
ETUDE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA
COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER ET DES
OBSERVATIONS TERRESTRES

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, ING. GÉNÉRAL

Résumé

Ce papier concerne l'étude des erreurs systématiques dans la combinaison des données Doppler et les observations terrestres classiques dans la compensation des réseaux géodésiques. Cette étude est extraite du mémoire de fin d'études intitulé " La Combinaison des Données Doppler et les Observations Terrestres Classiques dans la Compensation des Réseaux Géodésiques " présenté en octobre 1986 pour l'obtention du diplôme d'Ingénieur Géographe Civil de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques (ENSG/IGN France).

Abstract

This paper concerns the study of systematic errors in the combination of Doppler data and classical terrestrial observations in the compensation of geodetic networks. This study is taken from the thesis presented in October 1986 for obtaining the Civil Geographic Engineer diploma from the National School of Geographic Sciences (ENSG / IGN France).

Table des matières

1	RAPPELS SUR LES ERREURS SYSTÉMATIQUES	1
1.1	INTRODUCTION	1
1.2	ORIGINES DES ERREURS SYSTÉMATIQUES	2
1.3	DÉFINITIONS	2
2	ANALYSE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TERRESTRES	5
2.1	SUR L'ORIENTATION DU RÉSEAU GÉODÉSIQUE TERRESTRE	6
2.1.1	Le choix de (φ, λ, H) au point fondamental	6
2.1.2	Sur la variation de l'azimut	16
2.1.3	Sur l'inconnue d'orientation	20
2.2	SUR LA MISE À L'ÉCHELLE D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE	22
2.2.1	Introduction	22
2.2.2	Expression de l'échelle en fonction des coordonnées géodésiques (φ, λ, H)	26

3	LES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER AVEC LES OBSERVATIONS TERRESTRES CLASSIQUES	29
3.1	ORIENTATION DU RÉFÉRENTIEL GÉODÉSIQUE	30
3.1.1	Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique	31
3.1.2	Influence de l'altitude ellipsoïdique sur les paramètres du modèle Bursa-Wolf	32
3.1.3	Influence de la longitude géodésique	32
	Littérature.....	35

CHAPITRE 1

RAPPELS SUR LES ERREURS SYSTÉMATIQUES

Sommaire

1.1	INTRODUCTION	1
1.2	ORIGINES DES ERREURS SYSTÉMATIQUES	2
1.3	DÉFINITIONS	2

1.1 INTRODUCTION

L'un des problèmes fondamentaux rencontrés dans la compensation des réseaux géodésiques est l'accumulation des erreurs systématiques. Pour les réseaux Doppler, le problème est de moins en moins présent avec l'amélioration des modèles de calcul et l'augmentation de la précision des résultats.

Les données Doppler sont nécessaires à la détection des erreurs systématiques d'orientation, de mise à l'échelle et de position des réseaux géodésiques terrestres (D. B. Thomson, 1976).

1.2 ORIGINES DES ERREURS SYSTÉMATIQUES

Les sources des erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sont nombreuses (V. Ashkenazi, 1981 ; D.B. Thomson, 1976 ; T. Vincenty, 1985), nous citons les plus importantes :

- la non modélisation des erreurs systématiques des observations de directions, de distances et des distances zénithales,
- la réfraction atmosphérique,
- les erreurs inconnues des observations astronomiques,
- les erreurs sur les altitudes orthométriques et l'imprécision des hauteurs du géoïde et des composantes des déviations des verticales,
- la propagation des erreurs lors de la réduction des observations,
- la calibration des appareils de mesures.

1.3 DÉFINITIONS

Dans ce paragraphe, nous rappellons quelques définitions sur les erreurs. Soit \mathcal{L} la valeur nominale d'une grandeur que nous cherchons à estimer (coordonnées, angles, distances, ...) et $\overline{\mathcal{L}}$ un estimateur de \mathcal{L} .

L'erreur sur \mathcal{L} est :

$$e_{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}} - \mathcal{L} \quad (1.1)$$

L'erreur $e_{\mathcal{L}}$ est la somme de 2 termes (P. Hottier, 1978) :

$$e_{\mathcal{L}} = e_A + b_{\mathcal{L}} \quad (1.2)$$

où :

e_A : erreur dite d'observation ou accidentelle,

$b_{\mathcal{L}}$: un biais dû au fait que la grandeur $\overline{\mathcal{L}}$ est mal définie, aux caractéristiques du processus de mesure et à ses imperfections.

L'erreur accidentelle représente les fluctuations de l'estimateur ou de l'observable par rapport à la valeur moyenne de la grandeur, soit :

$$e_A = \overline{\mathcal{L}} - E(\overline{\mathcal{L}}) \quad (1.3)$$

avec $E(\cdot)$ l'opérateur moyenne. De (1.3) on a :

$$E(e_A) = 0 \quad (1.4)$$

e_A : est appelée aussi le bruit de l'estimation ou erreur résiduelle de l'observation (P. Hottier, 1978).

Les erreurs accidentelles sont des erreurs centrées et qu'on suppose indépendantes. Par suite, le biais $b_{\mathcal{L}}$ s'écrit :

$$b_{\mathcal{L}} = E(\overline{\mathcal{L}}) - \mathcal{L} \quad (1.5)$$

Dans (1.5), on ne considère que les effets résiduels des erreurs systématiques, la partie principale de ces erreurs est supposée éliminée.

Le biais $b_{\mathcal{L}}$ est considéré plutôt comme une constante dépendante du système de mesure c'est-à-dire l'ensemble incluant la grandeur \mathcal{L} et l'instrument (l'observateur et la procédure et les conditions expérimentales).

CHAPITRE 2

ANALYSE DES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LES RÉSEAUX GÉODÉSIQUES TERRESTRES

Sommaire

2.1	SUR L'ORIENTATION DU RÉSEAU GÉODÉSIQUE TERRESTRE . . .	6
2.1.1	Le choix de (φ, λ, H) au point fondamental	6
2.1.2	Sur la variation de l'azimut	16
2.1.3	Sur l'inconnue d'orientation	20
2.2	SUR LA MISE À L'ÉCHELLE D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE	22
2.2.1	Introduction	22
2.2.2	Expression de l'échelle en fonction des coordonnées géodésiques (φ, λ, H)	26

Avant d'étudier les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques terrestres suite à la compensation des données Doppler avec les observations terrestres, on analyse les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans les données Doppler.

En gardant les mêmes notations, on a l'équation des observations terrestres :

$$A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 = L + V; \quad \text{poids } P \quad (2.1)$$

avec la matrice de variance :

$$\Sigma^2 = \sigma_0^2 \cdot P^{-1} \quad (2.2)$$

et σ_0^2 le facteur de variance unitaire. Les équations (2.1) et (2.2) constituent les modèles fonctionnel et stochastique.

En général, les paramètres définissent l'échelle du réseau terrestre ou la calibration des appareils de mesure des distances sont introduits comme des inconnus dans l'équation (2.1).

Malgré cela, il reste des effets résiduels qui sont dûs à l'insuffisance du modèle stochastique ou encore à l'imprécision de la modélisation des erreurs entrant en jeu dans la compensation.

2.1 SUR L'ORIENTATION DU RÉSEAU GÉODÉSIQUE TERRESTRE

2.1.1 *Le choix de (φ, λ, H) au point fondamental*

Au point fondamental d'un réseau géodésique, on a déterminé par des observations astronomiques la latitude et la longitude (φ_a, λ_a) astronomiques et l'azimut Az_a astronomique d'une direction donnée. En ce point, le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et de l'azimut géodésique Az_g correspondant à Az_a est varié.

2.1.1.1 Choix de φ, λ et Az_g

a - On peut choisir les valeurs de φ, λ proches de φ_a, λ_a et en déduire l'azimut géodésique Az_g en utilisant l'équation de Laplace généralisée soit :

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (2.3)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (2.4)$$

$$Az_g = Az_a + (\lambda - \lambda_a) \sin \varphi + ((\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a + (\varphi - \varphi_a) \sin Az_a) \cot g z \quad (2.5)$$

$$z = Z + (\lambda - \lambda_a) \cos \varphi \sin Az_a - (\varphi - \varphi_a) \cos Az_a \quad (2.6)$$

Z et z sont des distances zénithales astronomique et géodésique.

b - On peut prendre :

$$Az_g \approx Az_a \quad (2.7)$$

$$\lambda \approx \lambda_a \quad (2.8)$$

et on obtient φ à partir de (2.5) soit :

$$\varphi = \varphi_a - (\lambda - \lambda_a) \left(\frac{\sin \varphi_a}{\sin Az_a \cot g Z} + \frac{\cos \varphi_a}{tg Az_a} \right) + \frac{Az_g - Az_a}{\sin Az_a \cot g Z} \quad (2.9)$$

$$\text{pour } \sin Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (2.10)$$

c - On peut choisir :

$$Az_g \approx Az_a \quad (2.11)$$

$$\varphi \approx \varphi_a \quad (2.12)$$

$$\lambda = \lambda_a + \frac{(\varphi_a - \varphi) \sin Az_a \cot g Z + Az_g - Az_a}{\sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z} \quad (2.13)$$

$$\text{avec } \sin \varphi + \cos \varphi \cos Az_a \cot g Z \neq 0 \quad (2.14)$$

d - Les composantes de la déviation de la verticale au point fondamental sont :

$$\xi = \varphi_a - \varphi \quad (2.15)$$

$$\eta = (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \quad (2.16)$$

et la désorientation dans le plan horizontal local est :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda) \sin \varphi = \eta tg \varphi \quad (2.17)$$

Si on choisit φ, λ et Az_g telles que :

$$(\varphi_a - \varphi)^2 + (\lambda_a - \lambda)^2 + (Az_a - Az_g)^2 \quad \text{minimum} \quad (2.18)$$

avec l'équation de Laplace (2.5), on obtient :

$$\varphi = \varphi_a$$

$$\lambda = \lambda_a \quad (2.19)$$

$$Az_g = Az_a$$

En pratique, ce sont les cas a et d qui sont choisis si on adopte un point fondamental.

Si on observait plusieurs points de Laplace dans le réseau géodésique, on obtient les azimuts géodésiques observés Az_{go} en utilisant (2.5), par le calcul, on a les azimuts géodésiques calculés Az_{gc} . En l'absence d'erreurs dans les observations et le calcul, on obtient pour chaque point de Laplace :

$$Az_{gc} = Az_{go} \quad (2.20)$$

Malheureusement, il ya des erreurs, l'équation (2.20) devient une équation d'observation et non plus une équation de condition dans la compensation du réseau géodésique, comme suit :

$$dAz_g = Az_{gc} - Az_{go} + v \quad (2.21)$$

où v est le résidu.

Au lieu de (2.21), il serait mieux d'écrire :

$$dAz_g - dAz_{go} = Az_{gc} - Az_{go} + v' \quad (2.22)$$

où dAz_{go} est une inconnue due aux erreurs inconnues dans les observations astronomiques de φ_a, λ_a et Az_a qui se propagent par l'équation (2.5).

Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial

Soit P le point initial ou fondamental d'un réseau géodésique ayant un ellipsoïde de référence $E(a, e)$ où a et e sont respectivement le demi-grand axe et la première excentricité.

On considère en ce point 2 choix des valeurs des coordonnées géodésiques :

$$\begin{aligned} \text{choix a : } (\varphi, \lambda) &\xrightarrow{(2.5)} Az_g \\ H : \text{altitude ellipsoïdique} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H = h + \bar{N} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \text{choix b : } (\varphi', \lambda') &\xrightarrow{(2.5)} Az'_g \\ H' : \text{altitude ellipsoïdique} &\Rightarrow (X, Y, Z) \quad H' = h' + \bar{N}' \end{aligned} \quad (2.24)$$

On considère que les altitudes orthométriques sont égales :

$$h = h'$$

On a les composantes de la déviation de la verticale :

$$\begin{aligned}\xi &= \varphi_a - \varphi \\ \eta &= (\lambda_a - \lambda) \cos \varphi \\ \xi' &= \varphi_a - \varphi' \\ \eta' &= (\lambda_a - \lambda') \cos \varphi'\end{aligned}\quad (2.25)$$

et les désorientations dans les plans horizontaux locaux de P :

$$\zeta = (\lambda_a - \lambda) \sin \varphi_a \quad (2.26)$$

$$\zeta' = (\lambda_a - \lambda') \sin \varphi_a \quad (2.27)$$

Posons :

$$\begin{aligned}dAz_g &= Az'_g - Az_g \\ d\varphi &= \varphi' - \varphi \\ d\lambda &= \lambda' - \lambda\end{aligned}\quad (2.28)$$

alors :

$$dAz_g = \sin \varphi_a d\lambda + (\cos \varphi \cos Az_a d\lambda + \sin Az_a d\varphi) \cot gZ \quad (2.29)$$

est la variation de l'équation de Laplace.

Posons :

$$\begin{aligned}d\xi &= \xi' - \xi \\ d\eta &= \eta - \eta'\end{aligned}\quad (2.30)$$

d'où :

$$\begin{aligned}d\xi &= -d\varphi \\ d\eta &= -\cos \varphi_a d\lambda\end{aligned}\quad (2.31)$$

alors :

$$\Theta = \sqrt{d\varphi^2 + \cos^2 \varphi_a d\lambda^2} \quad (2.32)$$

où Θ est l'angle des 2 normales au point P. On a aussi :

$$d\xi = \xi' - \xi = -dAz_g = -\sin \varphi_a d\lambda \quad (2.33)$$

si on néglige le terme en $\cot gZ$ dans (2.29).

A partir des équations (2.23), (2.24), (2.26), (2.27) et (2.29) on peut énoncer que le choix des coordonnées géodésiques φ, λ et H au point fondamental du réseau affecte les valeurs numériques :

- du hauteur du géoïde : équations (2.23) et (2.24).
- des composantes de la déviation de la verticale : équations (2.24) et (2.25).
- de l'équation de Laplace (2.29).

De plus, soit O'' l'origine du repère géocentrique, O et O' sont respectivement les positions de l'ellipsoïde E dans les choix a et b.

On a la relation vectorielle :

$$\mathbf{O'O} = \begin{pmatrix} X' - X \\ Y' - Y \\ Z' - Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dT_X \\ dT_Y \\ dT_Z \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

en supposant que tous les repères ont les axes respectifs parallèles et qu'on néglige les échelles.

L'équation (2.34) montre une variation du vecteur translation du repère tridimensionnel géodésique au repère géocentrique.

Une question qui se pose : est ce que l'orientation du réseau est touchée? Pour répondre à cette question, on transforme le problème du tridimensionnel en bidimensionnel par le biais des représentations planes conformes.

On considère ici une représentation plane conforme de l'ellipsoïde sur le plan :

$$K : \text{à } (\varphi, \lambda) \mapsto X = X(\varphi, \lambda), Y = Y(\varphi, \lambda) \quad (2.35)$$

où X, Y sont les fonctions définissant la représentation K . Aux azimuts géodésiques, on fait correspondre les gisements G . Soit P le point fondamental du réseau :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(\varphi, \lambda) \mapsto p(X, Y) \in K \text{ image de } E \\ Az_g \mapsto G \text{ le gisement} \\ P(\varphi', \lambda') \mapsto p'(X', Y') \in K' \text{ image de } E \\ Az'_g \mapsto G' \text{ le gisement} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

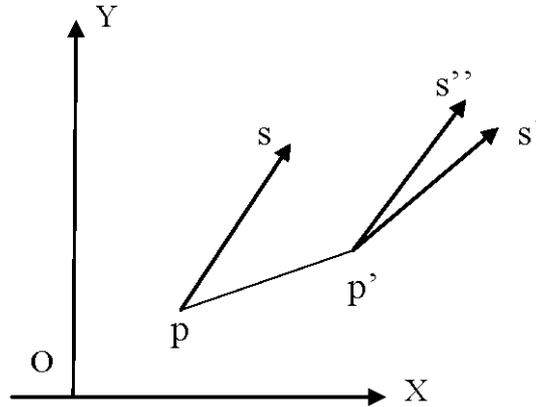


Fig. 2.1 Les effets de choix de (φ, λ, H) au point initial

On suppose qu'on a mesuré une distance PS dans la direction de l'azimut géodésique (Az_g, Az'_g) . Soit d cette distance réduite à la représentation. Les valeurs de $(\varphi; \lambda)$ et (φ', λ') étant très proches, d a la même valeur.

Les coordonnées des images du point S sont :

$$S \in K \begin{cases} X_S = X + d \sin G \\ Y_S = Y + d \cos G \end{cases}, \quad S' \in K' \begin{cases} X_{S'} = X' + d \sin G' \\ Y_{S'} = Y' + d \cos G' \end{cases} \quad (2.37)$$

de plus :

$$\begin{aligned} G &= Az_g + g + dV \\ G' &= Az'_g + g' + dV' \end{aligned} \quad (2.38)$$

où :

- g, g' : les gisements des images du méridiens passant par P .

- dV, dV' : les corrections angulaires arc-corde.

d'où en négligeant dV et dV' :

$$G' - G = Az'_g - Az_g + g' - g = dAz_g + g' - g \quad (2.39)$$

Dans la plan OXY (Fig.2.1), on a les composantes des vecteurs \mathbf{ps} et $\mathbf{p's'}$:

$$\mathbf{ps} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p's'} = \begin{pmatrix} d\sin G' \\ d\cos G' \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

Soit s'' un point de OXY telque $\mathbf{p's''}$ est parallèle à \mathbf{ps} , on a alors :

$$\mathbf{p's''} = \begin{pmatrix} d\sin G \\ d\cos G \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Entre $\mathbf{p's''}$ et $\mathbf{p's'}$ on a la relation :

$$\mathbf{p's''} = R(t) \cdot \mathbf{p's'} \quad (2.42)$$

où $R(t)$ est la matrice de rotation suivante :

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

et :

$$t = G' - G$$

On a donc :

$$\mathbf{ps'} = \mathbf{pp'} + R(G - G') \cdot \mathbf{ps} \quad (2.44)$$

l'équation (2.44) montre que le réseau obtenu à partir du point p' est semblable à une rotation et une translation près à celui obtenu par p :

$$\boxed{\text{réseau origine } p} \rightarrow \boxed{\text{translation de vecteur } pp'} \rightarrow \boxed{\text{rotation d'angle } G - G'} \\ \rightarrow \boxed{\text{réseau origine } p'}$$

Le vecteur translation et la rotation ne dépendent que de $d\varphi$ et de $d\lambda$ (dAz_g est fonction de $d\varphi$ et $d\lambda$). Par suite, on ne peut déceler une erreur d'orientation du réseau (T. Vincenty, 1985).

2.1.1.2 Variations des coordonnées géodésiques dues à une rotation autour de la normale d'un point

Soit P_0 le point de coordonnées géodésiques $(\varphi_0, \lambda_0, H_0 = 0)$ et de coordonnées 3D $(X_0, Y_0, Z_0)_g$. On considère un point $P(\varphi, \lambda, H = 0)$ sur l'ellipsoïde de référence et $(X, Y, Z)_g$ ses coordonnées 3D. Au point P_0 , soit le repère 3D local

(P_0, x, y, z) . On note par $(x, y, z)^T$ les composantes de P_0P .

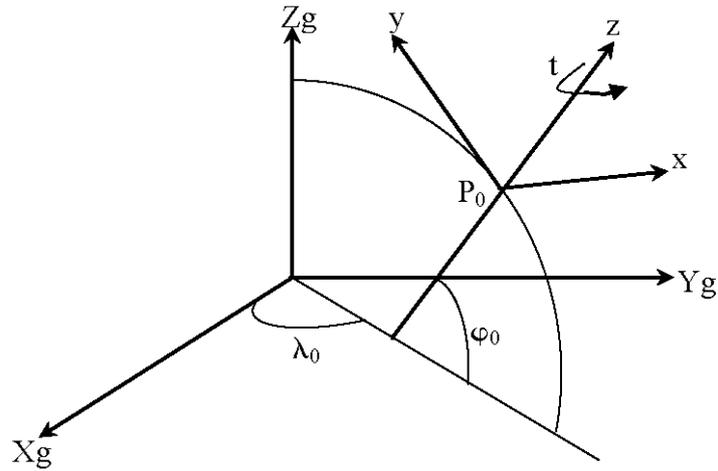


Fig. 2.2 Rotation autour de la normale

Si on effectue au point P_0 une rotation d'angle t autour de la normale à savoir l'axe P_0z , les composantes $(x, y, z)^T$ de P_0P deviennent (Fig.2.2) :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

t étant petit en général, on a :

$$\begin{aligned} x' &= x - ty \\ y' &= y + tx \\ z' &= z \end{aligned} \quad (2.46)$$

Les variations des composantes de P_0P sont :

$$dx = -ty; \quad dy = tx; \quad dz = 0 \quad (2.47)$$

Entre (dx, dy, dz) et $(dX, dY, dZ)_g$ on a la relation :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

avec R_0 la matrice donnée par :

$$R_0 = \begin{pmatrix} -\sin\lambda & -\cos\lambda \cdot \sin\varphi & \cos\lambda \cdot \cos\varphi \\ \cos\lambda & -\sin\lambda \cdot \sin\varphi & \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (2.49)$$

appliquée au point P_0 . Mais on peut aussi écrire :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R \cdot \begin{pmatrix} N \cos\varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P \quad (2.50)$$

On obtient donc :

$$\begin{pmatrix} N \cos\varphi d\lambda \\ \rho d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_P = R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot R^T \cdot R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

Calculons (x, y) . Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}_g \quad (2.52)$$

on a alors la relation :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}_g \quad (2.53)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= -\Delta X \sin\lambda_0 + \Delta Y \cos\lambda_0 \\ y &= (-\Delta X \cos\lambda_0 - \Delta Y \sin\lambda_0) \sin\varphi_0 + \Delta Z \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Finalement en remplaçant (2.54) dans (2.51) et en calculant le produit matriciel $R^T \cdot R_0$, on obtient les variations des coordonnées géodésiques $(d\varphi, d\lambda, dH)$ par :

$$N \cos\varphi d\lambda = t((\Delta X \cos\lambda + \Delta Y \sin\lambda) \sin\varphi_0 - \Delta Z \cos\varphi_0 \cos\lambda) \quad (2.55)$$

avec :

$$l = \lambda - \lambda_0 \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} \rho.d\varphi = t(\Delta X(-\sin\varphi\sin\lambda\sin\varphi_0 - \cos\varphi\sin\lambda_0\cos\varphi_0) \\ + \Delta Y(\sin\varphi\cos\lambda.\sin\varphi_0 + \cos\varphi\cos\varphi_0\cos\lambda_0) + \Delta Z\sin\varphi\cos\varphi_0\sin\lambda) \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} dH = t(\Delta X(\cos\varphi\sin\lambda\sin\varphi_0 - \sin\varphi\sin\lambda_0\cos\varphi_0) \\ + \Delta Y(-\cos\varphi\cos\lambda.\sin\varphi_0 + \sin\varphi\cos\varphi_0\cos\lambda_0) - \Delta Z\cos\varphi\cos\varphi_0\sin\lambda) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ces relations montrent que les variations ($d\varphi, d\lambda, dH$) sont à un facteur multiplicatif fonctions de t angle de rotation de la normale au point P . t peut être considérée comme une variation d'azimut $t = -dAz$ (t et dAz sont de signes opposés).

Si on suppose que les points P_0 et P ne sont pas sur l'ellipsoïde de référence ($H \neq 0$), il suffit de remplacer dans les formules précédentes N par $N + H$, ρ par $\rho + H$ et tenir compte des altitudes ellipsoïdiques dans le calcul de $(X, Y, Z)_g$ et $(X_0, Y_0, Z_0)_g$.

Exprimons maintenant les variations $(dX, dY, dZ)_g$ des coordonnées 3D $(X, Y, Z)_g$ du point P . A l'aide de (2.48), on a :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = R_0 \cdot \begin{pmatrix} -t.y \\ t.x \\ 0 \end{pmatrix} = t.R_0 \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = t.R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

ou encore :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t.R_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .R_0^T \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

soit :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\sin\varphi_0 & \sin\lambda_0\cos\varphi_0 \\ \sin\varphi_0 & 0 & -\cos\lambda_0\cos\varphi_0 \\ -\sin\lambda_0\cos\varphi_0 & \cos\lambda_0\cos\varphi_0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

On peut écrire (2.61) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_g = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta Z & \Delta Y \\ \Delta Z & 0 & -\Delta X \\ -\Delta Y & \Delta X & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos\varphi_0\cos\lambda_0 \\ -\cos\varphi_0\sin\lambda_0 \\ -\sin\varphi_0 \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

(2.62) exprime les variations des coordonnées dues à la rotation de vecteur $ROT = (rx, ry, rz)^T$ du repère tridimensionnel translaté au point P_0 . Le vecteur ROT est donné par :

$$ROT = \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ -t \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ -t \sin \varphi_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dAz \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 \\ dAz \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 \\ dAz \sin \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

On retrouve les formules de T. Vincenty (1985).

On considère que P_0 est un point particulier du réseau géodésique terrestre, par exemple le point fondamental où on a défini un azimut géodésique initial à partir de l'observation d'un azimut astronomique Az_a . On suppose que cet azimut Az_a est entaché d'une erreur dAz_a . Pour corriger l'orientation de l'ellipsoïde de référence par rapport au repère géocentrique on effectue autour de la normale en P_0 la rotation d'angle :

$$t = -dAz$$

Cette rotation va "basculer" l'ellipsoïde initial sur un autre ellipsoïde (de mêmes dimensions) dont les axes $(X', Y', Z')_g$ se déduisent des anciens axes par la rotation de vecteur ROT donné par (2.63) et par une translation de l'origine O des axes donnés par :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_O = \begin{pmatrix} -Y & Z & 0 \\ X & 0 & -Z \\ 0 & -X & Y \end{pmatrix}_{P_0} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Pour calculer les coordonnées des points dans le nouveau repère il suffit d'ajouter les corrections $(d\varphi, d\lambda, dH)$ exprimées par les formules (2.55), (2.57) et (2.58).

En général, les parties principales des erreurs sont corrigées mais il reste des effets résiduels qui font que le parallélisme entre les axes de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique terrestre et ceux du référentiel géocentrique n'est jamais obtenu parfaitement (P. Vanicek & G. Carrera, 1985).

2.1.2 Sur la variation de l'azimut

Dans ce paragraphe, on va étudier l'effet des rotations des axes de l'ellipsoïde de référence du réseau géodésique sur l'azimut géodésique.

Soit (O, X, Y, Z) le repère 3D géodésique où est défini l'ellipsoïde de référence. En un point P_0 du réseau géodésique, on a un azimut géodésique d'une direction P_0P . Dans (O, X, Y, Z) on a :

$$\begin{aligned} P_0(X, Y, Z)_0 &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H)_0 \\ P(X, Y, Z) &\rightarrow \boxed{\text{équation (3-1)}} \rightarrow (\varphi, \lambda, H) \end{aligned} \quad (2.65)$$

Posons :

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix} \begin{cases} x = -\sin\varphi_0(\Delta X \cos\lambda_0 + \Delta Y \sin\lambda_0) + \Delta Z \cos\varphi_0 \\ y = -\Delta X \sin\lambda_0 + \Delta Y \cos\lambda_0 \end{cases} \quad (2.66)$$

L'azimut calculé en P_0 est donné par :

$$tg(Az_g) = \frac{y}{x} \quad (2.67)$$

On suppose que les axes OX, OY, OZ , sont mal orientés. On fait subir au repère (O, X, Y, Z) trois rotations infinitésimales de vecteur $ROT = (rx, ry, rz)^T$ donné. Dans (O, X, Y, Z) , on a Az_g , par suite on obtient dans (O, X', Y', Z') l'azimut $Az_g + dAz_g$. Nous allons calculer dAz_g en fonction de rx, ry, rz .

Dans (O, X', Y', Z') on a :

$$P_0 : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}_0 ; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix}_0 \quad (2.68)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} -Y & Z & 0 \\ X & 0 & -Z \\ 0 & -X & Y \end{pmatrix}_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

et :

$$\begin{pmatrix} (N+H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H).d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}_0 = R_0^T \cdot U_0 \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (2.70)$$

soit :

$$\begin{aligned} (N_0 + H_0)\cos\varphi_0 d\lambda_0 &= (\cos\lambda_0 rx + \sin\lambda_0 ry)Z - rz(N_0 + H_0)\cos\varphi_0 \\ (\rho_0 + H_0)d\varphi_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)\left(\frac{a^2}{N_0} + H_0\right) \\ dH_0 &= (-rx\sin\lambda_0 + ry\cos\lambda_0)N_0 e^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \end{aligned} \quad (2.71)$$

Pour le point P , on a dans (O, X', Y', Z') :

$$P : \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X + dX \\ Y + dY \\ Z + dZ \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varphi' \\ \lambda' \\ H' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi + d\varphi \\ \lambda + d\lambda \\ H + dH \end{pmatrix} \quad (2.72)$$

avec :

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

La différentielle de (2.67) donne :

$$d(Az_g) = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \quad (2.74)$$

Le calcul de $x^2 + y^2$ donne :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \Delta X^2(1 - \cos^2 \lambda_0 \cos^2 \varphi) + \Delta Y^2(1 - \sin^2 \lambda_0 \cos^2 \varphi_0) + \Delta Z^2 \cos^2 \varphi_0 \\ &\quad - 2\Delta X \Delta Y \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 - 2\Delta Y \Delta Z \sin \lambda_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \\ &\quad - 2\Delta Z \Delta X \cos \lambda_0 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Le calcul de $xdy - ydx$ donne :

$$\begin{aligned} xdy - ydx &= \begin{pmatrix} -\Delta Z \cos \varphi_0 (\Delta X \cos \lambda_0 + \Delta Y \sin \lambda_0) + \sin \varphi_0 (\Delta X^2 + \Delta Y^2) \\ \cos \varphi_0 ((\Delta Y^2 - \Delta X^2) \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 + \Delta X \Delta Y \cos 2\lambda_0) \\ 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} d\lambda_0 \\ d\varphi_0 \\ dH_0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \Delta Y \sin \varphi_0 - \Delta Z \sin \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -\Delta X \sin \varphi_0 + \Delta Z \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -y \cos \varphi_0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

avec en utilisant (2.69) et (2.73) :

$$\begin{pmatrix} dX - dX_0 \\ dY - dY_0 \\ dZ - dZ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta Y \Delta Z & 0 & 0 \\ \Delta X & 0 & -\Delta Z \\ 0 & -\Delta X & \Delta Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rx \Delta Y + ry \Delta Z \\ rx \Delta X - rz \Delta Z \\ -ry \Delta X + rz \Delta Y \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

Due à la rotation de vecteur $(rx, ry, rz)^T$, l'azimut géodésique dans la direction P_0P va varier de dAz_g . L'expression de dAz_g est de la forme :

$$dAz_g = a_1 rx + a_2 ry + a_3 rz \quad (2.78)$$

où les coefficients a_1, a_2 et a_3 sont fonctions de $(\varphi_0, \lambda_0, H_0)$ et de (φ, λ, H) . On peut alors introduire dans chaque équation d'observation d'un azimut astronomique le terme :

$$-a_1rx - a_2ry - a_3rz \quad (2.79)$$

Dans (2.79), rx, ry et rz ne doivent être confondues avec les paramètres du modèle de Bursa-Wolf.

T. Vincenty (1982,1985) proposait l'introduction dans l'équation d'observation d'un azimut un terme similaire mais avec des coefficients différents obtenus avec une autre approche.

Z. Zhou (1983) a étudié les systématismes de l'orientation de l'ellipsoïde à partir de l'expression de l'azimut géodésique donnée par (2.67) et de (2.74).

Exemple numérique :

Dans le tableau 2.1 ci-dessous, on donne les variations de l'azimut géodésique dues à la rotation (rx, ry, rz) utilisant l'ellipsoïde de Clarke Français 1880. Ce tableau montre qu'une rotation rz n'a pas d'effet sur l'azimut. Par

$\varphi = 40\text{ gr}, \lambda = 10\text{ gr}$	rx	ry	rz	dAz_g
$H = 100\text{ m}$	(dmgr)	(dmgr)	(dmgr)	(dmgr)
$Az_g = 56.6052\text{ gr}$				
	1.00	0.00	0.00	1.32
	1.00	1.00	0.00	1.35
	1.00	1.00	1.00	1.35
	2.00	1.00	1.00	2.67
	2.00	2.00	1.00	2.70
	2.00	2.00	2.00	2.70
	3.00	0.00	0.00	3.96
	0.00	3.00	0.00	0.09
	0.00	0.00	3.00	0.00
	3.00	3.00	0.00	4.05
	0.00	5.00	0.00	0.15

Tableau 2.1 Les Variations de l'Azimut Géodésique

contre une variation de rx fait varier l'azimut géodésique d'une quantité sensiblement égale.

2.1.3 Sur l'inconnue d'orientation

Parmi les inconnues qui jouent un rôle fondamental dans l'orientation d'un réseau géodésique terrestre sont celles d'orientation des observations angulaires azimutales.

Par manque d'observations d'azimuts astronomiques en chaque point du réseau géodésique, les inconnus d'orientation TH jouent le rôle d' "observations" d'azimuts géodésiques.

En l'absence des erreurs, l'inconnue d'orientation TH en une station et l'azimut géodésique d'une direction Az_g sont liés par une relation linéaire à savoir :

$$Az_{g_0} = TH + L \quad (2.80)$$

où :

L : différence de lectures angulaires horizontales réduites au plan horizontal géodésique local.

Az_{g_0} : l'azimut géodésique "observé" inconnu.

De (2.80) l'erreur sur l'azimut géodésique est composée de 2 erreurs : l'une provient de la détermination de TH par le calcul de la compensation, l'autre est due aux mesures et à la réduction des observations angulaires. On peut écrire :

$$e_{Az_g} = e_{TH} + e_L \quad (2.81)$$

e_L peut-être la résultante de 4 erreurs :

$$e_L = e_{L_s} + e_{L_o} + e_{L_v} + e_{L_r} \quad (2.82)$$

avec : e_{L_s} : erreurs dues à la mise en station et à l'appareil de mesures.

e_{L_o} : erreurs dues à l'observation.

e_{L_v} : erreurs dues au point visé (décentrage, excentrement,...).

e_{L_r} : erreurs dans la réduction des observations.

En pratique, la partie principale de e_L est éliminée par les procédés connus, mais il reste toujours un effet résiduel.

En ce qui concerne l'erreur sur l'inconnue d'orientation TH on a :

$$e_{TH} = \overline{TH} - \mathbf{TH} \quad (2.83)$$

avec :

\overline{TH} : la valeur de TH déterminée par la compensation.

\mathbf{TH} : la valeur nominale de TH .

Généralement, on utilise une valeur moyenne TH_m comme valeur approchée de TH . On fixera un seuil t tel que :

$$\text{si } |TH_o - TH_c| > t \text{ la visée est rejetée}$$

E. Grafarend (1985) a montré que si on fixait dans un réseau géodésique l'échelle, l'orientation et la position d'un point et si on effectuait sur l'ensemble des points du réseau les observations angulaires azimutales et verticales, alors les éléments $(\varphi_a, \lambda_a, TH)$ seraient déterminés en tout point du réseau.

Ce résultat montre le rôle que peut jouer les inconnues d'orientation dans le calcul d'un réseau géodésique.

En négligeant les erreurs systématiques sur les lectures L , on peut écrire :

$$dTH = dAz_g \quad (2.84)$$

On peut donc inclure dans chaque équation d'observation angulaire horizontale les termes de systématismes d'orientation donnés par (2.79).

2.2 SUR LA MISE À L'ÉCHELLE D'UN RÉSEAU GÉODÉSIQUE

2.2.1 Introduction

Avant de voir la question de la mise à l'échelle, nous revenons sur les définitions des facteurs d'échelle que P. Vanicek (1975) présentait dans son rapport sur les datums géocentriques et géodésiques.

En effet, il y a 2 choix : soit de dire que le facteur d'échelle d'un système de coordonnées est donné indépendamment des mesures de distances ou qu'il soit déterminé à partir d'observations de distances. En d'autres termes l'échelle définie à partir de mesures (de distances) peut-être considérée comme le résultat d'une distorsion d'échelle du réseau géodésique (respectivement géocentrique) sans aucune influence du système des coordonnées géodésiques (respectivement géocentriques), ou qu'en moyenne la distorsion d'échelle peut être interprétée comme un influençant l'échelle du système de coordonnées.

Par exemple, considérons un système de coordonnées géodésiques $(O, X, Y, Z)_g$ ayant la base (E_X, E_Y, E_Z) telle que :

$$E_i^T \cdot E_j = \delta_{ij} \quad i, j = X, Y, Z; \quad \delta_{ij} : \text{le symbole de Kroneker} \quad (2.85)$$

Dans ce système, le facteur d'échelle s vaut 1. On définit dans ce système de coordonnées un réseau géodésique. Pour sa définition on introduit la condition :

distance observée entre 2 points A, B = distance calculée entre les points A, B

soit :

$$D_{Obs} = \left(\sum_{X,Y,Z} (X_A - X_B)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.86)$$

De (2.86), le facteur d'échelle en A et B vaut :

$$s(A, B) = 1 \quad (2.87)$$

La propagation des erreurs dans le réseau fait que le facteur d'échelle du système s passe de la valeur 1 à la valeur :

$$s = 1 + m \quad (2.88)$$

donc cette distorsion du facteur d'échelle va jouer sur le facteur d'échelle du système de coordonnées qui va se définir par :

$$E_i^T . E_j = (1 + m')^2 \delta_{ij} \quad (2.89)$$

où m' est l'échelle moyenne sur le réseau géodésique.

En utilisant les notations du paragraphe 3 de ce chapitre, considérons la relation entre les vecteurs X_g et X' définis respectivement dans les systèmes géodésique et géocentrique, on a :

$$(1 + m'')X' = T + (1 + m) \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} . X_g \quad (2.90)$$

avec :

$1 + m''$ le facteur d'échelle dans le système géocentrique.

$1 + m$ le facteur d'échelle dans le système géodésique.

L'équation (2.90) décrit le cas où les réseaux respectifs ont le même facteur d'échelle que celui des systèmes de coordonnées .

L'équation (2.90) ne change pas si on écrit (le terme $m'' . T$ est négligable).

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J(rx, ry, rz) . X_g \quad (2.91)$$

avec $J(rx, ry, rz)$ la matrice donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & -rx & ry \\ rx & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.92)$$

Si on considère le point initial du réseau géodésique de rayon vecteur X_{g_0} dans le système de coordonnées géodésiques, on peut écrire vectoriellement :

$$X_g = X_{g_0} + \Delta X_g \quad (2.93)$$

L'équation (2.91) devient :

$$(1 + m'')(X' - T) = (1 + m)J . X_{g_0} + (1 + m) . J . \Delta X_g \quad (2.94)$$

Si on interprète le facteur d'échelle $1 + m$ comme influençant seulement le réseau géodésique, on pourra écrire (2.94) comme suit :

$$(1 + m'')(X' - T) = J.X_{g_0} + (1 + m).J.\Delta X_g \quad (2.95)$$

En pratique, on calcule un seul facteur d'échelle :

$$s = 1 + n = \frac{1 + m}{1 + m''} \quad (2.96)$$

par :

$$X' = T + J.X_{g_0} + (1 + n).J.\Delta X_g \quad \text{ou} \quad X' = T + (1 + n).J.X_g \quad (2.97)$$

On considère que les 2 systèmes de coordonnées géocentriques et géodésiques ont un même facteur d'échelle égal à 1 et que n est une distorsion d'échelle dans le réseau géodésique (P. Vanicek, 1975).

2.2.1.1 Modélisation du facteur d'échelle dans la compensation du réseau géodésique

Afin de rendre homogène le facteur d'échelle sur l'ensemble du réseau géodésique, on introduit dans les équations d'observations de distances un facteur d'échelle correspondant à chaque type d'appareils utilisés comme suit :

$$dD + D_{Cal} - (1 + m)D_{Obs} = v$$

soit en 3-D :

$$\sum_{X,Y,Z} \left(\frac{\Delta X_{ij}}{D_{ij}} (dX_i - dX_j) \right) + mD_{ij} = D_{Obs_{ij}} - D_{Cal_{ij}} + v_{ij} \quad (2.98)$$

avec :

$$\Delta X_{ij} = X_i - X_j$$

Dans l'équation (2.98) m n'est pas l'échelle du réseau géodésique.

Entre 2 points M, M' du réseau, on peut définir le facteur d'échelle par :

$$s = 1 + m = \frac{D_{Cal}}{D_{Obs}} = 1 + \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (2.99)$$

avec :

D_{Cal} : la distance MM' calculée à partir des coordonnées géodésiques terrestres compensées. D_{Obs} : la distance MM' observée avec un instrument "parfait".

On désigne par un instrument "parfait" un instrument qui donne la distance D_{Obs} avec une erreur non sensible par le réseau géodésique.

Pour les grandes distances, la méthode Doppler est un instrument "parfait". D_{Obs} peut-être calculée à partir des coordonnées Doppler.

Pour les réseaux Doppler, le VLBI constitue un instrument "parfait".

(2.99) donne l'échelle du réseau par :

$$m = \frac{D_{Cal} - D_{Obs}}{D_{Obs}} \quad (2.100)$$

en omettent les indices on peut écrire :

$$m = \frac{dD}{D} \quad (2.101)$$

soit pour le couple (M, M') :

$$m(M, M') = \frac{1}{D^2} (\Delta X (dX' - dX) + \Delta Y (dY' - dY) + \Delta Z (dZ' - dZ)) \quad (2.102)$$

avec :

$$\Delta X = X' - X; \Delta Y = Y' - Y; \Delta Z = Z' - Z$$

supposant que le point M est exempt d'erreurs on a :

$$dX = dY = dZ = 0$$

l'échelle devient :

$$m = \frac{1}{D^2} (\Delta X dX' + \Delta Y dY' + \Delta Z dZ')$$

Pour le point M' , on suppose qu'il se trouve à l'intérieur d'un ellipsoïde d'erreurs avec dX', dY' et dZ' vérifiant l'équation :

$$\sum_{j=1}^{j=3} a_{jj} dX'^2 + 2 \sum_{i<j}^3 a_{ij} dX' dY' + c < 0 \quad (2.103)$$

où les coefficients $a_{ij,c}$ sont fonctions des éléments de la matrice variance du point M' .

la condition (2.103) limite les valeurs de l'échelle m .

2.2.2 Expression de l'échelle en fonction des coordonnées géodésiques (φ, λ, H)

On a :

$$D^2 = \mathbf{MM}'^T . \mathbf{MM}' = \mathbf{MM}'^2 \quad (2.104)$$

En différenciant (2.104), on obtient :

$$D . dD = \mathbf{MM}'^T . (d\mathbf{M}' - d\mathbf{M}) = \mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M}' - \mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M} \quad (2.105)$$

On va exprimer les produits scalaires $\mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M}'$ et $\mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M}$ respectivement dans les repères géodésiques locaux de M' et de M .

Dans le repère géodésique local de M , on a :

$$d\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (N+H) . \cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H) . d\varphi \\ dH \end{pmatrix}; \quad \mathbf{MM}' = R(M)^T . \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

Soit :

$$\mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M} = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T . R(M) . \begin{pmatrix} (N+H) . \cos\varphi d\lambda \\ (\rho+H) . d\varphi \\ dH \end{pmatrix} \quad (2.107)$$

De même on obtient :

$$\mathbf{MM}'^T . d\mathbf{M}' = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)^T . R(M') . \begin{pmatrix} (N'+H') . \cos\varphi' d\lambda' \\ (\rho'+H') . d\varphi' \\ dH' \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

L'expression (2.105) devient :

$$D . dD = a' d\lambda' + b' d\varphi' + c' dH' - a d\lambda - b d\varphi - c dH \quad (2.109)$$

avec les coefficients a, b et c (resp a', b' et c') sont :

$$\begin{aligned}
a &= (N + H)\cos\varphi(-\Delta X\sin\lambda + \Delta Y\cos\lambda) \\
b &= -(\rho + H)(\sin\varphi(\Delta X\cos\lambda + \Delta Y\sin\lambda) - \Delta Z\cos\varphi) \\
c &= \cos\varphi(\Delta X\cos\lambda + \Delta Y\sin\lambda) + \Delta Z\sin\varphi
\end{aligned} \tag{2.110}$$

d'où m :

$$m = \frac{1}{D^2}(a'd\lambda' + b'd\varphi' + c'dH' - ad\lambda - bd\varphi - cdH) \tag{2.111}$$

Si on fait intervenir la distance zénithale Z de M sur M' , on peut écrire m sous la forme :

$$m = m_H\sin^2Z + m_V\cos^2Z \tag{2.112}$$

avec :

$$m_H = \frac{1}{D_h^2}(a'd\lambda' + b'd\varphi' - ad\lambda - bd\varphi) \tag{2.113}$$

$$m_V = \frac{1}{D_v^2}(c'dH' - cdH) \tag{2.114}$$

et

$$D_h = D.\sin Z; \quad D_v = D.\cos Z \tag{2.115}$$

Ecrivons le facteur d'échelle s :

$$s = 1 + m = s_H.\sin^2Z + s_V.\cos^2Z \tag{2.116}$$

avec :

$$s_H = 1 + m_H; \quad s_V = 1 + m_V \tag{2.117}$$

s_H et s_V : sont des pseudo-facteurs d'échelle respectivement horizontal et vertical.

CHAPITRE 3

LES ERREURS SYSTÉMATIQUES DANS LA COMBINAISON DES DONNÉES DOPPLER AVEC LES OBSERVATIONS TERRESTRES CLASSIQUES

Sommaire

3.1	ORIENTATION DU RÉFÉRENTIEL GÉODÉSIQUE	30
3.1.1	Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique	31
3.1.2	Influence de l'altitude ellipsoïdique sur les paramètres du modèle Bursa-Wolf	32
3.1.3	Influence de la longitude géodésique	32
	Littérature	35

Dans la section précédente, on a traité les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques sans l'introduction des données Doppler. Nous verrons ci-après les erreurs systématiques dans les réseaux géodésiques obtenus par la combinaison des données Doppler avec les observations géodésiques classiques.

Entre les rayons vecteurs géocentriques Doppler X' et géodésiques X_g d'un point, on a la relation vectorielle en utilisant le modèle de Bursa-Wolf :

$$X' = T + (1 + m).J(rx, ry, rz).X_g \quad (3.1)$$

avec J la matrice définie par (2.92).

Considérons les 2 cas suivants :

- i) Les points du réseau géodésique terrestre sont positionnés correctement dans le référentiel géodésique, mais ce dernier présente une désorientation par rapport au référentiel géocentrique.
- ii) Les points du réseau géodésique sont mal positionnés et que l'orientation interne du réseau n'est pas soignée dans le référentiel géodésique, lui-même parallèle convenablement au référentiel géocentrique Doppler.

En pratique, c'est le cas ii qu'on trouve. L'orientation du réseau est faite à partir d'observations astronomiques. Malgré l'utilisation de l'équation de Laplace, l'orientation reste insuffisante.

Les données Doppler ont le rôle de :

- positionner les points du réseau géodésique terrestre,
- orienter le référentiel géodésique terrestre,
- améliorer la mise à l'échelle du réseau géodésique terrestre.

3.1 ORIENTATION DU RÉFÉRENTIEL GÉODÉSIQUE

Dans ce paragraphe nous étudions le cas i. On suppose que les points M d'un réseau géodésique terrestre sont bien positionnés. On détermine les éléments de la transformation (3.1) et en particulier les angles de rotations (rx, ry, rz) . On peut trouver un point M_0 tel qu'en faisant la rotation autour de la normale en ce point, on va mettre l'ensemble du réseau dans un repère parallèle au repère géocentrique Doppler.

Entre (rx, ry, rz) et (px, py, pH) on a la relation :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix}$$

avec R_0 donnée par (2.49).

On pose alors :

$$px = py = 0 \quad (3.2)$$

d'où :

$$pH = \sqrt{rx^2 + ry^2 + rz^2} \quad (3.3)$$

et :

$$\begin{pmatrix} px \\ py \\ pH \end{pmatrix} = R_0^T \cdot \begin{pmatrix} rx \\ ry \\ rz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ pH \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En notant :

$$p = \sqrt{rx^2 + ry^2} \quad (3.5)$$

et en résolvant (3.4), on trouve (T. Vincenty, 1985) :

$$*\sin\varphi_0 = \frac{rz}{pH}; \quad \sin\lambda_0 = \frac{ry}{p}; \quad \cos\lambda_0 = \frac{rx}{p} \quad (3.6)$$

Sans tenir compte de la translation, on obtient les coordonnées des points dans le nouveau repère géodésique (parallèle au repère géocentrique) par :

$$\bar{X}_g = (1 + m) \cdot J(rx, ry, rz) \cdot X_g \quad (3.7)$$

Ayant \bar{X}_g , on calculera $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}, \bar{H})$.

Il serait intéressant de voir les écarts de l'équation de Laplace appliquée aux points de Laplace du réseau géodésique.

3.1.1 Orientation du référentiel géodésique et mise en place du réseau géodésique

Ici, on étudie le cas ii. Les points du réseau géodésique sont mal positionnés. Au lieu d'avoir X_g on a X_{g_0} tel que :

$$X_g = X_{g_0} + dX_g = X_{g_0} + R_0 \cdot \begin{pmatrix} (N + H)\cos\varphi d\lambda \\ (\rho + H)d\varphi \\ dH \end{pmatrix}_0 \quad (3.8)$$

3.1.2 Influence de l'altitude ellipsoïdique sur les paramètres du modèle Bursa-Wolf

Dans ce cas, on a $d\lambda = d\varphi = 0$. La relation (3.8) devient :

$$X_g = X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \sin\lambda \cdot \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (3.9)$$

En remplaçant X_g donnée par (3.9) dans la relation (3.1) on obtient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot (1+m) \cdot J \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (3.10)$$

Le terme $m \cdot J \cdot (\cos\lambda \cos\varphi, \sin\lambda \cos\varphi, \sin\varphi)_0^T$ est négligable, l'équation (3.10) devient :

$$X' = T + (1+m) \cdot J \cdot X_{g_0} + dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (3.11)$$

Une correction de l'altitude ellipsoïdique en un point se traduit par une correction du vecteur translation T de :

$$dT = dH \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\lambda \\ \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \sin\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (3.12)$$

Numériquement, on a le tableau 3.1 qui donne les corrections des composantes du vecteur translation en fonction de celles de l'altitude ellipsoïdique pour $\varphi_0 = 40.00 \text{ gr}$, $\lambda_0 = 10.00 \text{ gr}$ et $H_0 = 100 \text{ m}$.

Les résultats ci-dessous montrent que les composantes T_x et T_z sont les plus sensibles aux variations de l'altitude ellipsoïdique. D'où la nécessité d'avoir une mesure sur le géoïde.

3.1.3 Influence de la longitude géodésique

On suppose que $d\varphi = dH = 0$. L'équation (3.1) devient :

$dH(m)$	$dTx(m)$	$dTy(m)$	$dTz(m)$
0.001	0.001	0.000	0.001
0.010	0.008	0.001	0.006
0.100	0.080	0.013	0.059
0.200	0.160	0.025	0.018
0.500	0.400	0.063	0.294
0.750	0.599	0.095	0.441
1.000	0.799	0.127	0.588
1.500	1.199	0.190	0.882
1.750	1.398	0.221	1.029
2.000	1.598	0.253	1.176
5.000	3.995	0.633	2.939
10.000	7.991	1.266	5.878

Tableau 3.1 Les Variations du vecteur Translation

$$X' = T + (1+m).J(rx, ry, rz).X_{g_0} + (1+m).J. \begin{pmatrix} -(N+H)\sin\lambda\cos\varphi d\lambda \\ -(N+H)\cos\lambda\cos\varphi d\lambda \\ 0 \end{pmatrix}_0$$

En négligeant les termes en $rx.d\lambda$, $ry.d\lambda$ et $rz.d\lambda$, on obtient :

$$X' = T + (1+m). \begin{pmatrix} 1 & -rx - d\lambda & ry \\ -(rx + d\lambda) & 1 & -rz \\ -ry & rz & 1 \end{pmatrix}.X_{g_0} \quad (3.13)$$

Une correction $d\lambda$ de la longitude géodésique se traduit par une correction $d\lambda$ de l'angle de rotation rx .

3.1.3.1 Influence de la latitude géodésique

On considère que $d\lambda = dH = 0$. Détaillons l'expression de dX_g , on a :

$$dX_g = (\rho + H)d\varphi. \begin{pmatrix} -\cos\lambda\sin\varphi \\ -\sin\lambda\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}_0 \quad (3.14)$$

On peut écrire que :

$$\rho = N(1 - e^2) + \delta N \quad (3.15)$$

où :

$$\delta N = Nt(1 - e^2)(1 + t + t^2 + o(t^2)); \quad t = e^2 \sin^2 \varphi_0$$

Utilisant (3.15), l'équation (3.14) devient :

$$dX_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\cos\lambda d\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\lambda d\varphi \\ \cos\lambda d\varphi & \sin\lambda d\varphi & 0 \end{pmatrix} .X_{g_0} + d\varphi . \begin{pmatrix} -\delta N .\cos\lambda \sin\varphi \\ -\delta N .\sin\lambda \sin\varphi \\ (\delta N - Ne^2) .\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

ou encore :

$$dX_g = dJ.X_{g_0} + \overline{dX}_{g_0} \quad (3.17)$$

En remplaçant (3.17) dans (3.1), on obtient :

$$X' = T + (1 + m) .(J + dJ) .X_{g_0} + (1 + m) .J .\overline{dX}_{g_0} \quad (3.18)$$

(3.18) montre qu'une correction de $d\varphi$ fait changer les angles des rotations de :

$$\begin{cases} rx \implies rx - \sin\lambda d\varphi \\ ry \implies ry + \cos\lambda d\varphi \\ rz \implies rz \end{cases} \quad (3.19)$$

et le vecteur translation de \overline{dX}_{g_0} .

$d\varphi$ (dmgr)	dTx (m)	dTy (m)	dTz (m)	drx (dmgr)	dry (dmgr)
0.10	-0.001	0.000	-0.004	-0.016	0.099
0.50	-0.007	-0.001	-0.018	-0.078	0.494
1.00	-0.014	-0.002	-0.036	-0.156	0.988
1.50	-0.020	-0.003	-0.054	-0.235	1.482
2.00	-0.027	-0.004	-0.072	-0.313	1.975
2.50	-0.034	-0.005	-0.091	-0.391	2.469
3.00	-0.041	-0.006	-0.109	-0.469	2.963
4.00	-0.055	-0.009	-0.145	-0.626	3.951
5.00	-0.068	-0.011	-0.181	-0.782	4.983
10.00	-0.136	-0.022	-0.362	-1.564	9.877

Tableau 3.2 Influence de la latitude géodésique

Avec les mêmes données, on obtient les valeurs numériques dans le tableau 3.2 ci-dessus. De ces valeurs, on remarque que les composantes de la translation varient seulement de quelques *cm*.

Littérature

- [1] **D.B. Thomson** : 1976. Combination of geodetic networks. Technical report No 30, department of Surveying Engineering. University of new brunswick. Fredericton N.B.Canada.
- [2] **I.I. Mueller** : 1982. African Doppler Survey. Proceedings of the Third International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Feb 8-12, vol 1, pp 637-656.
- [3] **J. Adam** : 1981. On the determination of similarity coordinate transformation parameters. Presented at the 8th Symposium on Mathematical Geodesy -5th HOTINE SYMPOSIUM- Italy, Sept 7-9. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini, No 3 Vol 41, p 283-290, 1982.
- [4] **V. Ashkenazi** : 1981. Models for controlling national and continental networks. BG Vol 55 No 1, pp 49-58.
- [5] **V. Ashkenazi, S.A. Crane & J.W. Williams** : 1981. The OSGB scientific network : combination of satellite and terrestrial data. Annale de Géophysique, tome 37 pp 49-54.
- [6] **V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1981. Inter-comparison of 3-D geodetic network adjustment models. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computationq of the IAG, Munich, August 31 to september 5. DGK, série B No 258 Vol IV, 1982, pp 37-44.
- [7] **V. Ashkenazi & S.N. Grist** : 1983.3-D Geodetic networks adjustment models : significance of different approches. Sympsium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg August pp 326 -346 .
- [8] **M. Baumker** : 1983. Common adjustment of terrestrial and satellite Doppler observing in three dimensions Symposium d, Proceedings of the IAG, vol 2. Hambourg, August, pp 224-256.
- [9] **C. Boucher** : 1978. Formulaire pour transformations de coordonnées 3-D cartésiennes ou géographiques entre deux systèmes géodésiques. IGN NT /G No 8.
- [10] **C. Boucher** : 1979. Investigations on geodetic applications of satellite Doppler observations for control networks. Proceedings of the Second International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning, Vol 2. Austin, USA, January 22-26, pp 1001-1025.
- [11] **C. Boucher** : 1984. Progress report on the use of space derived data for the Retrig phase III. Retrig Symposium, Copenhagen, October.
- [12] **C. Boucher** : 1985. The use of space data for the phase III of Retrig : a status report. Retrig Symposium, The Hague. C/C No 511, IGN 27405, December.
- [13] **H.M. Dufour** : 1971. La projection stéréographique de la sphère et de l'ellipsoïde. Sept, IGN/2, 26804.
- [14] **H.M. Dufour** : 1980. Evolutions possibles du calcul de Retrig Subcommission, publication No 13, pp 173-175.
- [15] **H.M. Dufour** : 1986a. Etude de l'utilisation de la projection stéréographique pour la comparaison de 2 réseaux tridimensionnels. Manuscrit. Février.
- [16] **H.M. Dufour** : 1986b. Les référentiels régionaux inverses : une synthèse possible entre la géodésie Tri et Bi-dimensionnelle. Cours de géodésie appliquée. CERN, 14-18 Avril.
- [17] **D. Ehlert** : 1981. Combined least squares solution using terrestrial and Doppler observations. Proceeding of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, No

258 Vol V, 1982, pp 94-103.

[18] **I. Gajderowicz** : 1981. Combined adjustment of Doppler and terrestrial nets in Doppler reference systems. Proceedings of the International symposium on Geodetic Networks and computations of the IAG, Munich, August 31 to september 5, 1981. DGK série B, No 258 Vol V. 1982, pp 98-113.

[19] **Le Géomètre Canadien** : 1974. Communications du symposium International sur les problèmes liés à la définition du réseau géodésique de l'Amérique du Nord, Vol 28 No 4.

[20] **E.W. Grafarend** : 1974. Optimization of geodetic networks. Bollettino Di Geodesia E Scienze Affini. Année 33 No 4 pp 351-406.

[21] **E.W. Grafarend** : 1985. Estimability of astronomical longitude and latitude only from theodolite observations within three-dimensional networks of terrestrial type. BG Vol 59 No 2, pp 124-138.

[22] **L. Grundig, M. Neureither & J. Bahndorf** : 1985. Including Macrometer - type observables into a standard 3-D adjustment program. Proceedings FIG, Inertial, Doppler and GPS measurements for National and Engineering Surveys. Joint Meeting of study Group 5B and 5C July 1-3. Publication UniBW No 20, Vol 2, October 1985, pp 377-390.

[23] **G.W. Hein** : 1981. a contribution to 3D-operational geodesy : Part 1 : Principle and observational equations of terrestrial type, pp 31-64; Part 2 : concept of solution. pp 65-85. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5. BGK série B, No 258 Vol VIII, 1982.

[24] **G.W. Hein** : 1986. Integrated Geodesy : State-Of-The-Art 1986 reference text. Lectures Notes. Fourth International Summer School in the Mountains, Admont Austria, August 25- september 5.

[25] **L. Hothem, T. Vincenty & R.E. Moose** : 1982. Relationship between Doppler and other advanced geodetic system measurements based on global data. Proceedings of the Third International geodetic symposium on Satellite Doppler positioning. Las Cruces, Feb 8-12, Vol 1, pp 109-128.

[26] **P. Hottier** : 1978. Théorie des erreurs à deux composantes bruit et silence. Vol 1, RT/G No 2. SGNM. Octobre.

[27] **P. Hottier** : 1984. Analyse numérique, chapitre 1, cours ENSG.

[28] **H. Jochemczyk** : 1983. Untersuchungen zur Kombination von geodatischen Punkthaufen. DGK, série C no 285.

[29] **R. Kelm** : 1983. Estimating relative and absolute coordinates with terrestrial and satellite data Symposium d, Proceedings of the IAG, Vol 2. Hambourg, August, pp 347-371.

[30] **C. Le Cocq et C. Boucher** : 1981. Mathematical model for network geometric adjustment. Proceedings of the International Symposium on Geodetic Networks and Computations of the IAG, Munich August 31 to September 5? 1981. DGK série B, No 258 Vol VI, pp 27-42. 1982.

[31] **A. Leick & V. Gelder H.W.** : 1975. On similarity transformations and geodetic network distortions based on Doppler satellite observations. Ohio report No 235.

[32] **P. Meissl** : 1983. Least squares adjustment : a modern approach. Mitteilung der geodatischen Institute der Technischen Universität Graz, Folge 43.

[33] **J.V. Mierlo** : 1980. Free network adjustment and S-transformations. DGK, série B No 252 pp 41-54.

[34] **H. Moritz** : 1980. Advanced Physical Geodesy . Herbert Wichmann Verlag, Karlsruhe. Abacus Press Tunbridge wells Kent.

- [35] **G. Schmitt** : 1984. Review of networks designs : criteria, risk functions, design ordering. Third Course of The International School of Advanced Geodesy, Erice Italy, April 25-May 10, 1984. Optimization and Design of Geodetic Networks, pp 6-10. Edited by E.W.Grafarend and F.Sanso. Springer-Verlag 1985.
- [36] **R. Strauß** : 1985. On the variation of the transformation parameters between GPS and the German Horizontal Network. Proceedings FIG, Inertial Doppler and GPS Measurements for National and engineering Surveys. Joint Meeting of Study Group 5B and 5C, July 1-3. Publication UniBW No 20, October 1985, pp 545-552.
- [37] **G.L. Strang** : 1980. Variance - covariance transformations of geodetic networks. MG Vol 7, No 1, pp 1-20.
- [38] **K. Swiatek** : 1984. Anwendung von Doppler Satellitenmessungen zur Genauigkeitsverbesserung geodatischer Netze. Zfv No 2, Fevrier, pp 65-75.
- [39] **D.B. Thomson & E.J. Krakowski** : 1976. Concepts of the combination of geodetic networks. Proceedings of the First International Geodetic Symposium on Satellite Doppler Positioning. Las Cruces, Oct. Vol 2, pp 727-746.
- [40] **P. Vanicek** : 1975. Report on geocentric and geodetic datums. Technical report No 32. Department of Surveying Engineering. University of New Brunswick. Fredericton N.B.Canada.
- [41] **P. Vanicek & D.E. Wells** : 1974. Positioning of horizontal geodetic datums Symposium Readjustment NAD. Fredericton. The Canadian Surveyor, Vol 28 No 5, pp 531-538.
- [42] **P. Vanicek & G. Carrera** : 1985. Reference ellipsoid misalignment, deflection components and geodetic azimuths. The Canadian Surveyor, vol 39 no 2, pp 123-130.
- [43] **T. Vincenty** : 1980. Height - controlled three dimensional adjustment of horizontal networks. BG Vol 54 No 1, pp 37-43.
- [44] **T. Vincenty** : 1982. Methods of adjusting space systems data and terrestrial measurements. BG Vol 56 No 3, pp 231-241.
- [45] **T. Vincenty** : 1985. On the meaning of the geodetic orientation. BG Vol 59 No 2, pp 189-199.
- [46] **W. Welsch** : 1984. Kombinierte Ausgleichung von Doppler-Satellitennetzen und terrestrischen Netzen. Satelliten - Doppler Messungen. Beitrage Zum geodatischen Seminar 24 - 25 september. Publication UniBw No 15, December 1984, pp 155-191.
- [47] **W. Welsch & W. Oswald** : 1985. Variance analysis of satellite networks. Proceedings First International symposium on precise Positioning with the Global Positioning System. Vol 2, pp 667-676. Maryland. USA, April.
- [48] **H. Wolf** : 1980a. On the use of Doppler observations for improving the Retrig adjustment. IAG retrig Subcommission publication No 13, pp 176-183.
- [49] **H. Wolf** : 1980b. The Retrig's phase III : problems and solutions (Idem), pp 184-189.
- [50] **H. Wolf** : 1980c. Scale and orientation in combined Doppler and triangulation nets. BG Vol 54 No 1 pp 45-53.
- [51] **H. Wolf** : 1982a. Stochastic aspects in combined Doppler and triangulation nets. BG Vol 56 No 1, pp 63-69.
- [52] **H. Wolf** : 1982b. Alternate procedure to combine Doppler measurements with the Retrig adjustment phase III. IAG Retrig Subcommission publication No 14, pp 115-127.
- [53] **H. Wolf** : 1982c. Minutes on the combining procedure of Doppler observations with the Retrig phase III. IAG Retrig Subcommission publication no 14, pp 212-221.
- [54] **H. Wolf** : 1984. Satelliten - Dopplermessungen in der Berechnung des Europäischen Dreiecksnetzes Retrig. Satelliten-Doppler messungen, Beitrage zum Geodati-

schen seminar 24/25 September. Publication UniBW No 15. December 1984, pp 221-229.

[55] **H. Wolf** : -1985. Das-lage und Hohen problem in grossen geodatischen netzen bei Einbeziehung von Satellitendopplermessungun. ZfV No 5, mai, pp 179-186.

[56] **Z. Zhou** : 1983. Untersuchung der mathematischen modelle zur kombination eines terrestrischen Netzes mit einem satellitennetz. DGK, série C No 274.

Abréviations :

AIG : Association Internationale de Géodésie.

BG : Bulletin Géodésique, publication de l'AIG, publié par Springer Verlag.

DGK : Publications de "Deutsche Geodatische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften". Munchen.

ENSG : Ecole Nationale des Sciences Géographiques (France).

FIG : Fédération Internationale des Géomètres.

IAG : International Association of Geodesy.

IGN : Institut Géographique National (France).

MG : Manuscripta Geodaetica publiée par Springer Verlag.

Ohio : Department of Geodetic Science, Ohio State University. Columbus. USA.

Retrig : Réseau Européen de triangulation.

UniBW : Universitat der Bundeswehr Munchen.

ZfV : Zeitschrift fur Vermessungswesen publié par Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart.