

**С.Я.Котковский**

# Классический электрон

Классический электрон представляет собой электрический заряд и магнитный момент, совмещённые в одной точке. Поле электрона есть линейная сумма полей этих двух сингулярностей – центрального и осецентричного типов. Нерешённой проблемой классики остаётся отсутствие видимой связи между этими двумя характеристиками одной и той же частицы. В настоящей работе мы рассматриваем поле движущегося с некоторой постоянной скоростью электрона. Нас интересует главным образом, как выглядят потоки энергии и импульса этого поля, определяемые вектором Умова-Пойнтинга и соответствующей плотностью энергии поля. В работе выявлено, что связь заряда и магнитного момента движущегося электрона проявляется в эффекте возникновения спиральных энергопотоков полного поля этой частицы.

## Введение

Под *4-вектором* мы понимаем вещественный бикватернион, который не обязательно преобразуется как лоренц-ковариантный четырёхвектор специальной теории относительности. Т.о. 4-векторами в нашей терминологии являются как обычные релятивистские четырёхвекторы: пространственно-временная координата  $(t, \mathbf{r})$ , энергия-импульс частицы  $(E, \mathbf{P})$  или её релятивистская четырёхскорость  $u$ , так и стандартно не ковариантные комбинации скаляра и вектора, такие как 4-вектор плотности энергии-импульса поля, вводимый ниже.

Мы используем представление электромагнитного поля в виде комплекснозначного трёхмерного вектора, называемого вектором Римана-Зильберштейна [1]:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i \mathbf{H}$$

Вещественная часть этого вектора  $\mathbf{E}$  – электрическое поле, его мнимая часть  $\mathbf{H}$  – магнитное поле.

Пусть на пространстве 4-векторов  $Z = (t, \mathbf{r})$  задана произвольная дифференцируемая по каждому из аргументов  $t, \mathbf{r}$  комплексная трёхмерная векторная функция поля  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(Z)$ . В каждой точке пространства-времени  $Z$  можно определить 4-вектор плотности энергии-импульса (*4-вектор Умова-Пойнтинга*):

$$K = (\epsilon, \mathbf{p}) = \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^* = \frac{1}{2} ((\mathbf{F} \mathbf{F}^*), i[\mathbf{F} \mathbf{F}^*]) \quad (1)$$

и трёхмерную скорость согласно

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon} = \frac{i[\mathbf{F}\mathbf{F}^*]}{(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)} \quad (2)$$

где  $[\mathbf{F}\mathbf{F}^*]$  и  $(\mathbf{F}\mathbf{F}^*)$  – векторное и скалярное произведения соответственно. Рассмотрим некоторую точку пространства  $\mathbf{r}$  в некоторый момент времени  $t$ . Это будет точка пространства-времени, определяемая 4-вектором  $Z = (t, \mathbf{r})$ . Со скоростью  $\mathbf{V}$  поле переместится из точки  $Z$  в точку  $Z' = Z + \Delta Z$ , где  $\Delta Z = (\Delta t, \Delta \mathbf{r}) = (\Delta t, \mathbf{V}\Delta t)$ . Значение функции  $\mathbf{F}$  в точке  $Z'$  определяется по известной из гидродинамики формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(Z') &= \mathbf{F}(Z + \Delta Z) = \mathbf{F}(Z) + \Delta \mathbf{F} \\ \Delta \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \Delta t + (\Delta \mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \Delta t + \Delta t (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3)$$

В точке  $Z'$  также можно определить соответствующий 4-вектор Умова-Пойнтинга  $K' = \frac{1}{2} \mathbf{F}(Z') \mathbf{F}^*(Z')$ . Непосредственно убеждаемся в том, что плотность энергии-импульса поля при переходе от точки  $Z$  к точке  $Z'$  преобразуется по такому же закону, что и само поле (3):

$$K' = K + \frac{\partial K}{\partial t} \Delta t + \Delta t (\mathbf{V} \cdot \nabla) K$$

Исходя из этого, правомочно представлять перенос поля  $\mathbf{F}$  с плотностью энергии-импульса  $K$  от точки к точке подобно жидкости, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , определяемой согласно (2).

Из уравнений Максвелла следует известная связь между плотностью энергии и импульса, как уравнение непрерывности:

$$\partial_t \epsilon + \nabla \cdot \mathbf{p} = 0 \quad (4)$$

Уравнение (4) выполняется как для свободного поля, так и для поля равномерно движущегося заряда. В силу (4) вектор Умова-Пойнтинга играет роль потока энергии. Итак, можно говорить о *потоке энергии* поля (или *потоке поля*)  $\mathbf{p}$ , его скорости  $\mathbf{V}$  и соответствующих путях переноса энергии поля.

## Поле движущегося электрического заряда

Поле точечного электрического заряда (далее просто «заряд»)  $e$ , движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{e(1 - v^2)}{(R^2 - [\mathbf{v}\mathbf{R}]^2)^{3/2}} (\mathbf{R} + i[\mathbf{v}\mathbf{R}]) \\ \mathbf{R} &= \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\mathbf{r}_0$  – радиус-вектор движущегося заряда.

$$\begin{cases} E = \alpha R \\ H = \alpha [\mathbf{vR}] \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{e(1 - v^2)}{(R^2 - [\mathbf{vR}]^2)^{3/2}}$$

Плотность энергии-импульса поля есть 4-вектор Умова-Пойнтинга  $K = (\epsilon, \mathbf{p})$  (не являющийся обычным релятивистским четырехвектором).  $K$  определяется согласно (1):

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) = \frac{1}{2}\alpha^2[R^2(1 + v^2) - (\mathbf{vR})^2] \\ \mathbf{p} = [\mathbf{EH}] = \alpha^2[\mathbf{vR}^2 - \mathbf{R}(\mathbf{vR})] \end{cases} \quad (7)$$

Скорость потока энергии поля (скорость с которой энергия поля переносится в пространстве) определяется согласно (2) как:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon} = \frac{2[\mathbf{EH}]}{E^2 + H^2} = \frac{2[\mathbf{vR}^2 - \mathbf{R}(\mathbf{vR})]}{R^2(1 + v^2) - (\mathbf{vR})^2} \quad (8)$$

Определим *скоростные линии* потока энергии поля  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$  – линии пространства, вдоль которых направлена  $\mathbf{V}$ . Здесь  $\tau$  – параметр линии,  $x$  – ось направления движения,  $xu$  – некоторая плоскость продольного сечения,  $\mathbf{r} = (x, y)$ .

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{V} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = V_x \\ \frac{dy}{d\tau} = V_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = V_x d\tau \\ dy = V_y d\tau \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{V_x} = -\frac{y(vx)}{vR^2 - x(vx)} = -\frac{x}{y} \quad (10)$$

Получаем уравнение скоростной линии в виде уравнения окружности:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad d(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = c, \quad c = const \quad (11)$$

Более точно, скоростные линии потока энергии это полуокружности, которые начинаются и заканчиваются на оси движения  $x$  (Рис 1).

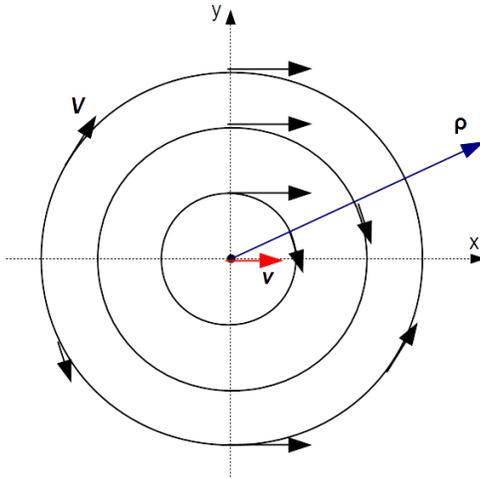


Рис. 1. Скоростные линии потока энергии поля движущегося электрического заряда в отдельный момент времени. Показана плоскость продольного сечения  $xu$ . Заряд в начале координат.

В поперечной плоскости сечения  $yz$  при  $x = r_0$  (на *поперечнике*) скорость потока максимальна:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{max} = \frac{2\mathbf{v}}{1 + v^2} \quad (12)$$

На оси движения заряда  $x$  (на *продольнике*) скорость тока минимальна и равна 0:  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{min} = 0$ . Скорость потока не зависит от величины радиус-вектора  $\mathbf{R}$ , а только от его направления  $\rho$ :

$$\mathbf{V} = \frac{2[\mathbf{v} - \rho(\mathbf{v}\rho)]}{1 + v^2 - (\mathbf{v}\rho)^2}, \quad \rho = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \rho = 1 \quad (13)$$

Величина скорости потока энергии поля  $V$  всегда меньше скорости света 1:

$$V^2 = \frac{4(v^2 - (\mathbf{v}\rho)^2)}{(1 + v^2 - (\mathbf{v}\rho)^2)^2} < 1 \quad (14)$$

Скорость заряда лежит в диапазоне

$$\frac{V_{max}}{2} < v < V_{max} \quad (15)$$

## Представление скоростей.

Каждая из полуокружностей линии скоростей в обычном пространстве (слева) переводится в полную окружность в векторном пространстве скоростей (Рис.2).

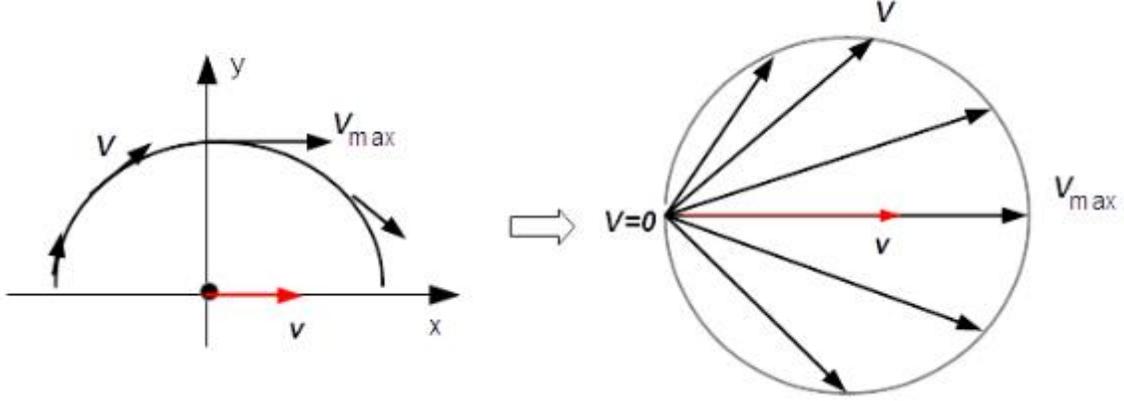


Рис. 2. Графики скорости потока энергии поля движущегося электрического заряда.

Многообразие всех скоростей потока  $\mathbf{V}$  для данной фиксированной скорости заряда  $\mathbf{v}$  образует полную сферу в трёхмерном пространстве скоростей. Продольный разрез этой сферы изображён на правой части Рис. 2. Заметим, что согласно (15) скорость заряда  $\mathbf{v}$  не находится в центре этой сферы. Однако, как видно из дальнейшего, скорость заряда находится в центре гиперсферы скоростей потока поля в пространстве 4-скоростей.

Перейдём от трёхмерных скоростей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{V}$  к четырёхмерным скоростям  $u$  и  $U$  соответственно:

$$\begin{cases} u = \gamma(1, \mathbf{v}) \\ U = \Gamma(1, \mathbf{U}) \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 1/(1 - v^2) \\ \Gamma = 1/(1 - V^2) \end{cases} \quad |u|^2 = |U|^2 = 1 \quad (16)$$

Квадрат модуля некоторого 4-вектора  $(\alpha, \mathbf{a})$  определяется как  $|(\alpha, \mathbf{a})|^2 = \alpha^2 - \mathbf{a}^2$ .

Покажем, что все 4-скорости потока энергии  $U$  равноудалены от 4-скорости заряда  $u$ :

$$|U - u|^2 = \lambda, \quad (17)$$

где  $\lambda$  одинаковое для всех  $U$  число, зависящее только от скорости заряда.

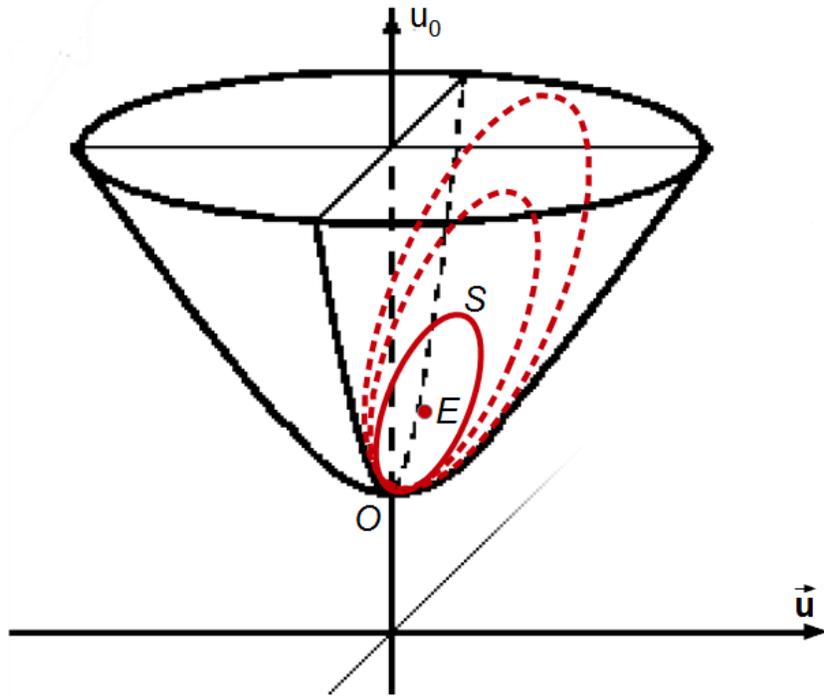
$$\begin{aligned} |U - u|^2 &= (U - u)(\bar{U} - \bar{u}) = 2 - U\bar{u} - u\bar{U} = 2 - s \\ s &= U\bar{u} + u\bar{U} = \Gamma(1, \mathbf{V}) \gamma(1, -\mathbf{v}) + \gamma(1, \mathbf{v}) \Gamma(1, -\mathbf{V}) \\ s &= 2 + \gamma \Gamma(1 - (\mathbf{V}\mathbf{v})) \end{aligned} \quad (18)$$

$$(\mathbf{V}\mathbf{v}) = \frac{2[v^2 - (\mathbf{v}\boldsymbol{\rho})^2]}{1 + v^2 - (\mathbf{v}\boldsymbol{\rho})^2}, \quad 1 - (\mathbf{V}\mathbf{v}) = \frac{1 - v^2 + (\mathbf{v}\boldsymbol{\rho})^2}{1 + v^2 - (\mathbf{v}\boldsymbol{\rho})^2}$$

$$\Gamma = \frac{1 + v^2 - (\mathbf{v}\rho)^2}{1 - v^2 + (\mathbf{v}\rho)^2}$$

$$s = 2\gamma \quad \Rightarrow \quad |U - u|^2 = 2(1 - \gamma) = \lambda$$

В четырёхмерном пространстве скоростей многообразии  $\{U\}$  представляет собой гиперсферу с центром в точке  $u$  и квадратом псевдоевклидова «радиуса»  $\lambda$ .



*Рис. 3. Гиперboloид и гиперсферы 4-скоростей.*

Рис. 3: По вертикальной оси отмеряется скалярная компонента 4-вектора скорости, а горизонтальная символически изображает её трёхмерную векторную составляющую. Красным цветом изображены гиперсферы скоростей потока поля  $\{U\}$  для трёх различных по величине, но одинаковых по направлению скоростей заряда. Первая гиперсфера показана сплошной линией, а две другие пунктиром. Для первой гиперсферы скорость заряда находится в точке  $E$ ,  $S$  – скорость потока поля на поперечнике,  $O$  – нулевая скорость потока поля на оси движения (продольнике).

Для покоящегося заряда гиперсфера скоростей потока поля, естественно, отсутствует. Его скоростная конфигурация описывается единственной точкой-центром, расположенной в  $O$ . Для движущихся с различными скоростями зарядов существуют непрерывные преобразования, переводящие одну гиперсферу скоростей, включая её центр, в другую, сохраняющие их топологию. Но не существует подобного преобразования, которое бы сжимало скоростную гиперсферу с центром в точку  $O$ , т.к. сферу невозможно стянуть в точку. Это означает, что состояние покоя заряда топологически отлично от состояний ненулевых скоростей.

Этот математический факт указывает на ограниченный характер релятивистского принципа относительности. Уточнённая формулировка этого принципа имеет вид: **все системы отсчёта равнозначны за исключением системы отсчёта покоя частицы.** Система отсчёта покоя частицы является выделенной по сравнению с остальными системами отсчёта.

4-вектор скорости потока энергии  $U$  не является лоренц-ковариантным четырёхвектором. Действительно, если бы  $U$  был релятивистским четырёхвектором, то таким же был бы и  $w = u - U$ , т.к. 4-скорость частицы  $u$  есть релятивистский четырёхвектор. Тогда  $|w|^2$  был бы лоренц-инвариантом. Но, согласно (17), (18),  $|w|^2 = \lambda = 2(1 - \gamma)$ , очевидно, не является лоренц-инвариантом.

### Пути переноса энергии поля движущегося заряда.

Рассмотрим некоторый малый пространственный объём  $d^3V$  и содержащуюся в нём энергию поля в некоторой точке пространства в некоторый начальный момент времени  $t$ . В этой точке можно определить скорость потока энергии поля и по ней рассчитать следующую точку пространства, в которую переместится этот объём энергии в следующий момент времени  $t + dt$ . Продолжая эти шаги можно получить пространственную траекторию  $\mathbf{r}(t)$  рассматриваемого объёма энергии, которую естественно назвать *путём переноса энергии поля*. При этом естественно считать, что вдоль этой линии сам пространственный объём  $d^3V$  меняется так, что его энергия остаётся постоянной:  $\epsilon d^3V = \text{const}$ .

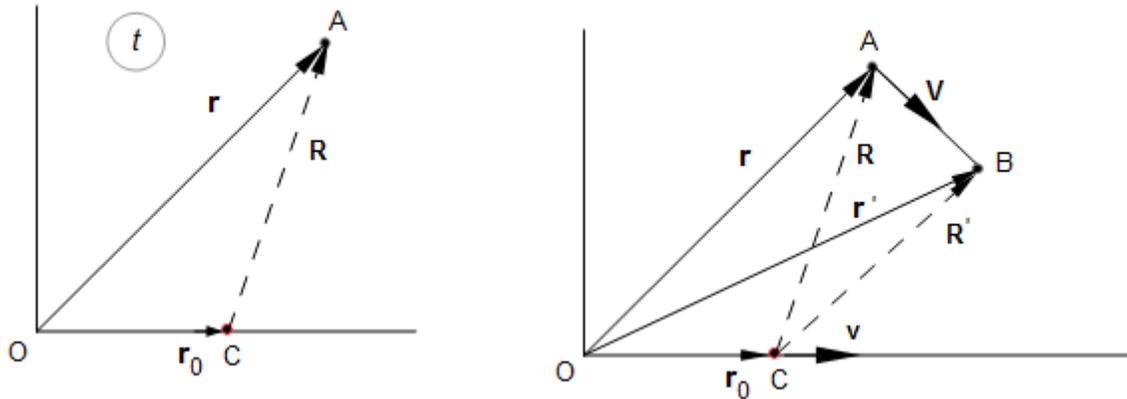


Рис. 4. К вычислению траектории движения малого объёма энергии поля. Слева момент времени  $t$ . Справа переход от момента времени  $t$  (точка  $A$ ) к моменту времени  $t + dt$  (точка  $B$ ). Горизонтальная ось  $x$ , вертикальная ось  $y$ .

Обозначим через  $A$  точку, в которой находится рассматриваемый объём энергии в некоторый момент времени  $t$ . В этот момент времени движущийся заряд находится в точке  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}t$ . Радиус-векторы точки  $A$  относительно неподвижного центра  $O$  и относительно местоположения заряда  $C$  обозначим  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}$  соответственно. Последние связаны соотношением:  $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ . В момент времени  $t + dt$  рассматриваемый объём

энергии перемещается в точку  $B$ , задаваемую абсолютным радиус-вектором  $\mathbf{r}'$  и радиусом-вектором  $\mathbf{R}'$  относительно предыдущего местоположения заряда  $C$ .

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{R}' - \mathbf{R} = \mathbf{V}(t)\Delta t$$

$$\mathbf{V}(t) = 2 \frac{\mathbf{vR}^2 - \mathbf{R}(\mathbf{vR})}{(1 + v^2)R^2 - (\mathbf{vR})^2}$$

$$R^2 = r^2 - 2(\mathbf{vr})t + v^2t^2$$

$$(\mathbf{vR}) = (\mathbf{vr}) - v^2t$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 2 \frac{\mathbf{v}(r^2 - (\mathbf{vr})t) + \mathbf{r}(v^2t - (\mathbf{vr}))}{(1 + v^2)r^2 - 2(\mathbf{vr})t + v^2t^2 - (\mathbf{vr})^2} \quad (19)$$

Формула (19) даёт значение скорости переноса энергии поля  $\mathbf{u}$  в каждой точке, по которой можно рассчитать искомый путь переноса энергии поля заряда.

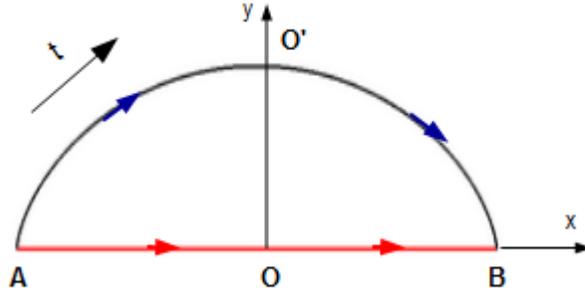


Рис. 5. Синим цветом – путь переноса энергии поля заряда. Красным цветом обозначена траектория заряда. Продольное сечение  $xu$ .

Отметим одну важную характерную особенность путей переноса энергии поля: они всегда начинаются на заряде. Можно сказать, что энергия поля перебрасывается от заряда в прошлом заряду в будущем, при этом совершая «обходное» движение в плоскости продольного сечения.

На Рис.5 в начальный момент времени  $t_A$ , когда заряд проходит точку  $A$ , из этой точки исходит некоторый объём энергии поля, показанный синим цветом. Хотя после этого продвижение заряда и элемента энергии поля вдоль оси  $x$  не совпадает по времени (см. Рис. 6), в конечную точку  $B$  они приходят одновременно. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим выражение для скорости потока энергии  $\mathbf{u}$  (19). Положим, что заряд проходит середину пути (точку  $O$ ) в момент времени  $t = 0$ . Легко убедиться, что график пути энергии поля будет симметричен относительно оси  $y$ . Действительно при преобразовании  $t \rightarrow -t, x \rightarrow -x, y \rightarrow y$ ,  $\mathbf{u}$  преобразуется согласно:  $u_x \rightarrow u_x, u_y \rightarrow -u_y$ , т.е. энергия поля движется симметрично относительно оси  $y$ , вверх слева от оси  $y$  и вниз справа от неё.

Теперь сместим отсчёт времени, так что  $t_A = 0$ . Вертикальная составляющая скорости энергии  $u_y$  пропорциональна  $y(v^2t - (\mathbf{vr})) = y(v^2t - vx) = vy(vt - x)$ . В средней точке траектории  $O'$  должно быть  $u_y = 0$ , поэтому в этой точке должно выполняться равенство  $vt - x = 0$ , или  $x_{O'} = vt$ . Иначе говоря, рассматриваемый объём энергии поля

оказывается на оси  $y$  в тот же момент, когда её достигает заряд в точке  $O$ . Но поскольку график симметричен относительно оси  $y$ , то заряд и объём энергии достигнут конечной точки  $B$  также одновременно, ч.т.д.

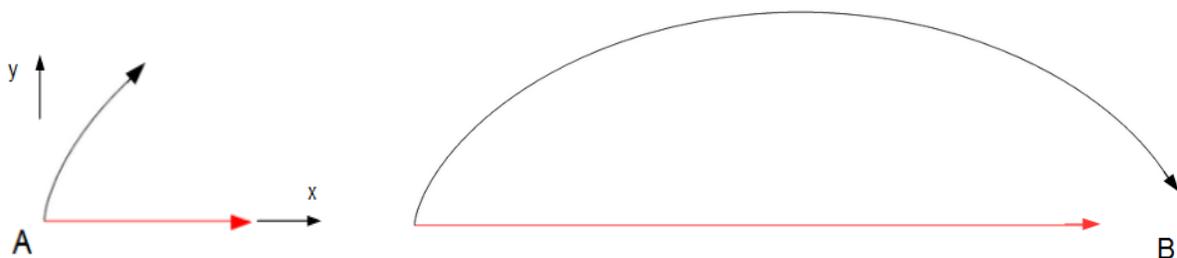


Рис. 6. «Ахиллес и черепаха». Заряд (красный цвет) и рассматриваемый объём энергии поля (синий цвет) одновременно выходят из начальной точки  $A$ . На рисунке слева заряд опережает по оси  $x$  рассматриваемый объём энергии. На рисунке справа в более поздний момент времени, наоборот, объём энергии опережает заряд. В конце концов они одновременно приходят в конечную точку  $B$ .

Существуют различные способы рассмотрения путей переноса энергии поля в зависимости от начальных или срединных условий. Так, можно рассматривать линии энергии, одновременно проходящие через один поперечник (Рис. 7), или же линии, выходящие из одной и той же точки прохождения заряда (Рис. 8).

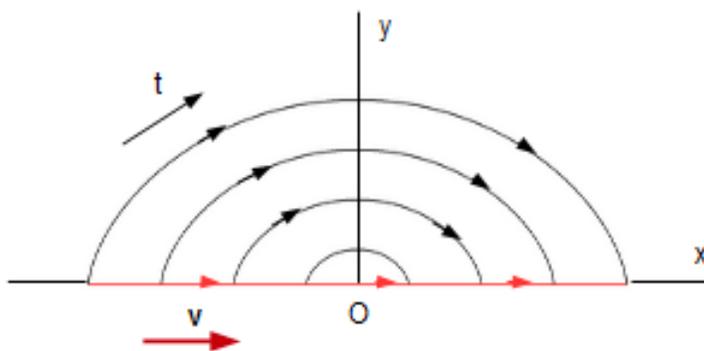


Рис. 7. Пути переноса энергии поля движущегося заряда, одновременно проходящие через один и тот же поперечник (ось  $y$ ) в некоторый момент времени, когда заряд (красный цвет) проходит точку  $O$ . Стрелка  $t$  указывает направление времени.

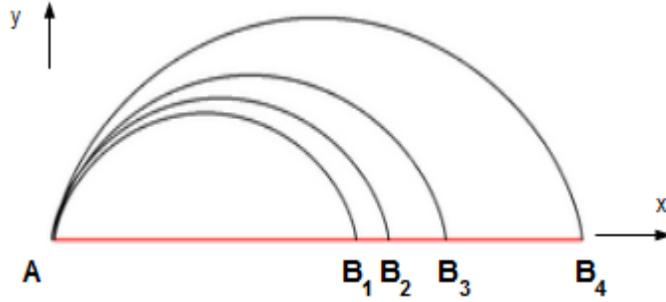


Рис. 8. Пути переноса энергии поля движущегося заряда, одновременно исходящие из одной и той же точки прохождения заряда А.

**Замечание:** важно отличать скоростные линии (Рис.1-3) от путей переноса энергии поля (Рис.5-8). Скоростная линия даёт распределение скоростей в некоторый фиксированный момент времени, в то время как пути переноса энергии показывают перемещение элементов энергии поля во времени.

## Поле движущегося магнитного момента

Магнитное поле покоящегося точечного магнитного момента  $\mathbf{m}$  вне его центральной точки имеет вид:

$$\mathbf{H} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - \mathbf{m}R^2}{R^5} \quad (20)$$

Мы ограничимся случаем, когда магнитный момент направлен строго по скорости движения частицы:

$$\mathbf{m} = m \mathbf{v}/v \quad (21)$$

Поле магнитного момента, движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ , кроме магнитной составляющей  $\mathbf{H}$  приобретает также электрическую составляющую  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{mR})\mathbf{R}}{\gamma^4 R^5 (1 - v^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} - \frac{\mathbf{m}}{\gamma^2 R^3 (1 - v^2 \sin^2 \alpha)^{3/2}} \\ \mathbf{E} = [\mathbf{Hv}] = \frac{3[\mathbf{Rv}](\mathbf{mR})}{\gamma^4 R^5 (1 - v^2 \sin^2 \alpha)^{5/2}} \end{cases} \quad (22)$$

где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор между данной точкой и местоположением заряда в данный момент времени,  $\alpha$  угол между направлениями  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{R}$ ,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ . Обозначая

$$\xi = \frac{1}{(1 - v^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 + (\mathbf{v} \boldsymbol{\rho})^2}}, \quad \boldsymbol{\rho} = \frac{\mathbf{R}}{R} \quad (23)$$

преобразуем (22) к виду:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{3[\mathbf{Rv}](\mathbf{mR}) \xi^5}{\gamma^4 R^5} \\ \mathbf{H} = \frac{3(\mathbf{mR})\mathbf{R} \xi^5}{\gamma^4 R^5} - \frac{\mathbf{m} \xi^2}{\gamma^2 R^3} \end{cases} \quad (24)$$

Вычислим квадраты каждой из составляющих поля:

$$\begin{cases} E^2 = \frac{9 \xi^{10} m^2}{\gamma^8 R^{10} v^2} (\mathbf{vR})^2 (v^2 R^2 - (\mathbf{vR})^2) \\ H^2 = \frac{\xi^6 m^2}{\gamma^8 v^2 R^8} \{ 9(\mathbf{vR})^2 \xi^4 + \gamma^4 v^2 R^2 - 6(\mathbf{vR})^2 \xi^2 \gamma^2 \} \end{cases} \quad (25)$$

Отсюда для плотностей энергии и импульса поля получаем следующие выражения:

$$\begin{cases} \epsilon = \frac{E^2 + H^2}{2} = \frac{\xi^6 m^2}{2 \gamma^8 R^{10} v^2} \{ 9\xi^4 (\mathbf{vR})^2 (v^2 + 1) - (\mathbf{vR})^2 - \\ - 6\gamma^2 R^2 (\mathbf{vR})^2 \xi^2 + \gamma^4 R^4 v^2 \} \\ \mathbf{p} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \frac{3(\mathbf{vR})\xi^{10} m^2}{\gamma^6 R^{10} v^2} \{ \mathbf{v}(\mathbf{vR})(2(1 - v^2)R^2 - (\mathbf{vR})^2) + \\ + \mathbf{R}(v^2 R^2(1 - v^2) + (\mathbf{vR})^2(4v^2 - 3)) \} \end{cases} \quad (26)$$

В итоге получаем следующее выражение для скорости потока энергии поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{\mathbf{p}}{\epsilon} = \\ &= 6(\mathbf{v}\rho)\xi^2 \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}\rho)(2(1 - v^2) - (\mathbf{v}\rho)^2) + \rho\{v^2(1 - v^2) + (\mathbf{v}\rho)^2(4v^2 - 3)\}}{9\xi^4(\mathbf{v}\rho)^2(1 + v^2 - (\mathbf{v}\rho)^2) - 6\gamma^2(\mathbf{v}\rho)^2 \xi^2 + \gamma^4 v^2} \end{aligned} \quad (27)$$

Как и в случае с полем заряда скорость потока энергии для поля магнитного момента (27) не зависит от величины радиус-вектора  $\mathbf{R}$  рассматриваемого малого объёма энергии, а только от его направления  $\rho$ . Кроме того распределение  $\mathbf{V}(\rho)$  осесимметрично относительно направления движения  $x$ . Поэтому достаточно рассмотреть это распределение в некоторой произвольной плоскости продольного сечения. В этой плоскости радиус-вектор имеет вид:  $\mathbf{R} = (x, y)$ . Применим тот же метод, что и для линий потока энергии поля заряда в (9),(10). Исходя из (27), получаем вид линий скорости потока энергии  $\mathbf{V}$  для поля магнитного момента:

$$y = \sqrt{\frac{3v^2 - 2}{2} x^2 + cx^{2/3}}, \quad c = const \quad (28)$$

На Рис.9 изображены скоростные линии потока энергии поля (28) для магнитного момента, движущегося со скоростью равной половине скорости света  $v = 1/2$ .

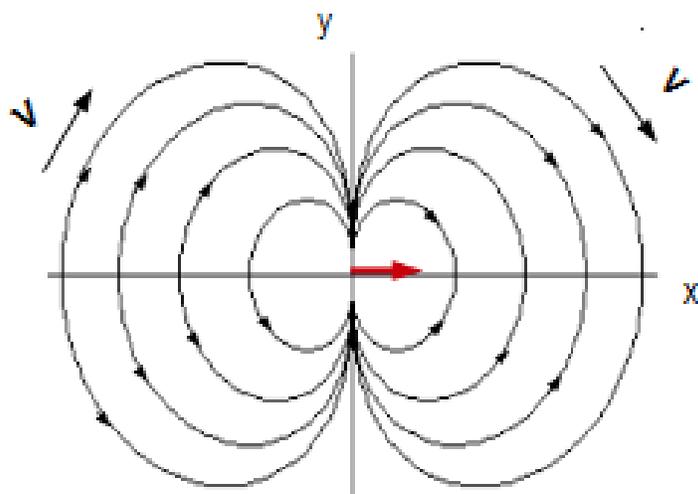


Рис.9. Линии скорости потока энергии поля движущегося точечного магнитного момента в некоторый момент времени. Магнитный момент находится в центральной точке. Красной стрелкой показана скорость его движения  $v$ . Вектор самого магнитного момента направлен по скорости его движения  $v$ .

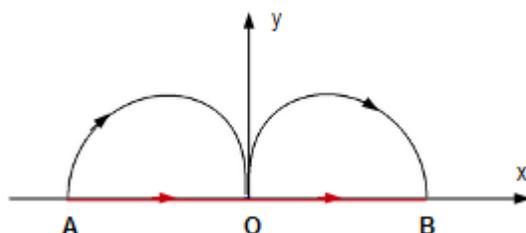
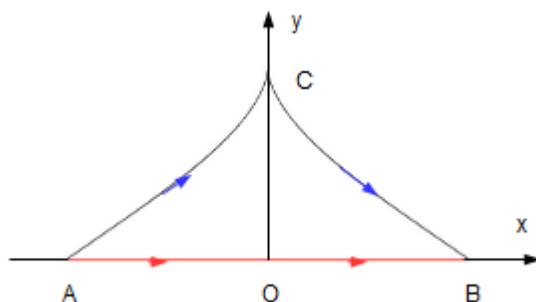


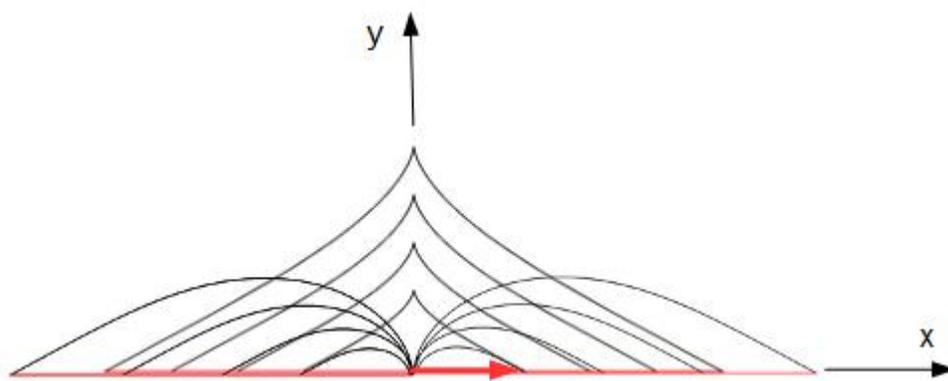
Рис.10. Первый тип путей переноса энергии поля магнитного момента По горизонтали красным цветом - траектория магнитного момента

Рис.10: В момент времени, когда магнитный момент в своём движении проходит точку  $A$ , из этой точки выходит некоторый малый объём энергии поля. В точке  $O$  магнитный момент и объём энергии сходятся и затем снова расходятся, чтобы одновременно прийти в конечную точку  $B$ .



*Рис.11. Второй тип путей переноса энергии поля магнитного момента. Красным цветом показана траектория магнитного момента, синим цветом – путь элемента энергии поля.*

Рис.11: В момент времени, когда магнитный момент в своём движении проходит точку *A*, из этой точки выходит некоторый малый объём энергии поля.. Магнитный момент приходит в точку *O* одновременно с тем, как объём энергии приходит на поперечник (ось *y*) в точку *C*. Затем движение магнитного момента и объёма энергии продолжается и они одновременно приходят в конечную точку *B*.



*Рис.12. Два существующих типа путей переноса энергии поля магнитного момента. Красной стрелкой изображена скорость магнитного момента.*

Рис.12 включает оба типа путей, показанных на Рис.10 и Рис.11. Пути первого типа входят и выходят в точку-центр магнитного момента в начале координат. Пути второго типа заканчиваются и начинаются на поперечнике поля, т.е. поперечном сечении уз.

## Поле покоящегося электрона

Классический электрон объединяет в себе точечный электрический заряд  $e$  и магнитный момент  $\mathbf{m}$ . В соответствии с этим поле покоящегося электрона представляет собою сумму полей заряда  $\mathbf{F}_e$  (5) и  $\mathbf{F}_m$  (22), взятых при нулевой скорости  $\mathbf{v} = 0$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} + i \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - \mathbf{m}R^2}{R^5}$$

или покомпонентно:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \\ \mathbf{H} = \frac{3\mathbf{R}(\mathbf{mR}) - \mathbf{m}R^2}{R^5} \end{cases}$$

Плотность энергии поля распадается на сумму вкладов от электрического и магнитного полей –  $\epsilon_e$  и  $\epsilon_m$  соответственно:

$$\begin{cases} \epsilon = \epsilon_e + \epsilon_m \\ \epsilon_e = \frac{e^2}{2R^4} \\ \epsilon_m = \frac{m^2(1 + 3 \cos^2 \theta)}{2R^6} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае вектор Умова-Пойнтинга возникает из взаимодействия электрического и магнитного полей и выражается как:

$$\mathbf{p} = \frac{e[\mathbf{mR}]}{R^6}$$

Совместное действие электрического и магнитного полей приводит к образованию замкнутых круговых скоростных линий энергии поля, которые для покоящегося электрона совпадают с путями переноса энергии поля (Рис.13). Круговое движение энергии-импульса обладает моментом вращения. Последний же связан с собственным моментом вращения электрона, т.е. его спином.

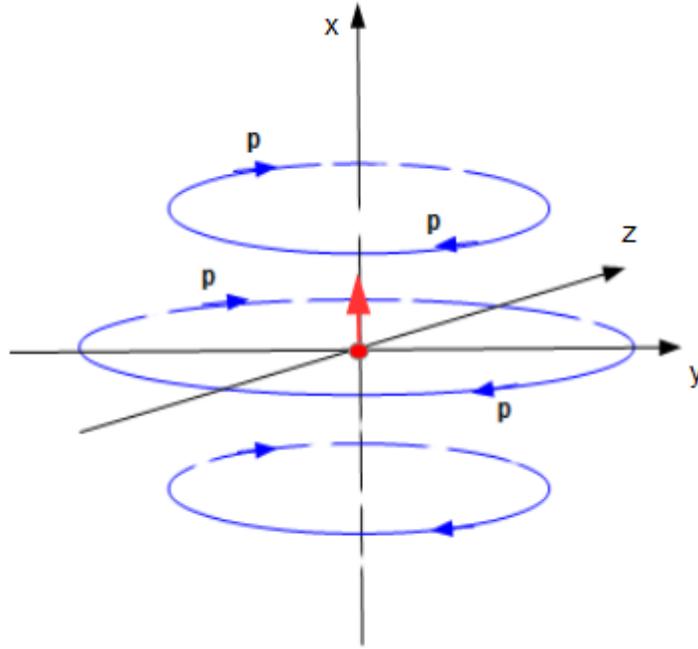


Рис.13. Круговые потоки энергии поля покоящегося электрона (синим цветом). Красным цветом изображены заряд электрона (жирная точка) и его магнитный момент (вектор).  $\mathbf{p}$  – вектор Умова-Пойнтинга. В отличие от остальных рисунков ось  $x$  здесь направлена вертикально.

В непосредственной близости от электрона  $\epsilon_m \gg \epsilon_e$ , и для величины скорости потока энергии поля получается:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}}{\epsilon} = \frac{2e}{m} \frac{\sin\theta \mathbf{R}}{1 + \cos^2\theta}, \quad R \rightarrow 0$$

Далее, можно получить выражение для угловой частоты вращения потока энергии поля вблизи электрона:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{e}{m} \frac{\sin\theta}{1 + \cos^2\theta}, \quad R \rightarrow 0 \tag{29}$$

Т.о. при приближении к электрону  $\omega$  перестаёт зависеть от расстояния от электрона, но зависит лишь от полярного угла  $\theta$ .

На поперечнике (плоскость  $xy$ ) Рис.13, т.е. при  $\theta = \pi/2$ :

$$\omega = 2e/m \tag{30}$$

На продольнике (ось  $z$ ) Рис.13, т.е. при  $\theta = 0$ :

$$\omega = e/2m \tag{31}$$

## Поле движущегося электрона

Поле электрона, движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$ , представляет собою сумму полей заряда  $\mathbf{F}_e$  (5) и магнитного момента  $\mathbf{F}_m$  (20):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m \quad (32)$$

Для 4-х вектора плотности энергии-импульса поля получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} K = (\mathcal{E}, \mathbf{p}) &= \frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{F}^* = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m) (\mathbf{F}_e^* + \mathbf{F}_m^*) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^* + \frac{1}{2} \mathbf{F}_m \mathbf{F}_m^* + \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_m^* + \mathbf{F}_m \mathbf{F}_e^*) = K_e + K_m + K_i \end{aligned} \quad (33)$$

где  $K_e = \frac{1}{2} \mathbf{F}_e \mathbf{F}_e^*$  и  $K_m = \frac{1}{2} \mathbf{F}_m \mathbf{F}_m^*$  – индивидуальные вклады от полей заряда и магнитного момента соответственно, а  $K_i$  – вклад от их взаимодействия. Выражение для компонент  $K_e$  было получено выше в (7), а для  $K_m$  в (26). Рассчитаем теперь вклад от взаимодействия  $K_i$ :

$$K_i = (\mathcal{E}_i, \mathbf{p}_i) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_m^* + \mathbf{F}_m \mathbf{F}_e^*) \quad (34)$$

$$\mathcal{E}_i = (\mathbf{E}_e \mathbf{E}_m) + (\mathbf{H}_e \mathbf{H}_m) = 0 \quad (35)$$

$$\mathbf{p}_i = \frac{e[\mathbf{mR}](1 - v^2)^2}{R^5 \sqrt{R^2 - [\mathbf{vR}]^2}} \quad (36)$$

Как мы видим, взаимодействие полей заряда и магнитного момента не даёт вклада в энергию, но даёт вклад в импульс, причём последний оказывается направленным по вектору  $[\mathbf{mR}]$ .  $\mathbf{p}_i$  лежит в поперечной плоскости уз и тангенциален, т.е. перпендикулярен радиус-вектору  $\mathbf{R}$ .

Скорость потока энергии поля:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_m + \mathbf{p}_i}{\mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m} \quad (37)$$

где  $\mathbf{p}_e, \mathcal{E}_e$  определены в (7), а  $\mathbf{p}_m, \mathcal{E}_m$  – в (26). Численно рассчитанная при определённых параметрах продольная проекция (плоскость  $xu$ ) пути энергии поля показана на Рис.14:

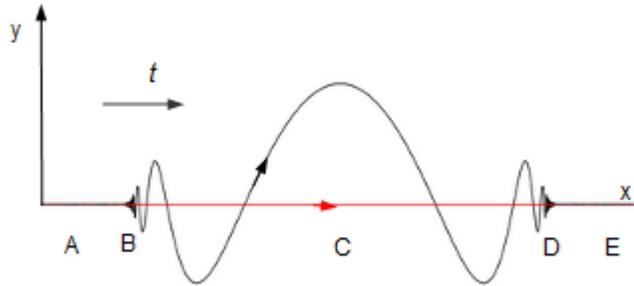


Рис.14. Продольная проекция пути энергии поля электрона.

В области  $B$  происходит отделение элемента энергии поля от электрона. В области  $C$  они сначала удаляются друг от друга, а затем снова сближаются. На  $D$  происходит возвращение («падение») элемента энергии на электрон. Область  $D$  с увеличением отдельно показана на Рис.15, а её поперечное сечение уз на Рис.16.

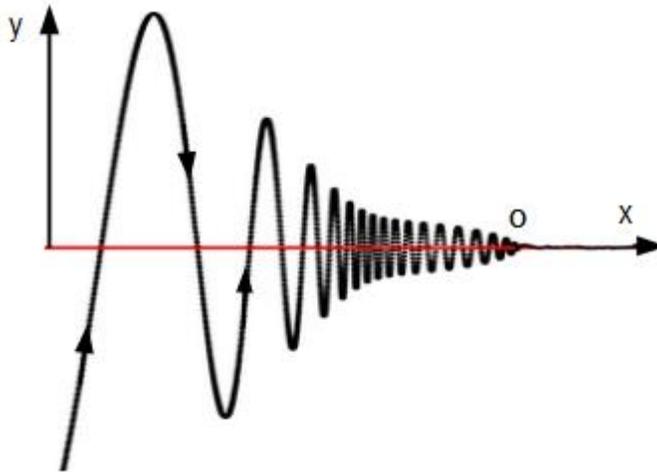


Рис.15. Увеличение области D Рис.14. Продольное изображение скручивающейся спирали, по которой происходит падение элемента энергии поля на электрон в точке O. Траектория электрона изображена красным цветом.

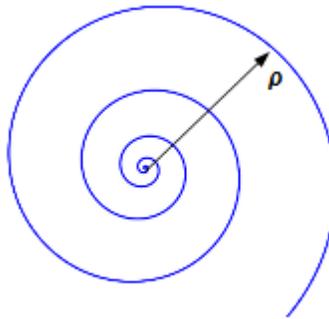


Рис.16. Поперечная проекция (в плоскости yz) скручивающейся спирали, по которой происходит падение элемента энергии поля на электрон – область D Рис.14. Электрон в центре спирали (соответствует точке O Рис.15).

Пусть  $\rho$  – поперечный (в плоскости yz) радиус рассматриваемого элемента энергии поля. В пределе  $\rho \rightarrow 0$  угловая скорость схождения элемента энергии поля по спирали в точку O (Рис.14-Рис.16) стремится к величине:

$$\omega_0 = \frac{v_i}{\rho} = \frac{2 e \gamma^5}{m(\gamma^2 - 3)^2}$$

Т.о. при падении элемента энергии поля на электрон его спиральное движение в поперечной плоскости выходит на постоянную угловую частоту. При полном замедлении электрона ( $\gamma = 1$ ) частота  $\omega_0$  становится равной

$$\omega_0 = \frac{e}{2m}$$

что совпадает с найденной нами в (31) угловой частоте потока энергии поля для покоящегося электрона на его продольнике, т.е. на оси x (Рис.13). Это указывает на то, что

описанный выше процесс переноса энергии поля относится к тем элементам поля, которые входят в электрон в области, лежащей на его продольнике (ось  $x$  Рис.14 в области  $D$ ).

## Выводы

Нами были рассмотрены поля равномерно движущихся точечного заряда и точечного магнитного момента – сначала по отдельности, а затем вместе. Их совместное движение описывает классический электрон. Подробно исследовано поведение плотности энергии и импульса поля – в нашей терминологии 4-вектора Умова-Пойнтинга. Нами сделаны следующие выводы:

1. Перемещение электромагнитного поля в пространстве можно рассматривать в терминах его потока энергии, определяемого вектором Умова-Пойнтинга, рассчитывая скорость потока в каждой точке пространства и согласно ей определяя путь перемещения энергии поля в пространстве.
2. Энергополевая конфигурация равномерно движущегося заряда топологически отличается от конфигурации покоящегося заряда. Между ними нет непрерывного перехода. В то же время такой переход всегда имеет место между двумя любыми движениями заряда. Таким образом, эйнштейновский принцип относительности (равноправия всех инерциальных систем) имеет своё ограничение: состояние покоя, очевидно, является выделенным, т.к. энергополевые конфигурации движения и покоя не сводимы друг к другу. Тем самым на полевом языке показано, что **состояние покоя не есть движение с нулевой скоростью, а есть отсутствие движения**. Уточнённый принцип относительности можно сформулировать так: **все инерциальные системы отсчёта равнозначны, за исключением системы отсчёта покоя рассматриваемой частицы**.
3. Для покоящегося заряда энергия его поля также покоится: перенос энергии в пространстве в этом случае отсутствует. При движении заряда энергия его поля также пространственно перемещается. Пути переноса энергии поля всегда начинаются и заканчиваются на заряде – **заряд служит источником/стоком энергопотоков поля**. При этом произвольно рассматриваемый элемент энергии поля в своём движении сначала опережает заряд, а потом запаздывает, так что в конечном итоге он приходит на линию траектории заряда одновременно с зарядом (Рис. 6).
4. При движении магнитного момента возникают два типа линий переноса энергии поля противоположной «вогнутости» при изображении их на некоторой продольной плоскости сечения  $xu$  (Рис.12). Это разделение определяется тем, что именно на служит источником/стоком энергопотоков энергии: поперечник или продольник магнитного момента. Таким образом, при движении магнитного момента происходит чёткое разделение потоков энергии его поля на два типа, которые можно назвать **продольными и поперечными энергопотоками**.

5. Потоки энергии поля равномерно движущегося электрона (совмещённых заряда и магнитного момента) представляют собой исходящие из электрона спирали, которые сначала раскручиваются, а затем скручиваются и возвращаются обратно на электрон (Рис.14-Рис.16). Итак, мы выяснили, что **энергопотоки поля равномерно движущегося электрона представляют собой раскручивающиеся и скручивающиеся спирали**. При этом остаётся открытым вопрос о наличии продольных и поперечных типов энергопотоков в случае электрона.

## Ссылки

1. С.Я.Котковский. [Нелинейные уравнения Максвелла](#). viXra.org. 2021. с.3.

[s\\_kotkovsky@mail.ru](mailto:s_kotkovsky@mail.ru)

14 января 2022 г