

ETUDES DES FERMETURES LAPLACIENNES DES AZIMUTS ASTRONOMIQUES ET DES ACCORDS DES BASES DU RESEAU GEODESIQUE PRIMORDIAL TERRESTRE TUNISIEN

Abdelmajid BEN HADJ SALEM, Ingénieur en Chef

RESUME

Dans le cadre du projet de Mise à Niveau de la Géodésie Tunisienne, nous présentons dans ce rapport, une investigation sur la qualité de notre Réseau Géodésique Primordial Terrestre Tunisien (RGPTT). A ce sujet, nous présentons l'étude des fermetures Laplaciennes entre les huit azimuts astronomiques ainsi que les accords entre des bases mesurées en 1982 lors des travaux de revalorisation du RGPTT objet de la convention n°2916 entre l'OTC et l'Institut Géographique National de France (IGNF) [1]. Nous donnons dans la partie A la méthodologie suivie, les résultats obtenus et les conclusions. Dans la partie B, on présentera les différents calculs [2].

ABSTRACT

As part of the Tunisian Geodesy Upgrade project, we present in this report an investigation of the quality of our Tunisian Primordial Terrestrial Geodetic Network (RGPTT). On this subject, we present the study of Laplacian closures between the eight astronomical azimuths as well as the agreements between bases measured in 1982 during work to revalue the RGPTT object of agreement n°2916 between the OTC and the *Institut Géographique National de France (IGNF)* [1]. We give in part A the methodology followed, the results obtained and the conclusions. In part B, we will present the different calculations [2].

ETUDES DES FERMETURES LAPLACIENNES DES AZIMUTS ASTRONOMIQUES ET DES ACCORDS DES BASES DU RESEAU GEODESIQUE PRIMORDIAL TERRESTRE TUNISIEN

A – METHODOLOGIE ET RESULTATS

1. INTRODUCTION

Pour connaître la qualité du Réseau Géodésique Primordial Terrestre Tunisien (RGPTT), nous proposons d'étudier les fermetures des azimuts astronomiques observés lors de la mission astronomique de 1982 et les accords entre les bases mesurées au cours de cette même mission objet de la convention n°2916 entre l'Office de la Topographie et de la Cartographie (OTC) et l'Institut Géographique National de France (IGNF)[1].

2. METHODOLOGIE

2.1. FERMETURES DES AZIMUTS ASTRONOMIQUES

A partir de l'azimut astronomique A_{za} au point de départ A, on le transforme en un azimut géodésique A_{zg} en utilisant l'équation de Laplace généralisée [3], à savoir :

$$A_{zg} = A_{za} + (\lambda - \lambda_a) \cdot \sin\varphi + ((\lambda - \lambda_a) \cos\varphi \cdot \cos A_{za} + (\varphi - \varphi_a) \cdot \sin A_{za}) \cdot \cotg Z \quad (1)$$

avec φ_a et λ_a sont respectivement la latitude et la longitude astronomiques observées en A et (φ, λ) sont sa latitude et sa longitude géodésiques, Z la distance zénithale observée dans la direction de l'azimut astronomique.

Par suite, A_{zg} sera transformé en gisement dans le plan de la représentation Lambert Tunisie (Nord ou Sud), par la formule :

$$G = Azg - \gamma + Dv \quad (2)$$

où :

G est le gisement de la direction de l'azimut astronomique,
 Azg est l'azimut géodésique de la direction concernée,
 γ est la valeur algébrique de la 'convergence des méridiens',
 Dv est la valeur algébrique de la correction de l'angle à la corde.

Pour la représentation plane Lambert Tunisie, γ a pour expression:

$$\gamma = (\lambda - \lambda_0) \cdot \sin \varphi_0 \quad (3)$$

avec :

λ la longitude géodésique du point de départ A,
 (φ_0, λ_0) la latitude et la longitude géodésiques du centre de la
 représentation Lambert Tunisie considérée. Pour la représentation
 Lambert Tunisie Nord (resp. Sud), on a :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= 40.0 \text{ gr Nord (resp. } 37.0 \text{ gr Nord)} \quad (4) \\ \lambda_0 &= 11.0 \text{ gr Est de Greenwich (resp. } 11.0 \text{ gr)} \end{aligned}$$

A partir du gisement G, on transporte ce gisement à partir des angles
 des triangles (qui sont corrigés de la fermeture des triangles en tenant
 compte de l'excès sphérique) formant le cheminement choisi pour
 arriver au deuxième azimut astronomique Aza' au point B.

Le passage du G(i) au G(i+1) se fait par la formule (en gr) :

$$G(i+1) = G(i) \pm 200.0 \pm \Sigma(\text{angles}) \pm Dv(i+1) \pm Dv(i) \quad (5)$$

L'équation (5) nous donne le gisement transporté G_T de la direction de
 l'azimut astronomique Aza'. A partir de l'équation (2), on aura l'azimut
 astronomique transporté Azg_T par :

$$Azg_T = G_T + \gamma' + Dv \quad (6)$$

où :

$$\gamma' = (\lambda' - \lambda_0) \cdot \sin \varphi_0 \quad (7)$$

avec γ' est '' la convergence des méridiens '' au point B et λ' sa
 longitude géodésique. Au point B, on transforme en utilisant la formule
 (1) l'azimut astronomique Aza' en un azimut géodésique Azg'. On
 compare alors Azg' et Azg_T soit :

$$dAzg = Azg' - Azg_T \quad (8)$$

2. 2. LE CALCUL D'ERREURS

Dans le cas de l'azimut géodésique transporté Azgt, on a utilisé n angles et l'azimut géodésique du départ.

Appelons :

σ l'écart-type d'un angle,

n le nombre des angles,

σ_{Azgt} l'écart-type de l'azimut géodésique transporté,

σ_{Azg} l'écart-type de l'azimut géodésique de départ, (9)

σ_{Aza} l'écart-type de l'azimut astronomique de départ,

σ_{λ_a} l'écart-type de la longitude astronomique de départ,

φ la latitude géodésique du sommet de départ.

On a alors :

$$\sigma^2_{Azgt} = \sigma^2_{Azg} + n \sigma^2$$

Or :

$$\sigma^2_{Azg} = \sin^2\varphi \cdot \sigma^2_{\lambda_a} + \sigma^2_{Aza}$$

Soit: $\sigma^2_{Azgt} = \sin^2\varphi \cdot \sigma^2_{\lambda_a} + \sigma^2_{Aza} + n \sigma^2$ (10)

L'écart-type σ sera déterminé à partir des angles des triangles utilisés lors du transport de l'azimut, soit par la formule de Ferrero :

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n E_i^2}{3n} \quad (11)$$

Où E_i est la fermeture du triangle i.

2.3. ACCORDS DE BASES

On va étudier maintenant les accords de bases mesurées lors de la mission IGNF entre les huit points de Laplace (un point est appelé point de Laplace si on a mesuré sa latitude et sa longitude astronomiques ainsi que l'observation de l'azimut astronomique d'une direction).

Soit AB la base de départ réduite au plan de la représentation Lambert Tunisie (Nord ou Sud) et CD le côté d'arrivée, on a alors la relation :

$$CD = \frac{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3 \dots \sin b_n}{\sin c_1 \cdot \sin c_2 \cdot \sin c_3 \dots \sin c_n} AB \quad (12)$$

Dans la formule (12), les angles b_i et c_i sont réduits à la représentation Lambert Tunisie concernée. Notons :

- B_T la base transformée,
- B_D la base de départ, (13)
- B_A la base de l'arrivée,
- K le coefficient égal au produit des $\sin b_i / \sin c_i$.

L'équation (12) s'écrit : $\mathbf{B}_T = \mathbf{K} \cdot \mathbf{B}_D$ (14)

Nous déduisons alors l'accord des bases par :

$$d\mathbf{B} = \mathbf{B}_A - \mathbf{B}_T \quad (15)$$

2.4. LE CALCUL D'ERREURS

A partir de la formule (12), on obtient l'écart-type σ_{B_T} de la base transportée par :

$$\sigma_{B_T}^2 = \sigma^2 B_T^2 \sum_{i=1}^n (\cot^2 g b_i + \cot^2 g c_i) + K^2 \sigma_{B_D}^2 \quad (16)$$

où :

σ : l'écart-type sur un angle,

σ_{B_D} : l'écart-type sur la base de départ. (17)

3. RESULTATS

Nous présentons dans le tableau ci-dessous les résultats obtenus :

N°	Liaisons	Fermeture en Azimut (dmgr)	Ecart-type Calculé= σ_1 (dmgr)	Accord de bases (cm)	Ecart-type estimé= σ_2 (cm)	Distance =D (km)	Erreur relative= σ_2/D ppm
1	J. GATTOUS – J. HAMID	-5.65	11.62	-10.0	36.1	112.788	0.89
2	J.GATTOUS - CARTHAGE	-18.20	7.93				
3	AIN ABDOUR – H. HAJAR	- 10.1	9.88	+ 46.1	30.0	142.894	3.23
4	LAFAYA – H. HAJAR	- 9.8	7.75	- 13.5	19.1	130.577	1.03
5	J.HAMID – P. ASTRO	+ 12.6	12.06	- 30.1	26.7	133.268	2.26
6	B. REBEH – SEMMAMA	+ 6.40	7.69	- 14.0	20.0	121.421	1.15
7	SEMMAMA – LAFAYA	+ 30.6	15.90	- 47.4	42.0	139.123	3.41
8	SEMMAMA – A. ABDOUR	+ 16.6	15.58	+ 30.7	28.8	126.621	2.43
9	J. GATTOUS – B. REBEH	+ 12.8	7.10	- 30.7	19.2	134.388	2.28

4. Les Commentaires:

Du tableau ci-dessus, nous déduisons les constatations suivantes :

- concernant les fermetures entre azimuts f_{Az} , on trouve que celles-ci vérifient :

$$f_{Az} < 2,7 \cdot \sigma_1 \quad (18)$$

C'est-à-dire que les fermetures sont dans les tolérances requises.

- pour les accords en distances dB, là aussi, ils vérifient aussi :

$$dB < 2,7 \cdot \sigma_2 \quad (19)$$

- enfin, l'erreur relative des distances, on trouve qu'elle ne dépasse pas **3 mm/km**, soit légèrement supérieure à la précision des distancemètres de haute résolution (2mm/km).

5. Conclusion :

Les études des fermetures laplaciennes des azimuts astronomiques et des accords des bases du Réseau Géodésique Primordial Terrestre Tunisien (RGPTT) ont montré que le RGPTT a de bonnes qualités angulaire et métrique.

6. Références :

1. Mohamed Charfi. *Modernisation du Réseau Géodésique Primordial Tunisien*. Rapport présenté à la 18ème Assemblée Générale de l'Union Géodésique et Géophysique Internationale (UGGI), 15-17 août 1983, Hambourg, RFA.
2. Abdelmajid Ben Hadj Salem. *Etudes des fermetures laplaciennes des azimuts astronomiques et des accords des bases du Réseau Géodésique Primordial Terrestre Tunisien (RGPTT)*. 49 pages. (2009).
3. Abdelmajid Ben Hadj Salem. *Point de Laplace Exemple de Calcul Géodésique et Analyse des Résultats en Géodésie Tridimensionnelle*. Mémoire de Fin d'Etudes pour l'Obtention du Diplôme d'Ingénieur de l'Ecole Nationale des Sciences Géographiques, France. IGN France, 1981. <https://vixra.org/pdf/1703.0038v1.pdf>, 59pages.