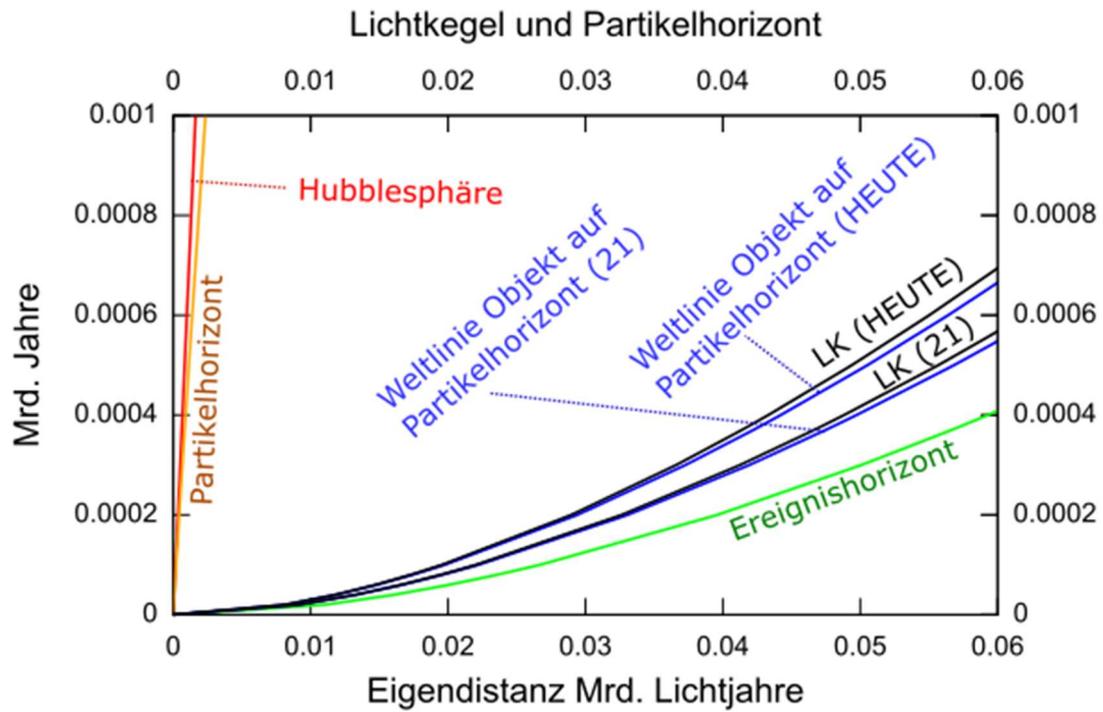
In Abbildung 6.2 sehen wir, dass in der ersten Million Jahre nach dem Urknall die Weltlinien von Objekten auf dem Partikelhorizont von *HEUTE* und dem von *21 Milliarden Jahren* nach

dem Urknall weiter vom Beobachter entfernt waren als die zugehörigen Lichtkegel. Der Ereignishorizont war am weitesten entfernt gelegen. Hubblesphäre und Partikelhorizont lagen im Vergleich dazu relativ nah beim Beobachter.

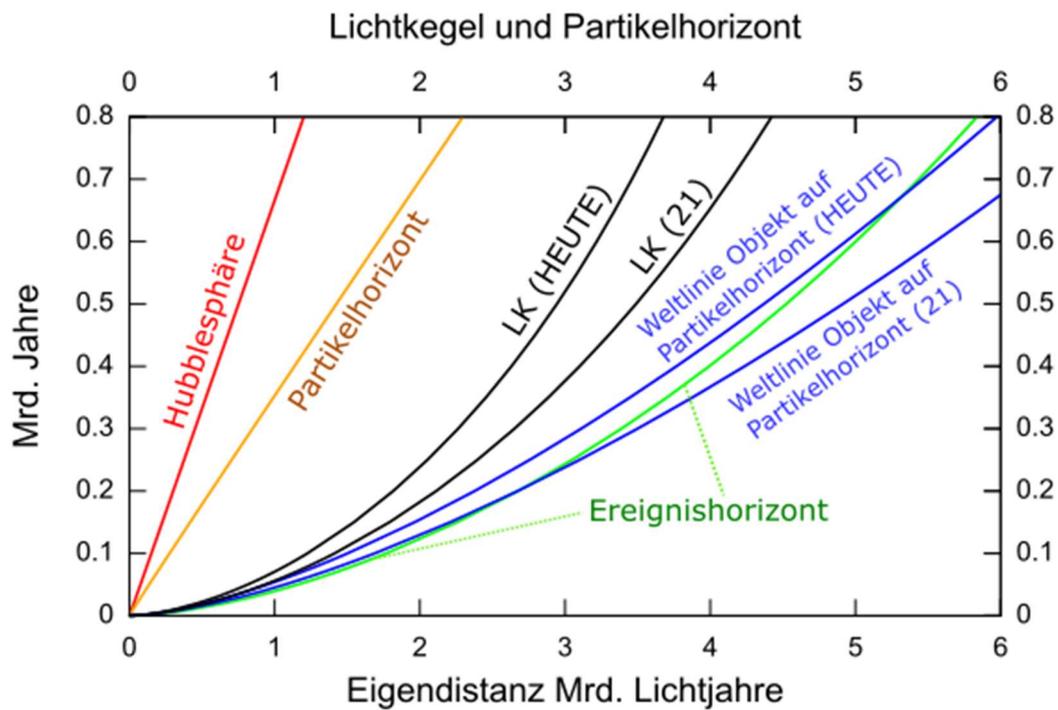
Abbildung 6.3 belegt, dass sich danach in der ersten Milliarde Jahre die Weltlinien der Objekte auf dem Partikelhorizont weiter vom Beobachter entfernen und genau wie Weltlinien von Galaxien den Ereignishorizont schneiden.



**Abbildung 6.1:** Rückwärts-Lichtkegel, Partikelhorizont und Weltlinien ruhender Objekte in physikalischen Koordinaten



**Abbildung 6.2:** Rückwärts-Lichtkegel, Partikelhorizont und Weltlinien ruhender Objekte in physikalischen Koordinaten in der ersten Million Jahre nach dem Urknall



**Abbildung 6.3:** Rückwärts-Lichtkegel, Partikelhorizont und Weltlinien ruhender Objekte in physikalischen Koordinaten in der ersten Milliarde Jahre nach dem Urknall

**Tabelle 13: Schnittpunkte des Ereignishorizonts mit Weltlinien und Partikelhorizont**

<b>Weltlinie oder Horizont</b>	<b>t Mrd. Jahre</b>	<b>Physikalische Entfernung Mrd. Lichtjahre</b>	<b>Mitbewegte Entfernung Mrd. Lichtjahre</b>
Weltlinie zu Objekt auf Partikelhorizont HEUTE	0.67087466	5.3137731	46.132820
Weltlinie zu Objekt auf Partikelhorizont 21 Mrd. Jahre	0.20219775	2.6930195	51.885625
Partikelhorizont	4.2158248	12.472340	31.406086

Übrigens wurde in der Literatur vor einigen Jahrzehnten die Weltlinie von Objekten auf dem Partikelhorizont *HEUTE* als „Partikelhorizont“ tituliert. (vgl. Davis/Lineweaver 2003 [4], Kap. 4.3 und Davis 2003 [5], Kap. 2-1.4).

### 9.3 Beobachtbares Universum und Lichtlaufzeit

In Kap. 9.2 hatten wir auf die Beziehung zwischen dem Beobachtbaren Universum und der Lichtlaufzeit (Lookback-Time) von Photonen hingewiesen, die von Galaxien auf einem Lichtkegel emittiert werden. Dort hatten wir in den Abbildungen 6.1, 6.2 und 6.3 die Weltlinien von SPT0418-47, der zugehörigen Gravitationslinse sowie die Weltlinien von Objekten auf dem Partikelhorizont (jeweils in blauer Farbe) eingezeichnet.

Anhand von zwei Tabellen wollen wir diesen Zusammenhang anhand der Lichtkegel *LK(21)* und *LK(HEUTE)* noch einmal quantitativ untersuchen. Anstelle der zuvor erwähnten Weltlinien sollen nun Weltlinien ruhender Objekte systematisch erzeugt werden.

Beide Tabellen zeigen in der ersten Spalte den Zeitpunkt, zu dem von einem ruhenden Objekt auf dem jeweiligen Lichtkegel Photonen in Richtung auf den Beobachter emittiert werden. Die zweite Spalte enthält die Lichtlaufzeit, nach der die emittierten Photonen beim Scheitel des Lichtkegels ankommen. Die 4. Spalte umschreibt die physikalische Entfernung des Objektes, das die am Scheitel ankommenden Photonen einst emittiert hatte, vom Scheitel des Lichtkegel zum Ankunftszeitpunkt, also *21 Mrd. Jahre* nach dem Urknall bei *LK(21)* und *13.790687 Mrd. Jahre* nach dem Urknall (siehe Tabelle 2) bei *LK(HEUTE)*.

Bei *LK(21)* sieht man, dass die *bis zu 3 von 21 Mrd. Jahren* (also bis zu  $1/7$  der bis zum Erreichen des Scheitels vergangenen Zeit, entspricht der  $1-1/7=85.71\%$ -Linie der Lichtlaufzeit) emittierenden Objekte *21 Mrd. Jahre* nach dem Urknall *53.92%* (*46.08%-Linie* im Beobachtbaren Universum) des Beobachtbaren Universums für sich beanspruchen, und zwar den vom Beobachter entfernteren Teil. Im Beobachtbaren Universum nehmen also Objekte, die Photonen mit einer langen Lichtlaufzeit emittiert haben, einen übermäßig großen Teil des Beobachtbaren Universums ein.

Außerdem ist die Abbildung von der Emissionszeit auf die Entfernung vom Beobachter am Scheitelpunkt monoton. Je früher die Objekte Photonen in Richtung des Beobachters emittiert haben, desto weiter sind sie am Scheitel vom Beobachter entfernt.

**Tabelle 14: Lichtkegel LK(21) - Beobachtbares Universum und Lichtlaufzeit**

t Mrd. Jahre	Lookback Mrd. Jahre	% Lookback	Beob. Univ. Mrd. Lichtjahre	% Beob. Univ.
0.00000000	21.0000000	100.00%	82.0882860	100.00%
0.00037113	20.9996290	100.00%	80.6429660	98.24%
0.00100000	20.9990000	100.00%	79.8643370	97.29%
0.01000000	20.9900000	99.95%	76.4159430	93.09%
0.10000000	20.9000000	99.52%	68.6644220	83.65%
0.50000000	20.5000000	97.62%	58.2798910	71.00%
1.00000000	20.0000000	95.24%	51.7653210	63.06%
2.00000000	19.0000000	90.48%	43.5617940	53.07%
3.00000000	18.0000000	85.71%	37.8233670	46.08%
4.00000000	17.0000000	80.95%	33.2762320	40.54%
5.00000000	16.0000000	76.19%	29.4605990	35.89%
6.00000000	15.0000000	71.43%	26.1517200	31.86%
8.00000000	13.0000000	61.90%	20.5869150	25.08%
10.00000000	11.0000000	52.38%	16.0044000	19.50%
12.00000000	9.0000000	42.86%	12.1209480	14.77%
13.79068700	7.2093132	34.33%	9.1015168	11.09%
16.00000000	5.0000000	23.81%	5.8541802	7.13%
18.00000000	3.0000000	14.29%	3.2917002	4.01%
20.00000000	1.0000000	4.76%	1.0308526	1.26%
21.00000000	0.0000000	0.00%	0.0000000	0.00%

Bei LK(HEUTE) zeigt sich ein analoges Bild. Die bis nach 2 von 13.790687 Mrd. Jahren (14.5% der Zeit von HEUTE, wieder ungefähr 1/7), also bei Erreichen 85.50 %-Linie der Lichtlaufzeit, nehmen die emittierenden Objekte 52.79% (47.21%-Linie) des Beobachtbaren Universums ein.

**Tabelle 15: Lichtkegel LK(HEUTE) - Beobachtbares Universum und Lichtlaufzeit**

t Mrd. Jahre	Lookback Mrd. Jahre	% Lookback	Beob. Univ. Mrd. Lichtjahre	% Beob. Univ.
0.00000000	13.79068700	100.00%	46.13282000	100.00%
0.00037113	13.79031600	100.00%	45.21927500	98.02%
0.00100000	13.78968700	99.99%	44.72712600	96.95%
0.01000000	13.78068700	99.93%	42.54749700	92.23%
0.10000000	13.69068700	99.27%	37.64798500	81.61%
0.50000000	13.29068700	96.37%	31.08422400	67.38%
1.00000000	12.79068700	92.75%	26.96655300	58.45%
2.00000000	11.79068700	85.50%	21.78134200	47.21%
4.00000000	9.79068680	70.99%	15.28013600	33.12%
6.00000000	7.79068680	56.49%	10.77693900	23.36%
8.00000000	5.79068680	41.99%	7.25958740	15.74%
10.00000000	3.79068680	27.49%	4.36311250	9.46%
12.00000000	1.79068680	12.98%	1.90849520	4.14%
13.79068700	0.00000000	0.00%	0.00000000	0.00%

## 10 Vorwärts-Lichtkegel

Vorbemerkung: Bei einem Vergleich von Vorwärts-Lichtkegel und Partikelhorizont muss je nach Vergleichsthema von der üblichen Nomenklatur abgewichen werden. Kap. 6.3 kann zum Verständnis Hilfestellung leisten.

Sobald die auf den Beobachter gerichteten Photonen den Scheitelpunkt eines Lichtkegels passiert haben, wechseln sie im Koordinatensystem von der positiven radialen Achse zur negativen. Es brauchen weiterhin keine Raumwinkel betrachtet zu werden, nur nehmen die Koordinatenwerte nun negative Werte an. Die Differenz zwischen zwei Werten auf der gesamthaften Achse ist der Absolutbetrag der Differenz. Meistens werden im Weiteren jedoch nur Aspekte diskutiert, die ganz auf der positiven oder ganz auf der negativen Achse angesiedelt sind.

### 10.1 Vorwärts-Lichtkegel und Beobachtbares Universum CMB

Es ist klar, dass unter der Annahme, dass die Photonen auf der positiven Achse emittiert wurden, der Vorwärts-Lichtkegel in physikalischen Koordinaten mit  $t \rightarrow \infty$  nun gegen  $-\infty$  (*minus UNENDLICH*) (Eigendistanz auf der negativen Achse) strebt. Man könnte diesen Umstand nun in der zweiseitigen Abbildung 1 zusätzlich einzeichnen, allerdings ist so kein großer Erkenntnisgewinn zu erwarten. Wir schlagen vor, sich hier die animierte Zeichnung [3] von Yukterez in physikalischen Koordinaten anzuschauen.

Abbildung 7 zeigt im oberen Bereich (links neben der Weltlinie des Beobachters) die gegen  $-\infty$  verlaufenden Vorwärts-Lichtkegel.

Einen wichtigen Einblick in das *HEUTIGE* Beobachtbare Universum gewinnt man, wenn man Lichtkegel betrachtet, die die Weltlinie des Beobachters zu früheren Zeiten (vor *HEUTE*) geschnitten haben, wobei angenommen wird, dass die den Lichtkegel formenden Photonen bereits vor Erreichen der Schnittpunkte auf den Beobachter gerichtet waren. Die Gesamtheit der Schnittpunkte der Vorwärts-Lichtkegel mit der  $t=HEUTE$ -Zeitlinie formt den negativen Anteil des *HEUTIGEN* Beobachtbaren Universums.

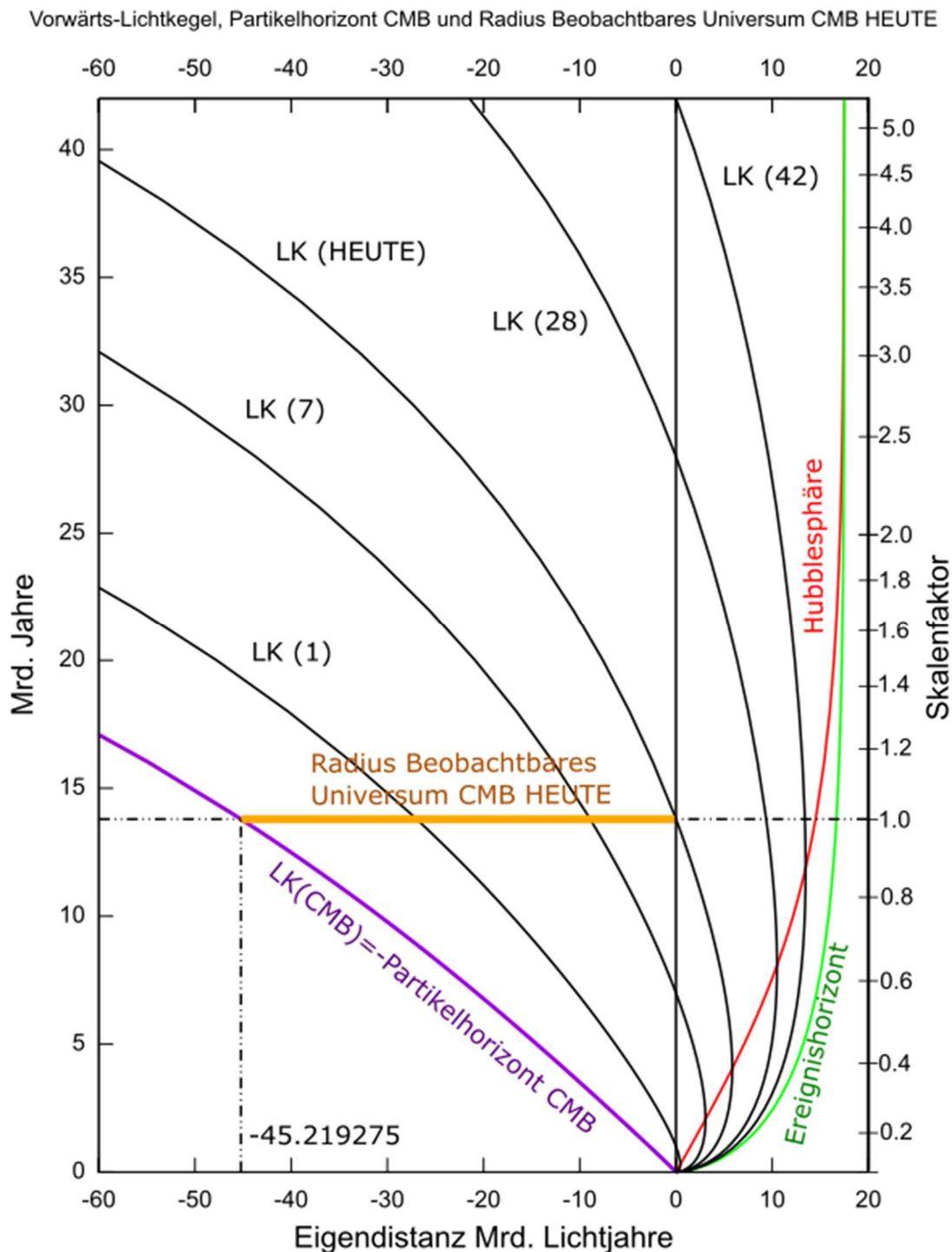
Eingezeichnet in Zeichnung 7 ist das Beobachtbare Universum CMB zum Zeitpunkt *HEUTE* mit seinen 3 Schnittpunkten zu  $LK(7)$ ,  $LK(1)$  und der Begrenzungslinie  $LK(CMB)$ , die genau die negativen Werte des Partikelhorizonts CMB enthält.

**Tabelle 16: Schnittpunkte Vorwärts-Lichtkegel mit Beobachtbarem Universum CMB**

Scheitelpunkt „Rückwärts“-Lichtkegel als Zeit nach dem Urknall – es wird aber nur der Vorwärts-Lichtkegel betrachtet	Schnittpunkt Lichtkegel mit Beobachtbarem Universum CMB Zeitpunkt <i>HEUTE</i> (Koordinatenwert)
371'127 Jahre	-45.219275 Mrd. Lichtjahre
1 Mrd. Jahre	-26.966553 Mrd. Lichtjahre
7 Mrd. Jahre	-8.9244791 Mrd. Lichtjahre

Zum CMB-Emissionszeitpunkt im Scheitelpunkt von 371'127 Jahren nach dem Urknall (siehe Tabelle 3) des Lichtkegels (Übergang von Rückwärts- zum Vorwärts-Lichtkegel) befand sich der Beobachter (physikalische Entfernung 0) im Zentrum des Beobachtbaren Universums (positiver und negativer Anteil zusammen), während jener Ort, von dem wir *HEUTE* den Mikrowellenhintergrund empfangen, zum Emissionszeitpunkt 41.447549 Millionen Lichtjahre vom Beobachter entfernt auf der positiven Achse gelegen war.

Selbstverständlich empfangen wir *HEUTE* den Mikrowellenhintergrund aus allen Richtungen. Zum Emissionszeitpunkt der *HEUTE* empfangenen Hintergrundstrahlung war der Mikrowellenhintergrund in physikalischen Koordinaten eine Kugeloberfläche um den Beobachter mit einem Radius von *41.447549 Millionen Lichtjahren*. *HEUTE* beträgt der Radius dieser Kugeloberfläche mit dem Beobachter im Zentrum *45.219275 Mrd. Lichtjahre* (Partikelhorizont CMB). (Wie die positive radiale Richtung zu interpretieren ist, ist in Kap. 6.1 dargelegt.)



**Abbildung 7:** Vorwärts-Lichtkegel, Partikelhorizont CMB und Beobachtbares Universum CMB in physikalischen Koordinaten. Die durchgezogene senkrechte Achse rechts der Mitte (Eigendistanz *0 Mrd. Lichtjahre*) ist zugleich die Weltlinie des Beobachters.

Bezeichne  $t_0$  den Zeitpunkt *HEUTE* und  $t_7$  den Zeitpunkt *7 Mrd. Jahre* nach dem Urknall. In der Folge werden nur physikalische Koordinaten behandelt. Zugrunde liegen die Formeln von Tabelle 4 sowie (7) bis  $8_{(CMB)}$ . Weiter mögen die folgenden Formeln vereinbart sein:

**Tabelle 17: Partikelhorizont positiv und Lichtkegel negativ**

Positive Achse	Negative Achse
{1} $d_{PHCMB}(t_0)=d(a(t_{CMB}),a(t_0),a(t_0))$ Partikelhorizont Zeitpunkt $t_0$ zum Bezugszeitpunkt $t_{CMB}$	{2} $-d_{LK}(t_{CMB},t_0)=-d(a(t_0),a(t_{CMB}),a(t_0))$ Lichtkegel Scheitel $t_{CMB}$ zum Zeitpunkt $t_0$
{3} $d(a(t_7),a(t_0),a(t_0))$ Partikelhorizont Zeitpunkt $t_0$ zum Bezugszeitpunkt $t_7$	{4} $-d_{LK}(t_7,t_0)=-d(a(t_0),a(t_7),a(t_0))$ Lichtkegel Scheitel $t_7$ zum Zeitpunkt $t_0$
{5} $d(a(t^*),a(T),a(T))$ Partikelhorizont Zeitpunkt $T$ zum Bezugszeitpunkt $t^*$	{6} $-d_{LK}(t^*,T)=-d(a(T),a(t^*),a(T))$ Lichtkegel Scheitel $t^*$ zum Zeitpunkt $T$

Wegen Formel  $(7_{CMB})$  ist die Entfernung {1} des Beobachters *HEUTE* zum Partikelhorizont CMB gleich der Entfernung {2} in negativen Koordinaten des Vorwärts-Lichtkegels mit Scheitelpunkt  $t_{CMB}=371'127$  Jahre nach dem Urknall zum Zeitpunkt *HEUTE*.

Die letzte Aussage kann für die physikalische Entfernung des Beobachters zur *HEUTIGEN* Position eines Objekts verallgemeinert werden. Die Entfernung {3} des Beobachters *HEUTE* zum Partikelhorizont mit dem Bezugszeitpunkt *7 Mrd. Jahre* nach dem Urknall ist gleich der Entfernung {4} in negativen Koordinaten des Vorwärts-Lichtkegels mit dem Scheitelpunkt  $t_7=7$  Mrd. Jahre nach dem Urknall zum Zeitpunkt *HEUTE*.

Selbstverständlich kann auch anstelle *HEUTE* ein beliebiger Zeitpunkt  $T$  und anstelle  $t_{CMB}$  bzw.  $t_7$  ein Zeitpunkt  $t^*<T$  eingesetzt werden, wodurch die Formeln {5} und {6} zustande kommen.

Formeln {1} und {3} stehen für Schnittpunkte mit dem Beobachtbaren Universum *HEUTE* auf der positiven, Formeln {2} und {4} für Schnittpunkte mit dem Beobachtbaren Universum *HEUTE* auf der negativen Achse. Formeln {5} und {6} zeigen Schnittpunkte mit dem Beobachtbaren Universum zum Zeitpunkt  $T$  an.

### 10.2 Alternative Definitionen von Partikelhorizont und Beobachtbarem Universum

Man kann, wie in Kap. 7.2.4 erwähnt, Vorwärts-Lichtkegel-basierte Definitionen für den Partikelhorizont (im Gegensatz zur Rückwärts-Lichtkegel-Definition von Kap. 7.2.1) formulieren, indem man die Reihenfolge (und eventuell sämtliche Vorzeichen) in den Formeln (7), (8),  $(7_{CMB})$  und  $(8_{CMB})$  einfach umkehrt. Wir formulieren die neue Definition für den Partikelhorizont wieder für einen Zeitpunkt  $t_{min}$ , wobei  $t_{min} = t_{CMB}$  selbstverständlich eine zulässige Variante darstellt.

**Definition 2 Partikelhorizont  $t_{min}$ :** Sei  $t_{min} < t$ . *Passiert ein aus dem positiven Bereich des Lichtkegels mit Scheitelpunkt  $t_{min}$  kommendes Photon auf einer radialen Koordinatenachse zum Zeitpunkt  $t_{min}$  auf dieser Koordinatenachse den im Ursprung angenommenen Beobachter, oder wird ein Photon zum Zeitpunkt  $t_{min}$  am Ort des Beobachters erzeugt und in Richtung der negativen radialen Halbachse emittiert, so ist der negative (physikalische) Partikelhorizont zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den*

***Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ , der (physikalische) Abstand dieses Photons vom Beobachter auf der negativen Koordinatenachse zum Zeitpunkt  $t$ .***

Definition 2 ist nicht einfach eine Umformulierung von Definition 1 aus Kap. 7.2.1. Es werden vielmehr vollständig andere kosmologische Eigenschaften dargestellt, die allerdings (bis auf das Vorzeichen) zum gleichen Ergebnis führen.

Ein Vergleich der Definition 1 in Kap. 7.2.1 mit der soeben formulierten Definition 2 führt zu folgendem Ergebnis, wobei alle Abstände als physikalisch angenommen werden sollen: Der Absolutbetrag des negativen Partikelhorizonts von Definition 2 entspricht genau dem Abstand zum Zeitpunkt  $t$  eines ruhenden Objekts vom Beobachter, das zum Zeitpunkt  $t_{min}$  auf dem positiven Teil der Koordinatenachse ein Photon in Richtung auf dem Beobachter emittiert hat, das den Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  erreicht. Der Abstand zum Zeitpunkt  $t_{min}$  des ruhenden Objekts aus Definition 1 vom Beobachter beträgt  $d_{LK}(t, t_{min})$ , der Abstand des Photons vom Beobachter aus Definition 2 beträgt  $NULL$ .

In Definition 1 ist der Partikelhorizont der Abstand vom Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  des ruhenden Objekts, das ein Photon zum Zeitpunkt  $t_{min}$  in Richtung des Beobachters emittiert hat. (Das Photon selbst passiert zum Zeitpunkt  $t$  den Beobachter.) In Definition 2 ist der (negative) Partikelhorizont der Abstand des Photons selbst vom Beobachter.

Der (negative) Partikelhorizont begrenzt den negativen Radius des Beobachtbaren Universums, bezogen auf den Bezugszeitpunkt  $t_{min}$ . Es ist offensichtlich, dass ein Photon, das den Beobachter zu einem Zeitpunkt  $t^*$  mit  $t_{min} \leq t^* < t$  passiert, zum Zeitpunkt  $t$  den negativen Radius des Beobachtbaren Universums zwischen den Abständen  $-d_{LK}(t_{min}, t)$  und  $NULL$  vom Beobachter schneidet. Der negative Partikelhorizont begrenzt den Radius jenes Teils des Universums, das seit dem Zeitpunkt  $t_{min}$  in kausalen Kontakt mit dem Beobachter gekommen ist, wobei dieser Kontakt genau zum Zeitpunkt  $t_{min}$  stattgefunden hat.

Man gewinnt wieder das (allgemeine) Beobachtbare Universum (zum Bezugszeitpunkt Urknall), indem man  $t_{min}$  gegen  $NULL$  streben lässt. Der negative Radius des (allgemeinen) Beobachtbaren Universums ist durch den negativen (allgemeinen) Partikelhorizont mit dem Bezugszeitpunkt Urknall begrenzt.

**Man könnte auch das (allgemeine) Beobachtbare Universum (mit Bezugszeitpunkt Urknall) zum Zeitpunkt  $t$  als Kugel definieren, deren negativer Radius die größte untere Schranke (das Infimum, da Radien negativ) von negativen Partikelhorizonten zu Bezugszeitpunkten  $t_{min}$  gemäß Definition 2 Partikelhorizont  $t_{min}$  (hier würde  $t_{min}$  als Variable betrachtet) mit  $0 < t_{min} < t$  ist.**

Da positive und negative Koordinatenachse willkürlich gewählte Richtungen darstellen, besteht das Beobachtbare Universum generell aus beiden Bestandteilen. Es treffen sich gemäß Tabelle 17 {5} und {6} bei einem Abstand  $d(a(t^*), a(t), a(t))$  vom Beobachter mit  $t^* < t$  also ruhende Objekte, die zum Zeitpunkt  $t^*$  auf den Beobachter gerichtete Photonen emittiert haben, die der Beobachter zum Zeitpunkt  $t$  empfängt, MIT Photonen, die den Beobachter zum Zeitpunkt  $t^*$  auf der radialen Koordinatenachse passiert haben, wobei aber ruhende Objekte und Photonen bezogen auf die Koordinatenachse jeweils gegenüberliegenden Radien zugeordnet sind.

Die Gesamtheit aller Durchmesser (beide Radien, einschließlich beide Varianten des Partikelhorizonts) bildet wieder die Kugel des Beobachtbaren Universums zum Zeitpunkt  $t$ , bezogen auf den Zeitpunkt  $t_{min}$ , wobei im Grenzfall  $t_{min}$  gegen  $NULL$  (Urknall) streben kann.

### 10.3 Interpretation des Partikelhorizonts als Lichtkegel

In Kap. 10.1 hatten wir einen Lichtkegel mit Scheitelpunkt CMB auf der positiven radialen Koordinatenachse definiert und darauf hingewiesen, dass der Vorwärts-Lichtkegel  $LK(CMB)$  auf der negativen radialen Achse dem negativen Partikelhorizont CMB entspricht. Abbildung 7 hatte diese Deutung unterstützt, und in Tabelle 17 hatten wir diese Eigenschaft auf von  $t = t_{CMB}$  verschiedene Scheitelpunkte erweitert. Auch war an verschiedenen Stellen daraufhin gewiesen worden, dass die Wahl der positiven (ruhende Objekte) und negativen Halbachse (Photonen) zur Definition des Partikelhorizonts willkürlich ist.

Aufgrund der Willkürlichkeit der getroffenen Wahl ist es selbstverständlich auch möglich, den Partikelhorizont so zu definieren, dass sich ruhende Objekte und Photonen unmittelbar auf der positiven Halbachse treffen. Es ist dazu lediglich notwendig, den Lichtkegel mit Scheitelpunkt  $t_{CMB}$  auf der negativen Koordinatenachse zu definieren. Ausgangspunkt zur Definition des Partikelhorizonts ist also  $-LK(CMB)$ . Das aufgrund dieser Wahl hergeleitete Konzept kann dann, in sich abgeschlossen, folgendermaßen entwickelt werden – siehe hierzu Lange 2023 [10].

*Es ist möglich, den Partikelhorizont als Vorwärts-Teillichtkegel eines Lichtkegels zu interpretieren. Der Scheitel des zugehörigen, auf der negativen radialen Koordinatenachse gelegenen Rückwärts-Teillichtkegels übernimmt dabei die Rolle eines Bezugszeitpunkts (z.B. des Zeitpunkts der Emission der kosmischen Mikrowellen-Hintergrundstrahlung CMB) des so definierten Partikelhorizonts. Im Allgemeinen, aber nicht notwendigerweise, wird dieser Bezugszeitpunkt in der Frühzeit des Universums gewählt. Außerdem lässt sich zeigen, dass sich im Partikelhorizont zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  ruhende Objekte und bewegliche Photonen treffen, die beide mit dem Bezugszeitpunkt verbunden sind. Die ruhenden Objekte waren zum Bezugszeitpunkt auf dem Lichtkegel  $LK(t)$  gelegen. Die Photonen (oder die mit Lichtgeschwindigkeit übermittelten Informationen) waren vor dem Bezugszeitpunkt auf den Beobachter gerichtet und hatten diesen zum Bezugszeitpunkt passiert, oder sie wurden zum Bezugszeitpunkt am Ort des Beobachters erzeugt und in Richtung der positiven radialen Koordinatenhalbachse emittiert.*

### 10.4 Vorwärts-Lichtkegel und Ereignishorizont

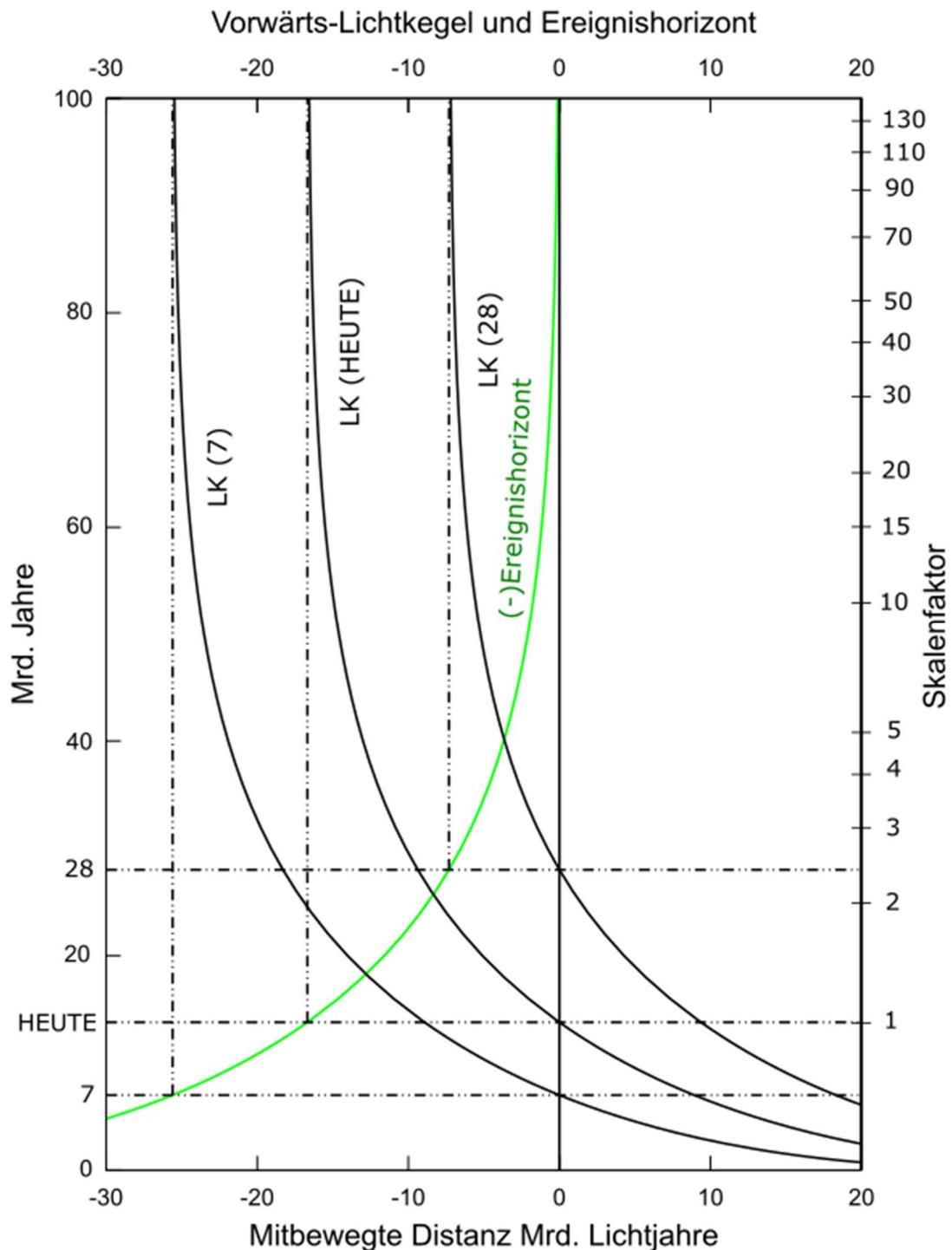
Während, wie auch in Abbildung 7 erkennbar, die Vorwärts-Lichtkegel  $LK(T)$  für jedes  $T$  in physikalischen Koordinaten für  $t \rightarrow \infty$  auf der radialen Koordinatenachse gegen  $-\infty$  verlaufen, konvergieren die Vorwärts-Lichtkegel  $LK(T)$  in mitbewegten Koordinaten für  $t \rightarrow \infty$  auf der negativen Koordinatenachse gegen den negativen Wert des Ereignishorizonts (in mitbewegten Koordinaten) zum Zeitpunkt  $T$ .

Formell heißt dies:     aus  $t \rightarrow \infty$  folgt: für jedes  $T$  gilt  $d_{LK}(T,t) \rightarrow -\infty$ ;  
                               aus  $t \rightarrow \infty$  folgt: für jedes  $T$  gilt  $D_{LK}(T,t) \rightarrow -D_{EH}(T)$ .

**Tabelle 18: Ereignishorizont in mitbewegten Koordinaten als Grenzlinie von Vorwärts-Lichtkegeln**

Scheitelpunkt „Rückwärts“-Lichtkegel als Zeit nach dem Urknall	Ereignishorizont in mitbewegten Koordinaten (Koordinatenwert)
7 Mrd. Jahre	-25.603830 Mrd. Lichtjahre
HEUTE	-16.679351 Mrd. Lichtjahre
28 Mrd. Jahre	-7.3055020 Mrd. Lichtjahre

Bei den Schnittpunkten von  $LK(7)$ ,  $LK(HEUTE)$  und  $LK(28)$  mit der Weltlinie des Beobachters findet man achsenparallele waagerechte Hilfslinien. Eingezeichnet ist in grüner Farbe der Ereignishorizont in negativen Koordinaten. Für  $T=7$  Mrd. Jahre nach dem Urknall,  $T=HEUTE$  und  $T=28$  Mrd. Jahre nach dem Urknall ist der negative Wert des Ereignishorizonts als Schnittpunkt zwischen der grünen Linie und den waagerechten achsenparallelen Hilfslinien erkennbar. Die Lichtkegel konvergieren für  $t \rightarrow \infty$  gegen die senkrechten achsenparallelen Hilfslinien oberhalb der Schnittpunkte.



**Abbildung 8:** Vorwärts-Lichtkegel und Ereignishorizont in mitbewegten Koordinaten. Die durchgezogene senkrechte Achse rechts der Mitte (Mitbewegte Distanz 0 Mrd. Lichtjahre) ist zugleich die Weltlinie des Beobachters.

## 11 Verwendete Begriffe, Symbole und Abkürzungen

### Begriffe

Beobachter	Wird ausschließlich für <u>einen im Hubble-Flow treibenden Beobachter in der Milchstraße</u> (z.B. auf der Erde) verwendet. Alle Abstände zu Lichtkegeln, Hubblesphäre, Horizonten und Weltlinien ruhender Objekte beziehen sich auf diesen Beobachter. Der Beobachter wird im Zentrum des Beobachtbaren Universums angenommen und wird in den Ursprung eines Koordinatensystems platziert.
ruhendes oder (synonym) mitbewegtes Objekt	Ein im Hubble-Flow treibendes Objekt. Die physikalische Entfernung des Beobachters zu einem solchen Objekt ändert sich ausschließlich durch die Expansion des Universums. Die mitbewegte Entfernung ändert sich nie.
Galaxie	Wird als ruhendes Objekt modelliert, das Photonen (Licht) in Richtung des Beobachters emittiert. Die realen gravitativ bedingten Pekuliarbewegungen von Galaxien werden in diesem Artikel nicht erfasst. Je weiter ein Objekt vom Beobachter entfernt ist, umso geringer ist im Durchschnitt der durch Pekuliarbewegungen bedingte Fehler. Für die Mehrheit der in diesem Artikel behandelten Themen können „Galaxie“, „ruhendes Objekt“ und „mitbewegtes Objekt“ als gleichbedeutend betrachtet werden.
Radiale Koordinatenachse	Definition siehe Kap. 6.1
Physikalische Entfernung oder (synonym) Eigendistanz	siehe Kap. 3 Formel: siehe Kap 6.2 Definiert für Inertialsysteme mit gleicher kosmologischer Zeit (Beobachter, Galaxie)
Mitbewegte Entfernung	siehe Kap. 3 Formel: siehe Kap. 6.2
Hubblesphäre	siehe Kap. 7.1
Partikelhorizont	siehe Kap. 7.2, Kap. 10.2
Partikelhorizont CMB	siehe Kap. 7.2, Kap. 10.1 , Kap. 10.2
Beobachtbares Universum	siehe Kap. .7.2, Kap. 10.2
Beobachtbares Universum CMB	siehe Kap. 7.2, Kap. 10.2
Kosmologischer Ereignishorizont	siehe Kap. 7.3
Lichtkegel	siehe Kap. 7.4. Wenn nicht ausdrücklich anderes erwähnt ist, ist der Mantel des Lichtkegels gemeint.
Scheitel	Mit dem Scheitel eines Lichtkegels ist der Scheitelpunkt des Rückwärts-Lichtkegels (Vergangenheits-Lichtkegels) gemeint.
SEHEN, SICHTBAR	SEHEN heißt, dass mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen den Beobachter am Scheitel eines Lichtkegels passieren. Zugeordnete Adjektive sind analog zu interpretieren.
Licht, Photonen, mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen	Im Sinne der hier behandelten theoretischen Abstandsüberlegungen sind die Begriffe fast synonym zu verwenden. Mit Lichtgeschwindigkeit übermittelte Informationen können insbesondere auch vor dem CMB emittiert worden sein.

Bezugszeitpunkt oder (synonym) frühester Emissionszeitpunkt	Der Partikelhorizont zum Zeitpunkt $t$ , bezogen auf den Bezugszeitpunkt $t_{min}$ (Spezialfall: $t_{CMB}$ ) im frühen Universum, begrenzt den Raum des Beobachtbaren Universums zum Zeitpunkt $t$ , das seit dem Zeitpunkt $t_{min}$ in kausalen Kontakt mit dem Beobachter gekommen ist. Auch das Beobachtbare Universum kann auf diese Weise begrenzt werden.
Weltlinie	In diesem Artikel wird unter Weltlinie konsequent der Pfad eines ruhenden Objekts aufgrund der Expansion des Universums verstanden. Für Weltlinien von Photonen wird konsequent der Begriff Geodäte oder LICHTKEGEL verwendet. Ausnahme: die importierte Abbildung 3.
FLRW-Metrik	siehe Kap. 3
HEUTE	13.790687 Mrd. Jahre nach dem Urknall. Siehe Tabelle 2.

### Symbole und Abkürzungen

$a$	Skalenfaktor, $a(HEUTE)=1$
$t, T$	$t$ wird als allgemeines Symbol für die Zeit seit dem Urknall verwendet. Da Horizonte und Hubblesphäre für jedes $t$ genau ein (physikalischer oder mitbewegter) Abstand vom Beobachter zugeordnet ist, ist dieser Wert allein im Normalfall ausreichend. Für den Lichtkegel sind einmal für den Scheitel die Zeit $T$ und für einen Wert auf dem Lichtkegel ein zusätzlicher Zeitpunkt $t$ erforderlich. Werden Horizonte oder Hubblesphäre zur Scheitel-Zeit eines Lichtkegels betrachtet, so wird auch hier $T$ zur Kennzeichnung der Scheitel-Zeit gebraucht.
$LK(T)$	Lichtkegel mit Scheitelpunkt $T$ Mrd. Jahre nach dem Urknall
$t_{min}, t_{CMB}$	$t_{min}$ : Bezugszeitpunkt im frühen Universum, verwendet für Partikelhorizont und Beobachtbares Universum; $t_{CMB}$ : Zeitpunkt der Emission der kosmologischen Hintergrundstrahlung (siehe Tabelle 3)
$z$	Rotverschiebung, abhängig vom Scheitel eines Lichtkegels. Wenn der Scheitel nicht völlig klar ist, wird die Scheitelzeit in Klammern dahinter gesetzt, z.B. in der Form z.B. $z(HEUTE)=1090$ .
$H_0, \Omega_M, \Omega_R, \Omega_\Lambda$	siehe Tabelle 1
$q$	Abbremsparameter, siehe Tabelle 3, siehe Kap. 8.2, siehe (9)
$t(a)$	$t$ als Funktion von $a$ , siehe (1)
$a(t)$	$a$ als Funktion von $t$ , Umkehrfunktion von $t(a)$ , schwieriger berechenbar
$H(a)$	Hubble-Parameter (2)
$E(a)$	Dichte-Funktion (3)
$\Lambda$ CDM	Lambda Cold Dark Matter
$\Lambda$ CDM-Modell	Räumlich flaches Standardmodell der Kosmologie
km / Mpc / s	Kilometer pro Megaparsec pro Sekunde: $\text{km} * \text{Mpc}^{-1} * \text{s}^{-1}$
Mrd.	Milliarden
$c$	Lichtgeschwindigkeit
Trennzeichen	Dezimaltrennzeichen: Punkt Tausendertrennzeichen: Apostroph

## 12 Literatur

- [1] N. Aghanim et al.: Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, arXiv 1807.06209v4, August 2021, <https://arxiv.org/pdf/1807.06209.pdf>
- [2] W. Lange, WELTTABELLEN - Weltlinien des Standardmodells der Kosmologie ( $\Lambda$ CDM-Modell) in Tabellenform, viXra 2209.0113, <https://vixra.org/abs/2209.0113>
- [3] Yukterez (Simon Tyran, Wien): Animierte Zeichnungen  
<http://lcdm.yukterez.net/i.html#plot>
- [4] T.M. Davis / C.H. Lineweaver: Expanding Confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the Universe, November 2003, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0310808>
- [5] Tamara M. Davis: Fundamental Aspects of the Expansion of the Universe and Cosmic Horizons, Sydney December 2003, <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0402278>
- [6] Wikipedia SPT0418-47 <https://de.wikipedia.org/wiki/SPT0418-47>, abgerufen 16.11.2022
- [7] Für SPT0418-47 relevante Weltlinien (Wikipedia)  
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Worldlines\\_relevant\\_for\\_SPT0418-47.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Worldlines_relevant_for_SPT0418-47.svg), abgerufen 16.11.2022
- [8] Matts Roos: Introduction to Cosmology, Third Edition, Wiley Chichester 2003
- [9] E. Harrison: Hubble spheres and particle horizons, The Astrophysical Journal, 383:60-65,1991 December 10  
<https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1991ApJ...383...60H>
- [10] W. Lange: Der Partikelhorizont als Lichtkegel im Standardmodell der Kosmologie ( $\Lambda$ CDM-Modell), viXra 2305.0146, 2023, <https://vixra.org/abs/2305.0146>, abgerufen am 26.05.2023