

# How and Why to Use my Basic Scheme to make Polygonal Spirals.

Dante Servi

## Abstract

Lo schema di base a cui mi riferisco è descritto nel mio articolo "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" pubblicato su vixra.org. L'articolo "How and Why to Use my Graphic Method" del quale questo è una ulteriore revisione, è nato con lo scopo di fornire ulteriori informazioni sullo schema di base analizzando quello che avevo già realizzato; questo mi ha portato a scoprire altre possibilità offerte dal passo angolare fisso. Ora con la revisione [v2] volevo offrire un testo selezionabile per agevolare una eventuale traduzione (la lingua originale è l'Italiano); ne ho approfittato per ritornare a considerare quella che è stata la mia prima spirale poligonale.

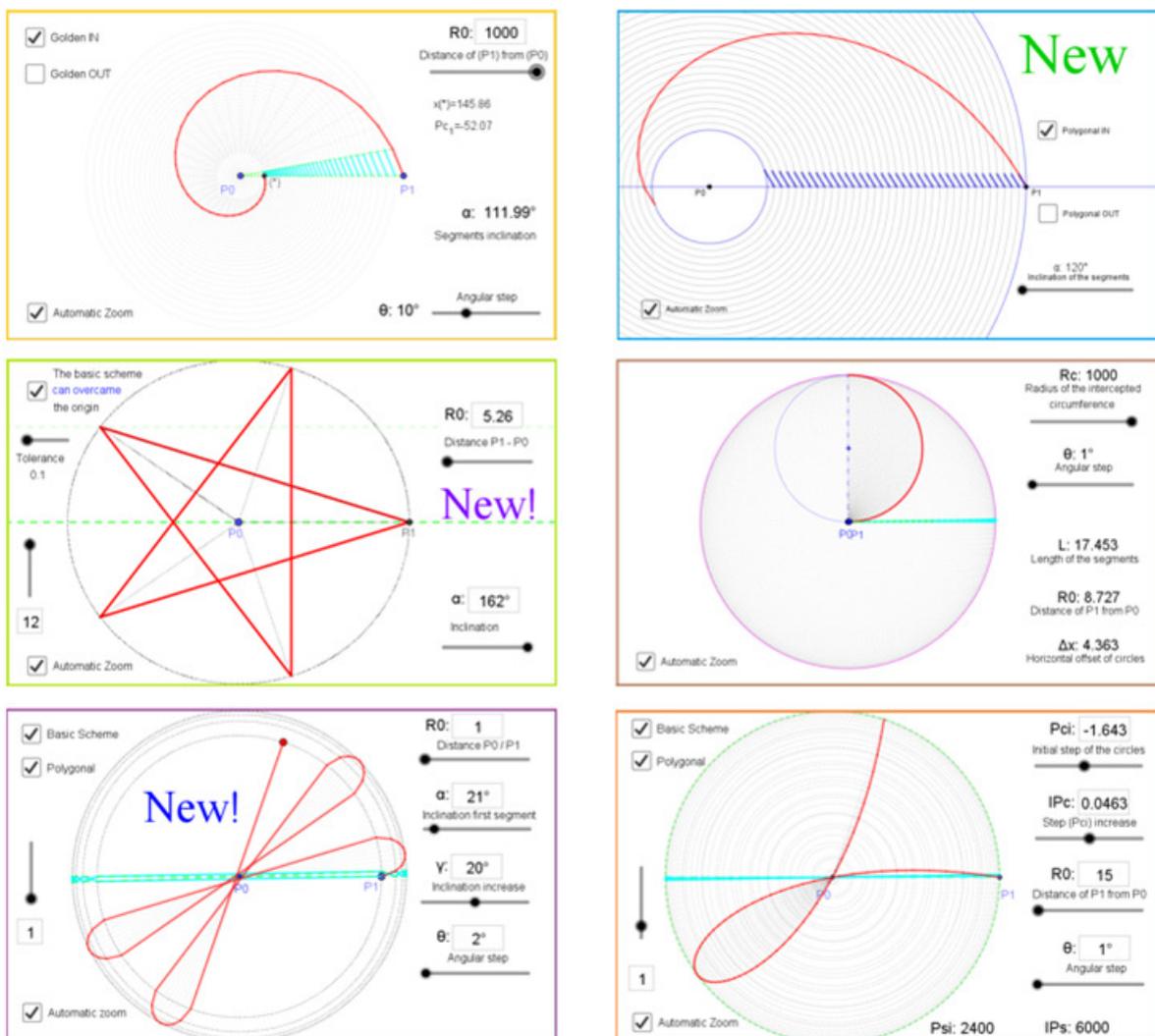
The basic scheme to which I refer is described in my article "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" published on vixra.org. The article "How and Why to Use my Graphic Method" of which this is a further revision, was created with the aim of providing further information on the basic scheme by analyzing what I had already done; this led me to discover other possibilities offered by the fixed angle step. Now with the revision [v2] I wanted to offer a selectable text to facilitate a possible translation (the original language is Italian); I took the opportunity to return to consider what was my first polygonal spiral.

- - - - -

L'articolo è scritto in Italiano il testo in Inglese è stato realizzato con l'aiuto del traduttore di Google.

The article is written in Italian and the English text was created with the help of the Google translator.

English text starts on page 17.



Con l'articolo "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" ho descritto un mio metodo grafico per realizzare delle spirali poligonali ed ho anche descritto come questo metodo permette di realizzare delle poligonali con tutti i vertici in comune con la spirale logaritmica e di Archimede.

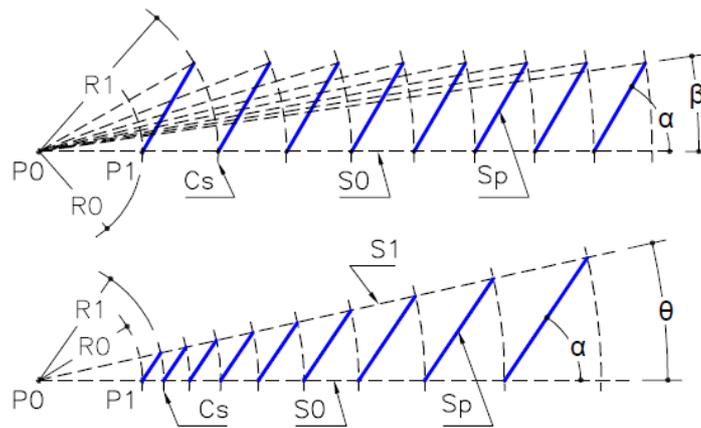
Con questo articolo vorrei dimostrare come dallo "schema di base" dal quale nasce il mio metodo grafico si possono trarre utili indicazioni relative alla poligonale che ne deriva.

Come per le attività pubblicate su GeoGebra.com, dalla revisione [v2] ho deciso di cambiare i simboli degli angoli utilizzando le lettere Greche minuscole, quindi:  $A \rightarrow \alpha$   $Y \rightarrow \gamma$   $C \rightarrow \theta$   $A1 \rightarrow \beta$

Quando ho ideato il mio metodo grafico per realizzare delle poligonali mi è bastato il segmento di base (S0) con origine in (P0), non ho avuto bisogno di un secondo segmento (S1) che sempre con origine in (P0) formasse con questo un angolo ( $\theta$ ).

Definendo poi l'algoritmo mi è servito collegare l'estremo libero dei segmenti (Sp) con (P0) per definire l'angolo ( $\beta$ ) e la distanza (R1) che poi non è altro che il raggio del cerchio (Cs) passante per il punto finale del segmento (Sp).

Si può notare che in questo modo il punto finale del segmento (Sp) è definito da due coordinate polari, la prima con riferimento al punto iniziale del segmento stesso e la seconda con riferimento all'origine (P0).



Il segmento (S1) con origine in (P0) e formante con (S0) l'angolo ( $\theta$ ) lo ho introdotto per realizzare una poligonale con tutti i vertici in comune con la spirale logaritmica, per poi fare lo stesso con la spirale di Archimede.

L'angolo ( $\theta$ ) si è subito rivelato essere il passo angolare costante dei vertici della poligonale.

L'angolo ( $\beta$ ) rappresenta anche lui il passo angolare della poligonale con la differenza che non è necessariamente costante.

Mentre l'angolo ( $\theta$ ) è nato costante l'angolo ( $\beta$ ) nasce come variabile essendo in genere dipendente da altri parametri, anche se non escludo che possa essere usato in modo diverso.

Quindi in quello che io definisco lo schema di base del mio metodo grafico, ci possono essere due tipologie di passi angolari che con riferimento alla origine (P0) intercettano i vertici dei segmenti (Sp) e dunque della poligonale.

Pur consapevole che i vertici delle poligonali in genere intercettano una curva, il mio metodo può essere utilizzato per realizzare poligonali senza avere necessariamente come riferimento una spirale od una curva, oppure può essere utilizzato per realizzare una poligonale dedicata ad una curva.

Sono convinto della totale libertà di sviluppo della poligonale basata sul passo angolare variabile ( $\beta$ ) non sono altrettanto sicuro che il passo angolare costante ( $\theta$ ) possa rappresentare un vincolo.

Può essere, ma non è detto, che il passo angolare costante ( $\theta$ ) sia il più adatto per realizzare una poligonale dedicata ad una curva, più probabilmente ad una spirale.

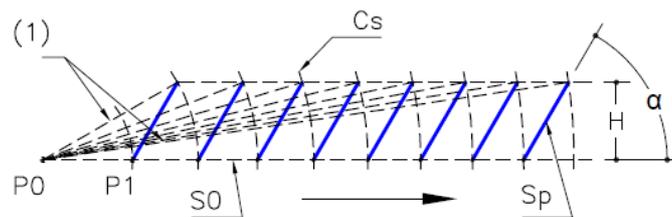
Ho deciso che per primo descrivo come realizzare graficamente una poligonale con inclinazione ( $\alpha$ ) e lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) entrambi costanti.  
Questo è il più vincolato dei tipi realizzabili con passo angolare variabile ( $\beta$ ).

Poi aiutandomi con gli schemi di base descriverò alcune situazioni particolari che si possono incontrare sul percorso delle poligonali con passo angolare variabile ( $\beta$ ).

Di seguito descriverò come realizzare graficamente sia la poligonale dedicata alla spirale logaritmica che a quella di Archimede.

Alla fine analizzerò alcune tipologie di poligonali con passo angolare ( $\theta$ ) costante.

Come realizzare graficamente una spirale poligonale con inclinazione ( $\alpha$ ) e lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) entrambi costanti.



Nota (1): fascio di segmenti ( $S_1$ ) ognuno legato ad uno specifico ( $S_p$ ), definiti da una lunghezza ( $R_1$ ) ed un angolo ( $\beta$ ) rispetto ad ( $S_0$ )

Traccio il segmento ( $S_0$ ) partendo dal punto ( $P_0$ ) e lungo quanto basta.

Traccio il primo cerchio ( $C_s$ ) con raggio ( $R_0$ ), determinando ( $P_1$ ).

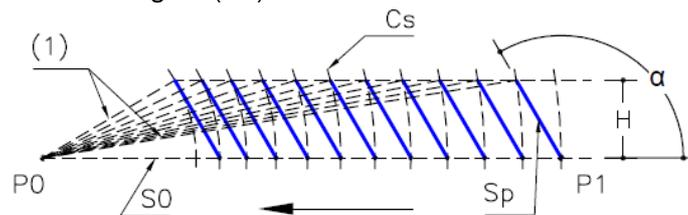
Traccio il primo segmento ( $S_p$ ) con inizio in ( $P_1$ ), lunghezza ( $L$ ) ed inclinazione ( $\alpha$ ).

Traccio il secondo cerchio ( $C_s$ ) passante per il punto finale del primo segmento ( $S_p$ ), determinando in questo modo su ( $S_0$ ) il punto di partenza del secondo segmento ( $S_p$ ) che sarà identico al primo.

Proseguendo in modo analogo completo la serie di segmenti ( $S_p$ ) e cerchi ( $C_s$ ).

Tracciati tutti i segmenti ( $S_p$ ) li ruoto ad uno ad uno partendo dal secondo dopo ( $P_1$ ) e di quanto serve perché il loro punto iniziale coincida con il punto finale del segmento ( $S_p$ ) precedente, realizzando in questo modo la poligonale.

Schema di base per sviluppo verso l'origine ( $P_0$ ).

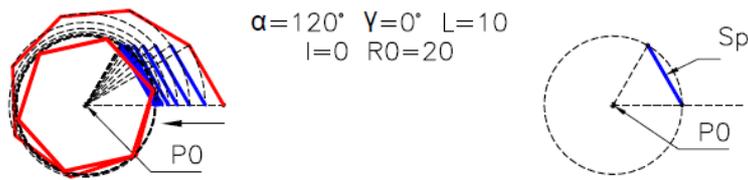


Ora con l'aiuto dello schema di base ecco alcune situazioni particolari che si possono incontrare sul percorso delle poligonali con incremento angolare variabile ( $\beta$ ).

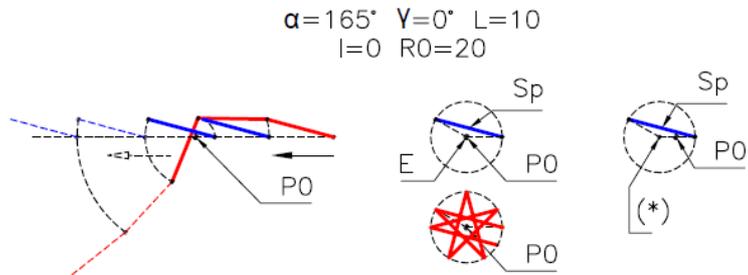
Inizio con il descrivere il comportamento delle spirali poligonali con inclinazione ( $\alpha$ ) e lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) entrambi costanti, quando sviluppandosi verso l'origine ( $P_0$ ) ne arrivano in prossimità.

Ho individuato due situazioni possibili.

La prima riguarda il caso in cui un segmento si trova ad avere i due estremi alla stessa distanza dall'origine ( $P_0$ ) ed in questo caso se è quello che inizia in ( $P_1$ ) o se i segmenti dello schema di base che lo seguono si troveranno nella stessa condizione avviene l'arrotolamento della spirale attorno all'origine.



La seconda si determina quando non si verifica quanto appena descritto; in questo caso la sequenza dei segmenti (Sp) prosegue allontanandosi da (P0), di conseguenza la poligonale che ne deriva segue la stessa sorte.



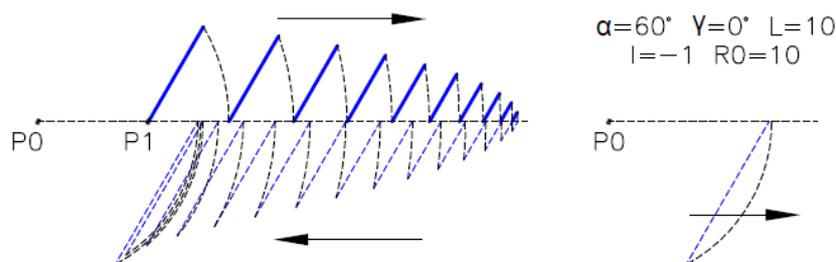
(\*) Chiamo (E) il punto su (S0) equidistante dai vertici di (Sp).

La figura a destra rappresenta il motivo che produce il superamento ed il conseguente allontanamento da (P0); il superamento di (P0) capita più facilmente per valori di ( $\alpha$ )  $\geq 135^\circ$ , ma (E) può comunque coincidere con (P0). La figura centrale mostra che anche per questo valore di ( $\alpha$ ) è possibile un arrotolamento della poligonale attorno a (P0); ho pubblicato su GeoGebra.com una attività dal nome "la mia seconda spirale e le stelle poligonali" che assieme all'istruzione allegata può aiutare ad approfondire la questione. Come evidenza la figura a destra, è la posizione di (E) rispetto a (P0) che determina o meno il superamento, che avviene se (E) si trova a sinistra di (P0).

Spirali poligonali che si sviluppano allontanandosi dalla origine (P0) con inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti (Sp) costante e lunghezza (L) decrescente.

Ho individuato due situazioni particolari possibili.

La prima si determina in conseguenza del possibile azzeramento della lunghezza del segmento (Sp). In questo caso graficamente si può continuare con dei segmenti (Sp) che iniziano ad allungarsi dello stesso valore con il quale si accorciavano invertendo la direzione e tornando verso l'origine (P0) con inclinazione rispetto a (P0) supplementare alla precedente. Continuando la sequenza dei segmenti (Sp) verso l'origine succede che il punto finale del segmento (Sp) si trova ad essere più distante da (P0) di quanto non lo sia il suo punto iniziale. La situazione appena descritta genera l'inversione della sequenza dei segmenti (Sp) che tornano ad allontanarsi da (P0) senza cambiare inclinazione rispetto ad esso. L'algoritmo invece quando la lunghezza (L) del segmento (Sp) si azzerava si arresta a causa di divisione per zero.

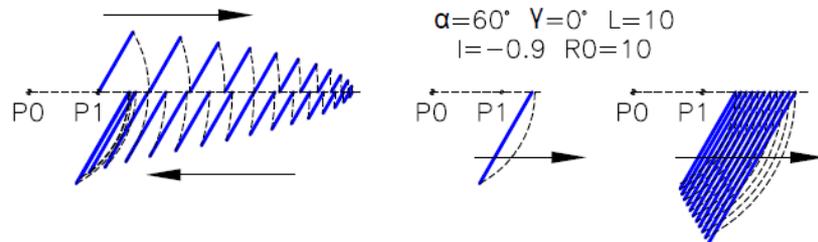


La seconda, simile alla precedente, si determina quando non si verifica l'azzeramento della lunghezza (L) del segmento (Sp), in questo caso l'algoritmo non si arresta.

Quando la lunghezza (L) del segmento (SP) diventa inferiore al valore di (l), il segmento successivo avrà un valore di (L) negativo ed a questo punto i segmenti (Sp) si sviluppano verso l'origine (P0) con inclinazione rispetto a (P0) supplementare alla precedente e con una lunghezza (L) negativa diventata crescente.

Di seguito si determinerà la stessa situazione già descritta per il caso precedente e la sequenza dei segmenti (Sp) tornerà definitivamente ad allontanarsi da (P0).

Caso uguale a quanto illustrato nel foglio 8/10 del mio articolo di riferimento.



Spirali poligonali che si sviluppano allontanandosi dalla origine (P0) con inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti (Sp) decrescente e lunghezza (L) costante.

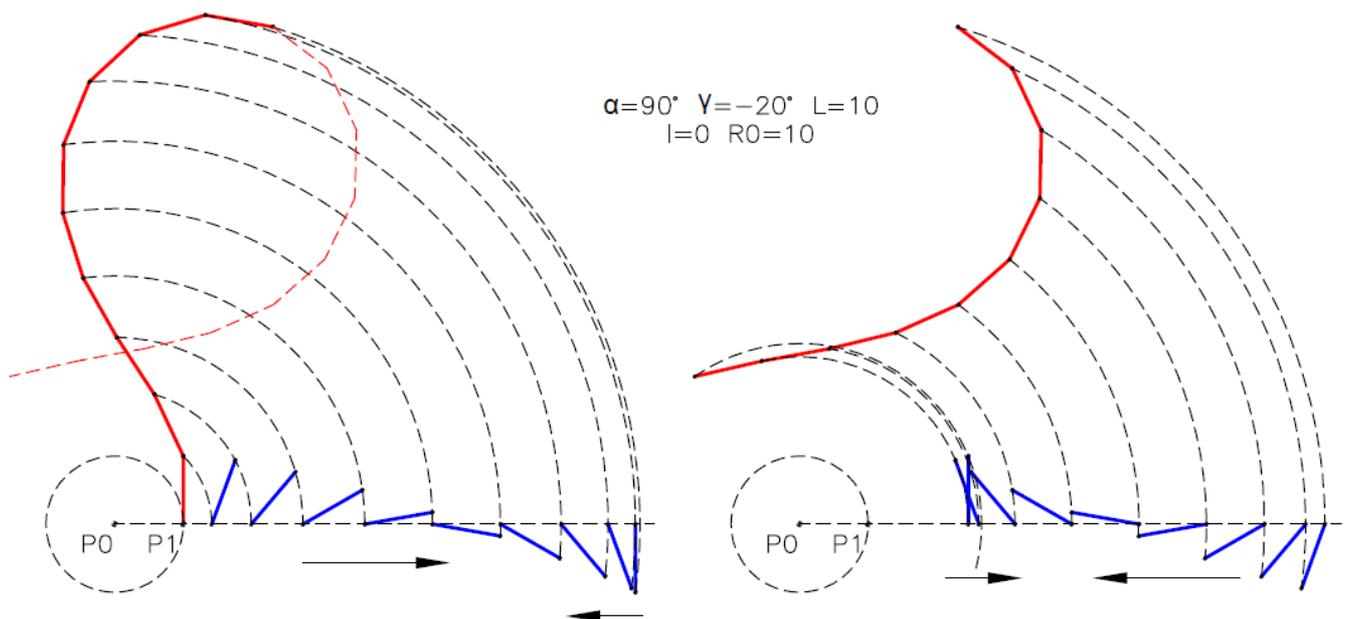
Per rendere più comprensibile il disegno l'ho diviso in due parti.

Invece di considerare l'andamento di ( $\alpha$ ) e di ( $\beta$ ) credo che sia più utile osservare come si determinano i cambiamenti di direzione nello sviluppo dei segmenti (Sp) rispetto all'origine (P0).

I cambi di direzione avvengono sia quando l'inclinazione ( $\alpha$ ) del segmento (Sp) supera i  $90^\circ$  od i  $180^\circ$  sia quando le distanze da (P0) del punto finale e del punto iniziale del segmento (Sp) non sono più concordi con la direzione di sviluppo dei suddetti segmenti, come già descritto in casi precedenti.

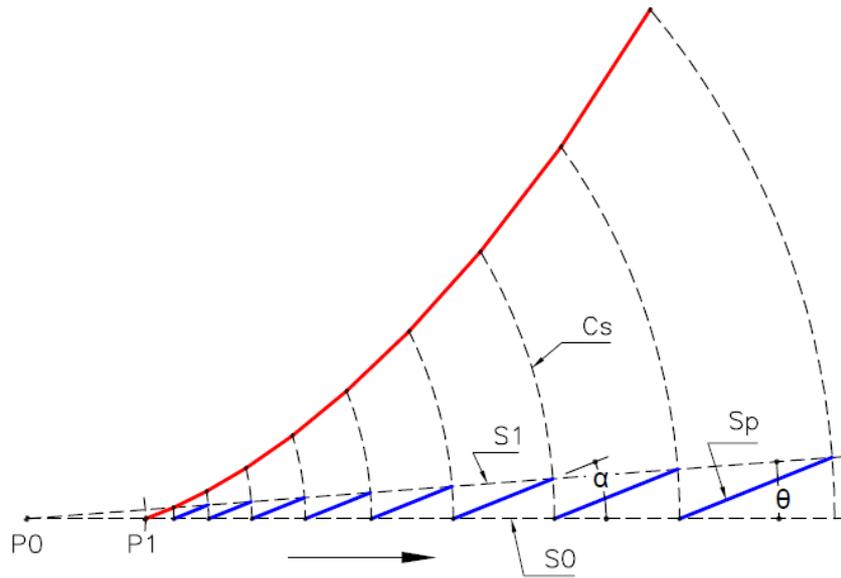
Questa situazione si ripete ciclicamente e genera una immagine simile alle prime due che ho illustrato nel foglio - Esempio 3/3 - del mio articolo di riferimento, anche se in quel caso l'inclinazione è crescente.

Nello stesso foglio sono presenti altre immagini dovute ad inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti (Sp) crescente o decrescente, si può anche notare l'influenza della lunghezza dei segmenti.



Non mi vengono in mente altre particolarità da evidenziare e passo a descrivere come realizzare graficamente sia la poligonale dedicata alla spirale logaritmica che a quella di Archimede.

Spirale poligonale con tutti i vertici in comune con una spirale logaritmica.  
 Metodo grafico.



Per prima cosa decido il valore di  $(\theta)$  adatto agli strumenti che ho a disposizione, poi decido  $(R_0)$  e se voglio riferirmi ad una spirale logaritmica specifica calcolo il valore dell'inclinazione  $(\alpha)$  con le equazioni che seguono, il valore di  $(b)$  per la spirale aurea è: 0.0053468...

La lunghezza  $(L)$  dei segmenti  $(S_p)$  sarà determinata dalla distanza da  $(P_0)$  del loro punto di inizio, dalla loro inclinazione  $(\alpha)$  e dall'angolo  $(\theta)$  che il segmento  $(S_1)$  forma con il segmento  $(S_0)$ .

$$R_1 = R_0 \cdot e^{(b \cdot \theta)} \quad \alpha = \theta + \text{atan}(R_0 \cdot \sin\theta / R_1 - R_0 \cdot \cos\theta)$$

Traccio  $(S_0)$  ed  $(S_1)$ .

Traccio il primo cerchio  $(C_s)$  con raggio  $(R_0)$  definendo  $(P_1)$ .

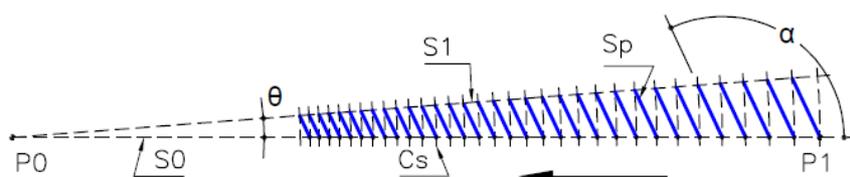
Traccio il primo segmento  $(S_p)$  con inclinazione  $(\alpha)$  rispetto ad  $(S_0)$  e lungo fino ad incontrare  $(S_1)$ .

Traccio quindi il secondo cerchio  $(C_s)$  passante per l'incrocio tra  $(S_p)$  ed  $(S_1)$  determinando in questo modo su  $(S_0)$  il punto di partenza del segmento  $(S_p)$  successivo.

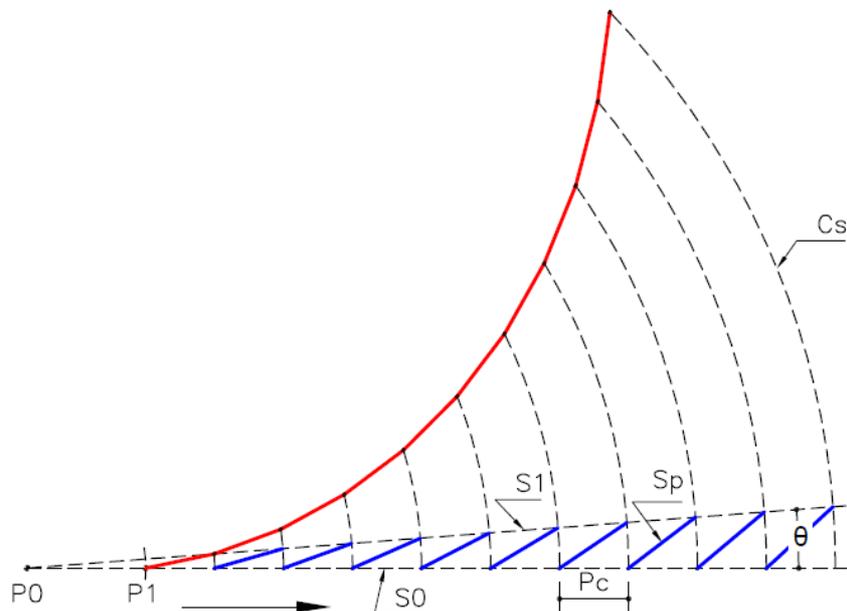
Proseguo fino a quando serve con la sequenza di segmenti  $(S_p)$  e cerchi  $(C_s)$ .

Tracciati tutti i segmenti  $(S_p)$  li ruoto ad uno ad uno partendo dal secondo dopo  $(P_1)$  e di quanto serve perché il loro punto iniziale coincida con il punto finale del segmento  $(S_p)$  precedente, realizzando in questo modo la poligonale.

Schema di base per sviluppo verso l'origine  $(P_0)$ .



Spirale poligonale con tutti i vertici in comune con una spirale di Archimede.  
 Metodo grafico.



Per prima cosa decido il valore di  $(\theta)$  adatto agli strumenti che ho a disposizione, poi decido  $(R0)$  e se voglio avere un  $(Ps)$  cioè un passo della spirale determinato calcolo  $Pc = \theta \cdot Ps / 360$ ;  $(Pc)$  sarà il passo dei cerchi  $(Cs)$  che assieme ai segmenti  $(S0)$  ed  $(S1)$  determinerà inclinazione  $(\alpha)$  e lunghezza  $(L)$  dei segmenti  $(Sp)$ .  
 Traccio  $(S0)$  ed  $(S1)$ .

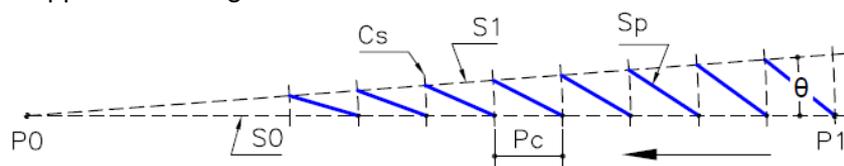
Traccio il primo cerchio  $(Cs)$  con raggio  $(R0)$  definendo  $(P1)$ .

Traccio tutti i successivi cerchi  $(Cs)$  incrementando il raggio del valore  $(Pc)$ .

Traccio tutti i segmenti  $(Sp)$  iniziando da  $(P1)$  ed utilizzando le intersezioni tra i cerchi  $(Cs)$  ed i segmenti  $(S0)$  ed  $(S1)$ .

Tracciati tutti i segmenti  $(Sp)$  li ruoto ad uno ad uno partendo dal secondo dopo  $(P1)$  e di quanto serve perché il loro punto iniziale coincida con il punto finale del segmento  $(Sp)$  precedente, realizzando in questo modo la poligonale.

Schema di base per sviluppo verso l'origine.



Prima di proseguire apro una parentesi relativa alla possibilità di modificare il numero di punti di contatto tra una poligonale ed una curva di riferimento modificando il passo angolare  $(\theta)$ ; avendo presente lo schema di base ad esempio della poligonale dedicata alla spirale logaritmica.

L'angolo  $(\theta)$  formato dal segmento  $(S1)$  rispetto al segmento di base  $(S0)$ , determina il numero di punti di contatto tra poligonale e spirale.

Per mantenere il contatto con la stessa spirale occorre modificare opportunamente il valore dell'inclinazione  $(\alpha)$ , come descritto nel mio articolo in oggetto.

Anche per la spirale di Archimede variando il valore di  $(\theta)$  varia il numero di punti di contatto con la spirale, in questo caso però per mantenere il contatto con la stessa spirale occorre modificare in modo opportuno il passo  $(Pc)$  dei cerchi  $(Cs)$  secondo l'equazione  $Pc = \theta \cdot Ps / 360$ ; salvo non ci siano vincoli particolari per l'angolo  $(\theta)$ .

Anche se non ho ancora affrontato e risolto poligonali dedicate ad altro tipo di spirali, mi aspetto valga sempre quanto sopra affermato.

Di caso in caso per mantenere il contatto con la stessa spirale, occorrerà in modo adeguato provvedere ad una compensazione modificando un altro parametro.

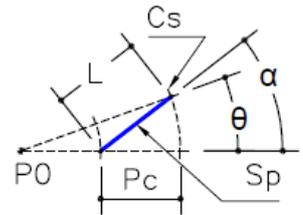
Chiudo la parentesi relativa alla modifica del numero di punti di contatto tra poligonale e curva grazie al passo angolare ( $\theta$ ).

Ora mi dedico all'analisi di alcune tipologie di poligonali con passo angolare ( $\theta$ ) costante.

Prima considerazione: stabilito essere costante il passo angolare ( $\theta$ ), si può gestire a scelta uno solo dei tre parametri ( $\alpha$ ) ( $L$ ) e ( $P_c$ ), gli altri due ne saranno conseguenti.

Seconda considerazione: la tipologia con inclinazione ( $\alpha$ ) costante dei segmenti ( $S_p$ ) ha già trovato la sua applicazione con la poligonale dedicata alla spirale logaritmica.

Terza considerazione: la tipologia con passo ( $P_c$ ) costante dei cerchi ( $C_s$ ) ha già trovato la sua applicazione con la poligonale dedicata alla spirale Archimede.



Vediamo quali tipologie rimangono.

01. Inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) crescente.
02. Inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) decrescente.
03. Inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) variabile.
04. Lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) costante.
05. Lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) crescente.
06. Lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) decrescente.
07. Lunghezza ( $L$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) variabile.
08. Passo ( $P_c$ ) dei cerchi ( $C_s$ ) crescente.
09. Passo ( $P_c$ ) dei cerchi ( $C_s$ ) decrescente.
10. Passo ( $P_c$ ) dei cerchi ( $C_s$ ) variabile.

Di seguito analizzo quelle che tra queste tipologie hanno un numero di possibilità più limitato, confidando comunque di fornire utili indicazioni.

Tipologia con inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) crescente in modo costante.

Descrizione del metodo grafico.

Per prima cosa decido il valore di ( $\theta$ ) adatto agli strumenti che ho a disposizione, poi decido i valori di ( $R_0$ ), ( $\alpha$ ) e ( $\gamma$ ).

Traccio ( $S_0$ ) ed ( $S_1$ ).

Traccio il primo cerchio ( $C_s$ ) con raggio ( $R_0$ ) definendo ( $P_1$ ).

Traccio il primo segmento ( $S_p$ ) con inclinazione ( $\alpha$ ) rispetto ad ( $S_0$ ) e lungo fino ad incontrare ( $S_1$ ).

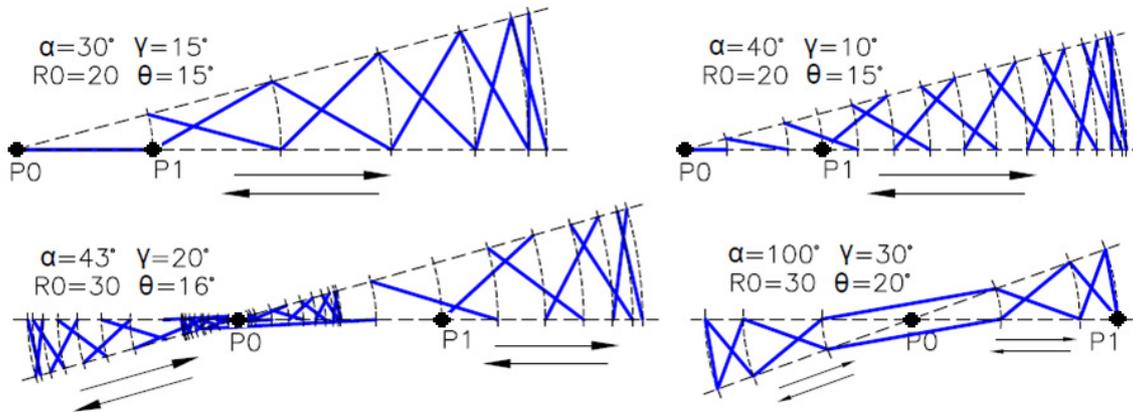
Traccio quindi il secondo cerchio ( $C_s$ ) passante per l'incrocio tra ( $S_p$ ) ed ( $S_1$ ) determinando in questo modo su ( $S_0$ ) il punto di partenza del segmento ( $S_p$ ) successivo.

Proseguo fino a quando serve con la sequenza di segmenti ( $S_p$ ) e cerchi ( $C_s$ ), ricordando che di volta in volta il valore dell'inclinazione ( $\alpha$ ) del segmento ( $S_p$ ) va incrementata del valore ( $\gamma$ ).

Tracciati tutti i segmenti ( $S_p$ ) li ruoto ad uno ad uno partendo dal secondo dopo ( $P_1$ ) e di quanto serve perché il loro punto iniziale coincida con il punto finale del segmento ( $S_p$ ) precedente, realizzando in questo modo la poligonale.

Questa tipologia può generare diversi sviluppi dello schema di base, in questa immagine riporto alcuni esempi di vario tipo; sono possibili schemi simmetrici sia nel caso di ciclo che si conclude in (P0) sia nel caso di ciclo infinito, probabilmente la maggior parte degli schemi non sono simmetrici.

Alcune delle poligonali (forse le più interessanti) che ho inserito nella prossima immagine derivano da cicli infiniti non simmetrici.



Osservazioni relative a questa tipologia.

Inizio con il notare che il punto di inizio della poligonale (P1) si trova ad avere da un lato l'origine ed i due segmenti (S0) ed (S1) che convergono verso di essa, dall'altro lato i due segmenti divergono.

In questa prima tipologia i dati sono: inclinazione ( $\alpha$ ), incremento inclinazione ( $\gamma$ ), passo angolare costante ( $\theta$ ), distanza da (P0) del punto di inizio della poligonale.

La lunghezza (L) dei segmenti non può essere tra i dati altrimenti ci sarebbe un eccesso di vincoli.

Essendo i due segmenti (S0) ed (S1) divergenti a partire da (P0) è evidente che, inclinazione a parte, i segmenti (Sp) saranno tendenzialmente più corti avvicinandosi a (P0) e tendenzialmente più lunghi allontanandosi.

Come però si potrà notare in alcuni esempi di seguito riportati, nel caso in cui il valore di ( $\gamma$ ) è uguale al valore del passo angolare ( $\theta$ ) la lunghezza (L) dei segmenti (Sp) risulta costante.

In questo caso i vertici della poligonale individuano una circonferenza, che può passare oltre che da (P1) anche da (P0).

Riepilogando, salvo qualche eccezione due delle quali le illustro in coda agli esempi, si possono verificare i seguenti casi:

Se ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) sono diversi i segmenti (Sp) risultano di lunghezza (L) variabile.

Se ( $\gamma$ ) è sottomultiplo od anche multiplo di ( $\alpha$ ) la poligonale termina in (P0).

Se ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) sono uguali i segmenti (Sp) risultano di lunghezza (L) costante ed i vertici della poligonale intercettano un cerchio.

Se ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) sono uguali, sottomultipli od anche multipli di ( $\alpha$ ) e sottomultipli di  $360^\circ$  i segmenti (Sp) risultano di lunghezza (L) costante, i vertici della poligonale intercettano un cerchio e la poligonale termina in (P0) alla prima rivoluzione.

Se ( $\gamma$ ) e ( $\theta$ ) non sono sottomultipli di  $360^\circ$  la poligonale compie diverse rivoluzioni prima di riuscire a terminare in (P0).

Anche per questa tipologia il valore di ( $\theta$ ) determina il numero di vertici in comune con la curva associata.

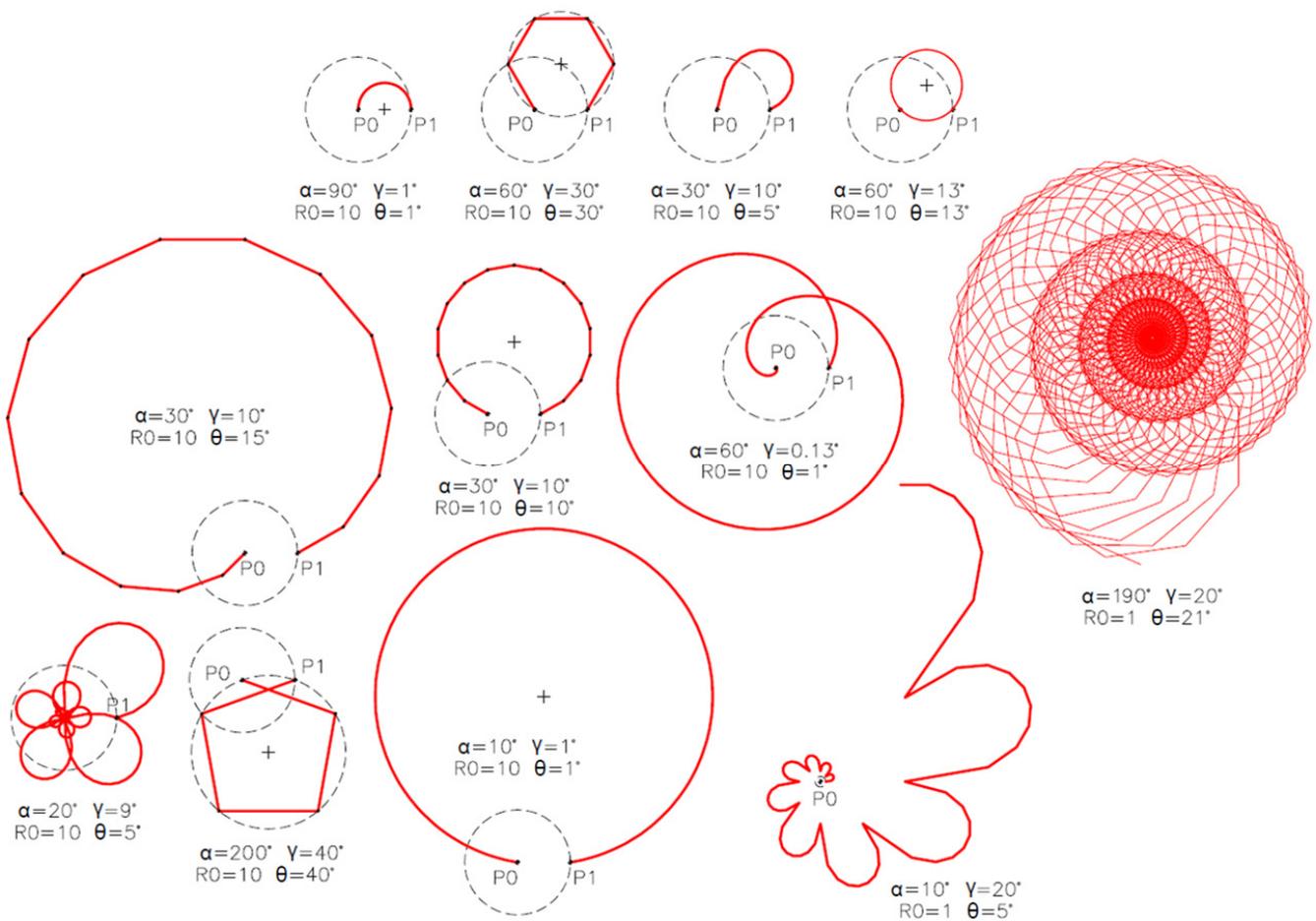
Per non passare ad un'altra curva associata occorre variare anche altri parametri.

Ad esempio nel caso in cui il passo angolare ( $\theta$ ) e l'incremento di inclinazione ( $\gamma$ ) siano uguali cambiando il loro valore da 1 a 2 occorre moltiplicare ( $R_0$ ) per 0,88965753... per non cambiare curva associata. Nel caso in cui il passo angolare ( $\theta$ ) e l'incremento di inclinazione ( $\gamma$ ) non siano uguali non basta cambiare di conseguenza il valore di ( $R_0$ ), probabilmente occorre anche cambiare il rapporto tra ( $\theta$ ) e ( $\gamma$ ). Faccio anche presente che moltiplicare per due il valore di ( $R_0$ ) significa ingrandire due volte la poligonale.

Le osservazioni qui riportate valgono per le poligonali che si sviluppano verso ( $P_0$ ), ho fatto diverse prove che secondo me dimostrano l'essere più interessanti gli sviluppi delle poligonali in questa direzione, e ne riporto di seguito alcuni esempi che mi sembrano abbastanza significativi.

Tra gli esempi seguenti uno ha lo stesso valore per ( $\theta$ ) ed ( $\gamma$ ) ma non è un sottomultiplo di  $360^\circ$ , la poligonale prosegue compiendo diverse rivoluzioni con i vertici sempre in comune con la stessa circonferenza fino a che un segmento ( $Sp$ ) termina in ( $P_0$ ).

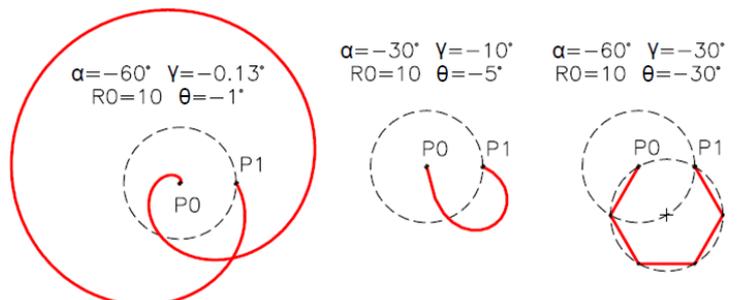
Alle tipologie con inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti crescente o decrescente in modo costante ho dedicato una attività su geoGebra.com con il nome "Passo angolare ed inclinazione gestibili".



### Inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $Sp$ ) decrescente in modo costante.

Vale quanto già detto per la tipologia precedente, con l'avvertenza di scegliere i dati in modo che la poligonale si possa sviluppare verso ( $P_0$ ).

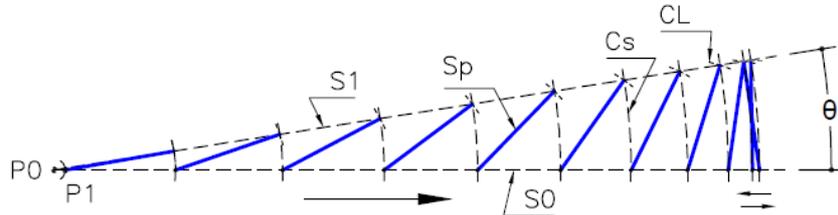
Ho volutamente creato degli esempi speculari ad alcuni già illustrati per la precedente tipologia.



### Tipologia con lunghezza (L) dei segmenti (Sp) costante.

Come per la tipologia precedente non ci possono essere troppi vincoli, se  $(\theta)$  ed  $(L)$  sono costanti  $(\alpha)$  deve essere variabile e ne deriverà di conseguenza.

Descrizione del metodo grafico.



Per prima cosa decido il valore di  $(\theta)$  adatto agli strumenti che ho a disposizione, poi decido i valori di  $(R0)$  ed  $(L)$ , faccio notare che il valore di quest'ultimo deve essere compatibile con gli altri parametri.

Traccio  $(S0)$  ed  $(S1)$ .

Traccio il primo cerchio  $(Cs)$  con raggio  $(R0)$  definendo  $(P1)$ .

Con centro in  $(P1)$  traccio un cerchio mai utilizzato fino ad ora che chiamo  $(CL)$  con raggio uguale ad  $(L)$ .

Traccio il primo segmento  $(Sp)$  da  $(P1)$  al punto di incrocio del cerchio  $(CL)$  con  $(S1)$ .

Traccio quindi il secondo cerchio  $(Cs)$  passante per l'incrocio tra  $(Sp)$  ed  $(S1)$  determinando in questo modo su  $(S0)$  il punto di partenza del segmento  $(Sp)$  successivo.

Proseguo fino a quando serve con la sequenza di cerchi  $(CL)$  segmenti  $(Sp)$  e cerchi  $(Cs)$ .

Tracciati tutti i segmenti  $(Sp)$  li ruoto ad uno ad uno partendo dal secondo dopo  $(P1)$  e di quanto serve perché il loro punto iniziale coincida con il punto finale del segmento  $(Sp)$  precedente, realizzando in questo modo la poligonale.

Osservazioni relative a questa tipologia.

La prima considerazione è che la lunghezza  $(L)$  deve essere compatibile con  $(\theta)$  ed  $(R0)$ , in pratica  $(L)$  deve essere sufficientemente lungo.

La seconda considerazione è che la poligonale è destinata ad assestarsi ad una distanza da  $(P0)$  dipendente dai parametri  $(\theta)$  ed  $(L)$ , per spiegarci più facilmente di seguito mi riferisco alla curva che i vertici della poligonale intercettano.

La curva con origine in  $(P1)$  si sviluppa inizialmente allontanandosi da  $(P0)$  descrivendo un tratto di circonferenza fino a diventare una curva che oscilla tra due circonferenze con raggio molto simile e con centro in  $(P0)$ .

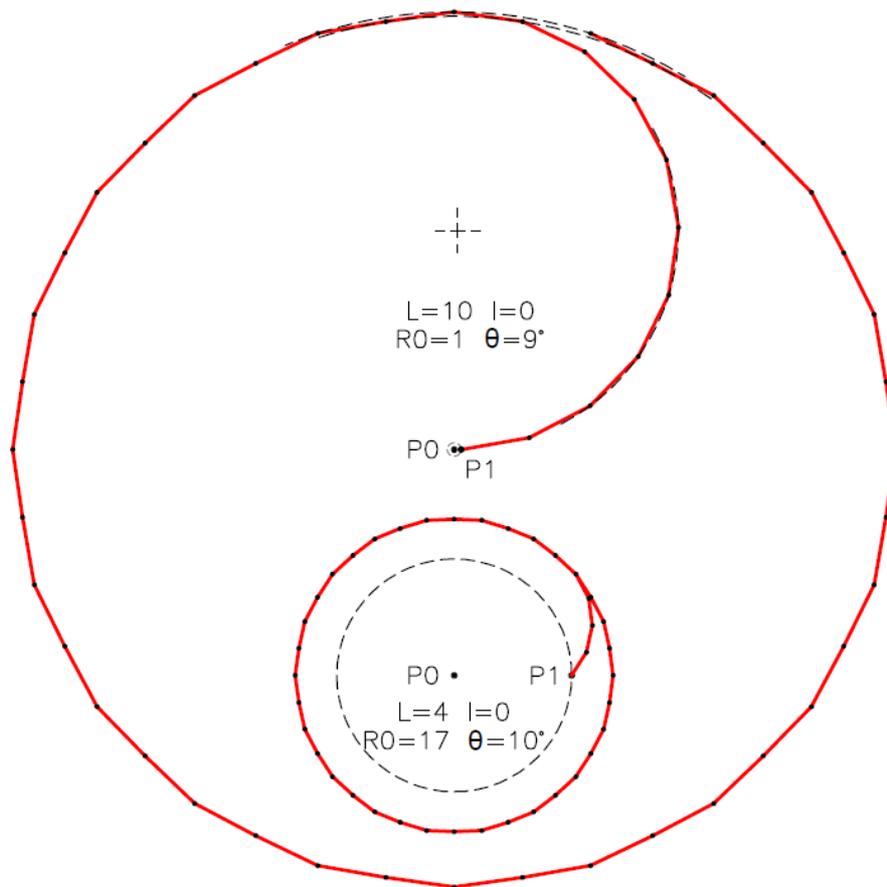
Questa particolarità della oscillazione tra due circonferenze trova conferma nello schema di base osservando che termina con due segmenti  $(Sp)$  incrociati che si richiamano a vicenda.

Ovviamente l'oscillazione sarà sempre più piccola riducendo il valore di  $(\theta)$ .

I raggi di queste due circonferenze saranno maggiori o minori in funzione del rapporto tra la lunghezza  $(L)$  dei segmenti  $(Sp)$  ed il passo angolare  $(\theta)$ , maggiore è questo rapporto e più grandi saranno questi raggi.

In presenza del passo angolare  $(\theta)$  costante, il suo valore, determina il numero di punti di contatto con una curva, fermo restando che bisogna modificare almeno un altro parametro per non cambiare curva di riferimento.

Senza aver approfondito l'argomento posso dire che i valori di  $(\theta)$  in gradi decimali ed  $(L)$  non devono rimanere esattamente uguali ma molto simili.



Dedicati a questa tipologia ho pubblicato su viXra.org l'articolo **1911.0465** "Polygonal with Segments of Constant Length, Defined by Basic Diagram with Angular Step (C)" e su GeoGebra.org una attività dal titolo "Polygonal. Angular step and length of segments constant".

Tipologia con lunghezza (L) dei segmenti (Sp) crescente in modo costante.

Osservazioni relative a questa tipologia.

Il metodo grafico è uguale al precedente con la sola differenza che il valore di (L) va di volta in volta incrementato.

Questa tipologia genera una poligonale simile a quella dedicata alla spirale di Archimede ma con un passo della spirale che non è esattamente costante.

Tipologia con lunghezza (L) dei segmenti (Sp) decrescente in modo costante.

Il metodo grafico è uguale al precedente con la sola differenza che il valore di (L) va di volta in volta decrementato.

Osservazioni relative a questa tipologia.

Questa tipologia si scontra con il passo angolare ( $\theta$ ) costante, per grande che sia il valore di (L) e piccoli i valori del decremento (I) e del passo angolare ( $\theta$ ) la poligonale è destinata a terminare quando la lunghezza (L) del segmento (Sp) diventa inferiore alla distanza tra (S0) ed (S1).

Tipologia con passo ( $P_c$ ) dei cerchi crescente in modo costante e tipologia con passo ( $P_c$ ) dei cerchi decrescente in modo costante.

Per queste due tipologie rimando all'articolo **1912.0282** "Polygonal Defined by Basic Scheme with Angular Step ( $C$ ) Through the Management of the ( $P_c$ ) Step of the Circles ( $C_s$ )" pubblicato su viXra.org ed all'attività "Poligonale. Passo angolare costante e passo dei cerchi gestibile" pubblicata su GeoGebra.org.

Qui si interrompe la mia analisi delle varie tipologie di poligonali caratterizzate da passo angolare ( $\theta$ ) costante. Dall'analisi di queste tipologie caratterizzate dal passo angolare ( $\theta$ ) costante si ha la conferma che l'inclinazione ( $\alpha$ ) dei segmenti ( $S_p$ ) è il parametro che maggiormente può creare situazioni diverse.

- - - - -

Voglio ora ricordare ed analizzare la mia prima spirale poligonale, quella con segmenti ( $S_p$ ) di inclinazione ( $\alpha$ ) costante e lunghezza ( $L$ ) definita da cerchi con centro in ( $P_0$ ) e di passo ( $P_c$ ) costante.

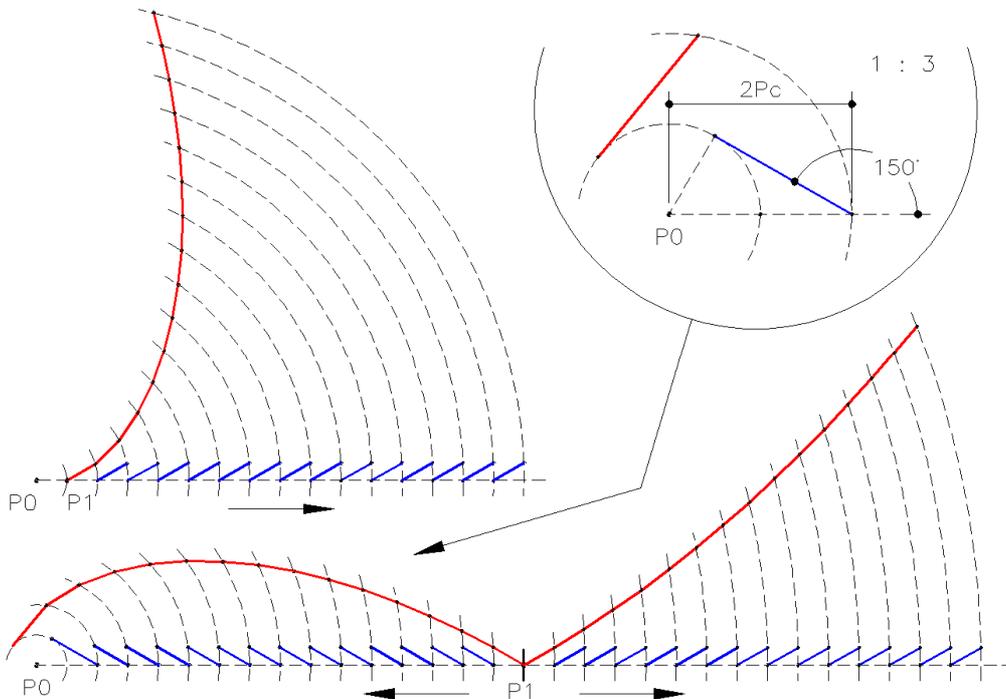
Questa poligonale rientra nella tipologia con passo angolare variabile ( $\beta$ ); ho abbandonato quasi subito questo tipo di poligonale passando a quella con inclinazione e lunghezza dei segmenti costante.

Pubblicando su GeoGebra.com tre attività per questo tipo di poligonale, mi sono dimenticato della prima direzione di sviluppo verso l'origine ( $P_0$ ) e queste attività le ho realizzate per la direzione contraria.

Recentemente ho rimediato pubblicando una nuova attività che realizza entrambe le direzioni di sviluppo. Nell'articolo per le istruzioni spiego la differenza fondamentale consistente nella possibilità di assegnare qualsiasi valore di ( $\alpha$ ) per la poligonale che si sviluppa in allontanamento da ( $P_0$ ).

Per la poligonale in avvicinamento a ( $P_0$ ) sono ammessi valori di ( $\alpha$ ) tali che i segmenti ( $S_p$ ) possano sempre incrociare il cerchio successivo (verso ( $P_0$ )) a quello da cui sono iniziati.

Per questo articolo ho preparato un disegno che ne mostra dei brevi tratti nei due versi di sviluppo e nel realizzarlo mi sono accorto di una particolarità.



La particolarità consiste nel poter facilmente realizzare una poligonale il cui ultimo segmento è sicuramente tangente al cerchio successivo (verso l'origine), come evidenziato nel dettaglio ingrandito.

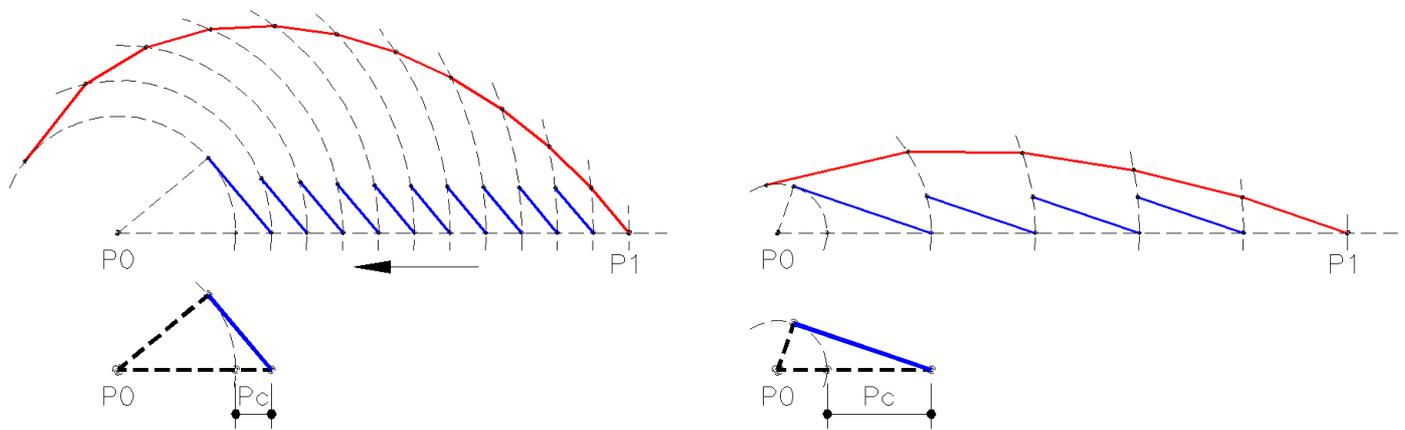
Questa situazione si può realizzare per qualsiasi distanza dall'origine ha inizio la poligonale, se vengono rispettate due condizioni:

1. L'inclinazione dei segmenti ( $Sp$ ) deve essere  $150^\circ$ .
2. Il passo ( $Pc$ ) dei cerchi deve essere calcolato dividendo la distanza tra il punto di inizio ( $P1$ ) e ( $P0$ ) in un numero di parti uguali.

L'immagine precedente è pensata per confrontare alcune forme della poligonale in funzione della distanza tra ( $P1$ ) e ( $P0$ ) e della direzione di sviluppo.

Nella parte bassa ho unito in ( $P1$ ) una spirale che si sviluppa allontanandosi dall'origine, ad una spirale che si sviluppa avvicinandosi all'origine, questo vuol solo essere un ulteriore confronto.

La tangenza può essere realizzata anche per valori dell'inclinazione dei segmenti ( $Sp$ ) diversa da  $150^\circ$ , in questo caso la distanza tra ( $P1$ ) e ( $P0$ ) non può essere qualsiasi; con due esempi riportati nella seguente immagine provo ad evidenziare come ( $Pc$ ) dipende dall'inclinazione dei segmenti ( $Sp$ ) e dal raggio che si sceglie per l'ultimo cerchio; risolto il triangolo si può determinare la distanza tra ( $P1$ ) e ( $P0$ ).



Considerando quello che ho dimostrato potersi realizzare ed anche per i casi particolari descritti in questo articolo con riferimento allo schema di base, spero di aver dato un'idea abbastanza chiara delle possibilità che offre il mio metodo grafico e di come secondo me deve essere usato.

Di seguito riporto quanto ho scritto dopo che mi è stato detto che ho riscoperto il metodo di Eulero (affermazione che non mi trova d'accordo), per rivendicare l'originalità del mio metodo grafico basato sullo "schema di base".

Ricordo che il mio articolo di riferimento è "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" pubblicato su viXra.org al seguente link <https://vixra.org/abs/1910.0086>.

Ci tengo anche a precisare che non mi sono ispirato a nulla di già esistente, come credo quasi tutti sapevo dell'esistenza della spirale di Archimede, mentre la spirale logaritmica non la conoscevo.

Avendo già pubblicato sia gli articoli su viXra.org che le prime attività su GeoGebra.org, provando a verificare quanto fossero visibili su internet, mi è capitato di imbartermi in pubblicazioni riguardati spirali poligonali ed anche spirali poligonali logaritmiche; nulla però che fosse basato su quello che ho definito "schema di base" del quale nella pagina precedente ho inserito alcune immagini prese a caso da miei articoli.

Tornando al metodo di Eulero, io non sono un matematico ma provando a capire di cosa si tratta non vi ho trovato niente di simile allo "schema di base" il quale è nato per mia comodità ed in seguito mi è diventato indispensabile.

Ora voglio raccontare come è capitato che mi sono inventato lo "schema di base".

Per mio uso personale volevo realizzare un tratto di poligonale (che doveva rappresentare il profilo di una pala di un ventilatore centrifugo) che rispetto al centro di rotazione (che poi sarebbe diventato l'origine delle spirali poligonali) gli si avvicinasse con inclinazione costante; quindi ognuno dei segmenti della poligonale doveva avere rispetto al centro di rotazione la stessa inclinazione.

Fissato il centro di rotazione ho tracciato due circonferenze a delimitarne la distanza massima e minima del tratto di poligonale dal centro.

Ho poi tracciato altre circonferenze tali da suddividere la distanza tra le due in parti uguali.

Di seguito, dal centro di rotazione e fino ad incontrare la circonferenza più esterna, ho tracciato un segmento orizzontale da sinistra a destra, dal punto di intersezione ho quindi tracciato un secondo segmento (il primo della poligonale) avente rispetto al segmento precedente l'inclinazione desiderata e di lunghezza tale da terminare sulla circonferenza appena più interna a quella da cui era iniziato.

Ho proseguito tracciando un secondo segmento dal centro di rotazione fino al punto finale del primo segmento della poligonale, da questo stesso punto ho quindi tracciato il secondo segmento della poligonale con la stessa regola con cui avevo tracciato il primo.

Completato il tratto di poligonale ho avuto la necessità di realizzarne un altro sempre con inclinazione costante dei segmenti, ma di un altro valore.

A questo punto ho pensato che sarebbe stato più semplice utilizzare il solo primo segmento orizzontale come base di partenza di tutti i segmenti che poi avrebbero formato la poligonale, e così è nato lo "schema di base".

Il motivo per cui è diventata una ricerca è che mi sono subito chiesto che tipo di curva avessi approssimato, da un confronto con i manuali che ho a disposizione ho escluso altri tipi di curve quindi, probabilmente si trattava di una spirale ma la spirale di Archimede che conoscevo aveva altre caratteristiche; cercando su internet l'esistenza di una spirale con inclinazione costante ho trovato la spirale logaritmica, che mi è molto piaciuta.

Avendo a disposizione un CAD bidimensionale che permette di realizzare delle applicazioni per automatizzare il disegno, grazie ad una formula in coordinate polari trovata su Wikipedia ho realizzato una applicazione in grado di disegnare una spirale logaritmica in funzione dei dati forniti; ho poi capito che anche questa applicazione in realtà realizza una poligonale logaritmica avendo assegnato ad ogni ciclo l'incremento di un grado per il valore angolare ( $\theta$ ), in seguito ho implementato la possibilità di inserire qualsiasi valore per ( $\theta$ ).

Per poter effettuare facilmente il confronto ho realizzato una seconda applicazione in grado di realizzare la poligonale che avevo costruito manualmente; per semplificarmi la vita ho deciso che la lunghezza dei segmenti della poligonale non era definita da inclinazione dei segmenti e passo dei cerchi (delimitata dai cerchi) ma la stabilivo io ed inizialmente era fissa come anche la loro inclinazione.

Come anche scritto nell'articolo già citato, mi sono subito accorto che si trattava di due spirali poligonali diverse, la mia era costituita da segmenti di inclinazione e lunghezza costante mentre la poligonale logaritmica (poligonale a causa dell'incremento a scatti del valore di ( $\theta$ )) era costituita da segmenti di inclinazione costante ma di lunghezza che variava secondo una qualche regola avvicinandosi o allontanandosi dall'origine.

Devo dire che proprio mentre stavo concludendo il citato articolo ho capito come fare per risolvere il problema di determinare la variazione della lunghezza dei segmenti della spirale poligonale logaritmica; in effetti la soluzione l'avevo sotto gli occhi avendone realizzato l'applicazione, ma non me ne ero accorto e ci sono arrivato in seguito ad un ragionamento fatto sullo schema di base della mia spirale poligonale.

A questo punto ho capito anche un'altra importante differenza tra la spirale poligonale che avevo realizzato e la spirale poligonale logaritmica; in conseguenza di inclinazione e lunghezza dei segmenti costante la mia prima (in realtà stavo lavorando con la seconda) spirale poligonale a differenza della logaritmica non ha il passo angolare costante.

- - - - -  
Diritto d'autore rivendicato da Dante Servi  
- - - - -

Dante Servi Bressana Bottarone (PV)  
[dante.servi@gmail.com](mailto:dante.servi@gmail.com)

Questo è il link dove trovate tutti i lavori che ho pubblicato su GeoGebra.  
<https://www.geogebra.org/u/bydante>

Per trovare gli articoli da cui derivano le attività che ho pubblicato su GeoGebra, questo è il link  
[https://vixra.org/author/dante\\_servi](https://vixra.org/author/dante_servi)

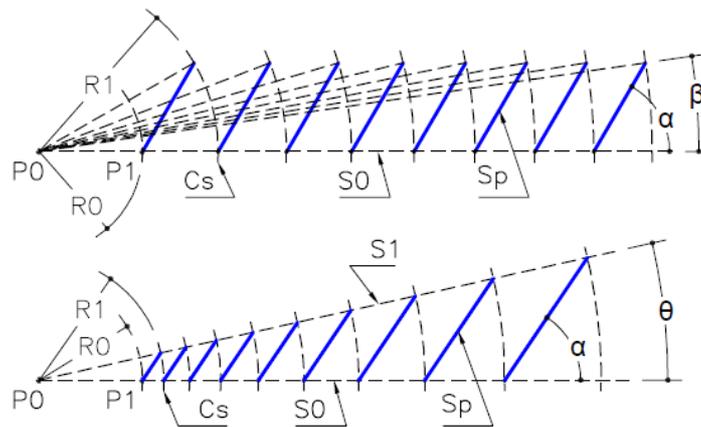
With the article "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" I have described a graphic method of mine to create polygonal spirals and I have also described how this method allows the creation of polygonal with all vertices in common with the logarithmic spiral and of Archimedes.

With this article, I would like to demonstrate how useful information relating to the resulting polygonal can be drawn from the "basic scheme" from which my graphic method is born.

As for the activities published on GeoGebra.com, from revision [v2] I decided to change the corner symbols using lowercase Greek letters, so:  $A \rightarrow \alpha$   $Y \rightarrow \gamma$   $C \rightarrow \theta$   $A1 \rightarrow \beta$

When I devised my graphic method to create polygonal I only needed the basic segment (S0) with origin in (P0), I didn't need a second segment (S1) that always with origin in (P0) formed with this an angle ( $\theta$ ). Then defining the algorithm I needed to connect the free end of the segments (Sp) with (P0) to define the angle ( $\beta$ ) and the distance (R1) which is then nothing but the radius of the passing circle (Cs) for the end point of the segment (Sp).

It can be seen that in this way the end point of the segment (Sp) is defined by two polar coordinates, the first with reference to the initial point of the segment itself and the second with reference to the origin (P0).



The segment (S1) with origin in (P0) and forming with (S0) the angle ( $\theta$ ) I introduced to create a polygonal with all the vertices in common with the logarithmic spiral, and then do the same with the Archimedes spiral. The angle ( $\theta$ ) immediately turned out to be the constant angular step of the vertices of the polygonal. The angle ( $\beta$ ) also represents the angular step of the polygonal with the difference that it is not necessarily constant.

While the angle ( $\theta$ ) is born constant the angle ( $\beta$ ) arises as a variable being generally dependent on other parameters, although I do not exclude that it can be used differently.

So in what I define the basic schema of my graphic method, there can be two types of angular steps that with reference to the origin (P0) intercept the vertices of the segments (Sp) and therefore of the polygonal.

Although I know that the vertices of the polygonal generally intercept a curve, my method can be used to make polygonal without necessarily having a spiral or curve as a reference, or it can be used to create a polygonal dedicated to a curve.

I am convinced of the total freedom of polygonal development based on the variable angular step ( $\beta$ ) I am not so sure that the constant angular step ( $\theta$ ) can represent a constraint.

It may be, but not necessarily, that the constant angular step ( $\theta$ ) is the most suitable to realize a polygonal dedicated to a curve, more probably to a spiral.

I decided that first I describe how to graphically create a polygonal with inclination ( $\alpha$ ) and length ( $L$ ) of the segments ( $S_p$ ) both constants.

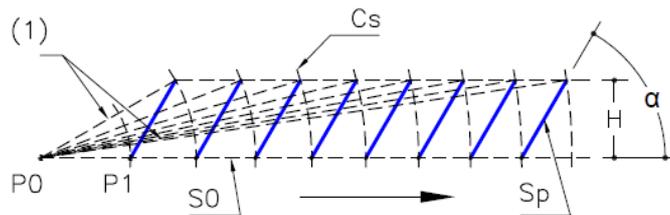
This is the most constrained of the types achievable with variable angular step ( $\beta$ ).

Then, using the basic diagrams, I will describe some particular situations that can be encountered on the path of polygonal with variable angular pitch ( $\beta$ ).

Below I will describe how to graphically create both the polygonal dedicated to the logarithmic spiral and to that of Archimedes.

At the end I will analyze some types of polygonal with constant angular step ( $\theta$ ).

How to graphically create a polygonal spiral with inclination ( $\alpha$ ) and length ( $L$ ) of both segments ( $S_p$ ) both constant.



Note (1): Bundle of segments ( $S_1$ ) each tied to a specific one ( $S_p$ ), defined by a length ( $R_1$ ) and an angle ( $\beta$ ) respect to ( $S_0$ ).

I draw the segment ( $S_0$ ) starting from the point ( $P_0$ ) and long enough.

I draw the first circle ( $C_s$ ) with radius ( $R_0$ ), determining ( $P_1$ ).

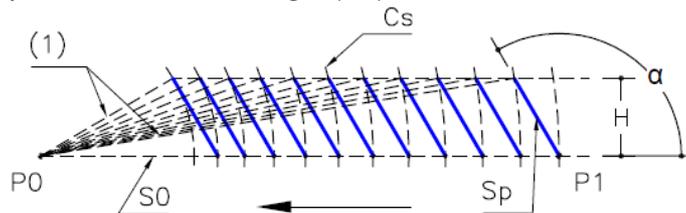
I draw the first segment ( $S_p$ ) with start in ( $P_1$ ), length ( $L$ ) and inclination ( $\alpha$ ).

I draw the second circle ( $C_s$ ) passing through the end point of the first segment ( $S_p$ ), thus determining on ( $S_0$ ) the starting point of the second segment ( $S_p$ ) which will be identical to the first.

Continuing in a similar way complete the series of segments ( $S_p$ ) and circles ( $C_s$ ).

Tracked all the segments ( $S_p$ ) I rotate them one by one starting from the second after ( $P_1$ ) and of what is needed for their initial point to coincide with the end point of the previous segment ( $S_p$ ), thus creating the polygonal.

Basic scheme for the development towards the origin ( $P_0$ ).

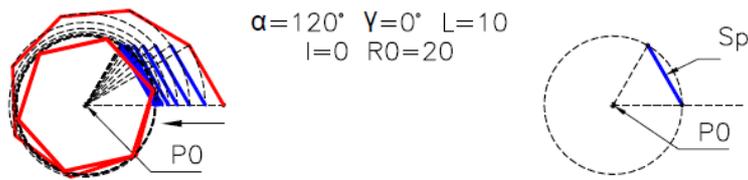


Now with the help of the basic diagram here are some particular situations that can be encountered on the path of the polygonal with variable angular increment ( $\beta$ ).

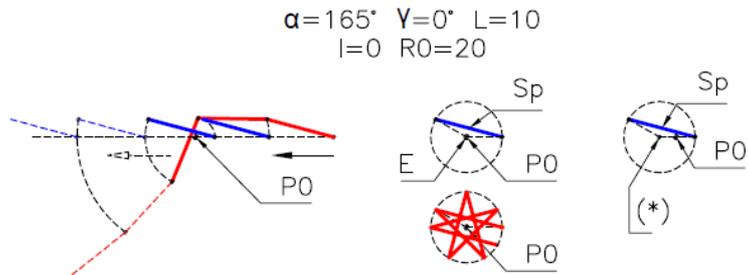
Beginning with the description of the behavior of polygonal spirals with inclination ( $\alpha$ ) and length ( $L$ ) of the segments ( $S_p$ ) both constant, when developing towards the origin ( $P_0$ ) they arrive in proximity.

I have identified two possible situations.

The first concerns the case in which a segment has the two extremes at the same distance from the origin ( $P_0$ ) and in this case if it is the one that starts in ( $P_1$ ) or if the segments of the basic scheme that follow it will be in the same condition as the spiral is rolled around the origin.



The second is determined when what has just been described does not occur; in this case the sequence of segments (Sp) continues away from (P0), consequently the resulting polygon follows the same fate.



(\*) I call (E) the point on (S0) equidistant from the vertices of (Sp)

The figure on the right represents the reason that produces the overcoming and the consequent departure from (P0); exceeding (P0) occurs more easily for values of  $(\alpha) \geq 135^\circ$ , but (E) can still coincide with (P0). The central figure shows that even for this value of  $(\alpha)$  it is possible to roll the polygon around (P0); I published on GeoGebra.com an activity called "my second spiral and polygonal stars" which together the enclosed instruction can help to investigate the matter further.

As the figure on the right shows, it is the position of (E) with respect to (P0) that determines whether or not it is exceeded, which occurs if (E) is to the left of (P0).

Polygonal spirals developing away from the origin (P0) with inclination  $(\alpha)$  of the segments (Sp) constant and decreasing length (L).

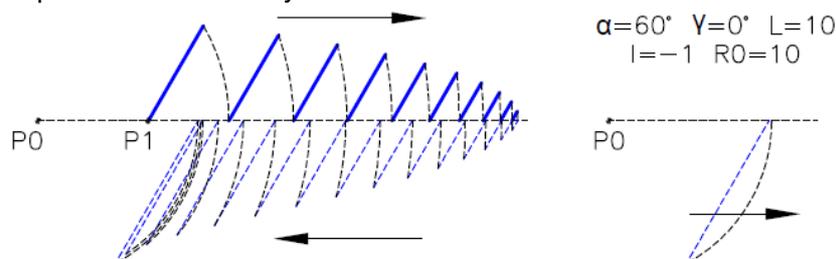
I have identified two possible particular situations.

The first is determined as a consequence of the possible zeroing of the segment length (Sp).

In this case, graphically you can continue with segments (Sp) that begin to lengthen by the same value with which they shortened by reversing the direction and returning to the origin (P0) with inclination with respect to (P0) additional to the previous one.

Continuing the sequence of segments (Sp) towards the origin it happens that the end point of the segment (Sp) is found to be more distant from (P0) than its initial point is.

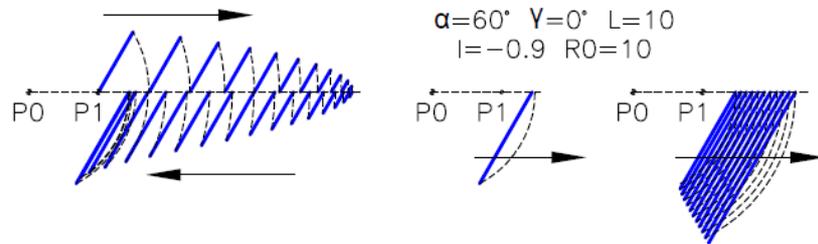
The situation just described generates the inversion of the sequence of segments (Sp) that return to move away from (P0) without changing inclination with respect to it. The algorithm instead when the length (L) of the segment (Sp) is reset stops due to division by zero.



The second, similar to the previous one, is determined when the zeroing of the length is not verified (L) of the segment (Sp), in this case the algorithm does not stop.

When the length (L) of the segment (SP) becomes lower than the value of (I), the next segment will have a negative value of (L) and at this point the segments (Sp) develop towards the origin (P0) with inclination with respect to (P0) additional to the previous one and with a negative length (L) that has become increasing. Below we will determine the same situation already described for the previous case and the sequence of segments (Sp) will definitely return to move away from (P0).

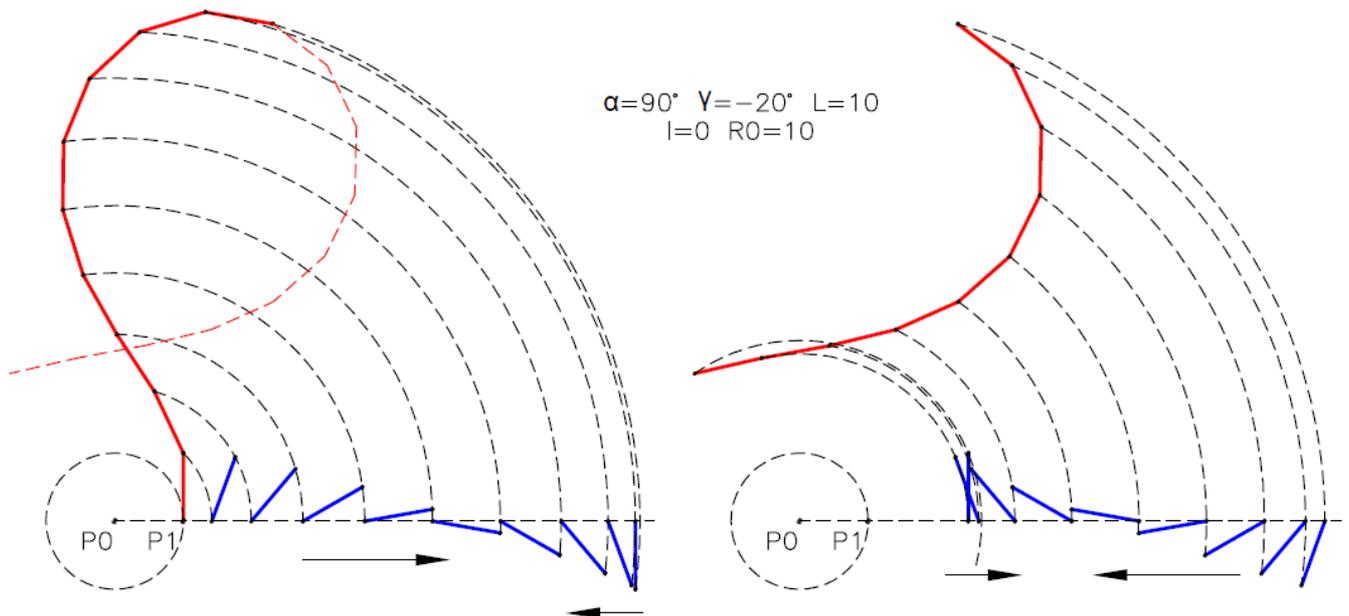
Case equal to what is shown in sheet 8/10 in my reference article.



Polygonal spirals developing away from the origin (P0) with inclination ( $\alpha$ ) of the segments (Sp) decreasing and length (L) constant.

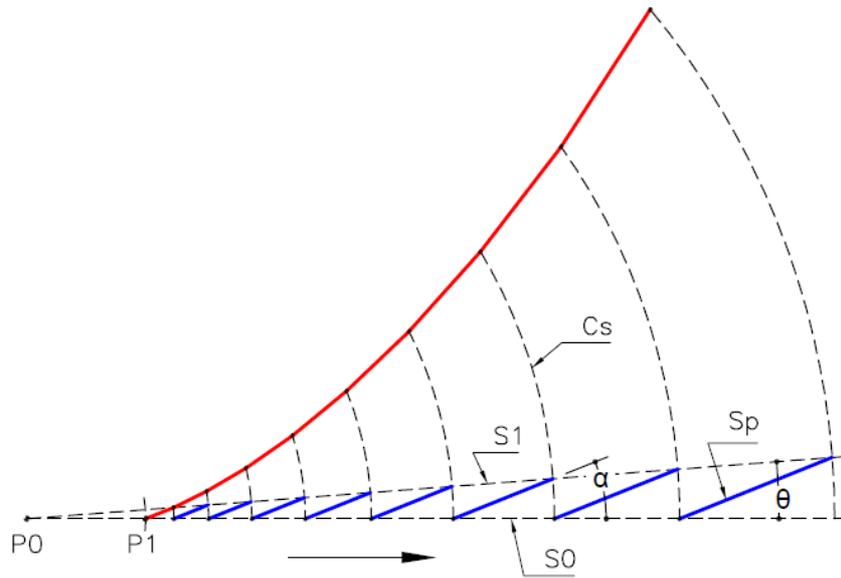
To make the drawing more understandable, I divided it into two parts.

Instead of considering the trend of ( $\alpha$ ) and ( $\beta$ ) I believe it is more useful to observe how the changes of direction in the development of the segments (Sp) with respect to the origin (P0) are determined. Direction changes occur both when the inclination ( $\alpha$ ) of the segment (Sp) exceeds  $90^\circ$  or  $180^\circ$  and when the distances from (P0) of the end point and of the initial point of the segment (Sp) are no longer in agreement with the development direction of the aforementioned segments, as already described in previous cases. This situation is repeated cyclically and generates an image similar to the first two that I have illustrated in the sheet - Example 3/3 - of my reference article, even if in that case the inclination is increasing. In the same sheet there are other images due to inclination ( $\alpha$ ) of the segments (Sp) increasing or decreasing, we can also note the influence of the length of the segments.



I can't think of any other particularities to highlight and I go on to describe how to graphically realize both the polygonal dedicated to the logarithmic spiral and to that of Archimedes.

Polygonal spiral with all vertices in common with a logarithmic spiral.  
Graphic method.



First of all I decide the value of ( $\theta$ ) suitable for the tools I have available, then I decide ( $R_0$ ) and if I want to refer to a logarithmic spiral, I calculate the value of the inclination ( $\alpha$ ) with the following equations, the value of ( $b$ ) for the golden spiral is: 0.0053468 ...

The length ( $L$ ) of the segments ( $S_p$ ) will be determined by the distance from ( $P_0$ ) of their point of beginning, from their inclination ( $\alpha$ ) and from the angle ( $\theta$ ) that the segment ( $S_1$ ) forms with the segment ( $S_0$ ).

$$R_1 = R_0 \cdot e^{(b \cdot \theta)} \quad \alpha = \theta + \text{atan}(R_0 \cdot \sin\theta / R_1 - R_0 \cdot \cos\theta)$$

I draw ( $S_0$ ) and ( $S_1$ ).

I draw the first circle ( $C_s$ ) with radius ( $R_0$ ) defining ( $P_1$ ).

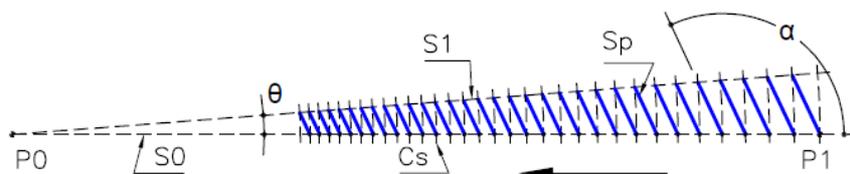
I draw the first segment ( $S_p$ ) with inclination ( $\alpha$ ) with respect to ( $S_0$ ) and long up to meet ( $S_1$ ).

Then I draw the second circle ( $C_s$ ) passing through the intersection between ( $S_p$ ) and ( $S_1$ ) thus determining on ( $S_0$ ) the starting point of the next segment ( $S_p$ ).

I continue until it serves with the sequence of segments ( $S_p$ ) and circles ( $C_s$ ).

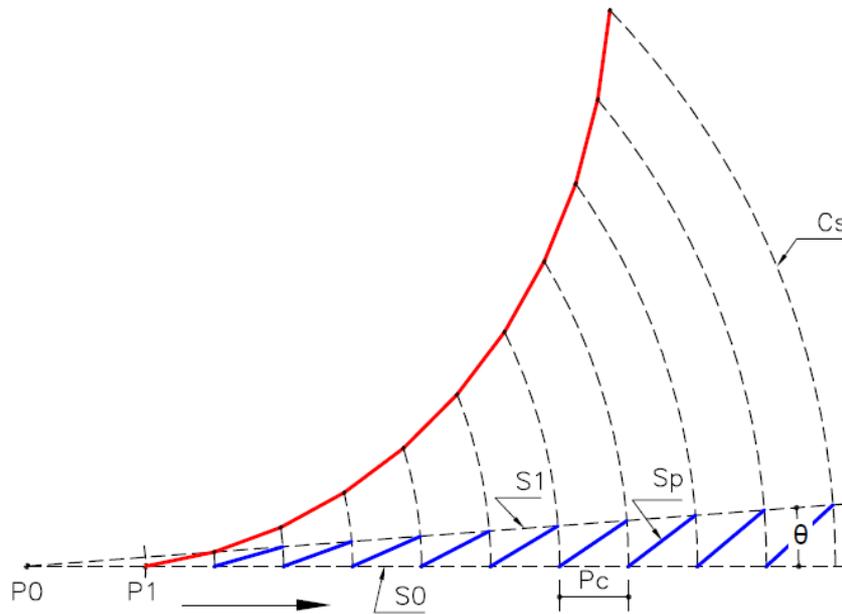
Tracked all the segments ( $S_p$ ) I rotate them one by one starting from the second after ( $P_1$ ) and of what is needed for their initial point to coincide with the end point of the previous segment ( $S_p$ ), thus creating the polygonal.

Basic scheme for the development towards the origin ( $P_0$ ).



Polygonal spiral with all the vertices in common with an Archimedes spiral.

Graphic method.



First I decide the value of  $(\theta)$  suitable for the tools I have available, then I decide  $(R0)$  and if I want to have a  $(Ps)$  that is a step of the given spiral I calculate  $Pc = \theta \cdot Ps / 360$ ;  $(Pc)$  will be the pitch of the circles  $(Cs)$  which together with the segments  $(S0)$  and  $(S1)$  will determine inclination  $(\alpha)$  and length  $(L)$  of the segments  $(Sp)$ . I draw  $(S0)$  and  $(S1)$ .

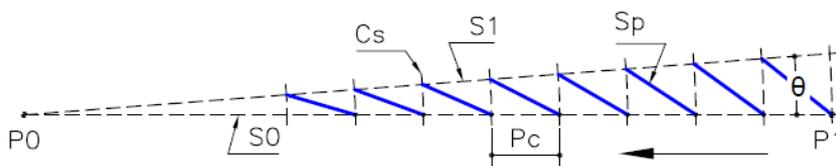
I draw the first circle  $(Cs)$  with radius  $(R0)$  defining  $(P1)$ .

I draw all the following circles  $(Cs)$  increasing the radius of the value  $(Pc)$ .

I draw all the segments  $(Sp)$  starting from  $(P1)$  and using the intersections between the circles  $(Cs)$  and the segments  $(S0)$  and  $(S1)$ .

Tracked all the segments  $(Sp)$  I rotate them one by one starting from the second after  $(P1)$  and of what is needed for their initial point to coincide with the end point of the previous segment  $(Sp)$ , thus creating the polygonal.

Basic scheme for the development towards the origin  $(P0)$ .



Before continuing, I open a parenthesis relative to the possibility of modifying the number of points of contact between a polygonal and a reference curve by modifying the angular step  $(\theta)$ ; having in mind the basic scheme, for example of the polygonal dedicated to the logarithmic spiral.

The angle  $(\theta)$  formed by the segment  $(S1)$  with respect to the base segment  $(S0)$ , determines the number of points of contact between polygonal and spiral.

To maintain contact with the same spiral it is necessary to appropriately modify the inclination value  $(\alpha)$ , as described in my article in question.

Also for the Archimedes spiral by varying the value of  $(\theta)$  the number of points of contact with the spiral varies, but in this case to maintain contact with the same spiral it is necessary to modify appropriately the pitch  $(Pc)$  of the circles  $(Cs)$  according to the equation  $Pc = \theta \cdot Ps / 360$ ; unless there are special constraints for the angle  $(\theta)$ .

Although I have not yet addressed and solved polygonal dedicated to other types of spirals, I always expect the above to be true.

In case of need to maintain contact with the same spiral, it will be necessary to adequately provide for compensation by modifying another parameter.

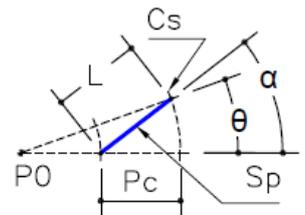
I close the parenthesis relative to the modification of the number of points of contact between polygonal and curve thanks to the angular step ( $\theta$ ).

Now I dedicate myself to the analysis of some types of polygonal with constant angular step ( $\theta$ ).

First consideration: established the angular step ( $\theta$ ) to be constant, one of the three parameters ( $\alpha$ ) ( $L$ ) and ( $P_c$ ) can be managed as desired, the other two will be consequent.

Second consideration: the typology with constant ( $\alpha$ ) inclination of the segments ( $S_p$ ) has already found its application with the polygonal dedicated to the logarithmic spiral.

Third consideration: the typology with constant ( $P_c$ ) step of the circles ( $C_s$ ) has already found its application with the polygonal dedicated to the spiral of Archimedes.



Let's see what types remain.

01. Inclination ( $\alpha$ ) of the segments ( $S_p$ ) increasing.
02. Inclination ( $\alpha$ ) of the segments ( $S_p$ ) decreasing.
03. Inclination ( $\alpha$ ) of the segments ( $S_p$ ) variable.

04. Length ( $L$ ) of segments ( $S_p$ ) constant.
05. Length ( $L$ ) of segments ( $S_p$ ) increasing.
06. Length ( $L$ ) of segments ( $S_p$ ) decreasing.
07. Length ( $L$ ) of segments ( $S_p$ ) variable.

08. Step ( $P_c$ ) of the circles ( $C_s$ ) increasing.
09. Step ( $P_c$ ) of the circles ( $C_s$ ) decreasing.
10. Step ( $P_c$ ) of the circles ( $C_s$ ) variable.

Below I analyze those that have a more limited number of possibilities among these types, trusting however to provide useful information.

Typology with inclination ( $\alpha$ ) of the segments ( $S_p$ ) steadily increasing.

Description of the graphic method.

First I decide the value of ( $\theta$ ) suitable for the tools I have available, then I decide the values of ( $R_0$ ), ( $\alpha$ ) and ( $\gamma$ ). I draw ( $S_0$ ) and ( $S_1$ ).

I draw the first circle ( $C_s$ ) with radius ( $R_0$ ) defining ( $P_1$ ).

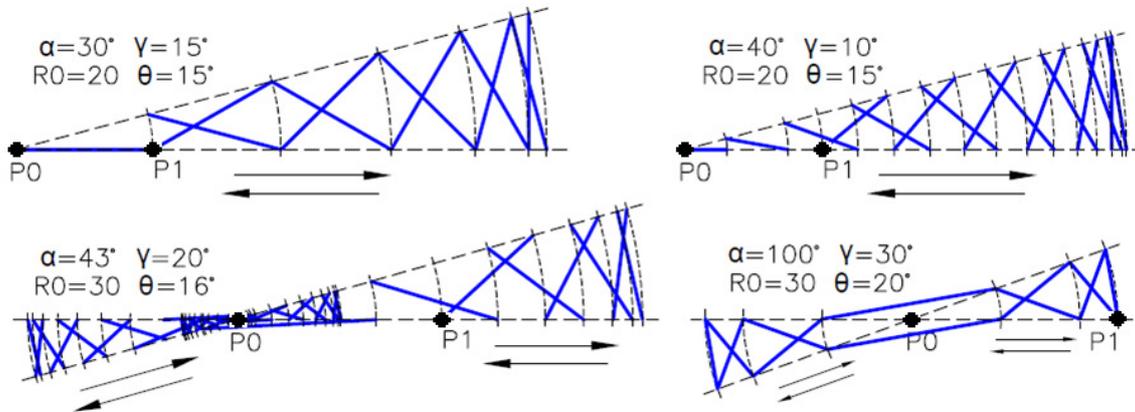
I draw the first segment ( $S_p$ ) with inclination ( $\alpha$ ) with respect to ( $S_0$ ) and long up to meet ( $S_1$ ).

Then I draw the second circle ( $C_s$ ) passing through the intersection between ( $S_p$ ) and ( $S_1$ ) thus determining on ( $S_0$ ) the starting point of the next segment ( $S_p$ ).

I continue until needed with the sequence of segments ( $S_p$ ) and circles ( $C_s$ ), remembering that from time to time the value of the inclination ( $\alpha$ ) of the segment ( $S_p$ ) must be increased by the value ( $\gamma$ ).

Tracked all the segments ( $S_p$ ) I rotate them one by one starting from the second after ( $P_1$ ) and of what is needed for their initial point to coincide with the end point of the previous segment ( $S_p$ ), thus creating the polygonal.

This typology can generate various developments of the basic scheme, in this image I report some examples of various types; symmetrical schemes are possible both in the case of a cycle that ends in (P0) and in the case of an infinite cycle, probably most of the schemes are not symmetrical. Some of the polygons (perhaps the most interesting) that I have inserted in the next image derive from infinite non-symmetrical loops.



Comments related to this typology.

I start by noting that the starting point of the polygonal (P1) is on one side with the origin and the two segments (S0) and (S1) that converge towards it, on the other hand the two segments diverge.

In this first typology the data are: inclination ( $\alpha$ ), inclination increase ( $\gamma$ ), constant angular step ( $\theta$ ), distance from (P0) of the polygonal start point.

The length (L) of the segments cannot be between the data otherwise there would be an excess of constraints.

Since the two segments (S0) and (S1) diverge from (P0) it is evident that, apart inclination, the segments (Sp) will tend to be shorter approaching (P0) and basically longer moving away.

However, as can be seen in some examples given below, if the value of ( $\gamma$ ) is equal to the value of the angular step ( $\theta$ ) the length (L) of the segments (Sp) is constant. In this case the vertices of the polygonal identify a circumference, which can pass beyond that from (P1) also from (P0).

In summary, except for a few exceptions, two of which I will illustrate at the end of the examples, the following cases can occur:

If ( $\gamma$ ) and ( $\theta$ ) are different, the segments (Sp) are of variable length (L).

If ( $\gamma$ ) is sub-multiple or even a multiple of ( $\alpha$ ) the polygonal ends in (P0).

If ( $\gamma$ ) and ( $\theta$ ) are equal, the segments (Sp) are of constant length (L) and the vertices of the polygonal intercept a circle.

If ( $\gamma$ ) and ( $\theta$ ) are equal, sub-multiples or even multiples of ( $\alpha$ ) and submultiples of  $360^\circ$  the segments (Sp) are of constant length (L), the vertices of the polygonal intercept a circle and the polygonal ends in (P0) to the first revolution.

If ( $\gamma$ ) and ( $\theta$ ) are not submultiples of  $360^\circ$  the polygonal makes several revolutions before being able to end in (P0).

Also for this typology the value of ( $\theta$ ) determines the number of vertices in common with the associated curve. In order not to pass to another associated curve, other parameters must also be changed.

For example, if the angular step ( $\theta$ ) and the inclination increment ( $\gamma$ ) are equal by changing their value from 1 to 2, multiply ( $R_0$ ) by 0.88965753... so as not to change the associated curve.

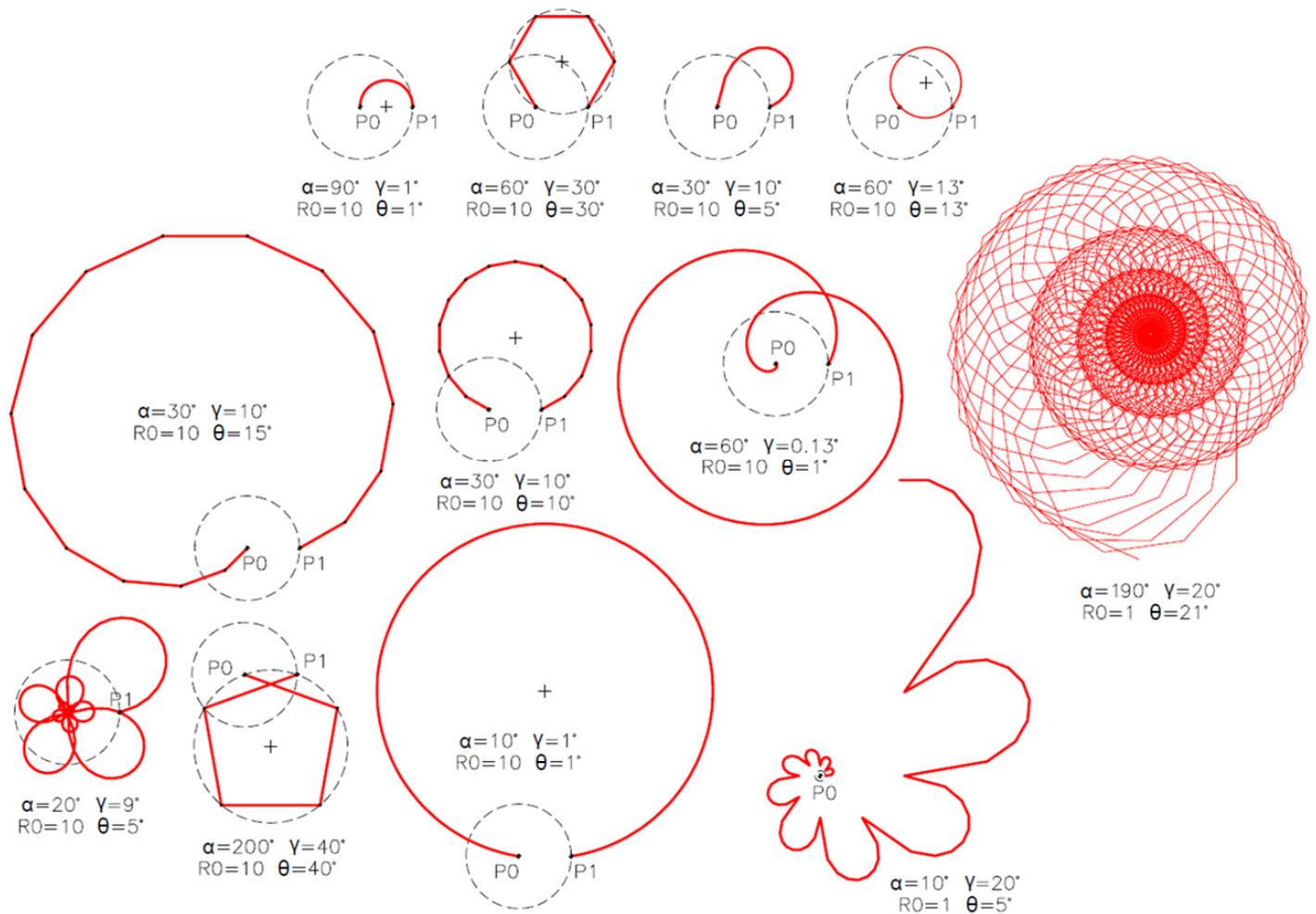
In case the angular step ( $\theta$ ) and the inclination increment ( $\gamma$ ) are not equal, it is not enough to change the value of ( $R_0$ ) accordingly, it is probably also necessary to change the ratio between ( $\theta$ ) and ( $\gamma$ ).

I also point out that multiplying by two the value of ( $R_0$ ) means enlarging the polygonal twice.

The observations reported here are valid for the polygonal that develop towards ( $P_0$ ), I have done several tests which I believe demonstrate the most interesting developments of the polygonal in this direction, and I report below some examples that seem to me quite significant.

Among the following examples one has the same value for ( $\theta$ ) and ( $\gamma$ ) but it is not a sub-multiple of  $360^\circ$ , the polygonal continues by making different revolutions with vertices always in common with the same circumference until a segment ( $S_p$ ) ends in ( $P_0$ ).

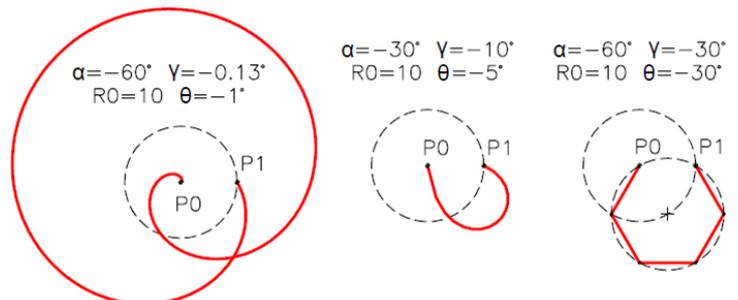
I have dedicated an activity on [geoGebra.com](http://geoGebra.com) to the types with an increasing or decreasing inclination ( $\alpha$ ) of the segments with the name "Angular step and inclination manageable".



Inclination ( $\alpha$ ) of the segments ( $S_p$ ) decreasing steadily.

What already stated for the previous typology applies, with the warning to choose the data so that the polygonal can develop towards ( $P_0$ ).

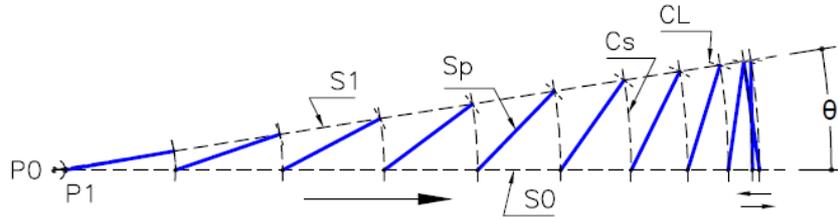
I have deliberately created some specular examples already illustrated for the previous typology.



### Typology with length (L) of segments (Sp) constant.

As for the previous typology there cannot be too many constraints, if  $(\theta)$  and  $(L)$  are constants  $(\alpha)$  it must be variable and will derive accordingly.

Description of the graphic method.



First of all I decide the value of  $(\theta)$  suitable for the tools I have available, then I decide the values of  $(R0)$  and  $(L)$ , I point out that the value of the latter must be compatible with the other parameters.

I draw  $(S0)$  and  $(S1)$ .

I draw the first circle  $(Cs)$  with radius  $(R0)$  defining  $(P1)$ .

With center in  $(P1)$  I trace a circle never used until now that I call  $(CL)$  with radius equal to  $(L)$ .

I draw the first segment  $(Sp)$  from  $(P1)$  to the crossing point of the circle  $(CL)$  with  $(S1)$ .

Then I draw the second circle  $(Cs)$  passing through the intersection between  $(Sp)$  and  $(S1)$  thus determining on  $(S0)$  the starting point of the next segment  $(Sp)$ .

I continue until it serves with the sequence of circles  $(CL)$  segments  $(Sp)$  and circles  $(Cs)$ .

Tracked all the segments  $(Sp)$  I rotate them one by one starting from the second after  $(P1)$  and of what is needed for their initial point to coincide with the end point of the previous segment  $(Sp)$ , thus creating the polygonal.

Comments related to this typology.

The first consideration is that the length  $(L)$  must be compatible with  $(\theta)$  and  $(R0)$ , in practice  $(L)$  must be sufficiently long.

The second consideration is that the polygonal is destined to settle at a distance from  $(P0)$  depending on parameters  $(\theta)$  and  $(L)$ , to explain more easily below I refer to the curve that the vertices of the polygonal intercept.

The curve with origin in  $(P1)$  develops initially moving away from  $(P0)$  describing a section of circumference until it becomes a curve that oscillates between two circumferences with very similar radius and with center in  $(P0)$ .

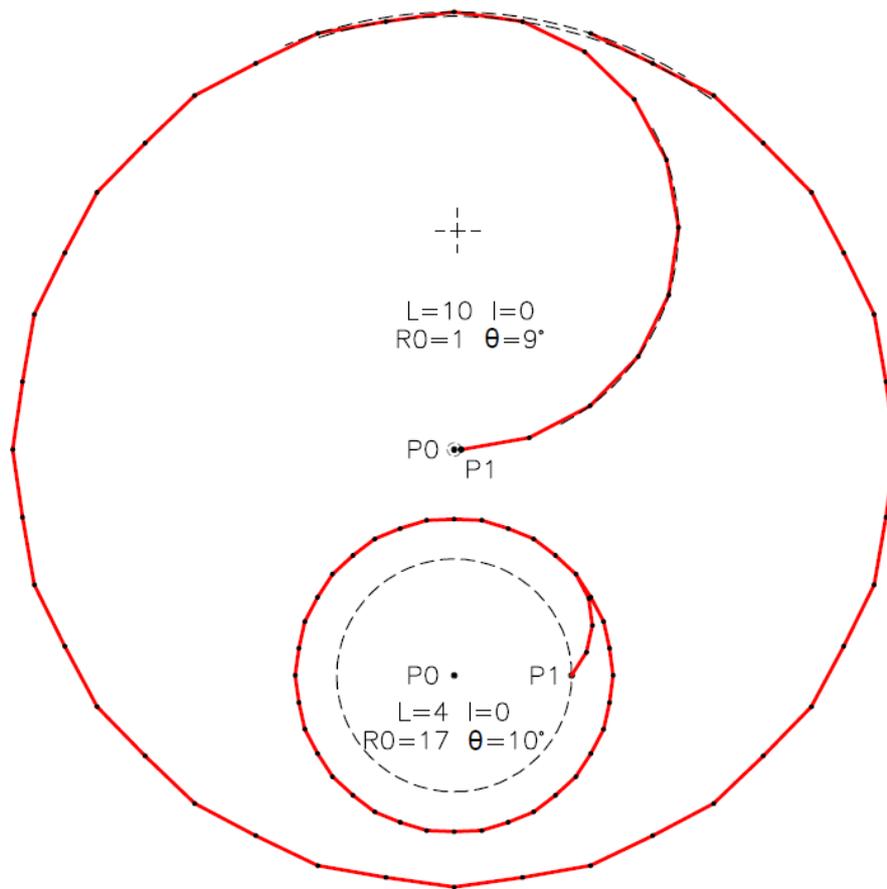
This peculiarity of the oscillation between two circumferences is confirmed in the basic scheme by observing that it ends with two crossed segments  $(Sp)$  which refer to each other.

Obviously the oscillation will always be smaller, reducing the value of  $(\theta)$ .

The radius of these two circumferences will be greater or lesser depending on the ratio between the length  $(L)$  of the segments  $(Sp)$  and the angular step  $(\theta)$ , the greater this ratio and the larger these radius will be.

In the presence of the constant angular step  $(\theta)$ , its value determines the number of points of contact with a curve, it being understood that at least one other parameter must be modified in order not to change the reference curve.

Without having deepened the argument I can say that the values of  $(\theta)$  in decimal degrees and  $(L)$  must not remain exactly equal but very similar.



Dedicated to this typology, I published the article **1911.0465** on viXra.org "Polygonal with Segments of Constant Length, Defined by Basic Scheme with Angular Step (C)" and on GeoGebra.org an activity entitled "Polygonal. Angular step and length of segments constant".

Typology with length (L) of segments (Sp) growing steadily.

Comments related to this typology.

The graphic method is the same as the previous one with the only difference that the value of (L) must be increased from time to time.

This typology generates a polygonal similar to the one dedicated to the Archimedes spiral but with a spiral pitch that is not exactly constant.

Typology with length (L) of segments (Sp) decreasing steadily.

The graphic method is the same as the previous one with the only difference that the value of (L) must be decreased from time to time.

Comments related to this typology.

This typology clashes with the constant angular step ( $\theta$ ), so that both the values of (L) and small the values of the decrement (I) and of the angular step ( $\theta$ ) the polygonal is destined to end when the length (L) of the segment (Sp) becomes less than the distance between (S0) and (S1).

Typology with step (Pc) of the circles increasing in a constant way and typology with step (Pc) of the circles decreasing in a constant way.

For these two types, I refer to article **1912.0282** "Polygonal Defined by Basic Scheme with Angular Step (C) Through the Management of the (Pc) Step of the Circles (Cs)" published on viXra.org and to the "Polygonal. Constant angular step and manageable circles step" activity published on GeoGebra.org.

Here I interrupt my analysis of the various types of polygonal characterized by constant angular step ( $\theta$ ). From the analysis of these typologies characterized by the constant angular step ( $\theta$ ) we have the confirmation that the inclination ( $\alpha$ ) of the segments (Sp) is the parameter that can most create different situations.

- - - - -

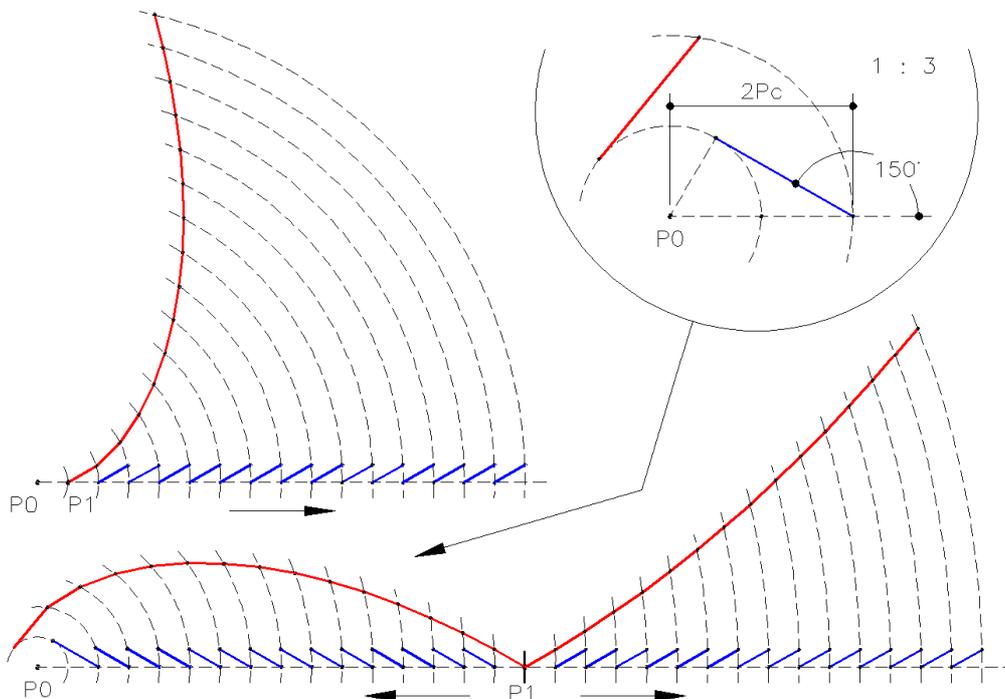
Now I want to remember and analyze my first polygonal spiral, the one with segments (Sp) of constant inclination ( $\alpha$ ) and length (L) defined by circles with center in (P0) and of constant step (Pc).

This polygonal falls within the typology with variable angular step ( $\beta$ ); I almost immediately abandoned this type of polygonal switching to the one with constant inclination and length of the segments.

By publishing three activities for this type of polygonal on GeoGebra.com, I forgot about the first development direction towards the origin (P0) and I made these activities for the opposite direction.

I recently remedied by publishing a new business that accomplishes both directions of development. In the article for the instructions I explain the fundamental difference consisting in the possibility of assigning any value of ( $\alpha$ ) for the polygonal that develops away from (P0). For the polygonal approaching (P0) values of ( $\alpha$ ) are allowed such that the segments (Sp) can always cross the next circle (towards (P0)) to the one from which they started.

For this article I have prepared a drawing that shows short strokes in the two directions of development and in making it I noticed a peculiarity.



The peculiarity consists in being able to easily create a polygonal whose last segment is definitely tangent to the next circle (towards the origin), as shown in the enlarged detail.

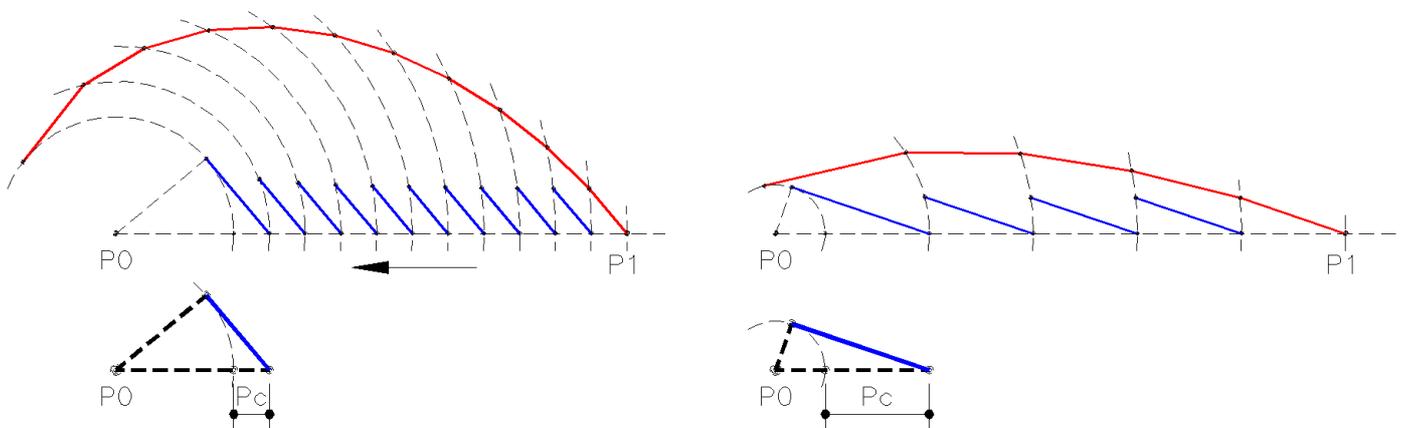
This situation can be achieved for any distance from the origin the polygonal begins, if two conditions are met:

1. The inclination of the segments ( $S_p$ ) must be  $150^\circ$ .
2. The step ( $P_c$ ) of the circles must be calculated by dividing the distance between the starting point ( $P_1$ ) and ( $P_0$ ) into a number of equal parts.

The previous image is designed to compare some shapes of the polygonal as a function of the distance between ( $P_1$ ) and ( $P_0$ ) and the direction of development.

In the lower part I have joined in ( $P_1$ ) a spiral that develops away from the origin, to a spiral that develops approaching the origin, this is just a further comparison.

The tangency can also be achieved for values of the inclination of the segments ( $S_p$ ) other than  $150^\circ$ , in this case the distance between ( $P_1$ ) and ( $P_0$ ) cannot be any; with two examples shown in the following image I try to highlight how ( $P_c$ ) depends on the inclination of the segments ( $S_p$ ) and the radius that is chosen for the last circle; once the triangle is solved, the distance between ( $P_1$ ) and ( $P_0$ ) can be determined.



Considering what I have demonstrated being able to achieve and also for the particular cases described in this article with reference to the basic scheme, I hope I have given a fairly clear idea of the possibilities that my graphic method offers and how I think it must be used.

Below I report what I wrote after I was told that I rediscovered Euler's method (a statement that I do not agree with), to claim the originality of my graphic method based on the "basic scheme".

I remember that my reference article is "Polygonal Spirals with Manageable Inclination Full Version of the Discussion" published on viXra.org at the following link <https://vixra.org/abs/1910.0086>.

I also want to clarify that I was not inspired by anything already existing, as I believe almost everyone knew of the existence of the Archimedes spiral, while I did not know the logarithmic spiral.

Having already published both the articles on viXra.org and the first activities on GeoGebra.org, trying to verify how visible they were on the internet, I happened to come across publications concerning polygonal spirals and also logarithmic polygonal spirals; nothing, however, that was based on what I have defined "basic scheme" of which on the previous page I inserted some images taken at random from my articles.

Returning to Euler's method, I am not a mathematician but trying to understand what it is I have not found anything similar to the "basic scheme" which was born for my convenience and later became indispensable. Now I want to tell how it happened that I invented the "basic scheme".

For my personal use, I wanted to create a polygonal section (which had to represent the profile of a centrifugal fan blade) that would approach it with a constant inclination with respect to the center of rotation (which would later become the origin of the polygonal spirals); therefore each of the segments of the polygonal had to have the same inclination with respect to the center of rotation.

Having fixed the center of rotation, I drew two circles to delimit the maximum and minimum distance of the polygonal section from the center.

I then traced other circles such as to divide the distance between the two in equal parts.

Below, from the center of rotation and until meeting the outermost circumference, I traced a horizontal segment from left to right, from the point of intersection I then traced a second segment (the first of the polygonal) having an inclination with respect to the previous segment desired and of such length as to end on the circumference just inside the one from which it started.

I continued by tracing a second segment from the center of rotation to the end point of the first segment of the polygonal, from this same point I then traced the second segment of the polygonal with the same rule with which I had traced the first.

After completing the polygonal section, I needed to create another one, always with a constant inclination of the segments, but with a different value.

At this point I thought it would be easier to use only the first horizontal segment as a starting point for all the segments that would then have formed the polygonal, and so the "basic scheme" was born.

The reason why it became a research is that I immediately asked myself what kind of curve I had approximated, from a comparison with the manuals I have available I excluded other types of curves so, probably it was a spiral but the Archimedes spiral that I knew had other characteristics; searching on the internet for the existence of a spiral with a constant inclination, I found the logarithmic spiral, which I really liked.

Having available a two-dimensional CAD that allows you to create applications to automate the design, thanks to a formula in polar coordinates found on Wikipedia I have created an application capable of drawing a logarithmic spiral according to the data provided; I then realized that even this application actually creates a logarithmic polygonal having assigned to each cycle the increase of one degree for the angular value ( $\theta$ ), later I implemented the possibility of entering any value for ( $\theta$ ).

In order to easily make the comparison, I created a second application capable of creating the polygonal that I had built manually; to simplify my life I decided that the length of the polygonal segments was not defined by the inclination of the segments and the step of the circles (delimited by the circles) but I established it and initially it was fixed as well as their inclination.

As also written in the article already mentioned, I immediately realized that they were two different polygonal spirals, mine was made up of segments of constant inclination and length while the logarithmic polygonal (polygonal due to the incremental increments of the value of ( $\theta$ )) consisted of segments of constant inclination but of length that varied according to some rule, approaching or moving away from the origin.

I must say that just as I was concluding the aforementioned article I understood how to solve the problem of determining the variation in the length of the segments of the logarithmic polygonal spiral; in fact, I had the solution under my eyes having implemented its application, but I had not noticed it and I arrived there following a reasoning made on the basic scheme of my polygonal spiral.

At this point I also understood another important difference between the polygonal spiral I had made and the logarithmic polygonal spiral; as a consequence of constant inclination and length of the segments my first (actually I was working with the second) polygonal spiral, unlike the logarithmic, does not have a constant angular step.

- - - - -  
Copyright by Dante Servi  
- - - - -

Dante Servi Bressana Bottarone (PV) Italy  
[dante.servi@gmail.com](mailto:dante.servi@gmail.com)

This is the link where you can find all the works I published on GeoGebra.  
<https://www.geogebra.org/u/bydante>

To find the articles from which the activities I have published on GeoGebra derive, this is the link  
[https://vixra.org/author/dante\\_servi](https://vixra.org/author/dante_servi)