

**SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LES
EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE
- CHAPITRE 1 - NOUVELLE EDITION NUMÉRIQUE**

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

ABSTRACT. This article is a numerical version of the first chapter of the long paper of Henri Poincaré "The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics" published by the celebrate journal *Acta Mathematica* (Vol.13, n°1 – 2, 1889), created by the Swedish mathematician Gösta Mittag-Leffler in 1882, and he was the Editor-in-Chief.

The new version kept the original text with some minimal changes and adding the bibliography which summarizes all the references cited in the article.

RÉSUMÉ. Cet article est une version numérique du premier chapitre du long article de Henri Poincaré "Le Problème des Trois Corps et les Equations de la Dynamique" publié par la revue célèbre *Acta Mathematica* (Vol.13, n°1 – 2, 1889), créée par le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler en 1882, et il en était le rédacteur en chef.

La nouvelle version a gardé le texte original avec quelques minimes changements et en ajoutant la bibliographie qui résume toutes les références citées dans l'article.

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM

RÉSIDENCE BOUSTEN 8, BLOC B, RUE MOSQUÉE RAOUDHA, 1181 SOUKRA
RAOUDHA, TUNISIA

Email address: abenhadjsalem@gmail.com

HENRI POINCARÉ (1854-1912)

SUR LE PROBLÈME DES TROIS
CORPS ET LES EQUATIONS DE
LA DYNAMIQUE
- CHAPITRE 1 -

Nouvelle Edition Numérique par
ABDELMAJID BEN HADJ SALEM
Version 1.0 - Mars 2021.

Abdelmajid BEN HADJ SALEM
e-mail : abenhadsalem@gmail.com

A la mémoire de HENRI POINCARÉ (1854-1912)
A la mémoire de mes parents,
A ma chère épouse, à mes enfants,
A tous mes professeurs.

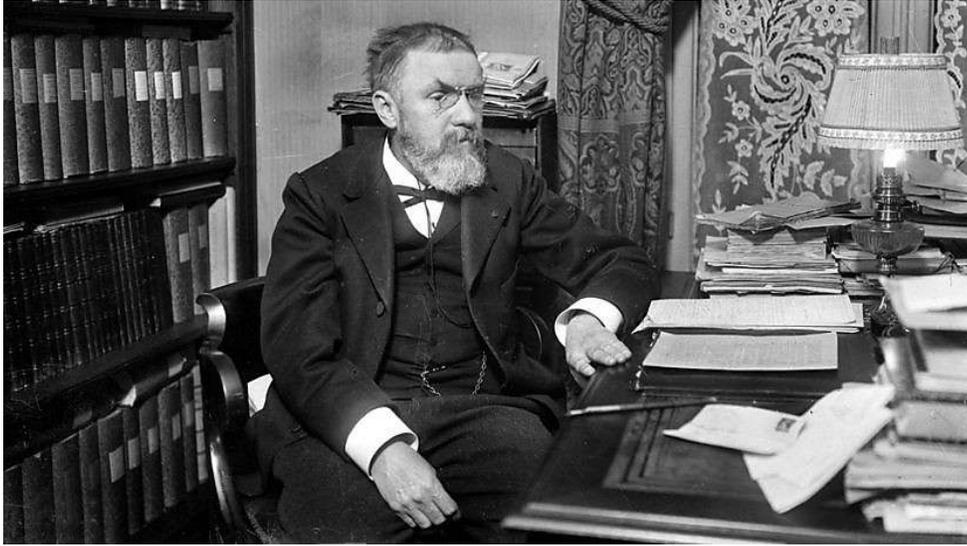


Fig. 0.1 Mathématicien, physicien et philosophe de génie, Henri Poincaré (ici dans son bureau).
©Laboratoire d'Histoire des sciences et de philosophie - Archives Henri Poincaré (CNRS, université de Lorraine)

Préface

Mon intérêt à la mécanique céleste commençait avec les cours de géodésie, principalement les chapitres consacrés au mouvement des satellites artificiels (Doppler, GPS,...), suivis lors de mes études à l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) de l'IGN France dans les années 80 du dernier siècle. J'avais eu aussi l'opportunité de suivre quelques cours du DEA de Mécanique Céleste à l'Observatoire de Paris. Pour développer mes connaissances en astronomie de position et les mouvements des planètes, les publications de référence en la matière étaient sans doute celles des éminents mathématiciens et astronomes français tels que HENRI POINCARÉ et FELIX TISSERAND.

A ce sujet, je vous présente une édition numérique du premier chapitre du mémoire écrit par HENRI POINCARÉ intitulé " SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LES EQUATIONS DE LA DYNAMIQUE " publié par le célèbre journal Acta Mathematica (Vol. 13, N°1-2,1889), fondé par le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler en 1882. La réalisation de cette édition numérique, après plus de 131 ans de l'originale édition, va faciliter la lecture du mémoire et elle serait bien accueillie par les lecteurs, et qui vont certes m'encourager à numériser le reste des chapitres du mémoire en question. Notons qu'une traduction anglaise du mémoire a été réalisée par Bruce D. Popp et éditée par Springer en 2017¹.

La nouvelle édition numérique a gardé le texte original avec quelques modifications dans les notations mathématiques, comme par exemple $a_{i,j}$ remplacé par a_{ij} . J'ai ajouté aussi en bibliographie les références citées par POINCARÉ dans le mémoire, et telles qu'elles ont été classées dans l'édition anglaise.

**Tunis,
Mars, 2021**

***Abdelmajid Ben Hadj Salem
Ingénieur Géographe Général***

1. HENRI POINCARÉ : *The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics*, translated by Bruce D. Popp, Astrophysics and Space Science Library 443, Springer International Publishing AG 2017, DOI 10.1007/978-3-319-52899-1.

Table des matières

Préface	ix
Introduction	1
1 Propriétés générales des équations différentielles	3
1.1 § Notations et définitions	3
1.2 § Calcul des limites	8
1.3 § Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles	19
1.4 § Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques	32
Bibliographie	37
Littérature	37

Introduction

Le travail qui va suivre et qui a pour objet l'étude du problème des trois corps est un remaniement du mémoire que j'avais présenté au Concours pour le prix institué par Sa Majesté le Roi de Suède. Ce remaniement était devenu nécessaire pour plusieurs raisons. Pressé par le temps, j'avais dû énoncer quelques résultats sans démonstration; le lecteur n'aurait pu, à l'aide des indications que je donnais, reconstituer les démonstrations qu'avec beaucoup de peine. J'avais songé d'abord à publier le texte primitif en l'accompagnant de notes explicatives; mais j'avais été amené à multiplier ces notes de telle sorte que la lecture du mémoire serait devenue fastidieuse et pénible.

J'ai donc préféré fondre ces notes dans le corps de l'ouvrage, ce qui a l'avantage d'éviter quelques redites et de faire mieux ressortir l'ordre logique des idées.

Je dois beaucoup de reconnaissance à M. PHRAGMÉN qui non seulement a revu les épreuves avec beaucoup de soin, mais qui, ayant lu le mémoire avec attention et en ayant pénétré le sens avec une grande finesse, m'a signalé les points où des explications complémentaires lui semblaient nécessaires pour faciliter l'entière intelligence de ma pensée. Je lui dois la forme élégante que je donne au calcul de S_i^n et de T_i^m à la fin du § 12. C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.

Dans quelques-unes des additions que j'ai faites au mémoire primitif, je me borne à rappeler certains résultats déjà connus; comme ces résultats sont dispersés dans un grand nombre de recueils et que j'en fais un fréquent usage, j'ai cru rendre service au lecteur en lui épargnant de fastidieuses recherches; d'ailleurs je suis souvent conduit à appliquer ces théorèmes sous une forme différente de celle que leur auteur leur avait d'abord donnée et il était indispensable de les exposer sous cette nouvelle forme. Ces théorèmes acquis, dont quelques-uns sont même classiques sont déve-

loppés, à côté de quelques propositions nouvelles, dans le chapitre 1^{er} (1^{ère} partie).

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

Comme on le voit, ces résultats ne nous apprennent que peu de chose sur le cas général du problème; mais ce qui peut leur donner quelque prix, c'est qu'ils sont établis avec rigueur, tandis que le problème des trois corps ne paraissait jusqu'ici abordable que par des méthodes d'approximation successive où l'on faisait bon marché de cette rigueur absolue qui est exigée dans les autres parties des mathématiques.

Mais j'attirerai surtout l'attention du lecteur sur les résultats négatifs qui sont développés à la fin du mémoire. J'établis par exemple que le problème des trois corps ne comporte, en dehors des intégrales connues, aucune intégrale analytique et uniforme. Bien d'autres circonstances nous font prévoir que la solution complète, si jamais on peut la découvrir, exigera des instruments analytiques absolument différents de ceux que nous possédons et infiniment plus compliqués. Plus on réfléchira sur les propositions que je démontre plus loin, mieux on comprendra que ce problème présente des difficultés inouïes, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux encore fait ressortir la nature et la grandeur.

J'ai fait voir également que la plupart des séries employées en mécanique céleste et en particulier celles de M. LINDSTEDT qui sont les plus simples, ne sont pas convergentes. Je serais désolé d'avoir par là jeté quelque discrédit sur les travaux de M. LINDSTEDT ou sur les recherches plus profondes de M. GYLDÉN. Rien ne serait plus éloigné de ma pensée. Les méthodes qu'ils proposent conservent toute leur valeur pratique. On sait en effet le parti qu'on peut tirer dans un calcul numérique de l'emploi des séries divergentes et la série fameuse de STIRLING en est un exemple frappant. C'est grâce à une circonstance analogue que les développements usités en mécanique céleste ont rendu déjà de si grands services et sont appelés à en rendre de plus grands encore.

L'une des séries dont je ferai usage plus loin et dont je démontrerai d'ailleurs la divergence, offre une grande analogie avec un développement proposé par M. BOHLIN à l'Académie de Stockholm le 9 mai 1888. Comme son mémoire n'a été imprimé que quelques mois plus tard, je n'en avais pas connaissance à l'époque de la fermeture du concours, c'est à dire le 1^{er} juin 1888. Je n'ai donc pas cité le nom de

M. BOHLIN, je m'empresse de lui rendre ici la justice qui lui est due. (Cf. Supplément aux comptes rendus de l'Académie de Stockholm, Tome I4 et Astronomische Nachrichten, N°2883.)

H. POINCARÉ

Propriétés générales des équations différentielles

1.1 § Notations et définitions

Considérons un système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n, \quad (1.1)$$

où t représente la variable indépendante que nous appellerons le temps, x_1, x_2, \dots, x_n les fonctions inconnues, où enfin X_1, X_2, \dots, X_n sont des fonctions données de x_1, x_2, \dots, x_n . Nous supposons en général que les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n sont analytiques et uniformes pour toutes les valeurs réelles de x_1, x_2, \dots, x_n .

Si l'on savait intégrer les équations (1.1), on pourrait mettre le résultat de l'intégration sous deux formes différentes ; on pourrait écrire :

$$x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (1.2)$$

C_1, C_2, \dots, C_n désignant les constantes d'intégration.

On pourrait écrire, en résolvant par rapport à ces constantes :

$$\begin{aligned} C_1 &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ C_2 &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ C_n &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Pour éviter toute confusion, nous dirons que les équations (1.2) représentent *la solution générale* des équations (1.1) si les constantes C y restent arbitraires et qu'elles représentent *une solution particulière* si on y donne aux C des valeurs numériques. Nous dirons d'autre part que dans les équations (1.3), F_1, F_2, \dots, F_n sont *n intégrales particulières* des équations (1.1). Le sens des mots *solution* et *intégrale* se trouve ainsi entièrement fixé.

Supposons que l'on connaisse une solution particulière des équations (1.1) qui s'écrira :

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t), \quad (1.4)$$

On peut se proposer d'étudier les solutions particulières de (1.1) qui diffèrent peu de la solution (1.4). Pour cela posons :

$$x_1 = \varphi_1 + \xi_1, \quad x_2 = \varphi_2 + \xi_2, \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n + \xi_n$$

et prenons pour nouvelles fonctions inconnues $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Si la solution que l'on veut étudier diffère peu de la solution (1.4), les ξ sont très petits et nous en pouvons négliger les carrés. Les équations (1.1) deviennent alors, en négligeant les puissances supérieures des ξ :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1} \xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2} \xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n} \xi_n \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

Dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, les quantités x_1, x_2, \dots, x_n doivent être remplacées par $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, de sorte que ces dérivées peuvent être regardées comme des fonctions connues du temps.

Les équations (1.5) s'appelleront les *équations aux variations* des équations (1.1). On voit que les équations aux variations sont linéaires.

Les équations (1.1) sont dites *canoniques* lorsque les variables x sont en nombre pair $n = 2p$, se répartissant en deux séries :

$$\begin{aligned} x_1, x_2, \dots, x_p, \\ y_1, y_2, \dots, y_p, \end{aligned}$$

et que les équations (1.1) peuvent s'écrire :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, \dots, p)^1$$

1. Dans l'édition originale, l'auteur avait utilisé la notation de dérivée ordinaire $\frac{d(\cdot)}{d(\cdot)}$.

Elles ont alors la forme des équations de la dynamique et nous dirons, à l'exemple des Anglais, que le système d'équations (1.6) comporte p degrés de liberté.

On sait que ce système (1.6) admet une intégrale dite des forces vives :

$$F = \text{const.}$$

et que si l'on en connaît $p - 1$ autres, on peut considérer les équations canoniques comme complètement intégrées.

Considérons en particulier le cas de $n = 3$; nous pourrions alors regarder x_1, x_2 et x_3 comme les coordonnées d'un point P dans l'espace. Les équations :

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \quad \frac{dx_3}{dt} = X_3 \quad (1.6)$$

définissent alors la vitesse de ce point P en fonction de ses coordonnées. Considérons une solution particulière des équations (1.1)

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad x_3 = \varphi_3(t)$$

Lorsque nous ferons varier le temps t , le point P décrira une certaine courbe dans l'espace ; nous l'appellerons une *trajectoire*. A chaque solution particulière des équations (1.1) correspond donc une trajectoire et réciproquement.

Si les fonctions X_1, X_2 , et X_3 sont uniformes, par chaque point de l'espace passe une trajectoire et une seule. Il n'y a d'exception que si l'une de ces trois fonctions devient infinie ou si elles s'annulent toutes les trois. Les points où ces cas d'exception se présenteraient s'appelleraient *points singuliers*.

Considérons une courbe gauche quelconque. Par chacun des points de cette courbe passe une trajectoire ; l'ensemble de ces trajectoires constitue une surface que j'appellerai *surface-trajectoire*.

Comme deux trajectoires ne peuvent se couper sinon en un point singulier, une surface-trajectoire qui ne passe en aucun point singulier ne peut être coupée par aucune trajectoire.

Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité*, si les trois quantités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point P reste toute entière dans une région limitée de l'espace.

Supposons qu'il existe une surface-trajectoire fermée S ; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point

P est dans la région intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera toute entière à l'intérieur de S . Il y aura donc stabilité.

Ainsi la question de stabilité se ramène à la recherche des surfaces trajectoires fermées.

On peut varier ce mode de représentation géométrique; supposons par exemple que l'on pose :

$$\begin{aligned}x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, z_3), \\x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, z_3), \\x_3 &= \psi_3(z_1, z_2, z_3),\end{aligned}$$

Les ψ étant des fonctions de z qui sont uniformes pour toutes les valeurs réelles des z . Nous pourrions considérer non plus x_1, x_2, x_3 , mais z_1, z_2, z_3 comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Quand on connaîtra la position de ce point, on connaîtra z_1, z_2, z_3 et par conséquent x_1, x_2, x_3 . Tout ce que nous avons dit plus haut reste exact.

Il suffit même que les trois fonctions ψ restent uniformes dans un certain domaine, pourvu qu'on ne sorte pas de ce domaine.

Si $n > 3$, ce mode de représentation ne peut plus être employé en général, à moins qu'on ne se résigne à envisager l'espace à plus de trois dimensions. Il est pourtant un cas où la difficulté peut être tournée.

Supposons par exemple que $n = 4$ et qu'on connaisse une des intégrales des équations (1.1). Soit :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = C \tag{1.7}$$

cette intégrale. Nous regarderons la constante d'intégration C comme une donnée de la question. Nous pourrions alors tirer de l'équation (1.7) une des quatre quantités x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction des trois autres, ou bien encore trouver trois variables auxiliaires z_1, z_2, z_3 telles qu'en faisant :

$$\begin{aligned}x_1 &= \psi_1(z_1, z_2, z_3), & x_3 &= \psi_3(z_1, z_2, z_3), \\x_2 &= \psi_2(z_1, z_2, z_3), & x_4 &= \psi_4(z_1, z_2, z_3)\end{aligned}$$

on satisfasse à l'équation (1.7) quelles que soient les valeurs de z_1, z_2, z_3 . Il arrivera souvent qu'on pourra choisir ces variables auxiliaires z de façon que les quatre fonctions ψ soient uniformes, sinon pour toutes les valeurs réelles des z , au moins dans un domaine d'où on n'aura pas à sortir.

On pourra alors représenter la situation du système par un point dont les coordonnées dans l'espace seront z_1, z_2 et z_3 .

Supposons par exemple que l'on ait des équations canoniques avec deux degrés de liberté² :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Nous aurons quatre variables x_1, x_2, y_1, y_2 , mais ces variables seront liées par l'équation des forces vives :

$$F = C$$

de sorte que si nous regardons la constante des forces vives C comme connue, il n'y aura plus que trois variables indépendantes et que la représentation géométrique sera possible.

Nous distinguerons parmi les variables x_1, x_2, \dots, x_n , les variables *linéaires* et les variables *angulaires*. Il pourra arriver que les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n soient toutes périodiques par rapport à l'une des variables x_i et ne changent pas quand cette variable augmente de 2π . La variable x_i et celles qui jouissent de la même propriété seront alors *angulaires*; les autres seront linéaires.

Je dirai que la situation du système n'a pas changé si toutes les variables angulaires ont augmenté d'un multiple de 2π et si toutes les variables linéaires ont repris leurs valeurs primitives.

Nous adopterons alors un mode de représentation tel que le point représentatif P revienne au même point de l'espace quand une ou plusieurs des variables angulaires aura augmenté de 2π . Nous en verrons des exemples dans la suite.

Parmi les solutions particulières des équations (1.1), nous distinguerons les *solutions périodiques*. Soit :

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t),$$

une solution particulière des équations (1.1). Supposons qu'il existe une quantité h telle que :

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t)$$

quand x_i est une variable linéaire et :

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t) + 2k\pi, \quad (k \text{ étant entier})$$

2. Même remarque que celle de la page 4.

quand x_i est une variable angulaire. Nous dirons alors que la solution considérée est *périodique* et que h est la période.

Si l'on adopte un mode de représentation géométrique tel que le point représentatif reste le même quand une des variables angulaires augmente de 2π , toute solution périodique sera représentée par une trajectoire fermée.

1.2 § Calcul des limites

L'une des plus belles découvertes de CAUCHY (Comptes rendus, tome 14, page 1020), quoiqu'elle ait été peut-être peu remarquée, de son temps, est celle qu'il a appelée le calcul des limites et à laquelle nous conserverons ce nom, quelque mal justifié qu'il puisse être.

Considérons un système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f_1(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= f_2(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Si f_1 et f_2 peuvent être développés suivant les puissances croissantes de x, y et z , ces équations admettront une solution de la forme suivante :

$$y = \varphi_1(x), \quad z = \varphi_2(x)$$

φ_1 et φ_2 étant des séries développées suivant les puissances croissantes de x et s'annulant avec x .

Pour le démontrer, CAUCHY remplace les deux fonctions f_1 et f_2 par une expression de la forme :

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{(1 - \alpha x)(1 - \beta y)(1 - \gamma z)}$$

en choisissant M, α, β, γ de façon que chaque terme de f' ait un plus grand coefficient (en valeur absolue) que le terme correspondant de f_1 et de f_2 . En remplaçant ainsi f_1 et f_2 par f' , on augmente les coefficients de φ_1 et de φ_2 et comme ces deux séries sont convergentes après ce changement, elles devaient l'être également avant ce changement.

Tel est le principe fondamental du calcul des limites dont CAUCHY a fait d'ailleurs beaucoup d'autres applications et que plusieurs géomètres ont notablement perfectionné depuis.

Le plus grand de ces perfectionnements est dû à M. WEIERSTRASS qui a remplacé la fonction $f'(x, y, z)$ de CAUCHY par une autre plus simple qui peut jouer le même rôle.

Ecrivons les équations (1.8) sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z), \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y, z) = 1 \quad (1.9)$$

Remplaçons-y ensuite f, f_1 et f_2 par la fonction de M. WEIERSTRASS

$$f'(x, y, z) = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)}$$

elles deviendront :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{1 - \alpha(x + y + z)} \quad (1.10)$$

Les équations (1.9) sont satisfaites formellement par des séries :

$$x = \varphi(t) = t, \quad y = \varphi_1(t), \quad z = \varphi_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t .

De même les équations (1.10) seront satisfaites par des séries :

$$x = \varphi'(t), \quad y = \varphi'_1(t), \quad z = \varphi'_2(t)$$

développées suivant les puissances croissantes de t et s'annulant avec t . (On voit facilement d'ailleurs que $\varphi'(t) = \varphi'_1(t) = \varphi'_2(t)$).

Si M et α sont convenablement choisis, les coefficients des séries φ' sont plus grands que ceux des séries φ ; or les séries φ' convergent; donc les séries φ convergent également.

C.Q.F.D.

Je n'insiste pas sur ces démonstrations qui sont devenues tout à fait classiques et qui se trouvent développées dans tous les traités un peu complets d'analyse, par exemple dans le Cours d'Analyse de M. JORDAN (tome 3, page 87).

Mais on peut aller plus loin.

Théorème I. Imaginons que les fonctions f_1 et f_2 dépendent, non seulement de x, y et z , mais d'un certain paramètre arbitraire μ et qu'elles puissent se développer suivant les puissances croissantes de x, y, z et μ . Ecrivons alors les équations (1.8) sous la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu) = 1, \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu) \quad (1.11)$$

On peut trouver trois séries :

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0) = t + x_0, \quad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui satisfassent formellement aux équations (1.11), qui soient développées suivant les puissances croissantes de t , de μ et de trois constantes d'intégration x_0, y_0, z_0 et qui enfin se réduisent respectivement à x_0, y_0 et z_0 pour $t = 0$.

Je dis que ces séries convergent pourvu que t, μ, x_0, y_0 et z_0 soient suffisamment petits.

En effet remplaçons f, f_1 et f_2 par la fonction :

$$f'(x, y, z, \mu) = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]}$$

Cette fonction f' peut être développée suivant les puissances de x, y, z et μ . On peut prendre M, α et β assez grands pour que chaque terme de f' soit plus grand que le terme correspondant de f , de f_1 et de f_2 .

Nous obtiendrons ainsi les équations :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{M}{(1 - \beta\mu)[1 - \alpha(x + y + z)]} \quad (1.12)$$

On peut trouver trois séries :

$$x = \varphi'(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi'_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad z = \varphi'_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

développées suivant les puissances croissantes de t, μ, x_0, y_0, z_0 satisfaisant aux équations (1.12) et se réduisant respectivement à x_0, y_0, z_0 pour $t = 0$.

En raisonnant comme le faisait CAUCHY, on démontrerait que chaque terme des séries φ' est plus grand que le terme correspondant des séries φ . Or les séries φ' convergent, si t, μ, x_0, y_0 et z_0 sont assez petits. Donc les séries φ convergent également.

C. Q. F. D.

On peut tirer de là diverses conséquences.

Théorème II. Nous venons de voir que x, y et z peuvent être développés suivant les puissances de t, μ, x_0, y_0 et z_0 pourvu que ces cinq variables, y compris t , soient suffisamment petites.

Je dis que x, y et z pourront encore être développées suivant les puissances des quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 , quelque grand que soit t pourvu que les quatre variables μ, x_0, y_0 et z_0 soient assez petites. Il y a toutefois un cas d'exception sur

lequel je reviendrai.

En effet nous trouvons d'abord trois séries :

$$x = \varphi(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad z = \varphi_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

qui définissent x, y et z pour les valeurs suffisamment petites de μ, x_0, y_0, z_0 et quand

$$|t| < \rho$$

ρ étant le rayon de convergence de ces séries. Si donc t_1 est un point intérieur au cercle de convergence et si x_1, y_1 et z_1 sont les valeurs de x, y et z pour $t = t_1$, on voit que x_1, y_1 et z_1 sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0 et z_0 , c'est-à-dire développables suivant les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Soient ensuite x_1^0, y_1^0 et z_1^0 les valeurs x_1, y_1 et z_1 pour :

$$\mu = x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Cela posé, on aura dans le voisinage du point $t = t_1$:

$$\begin{aligned} x &= \varphi'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ y &= \varphi_1'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0), \\ z &= \varphi_2'(t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0) \end{aligned} \quad (1.13)$$

Les séries φ', φ_1' et φ_2' , tout à fait analogues aux séries φ, φ_1 et φ_2 , sont définies comme il suit.

Elles satisfont aux équations différentielles; elles sont développées suivant les puissances de $t - t_1, \mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$, et $z_1 - z_1^0$; elles se réduisent à x_1, y_1 et z_1 pour $t = t_1$.

Elles convergeront si $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ sont assez petits et si :

$$|t - t_1| < \rho_1$$

ρ_1 étant le rayon du nouveau cercle de convergence C_1 .

Si t est un point intérieur à ce nouveau cercle de convergence C_1 , on voit que x, y et z seront fonctions holomorphes de $\mu, x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0$ et $z_1 - z_1^0$. Mais $x_1 - x_1^0, y_1 - y_1^0, z_1 - z_1^0$ sont déjà fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 . Donc, pour tout point t intérieur au cercle C_1 , les trois quantités x, y et z sont des fonctions holomorphes de μ, x_0, y_0, z_0 développables selon les puissances de ces variables si elles sont assez petites.

Supposons maintenant que le point t soit extérieur au cercle C_1 , le théorème sera encore vrai; il est clair en effet qu'il suffit pour le démontrer pour une valeur

quelconque de t , de répéter le raisonnement précédent un nombre suffisant de fois, pourvu que les rayons ρ_1, ρ_2, \dots des cercles de convergence envisagés successivement restent supérieurs à une quantité donnée.

Cette convergence sera d'ailleurs uniforme pour toute valeur de t inférieure à t_0 , quelque grand que soit t_0 .

On ne serait arrêté que dans un cas.

Le théorème de CAUCHY cesse d'être vrai si les fonctions f_1 et f_2 ne sont plus holomorphes en x, y, z ; par exemple si elles deviennent infinies, ou cessent d'être uniformes.

Si on ne peut pas développer les fonctions f, f_1 et f_2 suivant les puissances croissantes de μ , de $x - x_1^0, y - y_1^0, z - z_1^0$, il n'existera pas en général trois séries φ', φ_1' et φ_2' de la forme (1.13) satisfaisant aux équations différentielles.

On dit alors que le point :

$$x = x_1^0, \quad y = y_1^0, \quad z = z_1^0$$

est un point singulier.

Si donc, en faisant varier t , on voyait le point mobile (x, y, z) passer par un point singulier, notre théorème serait en défaut. Si t variant depuis $t = 0$ jusqu'à $t = t_0$, le point mobile (x, y, z) ne passe par aucun point singulier, le rayon de convergence de la série de CAUCHY ne pourra s'annuler et on pourra lui assigner une limite inférieure, de sorte que les trois fonctions x, y, z seront développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 pour toute valeur de t inférieure à t_0 . Mais si pour $t = t_0$, le point (x, y, z) se confond avec un point singulier, le théorème cessera d'être vrai pour les valeurs de t supérieures à t_0 .

Notre théorème comporte donc un cas d'exception. Mais ce cas ne se présentera pas dans le problème des trois corps et nous n'avons pas à nous en inquiéter. Soient en effet :

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

les coordonnées des trois corps, r_{23}, r_{13}, r_{12} leurs distances mutuelles, m_1, m_2 et m_3 leurs masses. Les équations du problème seront de la forme suivante :

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{m_2(x_2 - x_1)}{r_{12}^3} + \frac{m_3(x_3 - x_1)}{r_{13}^3}$$

Le second membre de cette équation ne pourrait cesser d'être holomorphe en $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ que si l'une des trois distances r_{23}, r_{13}, r_{12} venait à s'annuler, c'est-à-dire si deux corps venaient à se choquer. Or nous n'appliquerons ja-

mais notre théorème que quand on sera certain qu'un pareil choc ne peut se produire.

Le même résultat peut encore être établi d'une autre manière. Reprenons les équations :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y, z, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x, y, z, \mu), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(x, y, z, \mu)$$

Les fonctions f, f_1, f_2 pourront en général être développées suivant les puissances croissantes de $x - x_0, y - y_0, z - z_0, \mu - \mu_0$, pour les valeurs de x, y, z et μ suffisamment voisines de x_0, y_0, z_0 et μ_0 . S'il existe un système de valeurs de x_0, y_0, z_0, μ_0 pour lequel cela n'ait pas lieu, je dirai que ce système de valeurs est *un des points singuliers* de nos équations différentielles.

Cela posé, ces équations admettront une solution telle que x, y et z s'annulent avec t ; et cette solution dépendra manifestement de μ . Soit :

$$x = \omega_1(t, \mu), \quad y = \omega_2(t, \mu), \quad z = \omega_3(t, \mu)$$

cette solution. Il résulte de la définition même de cette solution que l'on a, quel que soit μ :

$$\omega_1(0, \mu) = \omega_2(0, \mu) = \omega_3(0, \mu) = 0$$

Dans la plupart des applications, on pourra effectuer l'intégration pour $\mu = 0$, de telle sorte que les fonctions $\omega_1(t, 0), \omega_2(t, 0), \omega_3(t, 0)$ seront connues. Je suppose que, pour aucune des valeurs de t comprises entre 0 et t_1 , le système de valeurs :

$$\omega_1(t, 0), \omega_2(t, 0), \omega_3(t, 0), 0$$

ne soit un point singulier de nos équations différentielles.

Pour employer un langage incorrect, mais commode, je dirai que la solution particulière :

$$x = \omega_1(t, 0), \quad y = \omega_2(t, 0), \quad z = \omega_3(t, 0)$$

ne passe par aucun point singulier.

Si cela n'avait pas lieu, nous nous trouverions dans le cas d'exception dont j'ai parlé plus haut.

Si au contraire cela a lieu, ce que je supposerai, je dis que les expressions $\omega_1(t, \mu), \omega_2(t, \mu), \omega_3(t, \mu)$ sont des fonctions de μ développables suivant les puissances croissantes de cette variable.

Posons en effet :

$$x = \xi + \omega_1(t, 0), \quad y = \eta + \omega_2(t, 0), \quad z = \zeta + \omega_3(t, 0)$$

les équations différentielles deviendront :

$$\frac{d\xi}{dt} = \varphi(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \quad \frac{d\eta}{dt} = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, t, \mu), \quad \frac{d\zeta}{dt} = \varphi_2(\xi, \eta, \zeta, t, \mu) \quad (1.14)$$

Il résulte de l'hypothèse que nous avons faite que pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_1 , les fonctions φ , φ_1 et φ_2 peuvent être développées suivant les puissances de ξ , η , ζ et μ , les coefficients du développement étant des fonctions du temps.

J'observe de plus que pour $\mu = 0$, les équations différentielles doivent être satisfaites pour :

$$\xi = \eta = \zeta = 0$$

ce qui veut dire que φ , φ_1 et φ_2 s'annulent quand μ , ξ , η , ζ s'annulent à la fois.

On pourra alors trouver deux nombres positifs M et α tels que, pour toutes les valeurs de t comprises entre 0 et t_1 , chaque coefficient du développement de φ , φ_1 ou φ_2 suivant les puissances croissantes de ξ , η , ζ et μ soit plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant du développement de :

$$\frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}$$

ou a fortiori que le coefficient correspondant du développement de :

$$\psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) = \frac{M(\xi + \eta + \zeta + \mu)[1 + \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)]}{1 - \alpha(\xi + \eta + \zeta + \mu)}$$

Comparons donc les équations (1.14) aux suivantes :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} = \psi(\xi, \eta, \zeta, \mu) \quad (1.15)$$

La solution des équations (1.14), qui est telle que ξ , η et ζ s'annulent à la fois pour $t = 0$, s'écrit :

$$\xi = \omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0), \quad \eta = \omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0), \quad \zeta = \omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0)$$

D'un autre côté les équations (1.15) admettent une solution :

$$\xi = \eta = \zeta = \omega'(t, \mu)$$

telle que ξ , η , ζ s'annulent avec t .

En raisonnant comme l'a fait CAUCHY, on verrait que si $\omega'(t, \mu)$ est développable suivant les puissances croissantes de μ , il doit en être de même de $\omega_1(t, \mu) - \omega_1(t, 0)$, $\omega_2(t, \mu) - \omega_2(t, 0)$, $\omega_3(t, \mu) - \omega_3(t, 0)$, et que chaque coefficient

du développement de ces trois dernières fonctions est plus petit en valeur absolue que le coefficient correspondant de $\omega'(t, \mu)$, au moins pour toutes les valeurs de t telles que :

$$0 < t < t_1$$

Or les équations (1.15) sont faciles à intégrer et on vérifie aisément que $\omega'(t, \mu)$ peut se développer suivant les puissances de μ . Donc ξ, η et ζ sont également développables suivant les puissances de μ pourvu que :

$$0 < t < t_1$$

C.Q.F.D.

Théorème III. Cela posé, soit :

$$x = \omega_1(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad y = \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad z = \omega_2(t, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

celle des solutions de nos équations différentielles, qui est telle que :

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0$$

pour $t = 0$.

Considérons les fonctions :

$$\omega_1(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0), \quad \omega_2(t_1 + \tau, \mu, x_0, y_0, z_0)$$

Je dis qu'elles sont développables suivant les puissances de μ, x_0, y_0, z_0 et τ pourvu que ces quantités soient suffisamment petites.

Posons en effet :

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0, \quad t = t' \frac{t_1 + \tau}{t_1}$$

Nos équations deviendront :

$$\frac{dx'}{dt} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$

$$\frac{dy'}{dt} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_1(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$

$$\frac{dz'}{dt} = \left(1 + \frac{\tau}{t_1}\right) f_2(x' + x_0, y' + y_0, z' + z_0, \mu),$$

Ces équations contiennent cinq paramètres arbitraires à savoir :

$$\mu, x_0, y_0, z_0, \tau$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas dont nous venons de nous occuper.

En particulier si $f(y, x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une fonction développable suivant les puissances de y, x_1, x_2, \dots, x_n ; si quand les x et y s'annulent à la fois on a :

$$f = 0, \quad \frac{df}{dy} \leq 0$$

si enfin y est défini par l'égalité :

$$f = 0$$

y sera développable suivant les puissances de x .

Il nous resterait à examiner ce qui se passe quand le déterminant fonctionnel des f par rapport aux y est nul. Cette question a fait l'objet de recherches nombreuses sur lesquelles je ne puis insister ici, mais au premier rang desquelles il convient de citer les travaux de M. PUISEUX sur les racines des équations algébriques. J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de recherches analogues dans la première partie de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879). Je me bornerai donc à énoncer les théorèmes suivants, en me bornant à renvoyer pour les démonstrations, soit aux traités classiques, soit à ma thèse.

Théorème V Soit y une fonction de x définie par l'équation :

$$f(y, x) = 0 \tag{1.19}$$

où f est développable suivant les puissances de x et de y .

Je suppose que pour $x = y = 0$, f s'annule ainsi que :

$$\frac{df}{dy}, \frac{d^2f}{dy^2}, \dots, \frac{d^{m-1}f}{dy^{m-1}},$$

mais que $\frac{d^m f}{dy^m}$ ne s'annule pas.

Il existera m séries de la forme suivante :

$$y = a_1 x^{\frac{1}{n}} + a_2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 x^{\frac{3}{n}} + \dots \tag{1.20}$$

(où n est entier positif et où a_1, a_2, \dots sont des coefficients constants) qui satisferont à l'équation (1.19).

Corollaire I. Si la série (1.20) satisfait à l'équation (1.19) il en est de même de la série :

$$y = a_1 \alpha x^{\frac{1}{n}} + a_2 \alpha^2 x^{\frac{2}{n}} + a_3 \alpha^3 x^{\frac{3}{n}} + \dots$$

comme une simple.

Il résulte des théorèmes V et VI et de leurs corollaires énoncés plus haut que le théorème IV est encore vrai si cette solution est multiple, *pourvu que l'ordre de multiplicité soit impair.*

1.3 § Applications du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles

CAUCHY avait déjà appliqué le procédé du calcul des limites aux équations aux dérivées partielles. Madame KOWALEVSKI a considérablement simplifié la démonstration de CAUCHY et a donné au théorème sa forme définitive.

Voici en quoi consiste le théorème de Madame KOWALEVSKI (Journal de Crelle, tome 80).

Considérons un système d'équations aux dérivées partielles définissant n inconnues z_1, z_2, \dots, z_n en fonctions de p variables indépendantes.

Supposons que ce système s'écrive :

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dx_1} &= f_1 \left(x_1, x_2, \dots, x_p; \frac{dz_1}{dx_2}, \frac{dz_1}{dx_3}, \dots, \frac{dz_1}{dx_p} \right), \\ \frac{dz_2}{dx_1} &= f_2 \left(x_1, x_2, \dots, x_p; \frac{dz_2}{dx_2}, \frac{dz_2}{dx_3}, \dots, \frac{dz_2}{dx_p} \right), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dz_n}{dx_1} &= f_n \left(x_1, x_2, \dots, x_p; \frac{dz_n}{dx_2}, \frac{dz_n}{dx_3}, \dots, \frac{dz_n}{dx_p} \right) \end{aligned} \tag{1.22}$$

f_1, f_2, \dots, f_n étant développés suivant les puissances de :

$$x_1, x_2, \dots, x_p \quad \text{et des} \quad \frac{dz_i}{dx_k} - \alpha_{ik}$$

(i prend les valeurs $1, 2, \dots, n$; k les valeurs $2, 3, \dots, p$; enfin les α_{ik} sont des constantes quelconques).

Soit maintenant :

$$\Psi_1(x_2, x_3, \dots, x_p), \Psi_2(x_2, x_3, \dots, x_p), \dots, \Psi_n(x_2, x_3, \dots, x_p)$$

n fonctions données *quelconques*, développées suivant les puissances croissantes de x_2, x_3, \dots, x_p et telles que :

$$\frac{d\psi_i}{dx_k} = \alpha_{ik}$$

pour :

$$x_2 = x_3 = \dots = x_p = 0$$

Il existera n fonctions :

$$z_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_p), z_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_p), \dots, z_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

développables suivant les puissances de x_1, x_2, \dots, x_p , qui satisferont aux équations (1.22) et qui se réduiront respectivement à $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ pour $x_1 = 0$.

J'ai moi-même cherché à étendre les résultats obtenus par Madame KOWALEVSKI (*Thèse inaugurale*, Paris, Gauthier-Villars, 1879) et j'ai étudié en détail les cas que la savante mathématicienne avait laissés de côté.

Je me suis attaché en particulier à l'équation :

$$X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z \quad (1.23)$$

où X_1, X_2, \dots, X_n sont développés suivant les puissances de x_1, x_2, \dots, x_n ; je suppose de plus que dans le développement de X_1, X_2, \dots, X_n , il n'y ait pas de terme tout connu et que les termes du 1^{er} degré se réduisent respectivement à $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n$, de telle sorte que :

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i$$

Y_i désignant une suite de termes du 2^d degré au moins par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n .

J'ai démontré qu'à certaines conditions cette équation admet une intégrale holomorphe développable suivant les puissances de x_1, x_2, \dots, x_n .

Pour que cette intégrale existe, il suffit :

1°) — que le polygone convexe qui contient les n points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne contienne pas l'origine,

2°) — que l'on n'ait aucune relation de la forme :

$$m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1$$

où les m sont des entiers positifs dont la somme est plus grande que 1³.

3. Dans ma thèse, je n'énonce pas cette restriction et je ne suppose pas que la somme des m soit plus grande que 1. Il semblerait donc que le théorème est en défaut quand on a par exemple $\lambda_2 = \lambda_1$. Il n'en est rien. Si l'on avait :

$$m_2 \lambda_2 + \dots + m_n \lambda_n = \lambda_1 \quad (m_2 + m_3 + \dots + m_n > 1)$$

Je vais chercher à généraliser le résultat obtenu dans ma thèse.

Au lieu de l'équation (1.23) envisageons l'équation suivante :

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z \quad (1.24)$$

Nous avons encore :

$$X_i = \lambda_i x_i - Y_i$$

Y_i désignant une fonction développée suivant les puissances de x_1, x_2, \dots, x_n et ne comprenant que des termes du 2^d degré au moins par rapport à ces n variables. Mais Y_i , ne dépend pas seulement des x , il dépend aussi de t , de sorte que les coefficients du développement de Y_i suivant les puissances des x sont des fonctions de t . Nous supposons que ce sont des fonctions périodiques de t de période 2π développées suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Je me propose de chercher dans quel cas l'équation (1.24) admettra une intégrale holomorphe développée suivant les puissances de x_1, x_2, \dots, x_n et telle que les coefficients du développement soient des fonctions périodiques de t .

Voyons d'abord qu'elle va être la forme de Y_i . Nous allons développer Y_i suivant les puissances croissantes de x_1, x_2, \dots, x_n ; considérons le terme en :

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Le coefficient de ce terme étant une fonction périodique de t pourra se développer suivant les sinus et cosinus des multiples de t , ou ce qui revient au même suivant les puissances positives et négatives de $e^{t\sqrt{-1}}$. Nous pourrions donc écrire :

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Les C sont des coefficients constants; β est un entier positif ou négatif; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont des entiers positifs tels que :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq 2$$

J'écrirai aussi quelquefois en supprimant les indices :

$$Y_i = \sum C e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

Posons maintenant :

$$Y'_i = \sum |C| e^{\beta t\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

certaines coefficients du développement prendraient la forme $\frac{0}{0}$ et deviendraient infinis. C'est pour cette raison que nous avons dû supposer qu'une pareille relation n'a pas lieu. Si l'on avait au contraire $\lambda_2 = \lambda_1$ certains coefficients prendraient la forme $\frac{0}{0}$.

et envisageons l'équation suivante :

$$(\lambda'_1 x_1 - Y'_1) \frac{dz}{dx_1} + (\lambda'_2 x_2 - Y'_2) \frac{dz}{dx_2} + \dots + (\lambda'_n x_n - Y'_n) \frac{dz}{dx_n} = \lambda'_1 z \quad (1.25)$$

Dans cette équation $\frac{dz}{dt}$ n'entre plus ; nous pouvons donc regarder t comme un paramètre arbitraire et x_1, x_2, \dots, x_n comme les seules variables indépendantes. Si donc les quantités $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_n$ satisfont aux conditions que nous avons énoncées plus haut, l'équation (1.25) (qui est de même forme que l'équation (1.23) admettra une intégrale holomorphe.

Nous supposons :

$$\lambda'_1 = \lambda'_2 = \dots = \lambda'_n$$

Nous supposons de plus λ'_1 réel et positif.

Cela posé, soit :

$$z = \sum A_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} e^{\beta t \sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.26)$$

une série satisfaisant formellement à l'équation (1.24). Comment pourra-t-on calculer les coefficients A par récurrence.

En écrivant l'équation (1.24) sous la forme :

$$\frac{dz}{dt} + \lambda_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda_1 z = Y_1 \frac{dz}{dx_1} + Y_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y_n \frac{dz}{dx_n}$$

et en identifiant les deux membres on trouve :

$$A_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} [\beta \sqrt{-1} + \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \dots + \lambda_n \alpha_n - \lambda_1] = P[C, A]$$

$P[C, A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux C et aux coefficients A déjà calculés.

Soit maintenant :

$$z = \sum A'_{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} e^{\sqrt{-1} \beta t} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.27)$$

une série satisfaisant à l'équation (1.25). Pour calculer les coefficients A' nous écrivons l'équation (1.25) sous la forme :

$$\lambda'_1 x_1 \frac{dz}{dx_1} + \lambda'_2 x_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + \lambda'_n x_n \frac{dz}{dx_n} - \lambda'_1 z = Y'_1 \frac{dz}{dx_1} + Y'_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + Y'_n \frac{dz}{dx_n}$$

En identifiant les deux membres, nous trouverons :

$$A'_{\beta.\alpha_1.\alpha_2\dots\alpha_n}[\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \dots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1] = P[|C|, A']$$

$P[|C|, A']$ ne diffère de $P[C, A]$ que parce que les C sont remplacés par leurs modules et les A par les A' .

Les λ' étant réels positifs ainsi que les coefficients du polynôme P , les A' seront aussi réels et positifs.

Pour que l'on ait ensuite :

$$|A_{\beta.\alpha_1.\alpha_2\dots\alpha_n}| < A'_{\beta.\alpha_1.\alpha_2\dots\alpha_n}$$

il suffit que l'on ait toujours :

$$\lambda'_1\alpha_1 + \lambda'_2\alpha_2 + \dots + \lambda'_n\alpha_n - \lambda'_1 < |\beta\sqrt{-1} + \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n - \lambda_1|$$

ou :

$$\lambda'_1 < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n}{(\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right| \quad (1.28)$$

Si l'on a choisi λ'_1 de façon à satisfaire à l'inégalité (1.28), on aura donc :

$$|A| < A'$$

Or la série (1.27) converge, donc il en sera de même de la série (1.26).

Ainsi donc pour que la série (1.26) converge, il suffit qu'on puisse trouver une quantité positive λ'_1 satisfaisant à l'inégalité (1.28) pour toutes les valeurs entières et positives des α , et pour toutes les valeurs entières positives et négatives de β .

Commençons par remarquer que le second membre de l'inégalité (1.28) est toujours plus grand que :

$$\left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \lambda_1(\alpha_1 - 1) + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_n\alpha_n}{|\beta| + (\alpha_1 - 1) + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right| \quad (1.29)$$

Il suffira donc que λ'_1 soit plus petit que l'expression (1.29). Or cette expression (1.29) est le module d'une certaine quantité imaginaire représentée par un certain point G . Or il est aisé de voir que ce point G n'est autre chose que le centre de gravité des $n + 2$ masses suivantes :

- 1°) — n masses égales respectivement à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et situées respectivement aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$;
- 2°) — une masse égale à $|\beta|$ et située soit au point $+\sqrt{-1}$ soit au point $-\sqrt{-1}$;
- 3°) — une masse égale à -1 située au point λ_1 .

Toutes ces masses sont positives à l'exception de la dernière.

Il faut chercher la condition pour que la distance OG soit toujours supérieure à une certaine limite λ'_1 .

Composons d'abord les $n + 1$ premières masses ; nous obtiendrons une masse :

$$M = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + |\beta|$$

située en un certain point G' et comme ces $n + 1$ premières masses sont positives, le point G' sera situé à l'intérieur de l'un ou de l'autre des deux polygones convexes qui enveloppent, le premier les $n + 1$ points :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{et} \quad +\sqrt{-1}$$

et le second les $n + 1$ points :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \quad \text{et} \quad -\sqrt{-1}$$

Si aucun de ces polygones convexes ne contient l'origine, on pourra assigner à la distance OG' une limite inférieure μ et écrire :

$$OG' > \mu$$

Il reste à composer la masse M située en G' et la masse -1 située en λ_1 . On obtiendra ainsi une masse $M - 1$ située en G . On aura évidemment :

$$OG > OG' - GG'$$

$$GG' = \frac{G'\lambda_1}{M-1} < \frac{OG'}{M-1} + \frac{O\lambda_1}{M-1}$$

d'où :

$$OG > OG' \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1} > \mu \frac{M-2}{M-1} - \frac{O\lambda_1}{M-1}$$

Si donc :

$$M > \frac{3\mu + 2O\lambda_1}{\mu}$$

l'inégalité :

$$OG > \frac{\mu}{2} \tag{1.30}$$

sera satisfaite.

Il n'y a donc qu'un nombre fini de combinaisons des nombres entiers :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$$

pour lesquelles l'inégalité (1.30) pourrait ne pas être satisfaite.

Si pour aucune de ces combinaisons OG n'est nul, nous serons certains de pouvoir assigner à OG une limite inférieure λ_1 .

Nous sommes donc conduits à la règle suivante :

Pour que l'équation (1.24) admette une intégrale développable suivant les puissances des x et périodique par rapport à t , il suffit :

1°) – qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine,

2°) – qu'il n'y ait entre les quantités λ aucune relation de la forme :

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \dots + \alpha_n\lambda_n = \lambda_1$$

les α étant entiers positifs et β entier positif ou négatif.

C'est là une généralisation du théorème démontré dans ma thèse. Or de ce théorème découlaient un certain nombre de conséquences. Voyons si on pourra en tirer de semblables du théorème généralisé.

Nous allons pour cela suivre absolument la même marche que dans la thèse citée.

Considérons l'équation :

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = 0 \quad (1.31)$$

obtenue en supprimant le second membre de l'équation (1.24).

Considérons en outre l'équation (1.24) :

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_1 z$$

et l'équation :

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = \lambda_2 z \quad (1.32)$$

Si les λ satisfont aux conditions que nous venons d'énoncer, l'équation (1.24) admettra une intégrale :

$$z = T_1$$

où T_1 est ordonné suivant les puissances des x et périodique par rapport à t .

De même l'équation (1.32) admettra une intégrale :

$$z = T_2$$

où T_2 est de même forme que T_1 .

On en conclut que l'équation (1.31) admet comme intégrale particulière :

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}$$

Comme on peut dans le second membre de (1.24) remplacer successivement $\lambda_1 z$, par $\lambda_2 z, \lambda_3 z, \dots, \lambda_n z$ et qu'on obtient ainsi $n - 1$ équations analogues à l'équation (1.32), on peut conclure que l'équation (1.31) admet $n - 1$ intégrales particulières :

$$T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_2^{-\frac{1}{\lambda_2}}, T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_3^{-\frac{1}{\lambda_3}}, \dots, T_1^{\frac{1}{\lambda_1}} T_n^{-\frac{1}{\lambda_n}}$$

où T_2, T_3, \dots, T_n sont de même forme que T_1 .

Pour avoir l'intégrale générale de (1.31), il faudrait posséder encore une n^e intégrale particulière. Pour cela considérons l'équation :

$$\frac{dz}{dt} + X_1 \frac{dz}{dx_1} + X_2 \frac{dz}{dx_2} + \dots + X_n \frac{dz}{dx_n} = z \quad (1.33)$$

Cette équation admettra comme intégrale particulière $z = e^t$.

Nous en concluons que l'équation (1.31) admet comme intégrales particulières :

$$T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t}$$

de sorte que l'intégrale générale de cette équation (1.31) sera :

$$z = \text{fonction arbitraire de } (T_1 e^{-\lambda_1 t}, T_2 e^{-\lambda_2 t}, \dots, T_n e^{-\lambda_n t})$$

En d'autres termes les équations différentielles :

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (1.34)$$

admettront comme intégrale générale :

$$T_1 = K_1 e^{\lambda_1 t}, \quad T_2 = K_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \dots, \quad T_n = K_n e^{\lambda_n t}$$

K_1, K_2, \dots, K_n , étant n constantes d'intégration.

Ce théorème peut être regardé comme la généralisation de celui que j'ai démontré à la page 70 de ma thèse.

Supposons maintenant que nous cherchions à déterminer les p premières variables x à savoir :

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} + \lambda_{p+1}x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda_{p+2}x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda_n x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda_i x_i &= Y_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \\ Y_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y_i & \quad (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \quad (1.38)$$

Soit :

$$Y_i = \sum C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

une quelconque des fonctions Y_1, Y_2, \dots, Y_n , ainsi que nous l'avons supposé plus haut, et proposons-nous de calculer les p fonctions :

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

sous la forme :

$$x_i = \sum A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n} e^{t\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.39)$$

Pour calculer les coefficients A par récurrence, substituons les séries (1.39) dans les équations (1.38) et identifions les deux membres. Nous aurons pour calculer $A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n}$ l'équation suivante :

$$A_{i,\beta,\alpha_{p+1},\alpha_{p+2},\dots,\alpha_n} (\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i) = P[C, (-C'), A]$$

$P[C, (-C'), A]$ étant un polynôme entier à coefficients positifs par rapport aux coefficients C de :

$$Y_{p+1}, Y_{p+2}, \dots, Y_n$$

aux coefficients C' de Y_i changés de signe et aux coefficients A déjà calculés.

Pour qu'aucun des coefficients A ne devienne infini nous devons donc d'abord supposer qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme :

$$\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i = 0 \quad (1.40)$$

où les α sont entiers positifs et β entier positif ou négatif.

Cela posé, soit λ' une quantité positive que nous déterminerons plus complètement dans la suite.

Soit ensuite :

$$Y'_i = \sum |C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour :

$$i = p+1, p+2, \dots, n$$

et :

$$Y'_i = - \sum |C_{i,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}| e^{t\beta\sqrt{-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pour $i = 1, 2, \dots, p$.

Formons les équations :

$$\begin{aligned} \lambda' x_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \lambda' x_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + \lambda' x_n \frac{dx_i}{dx_n} - \lambda' x_i = Y'_{p+1} \frac{dx_i}{dx_{p+1}} + \\ Y'_{p+2} \frac{dx_i}{dx_{p+2}} + \dots + Y'_n \frac{dx_i}{dx_n} - Y'_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \quad (1.41)$$

Cherchons à satisfaire aux équations (1.41) à l'aide de séries de la forme suivante :

$$x_i = \sum B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_n} e^{i\beta\sqrt{-1}} x_{p+1}^{\alpha_{p+1}} x_{p+2}^{\alpha_{p+2}} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.42)$$

Les coefficients B nous seront donnés par les équations suivantes :

$$B_{i,\beta,\alpha_{p+1}\alpha_{p+2}\dots\alpha_n} [\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1)] = P[|C|, |C'|, B]$$

où $P[|C|, |C'|, B]$ diffère de $P[C, (-C'), A]$ en ce que les coefficients C et $-C'$ y sont remplacés par leurs modules, et les coefficients A par les B correspondants.

On en conclut que tous les B sont positifs et que chaque B est plus grand que le module du A correspondant.

Il suffit pour cela d'une seule condition, c'est que :

$$\lambda'(\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1) < |\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i|$$

Si cette condition est remplie chacun des termes de la série (1.39) sera plus petit que le terme correspondant de la série (1.42) et comme cette dernière converge, la série (1.39) convergera également.

Il suffit pour cela que l'on puisse trouver une quantité positive λ' assez petite pour que l'on ait toujours :

$$\lambda' < \left| \frac{\beta\sqrt{-1} + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} + \alpha_{p+2}\lambda_{p+2} + \dots + \alpha_n\lambda_n - \lambda_i}{\alpha_{p+1} + \alpha_{p+2} + \dots + \alpha_n - 1} \right|$$

c'est-à-dire, d'après ce que nous avons vu plus haut, qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$ ne contienne l'origine.

Si donc aucun de ces deux polygones convexes ne contient l'origine, s'il n'y a entre les λ aucune relation de la forme (1.40), les équations (1.35) admettront une intégrale particulière de la forme suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), \\ x_2 &= \varphi_2(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t), \\ &\dots\dots\dots \\ x_p &= \varphi_p(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t) \end{aligned}$$

les φ étant développables suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ et les sinus et cosinus des multiples de t .

Cela posé, envisageons les équations :

$$dt = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \tag{1.43}$$

Ces équations sont de même forme que les équations (1.34); la seule différence, c'est que les λ n'ont pas des valeurs qui satisfont aux conditions suffisantes énoncées plus haut pour que l'équation (1.35) ait une intégrale holomorphe.

Nous allons nous proposer de trouver non pas la solution générale des équations (1.43), mais une solution contenant $n - p$ constantes arbitraires.

Parmi les équations (1.43), je considère en particulier les suivantes :

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = X_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = X_{p+2}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = X_n \tag{1.44}$$

J'écris en outre les équations :

$$x_i = \varphi_i(x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n, t) \quad (i = 1, 2, \dots, p) \tag{1.45}$$

les φ_i étant les intégrales holomorphes des équations (1.35) définies plus haut.

Il est évident que si : x_1, x_2, \dots, x_n sont n fonctions de t qui satisfont aux équations (1.44) et (1.45), elles satisferont également aux équations (1.43).

Dans les équations (1.44) substituons à la place de x_1, x_2, \dots, x_p leurs valeurs (1.45), Ces équations deviendront :

$$\frac{dx_{p+1}}{dt} = \lambda_{p+1}x_{p+1} + Z_{p+1}, \quad \frac{dx_{p+2}}{dt} = \lambda_{p+2}x_{p+2} + Z_{p+2}, \quad \dots, \quad \frac{dx_n}{dt} = \lambda_n x_n + Z_n \tag{1.46}$$

$Z_{p+1}, Z_{p+2}, \dots, Z_n$ étant des séries développées suivant les puissances de $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$, dont tous les termes sont du 2^d degré au moins et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Ces équations (1.46) sont de la même forme que les équations (1.34); leur intégrale générale sera donc de la forme suivante :

$$T'_{p+1} = K_{p+1}e^{t\lambda_{p+1}}, \quad T'_{p+2} = K_{p+2}e^{t\lambda_{p+2}}, \quad \dots, \quad T'_n = K_n e^{t\lambda_n}$$

où K_{p+1}, \dots, K_n sont des constantes d'intégration, où T'_{p+1}, \dots, T'_n sont des séries développées suivant les puissances des x et les sinus et cosinus des multiples de t .

Les équations :

$$\begin{aligned} T_i &= 0, & (i = 1, 2, \dots, p) \\ T'_q &= K_q e^{t\lambda_q}, & (q = p + 1, p + 2, \dots, n) \end{aligned} \tag{1.47}$$

nous donnent donc une intégrale des équations (1.43) dépendant des $n - p$ constantes arbitraires $K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n$.

Pour obtenir cette intégrale sous forme explicite, il faut résoudre ces équations (1.47) par rapport à x_1, x_2, \dots, x_n ; on trouve ainsi :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(t, K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n), \\ x_2 &= \psi_2(t, K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n), \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= \psi_n(t, K_{p+1}, K_{p+2}, \dots, K_n) \end{aligned}$$

les ψ étant des séries développées suivant les puissances de :

$$K_{p+1} e^{t\lambda_{p+1}}, K_{p+2} e^{t\lambda_{p+2}}, \dots, K_n e^{t\lambda_n}$$

et suivant les sinus et cosinus des multiples de t .

Ces séries sont convergentes, pourvu qu'aucun des deux polygones convexes circonscrits, le premier aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $+\sqrt{-1}$, et le second aux points $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_n$ et $-\sqrt{-1}$, ne contienne l'origine et qu'il n'y ait entre les λ aucune relation de la forme (1.40).

Cette démonstration fait ressortir l'analogie de ce théorème avec ceux que j'ai énoncés dans ma thèse et en particulier avec celui-ci :

Dans le voisinage d'un point singulier, les solutions d'une équation différentielle sont développables suivant les puissances de $t, t^{\lambda_1}, t^{\lambda_2}, \dots, t^{\lambda_n}$.

J'avais d'abord démontré ce théorème (que j'ai ensuite rattaché aux idées générales qui ont inspiré ma thèse) par une voie assez différente dans le 45^{ème} Cahier du Journal de l'Ecole polytechnique et M. PICARD y avait été conduit indépendamment par d'autres considérations (Comptes rendus 1878).

1.4 § Intégration des équations linéaires à coefficients périodiques

On sait qu'une fonction de x périodique et de période 2π peut se développer en une série de la forme suivante :

$$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + \dots + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_n \sin nx + \dots \tag{1.48}$$

J'ai montré dans le Bulletin astronomique (novembre 1886) que si la fonction $f(x)$ est finie et continue ainsi que ses $p - 2$ premières dérivées et si sa $(p - 1)^{\text{ème}}$ dérivée est finie, mais peut devenir discontinue en un nombre limité de points, on peut trouver un nombre positif K tel que l'on ait, quelque grand que soit n :

$$|n^p A_n| < K, \quad |n^p B_n| < K$$

Si $f(x)$ est une fonction analytique, elle sera finie et continue ainsi que toutes ses dérivées. On pourra donc trouver un nombre K tel que :

$$|n^2 A_n| < K, \quad |n^2 B_n| < K$$

Il résulte de là que la série :

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| + \dots + |B_1| + |B_2| + \dots + |B_n| + \dots$$

converge et par conséquent que la série (1.48) est absolument et uniformément convergente.

Cela posé, considérons un système d'équations différentielles linéaires :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 + \dots + \varphi_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 + \dots + \varphi_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} &= \varphi_{n1}x_1 + \varphi_{n2}x_2 + \dots + \varphi_{nn}x_n \end{aligned} \tag{1.49}$$

Les n^2 coefficients φ_{ik} sont des fonctions de t périodiques et de période 2π .

Les équations (1.49) ne changent donc pas quand on change t en $t + 2\pi$. Cela posé, soient :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{11}(t), \quad x_2 = \psi_{12}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{1n}(t), \\ x_1 &= \psi_{21}(t), \quad x_2 = \psi_{22}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{2n}(t), \\ &\dots\dots\dots \\ x_1 &= \psi_{n1}(t), \quad x_2 = \psi_{n2}(t), \quad \dots, \quad x_n = \psi_{nn}(t) \end{aligned} \tag{1.50}$$

n solutions, linéairement indépendantes, des équations (1.49).

Les équations ne changent pas quand on change t en $t + 2\pi$ et les n solutions deviendront :

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_{11}(t + 2\pi), & x_2 &= \psi_{12}(t + 2\pi), & \dots, & x_n &= \psi_{1n}(t + 2\pi), \\ x_1 &= \psi_{21}(t + 2\pi), & x_2 &= \psi_{22}(t + 2\pi), & \dots, & x_n &= \psi_{2n}(t + 2\pi), \\ & \dots & & & & & \\ x_1 &= \psi_{n1}(t + 2\pi), & x_2 &= \psi_{n2}(t + 2\pi), & \dots, & x_n &= \psi_{nn}(t + 2\pi) \end{aligned} \quad (1.51)$$

Elles devront donc être des combinaisons linéaires des n solutions (1.51) de sorte qu'on aura :

$$\begin{aligned} \psi_{11}(t + 2\pi) &= A_{11}\psi_{11}(t) + A_{12}\psi_{21}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{n1}(t), \\ \psi_{21}(t + 2\pi) &= A_{21}\psi_{11}(t) + A_{22}\psi_{21}(t) + \dots + A_{2n}\psi_{n1}(t), \\ & \dots & & \\ \psi_{n1}(t + 2\pi) &= A_{n1}\psi_{11}(t) + A_{n2}\psi_{21}(t) + \dots + A_{nn}\psi_{n1}(t) \end{aligned}$$

les A étant des coefficients constants.

On aura d'ailleurs de même (avec les mêmes coefficients) :

$$\psi_{12}(t + 2\pi) = A_{11}\psi_{12}(t) + A_{12}\psi_{22}(t) + \dots + A_{1n}\psi_{n2}(t)$$

etc...

Cela posé, formons l'équation en S :

$$\begin{vmatrix} A_{11} - S & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - S & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} - S \end{vmatrix} \quad (1.52)$$

Soit S_1 l'une des racines de cette équation. D'après la théorie des substitutions linéaires, il existera toujours n coefficients constants :

$$B_1, B_2, \dots, B_n$$

tels que si l'on pose :

$$\theta_{11}(t) = B_1\psi_{11}(t) + B_2\psi_{21}(t) + \dots + B_n\psi_{n1}(t)$$

et de même :

$$\theta_{1i}(t) = B_1\psi_{1i}(t) + B_2\psi_{2i}(t) + \dots + B_n\psi_{ni}(t)$$

on ait :

$$\theta_{11}(t + 2\pi) = S_1 \cdot \theta_{11}(t)$$

et faisons-y tendre α_2 vers α_1 . Il vient :

$$x_1 = e^{\alpha_1 t} [C_1 \lambda_{11}(t) + C_2 e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \lambda_{21}(t)]$$

ou en posant :

$$C_1 = C'_1 - C_2, \quad C_2 = \frac{C'_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Il viendra :

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \left[C'_1 \lambda_{11}(t) + C'_2 \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \lambda_{21}(t) - \lambda_{11}(t)}{\alpha_2 - \alpha_1} \right]$$

Il est clair que la différence :

$$\lambda_{21}(t) - \lambda_{11}(t)$$

s'annulera pour $\alpha_2 = \alpha_1$. Nous pourrions donc poser :

$$\lambda_{21}(t) = \lambda_{11}(t) + (\alpha_2 - \alpha_1) \lambda'(t)$$

Il vient ainsi :

$$x_1 = e^{\lambda_1 t} \left[C'_1 \lambda_{11} + C'_2 \lambda_{11} \frac{e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} + C'_2 \lambda'(t) e^{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \right]$$

et à la limite (pour $\alpha_2 = \alpha_1$) :

$$x_1 = C'_1 e^{\alpha_1 t} \lambda_{11} + C'_2 e^{\alpha_1 t} [t \lambda_{11} + \lim \lambda'(t)]$$

On verrait que la limite de $\lambda'(t)$ pour $\alpha_2 = \alpha_1$ est encore une série trigonométrique absolument et uniformément convergente.

Ainsi l'effet de la présence d'une racine double dans l'équation (1.52) a été d'introduire dans la solution des termes de la forme suivante :

$$e^{\alpha_1 t} t \lambda(t)$$

$\lambda(t)$ étant une série trigonométrique.

On verrait sans peine qu'une racine triple introduirait des termes de la forme :

$$e^{\alpha_1 t} t^2 \lambda(t)$$

et ainsi de suite.

Je n'insiste pas sur tous ces points de détail. Ces résultats sont bien connus par les travaux de MM. FLOQUET, CALLANDREAU, BRUNS, STIELTJES et si j'ai donné ici la démonstration in extenso pour le cas général, c'est que son extrême simplicité me permettait de la faire en quelques mots.

Littérature

1. BOHLIN, K., Über die Bedeutung des Principe der lebendigen Kraft für die frage von der stabilität dynamisher system, Acta Mathematica, vol. **10**, p. 109–30, 1887.
2. BOHLIN, K., Zur Frage der Convergenz der Reihenentwickelungen in der Störungstheorie, Astronomische Nachrichten, vol. **121**, num. 2882, columns 18–24, 1889.
3. CAUCHY, A. L., Mémoire sur un théorème fondamental, dans le calcul intégral, Comptes Rendus des séances de l'Académie des sciences, vol. **14**, p. 1020, 1842.
4. HILL, G. W., Researches in the Lunar Theory, American Journal of Mathematics, vol. **1**, p. 5–26, 1878.
5. JACOBI, C.G.J., Vorlesungen über Dynamik, G. Reimer, Berlin, 1884.
6. JORDAN, C., Cours d'Analyse de l'École polytechnique : Calcul intégral, équations différentielles. Tome troisième, Gauthier-Villars et fils, Paris, 1887.
7. KOWALEVSKI, S., Zur theorie der partiellen Differentialgleichungen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. **80**, p. 1–23.
8. LAPLACE, P. S., Traité de Mécanique Céleste, Vol. **5**, Bachelier, Paris, 1825.
9. LINDSTEDT, A., Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen des Störungstheorie, Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg, vol. **31**, num. 4, p. 1–21, 1883.
10. PICARD, M. E., Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, vol. **20**, p. 743–45, 1878.
11. POINCARÉ, H., Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles, Journal de l'École polytechnique, vol. **45**, p. 13–26, 1878.
12. POINCARÉ, H., Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, Ph.D. thesis, Université de Paris, Gauthier-Villars, Paris, 1879.
13. POINCARÉ, H., Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps, Bulletin astronomique, vol. **1**, p. 65–74, 1884.
14. POINCARÉ, H., Sur les courbes définies par les équations différentielles, Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. **2**, p. 151–217, 1886.

15. POINCARÉ, H., Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques, Bulletin astronomique, vol. **3**, p. 521–28, 1886.
16. POINCARÉ, H., Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta Mathematica, vol. **8**, p. 295–344, 1886.
17. PUISEUX, V., Recherches sur les Fonctions Algébriques, Journal de mathématiques pures et appliquées, vol. **15**, p. 365–480, 1850.
18. TISSERAND, M. F., Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, vol. **104**, pp. 259–65, January 31, 1887.
19. POINCARÉ, H., The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics, translated by Bruce D. Popp, Astrophysics and Space Science Library 443, Springer International Publishing AG 2017, DOI 10.1007/978-3-319-52899-1.