

# Title: Deflexión de fotones en campo gravitatorio

## Abstract

Calcularemos la deflexión de los fotones a su tránsito junto al sol por varios procedimientos. El cálculo de la deflexión de fotones se realiza al estilo Soldner.

**Autor:** Enrique Domínguez Pinos. © Todos los derechos reservados.  
Ingeniero Industrial.

**Email:** enrique\_pinos@yahoo.es

Málaga, 14 de Noviembre de 2021, revisado: 19 de Abril de 2024

## Table of Contents

Introducción.....	1
Órbitas elípticas.....	2
Mecánica newtoniana.....	3
Ecuaciones de modelado mecánico.....	3
Integración de las EDO en el espacio de estados.....	4
Condiciones iniciales.....	5
Deflexión.....	6
Mecánica relativista en campo gravitatorio.....	6
Mecánica relativista en campo gravitatorio con cuaternios.....	7
Comentarios finales.....	9
Referencias.....	9

## Introducción

La predicción de la deflexión de fotones en campo gravitatorio es un test clásico de relatividad general <sup>(1)</sup>. Para obtener el resultado de relatividad general vamos a imponer las restricciones de relatividad especial de campos <sup>(3)</sup>, sin realizar desplazamiento temporal, ya que no estamos interesados en el tiempo que invierte el rayo de luz en realizar el tránsito. Para comprobar el resultado, obtendremos una expresión analítica mediante las ecuaciones de una órbita hiperbólica <sup>(4),(5)</sup>.

Vamos a realizar el cálculo numérico por tres procedimientos:

- usando el lagrangiano newtoniano imponiendo a los fotones la restricción de la relatividad especial, esto es, sujetos a desplazarse a velocidad constante igual a  $c_m$ .
- usando las ecuaciones de relatividad especial.
- usando la ecuación del versor velocidad integrada mediante cuaternios.

Realizaremos el cálculo al estilo Soldner <sup>(2)</sup>, esto es, suponiendo el fotón partiendo tangencialmente al sol desde su ecuador y calculando la deflexión al alejarse al infinito. La desviación total será el doble de la calculada con éste procedimiento.

# Órbitas elípticas

En este apartado vamos a usar la notación de las referencias (4) y (5). Siendo,

$$\mu = GM_s,$$

la constante gravitatoria por la masa del sol.

Las órbitas elípticas cumplen que la excentricidad  $e > 1$ ; siendo el vector excentricidad,

$$\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu},$$

y,

$$\vec{C} = \vec{v} \wedge \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r},$$

el vector de Laplace-Runge-Lenz o vector de Laplace. Y,

$$\vec{h} = \vec{r} \wedge \vec{v},$$

el vector momento cinético o momento de la cantidad de movimiento.

Sustituyendo hacia atrás en la expresión del vector excentricidad,

$$\vec{e} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}.$$

Como en el punto de máxima aproximación del rayo al sol, el vector velocidad es ortogonal al vector de posición (que vale el radio del sol de módulo),

$$\vec{e} = \frac{v^2 \vec{r}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} = \vec{r} \left( \frac{v^2}{\mu} - \frac{1}{r} \right).$$

Cuyo módulo,

$$e = \frac{v^2 r}{\mu} - 1.$$

Donde sabemos que se cumple (sin más que sustituir valores en el punto de interés),

$$\frac{v^2 r}{\mu} \gg 1.$$

Por lo que,

$$e \approx \frac{v^2 r}{\mu}.$$

Mientras que el ángulo de deflexión en función de la excentricidad,

$$\delta = 2 \operatorname{asen} \left( \frac{1}{e} \right) \approx \frac{2}{e}.$$

Cuando  $1/e \rightarrow 0$ . Esto nos lleva a la deflexión, con  $r$  igual al radio del sol para considerar que el rayo pasa por la superficie del sol,

$$\delta = \frac{2GM_s}{R_s v^2}.$$

Si la velocidad que sustituimos es la de la luz, obtenemos el resultado newtoniano.

$$\delta_{newton} = \frac{2GM_s}{R_s c^2}.$$

Pero si sustituimos la velocidad de los gravitones (como exige la relatividad especial de campos), el resultado es igual al de relatividad general (expresando la velocidad en función de la velocidad de la luz),

$$\delta_{GR} = \frac{4GM_s}{R_s c^2}.$$

Para,

$$\begin{aligned} c &= 299,792,458 \text{ m/s}, \\ c_m &= c/\sqrt{2}, \\ R_s &= 6.371 \text{ e}^6 \text{ m}, \\ GM_s &= 3.986 \text{ e}^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2. \end{aligned}$$

Para expresar en arcosegundos el resultado, hay que multiplicar por,

$$\frac{648 \text{ e}^3}{\pi}.$$

Obteniendo,

delta_newton
0.874840664697201
delta_GR
1.7496813293944

Para los datos indicados.

## Mecánica newtoniana

Como se ha comentado, vamos a realizar los cálculos al amparo de relatividad especial de campos.

Este método de integración parece mejor cuando aparecen potenciales que no son newtonianos y no queremos usar la ecuación con cuaternios. Los potenciales no newtonianos aparecen en problemas que aplican el principio de equivalencia, como el del 'rotor mössbauer'.

## Ecuaciones de modelado mecánico

Si se toma como sistema de referencia el baricentro del sol y usamos coordenadas cartesianas; el potencial en su entorno queda,

$$V = \frac{-GM_s}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Siendo  $G$  la constante de la gravedad de Newton y  $M_s$  la masa del sol.

La energía cinética de un fotón será,

$$T = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2).$$

Y la restricción, de relatividad especial de campos, respecto a la velocidad constante,

$$v_x^2 + v_y^2 = c_m^2.$$

Con esto, construimos del lagrangiano del fotón,

$$L = T - V.$$

Que queda,

$$L = \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2) + \frac{GM_s}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2}\lambda(v_x^2 + v_y^2 - c_m^2).$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange para cada variable,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_i}\right) = 0, \quad q_i = \{x, y, \lambda\}, \quad v_i = \{v_x, v_y\},$$

obtenemos las tres ecuaciones,

$$\begin{aligned} \frac{-GM_s x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - \frac{d}{dt}[(1 + \lambda)v_x] &= 0, \\ \frac{-GM_s y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - \frac{d}{dt}[(1 + \lambda)v_y] &= 0, \\ v_x^2 + v_y^2 - c_m^2 &= 0. \end{aligned}$$

## Integración de las EDO en el espacio de estados

Si definimos las variables de estado, para la integración,

$$p = v_x(1 + \lambda), \tag{1}$$

y,

$$q = v_y(1 + \lambda), \tag{2}$$

las tres ecuaciones nos quedan,

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{-G M_s x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ \dot{q} &= \frac{-G M_s y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ \frac{p^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{q^2}{(1+\lambda)^2} &= c_m^2.\end{aligned}$$

Despejando es esta última para  $1+\lambda$  y tomando el signo positivo de la raíz,

$$\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{c_m} = 1 + \lambda$$

podemos sustituir en las (1) y (2) despejando las derivadas de  $x$  e  $y$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{p c_m}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \dot{y} &= \frac{q c_m}{\sqrt{p^2 + q^2}}.\end{aligned}$$

Que nos completa el sistema de EDO de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas en  $p$ ,  $q$ ,  $x$ ,  $y$ ,

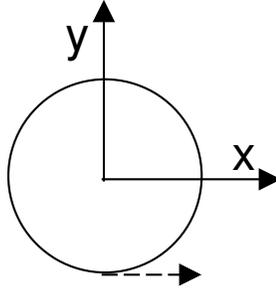
$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{-G M_s x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ \dot{q} &= \frac{-G M_s y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}, \\ \dot{x} &= \frac{p c_m}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ \dot{y} &= \frac{q c_m}{\sqrt{p^2 + q^2}}.\end{aligned}$$

Si deseamos considerar fuerzas adicionales, las incluimos en las dos primeras ecuaciones. Las dos últimas sólo permiten realizar el cálculo de modo que se mantenga la restricción de velocidad.

## Condiciones iniciales

Para  $t=0$ ,  $x=0$ ,  $y=-R_s$ ,  $p=c_m$ ,  $q=0$ .

Siendo  $R_s$  el radio del sol.



Suponemos que el fotón avanza inicialmente en la dirección del eje x y que  $\lambda=0$ .

Se realiza la integración hasta que  $q/p$  es sensiblemente constante. Esto pasa, en la práctica, cuando el tiempo de tránsito alcanza los 600 segundos.

## Deflexión

Para el ángulo de deflexión tenemos,

$$\delta = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

o,

$$\delta = 2 \operatorname{atan}\left(\frac{q}{p}\right)$$

Con  $\delta=0.875$  arcosegundos para una deflexión debida sólo a la gravedad de Newton. Y, para relatividad especial de campos, una deflexión  $\delta=1.7497$  arcosegundos.

## Mecánica relativista en campo gravitatorio

Este método parece ser el mejor cuando todos los potenciales que aparecen son newtonianos. Si hay potenciales no newtonianos, en general, el resultado es poco preciso.

Describiremos aquí las ecuaciones de relatividad especial de campos como se dieron en la referencia (3). El sistema de ecuaciones diferenciales queda,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -G_r \left( x(c_m^2 - p^2) - y p q \right), \\ \dot{q} &= -G_r \left( -x p q + y(c_m^2 - q^2) \right), \\ \dot{x} &= p, \\ \dot{y} &= q. \end{aligned}$$

siendo,

$$G_r = \frac{GM}{c_m^2} \frac{1}{[x^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Y las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned} p &= c_m, \\ q &= 0, \\ x &= 0, \\ y &= -R_s. \end{aligned}$$

Que da una deflexión  $\delta=1.7497$  arcosegundos.

## Mecánica relativista en campo gravitatorio con cuaternios

Este método es el resolutor del ‘caso general’, donde los otros métodos no se pueden aplicar fácilmente. En este caso vamos a partir de la ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{d\tau} &= \vec{v}, \\ \frac{d\vec{v}}{d\tau} &= \vec{F} - \frac{(\vec{v} \cdot \vec{F})\vec{v}}{c^2}. \end{aligned}$$

O, en forma de vector unitario para la velocidad,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{d\tau} &= c_m \hat{v}, \\ \frac{d\hat{v}}{d\tau} &= \frac{1}{c_m} (\vec{F} - (\hat{v} \cdot \vec{F})\hat{v}). \end{aligned}$$

Y vamos a transformar la segunda de ellas a una ecuación de cuaternios. Si atendemos a la identidad,

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B}).$$

Identificando,

$$\vec{A} = \hat{v}, \vec{B} = \vec{F}, \vec{C} = \hat{v}.$$

Podemos reescribir la ecuación como,

$$\frac{d\hat{v}}{d\tau} = \frac{1}{c_m} \hat{v} \wedge (\vec{F} \wedge \hat{v}).$$

Que, en forma de cuaternios,

$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \frac{1}{c_m} \tilde{v} \otimes (\vec{F} \otimes \tilde{v}).$$

Donde el gorro curvado indica que el vector es cuaternio (y v unitario) y, el producto encerrado en el círculo, el producto de cuaternios. Que puede resumirse,

$$\tilde{w} \otimes \tilde{z} = (w_o e_o - \vec{w} \cdot \hat{e}) + w_o \hat{e} + e_o \vec{w} + \vec{w} \times \hat{e}.$$

Siendo las componentes con subíndice cero la parte real del cuaternio, y las partes con vectores las imaginarias.

Los cuaternios serían,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} v_o \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}.$$

Desarrollando el producto para obtener una expresión cerrada,

$$\tilde{\mathbf{F}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} -(F_x v_1 + F_y v_2 + F_z v_3) \\ v_o F_x + F_y v_3 - F_z v_2 \\ v_o F_y + F_z v_1 - F_x v_3 \\ v_o F_z + F_x v_2 - F_y v_1 \end{bmatrix}.$$

Y,

$$\tilde{\mathbf{v}} \otimes (\tilde{\mathbf{F}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{bmatrix} -(2 v_o v_1 F_x + 2 v_o v_2 F_y + 2 v_o v_3 F_z) \\ F_x (v_o^2 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2 v_1 v_2 F_y - 2 v_1 v_3 F_z \\ -2 v_1 v_2 F_x + F_y (v_o^2 - v_2^2 + v_1^2 + v_3^2) - 2 v_2 v_3 F_z \\ -2 v_1 v_3 F_x - 2 v_2 v_3 F_y + F_z (v_o^2 - v_3^2 + v_1^2 + v_2^2) \end{bmatrix}.$$

Dando el sistema,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_o \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_m} \begin{bmatrix} -(2 v_o v_1 F_x + 2 v_o v_2 F_y + 2 v_o v_3 F_z) \\ F_x (v_o^2 - v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - 2 v_1 v_2 F_y - 2 v_1 v_3 F_z \\ -2 v_1 v_2 F_x + F_y (v_o^2 - v_2^2 + v_1^2 + v_3^2) - 2 v_2 v_3 F_z \\ -2 v_1 v_3 F_x - 2 v_2 v_3 F_y + F_z (v_o^2 - v_3^2 + v_1^2 + v_2^2) \end{bmatrix}.$$

y del cuaternio del versor, sacamos el versor como,

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sin(\text{acos}(v_o))} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-v_o^2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Junto con,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{c_m}{\sqrt{1-v_o^2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Para el caso que nos ocupa, podemos prescindir de la componente z,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_o \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{c_m} \begin{bmatrix} -2 v_o (v_1 F_x + v_2 F_y) \\ F_x (v_o^2 - v_1^2 + v_2^2) - 2 v_1 v_2 F_y \\ -2 v_1 v_2 F_x + F_y (v_o^2 - v_2^2 + v_1^2) \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{c_m}{\sqrt{1-v_o^2}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Con,

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{-GM_s x}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{-GM_s y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \hat{\mathbf{y}}.$$

Y con las condiciones iniciales,

$$\begin{aligned}v_1 &= 1, \\v_0 = v_2 &= 0, \\x &= 0, \\y &= -R_s.\end{aligned}$$

Que da una deflexión  $\delta=1.7497$  arcosegundos.

## Comentarios finales

Con todos los procedimientos obtenemos los mismos resultados, si bien es cierto que unos métodos son más aptos que otros según el caso de resolución.

Si el problema requiere la integración de una trayectoria en campos gravitatorios (únicamente) newtonianos intentaríamos el segundo procedimiento. Si aparecen potenciales no newtonianos, es mejor usar el primer caso. Y donde arrastrar la restricción de la velocidad en el lagrangiano no es viable, usaríamos el tercer procedimiento (caso general).

Nótese que, en el primer método, hemos usado una expresión de energía newtoniana en vez de relativista. Esto plantea una cierta incongruencia con la deducción de la expresión de la ecuación del redshift que se dió en (3) que parece indicar que hay algo que no termina de cuadrar en la teoría.

## Referencias

- (1) [https://es.wikipedia.org/wiki/Pruebas\\_de\\_la\\_relatividad\\_general](https://es.wikipedia.org/wiki/Pruebas_de_la_relatividad_general)
- (2) Mignonat, M. (2018) Soldner Had Found in 1802 the Deflection of the Light by the Sun as the General Relativity Shows. Journal of Modern Physics, 9, 1545-1558.  
<https://doi.org/10.4236/jmp.2018.98095>
- (3) Experimentos de GR resueltos con relatividad especial de campos.  
<https://vixra.org/abs/2404.0013>
- (4) Apuntes UPV. Parámetros constantes de una órbita kepleriana.  
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/132657/Mora%c3%b1o%20-%20Par%c3%a1metros%20constantes%20en%20%c3%b3rbitas%20keplerianas.pdf?sequence=1>
- (5) Apuntes UPV. Análisis y ejemplos de órbitas hiperbólicas.  
<https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/132658/Mora%c3%b1o%20-%20An%c3%a1lisis%20y%20ejemplos%20de%20%c3%b3rbitas%20hiperb%c3%b3licas.pdf?sequence=1>