

The reconstruction of the Quantum theory utilizing indefinite metric derived from covariant quantization

Masahito Morimoto

(Dated: 9 October 2020)

In this paper, we reconstruct the quantum theory, which was constructed based on the probability interpretation as a basic concept, with a fundamental concept that does not depend on the probability interpretation using objective physical reality.

As typical physical phenomena of quantum theory based on probability interpretation, we pick up the single-photon interference, single-electron interference, and EPR correlation experiments using photon polarization. We show that the identical calculation results can be obtained by using either the probability interpretation or objective physical reality. For the calculation, the minus sign derived from the covariant quantization of Maxwell's equations, which is associated with the scalar potential of time axis component of four-vector, is taken as it is as an inevitable request from the theory instead of removing it by mathematical procedure because of the contradiction with the probability interpretation. And we have shown that the identical calculation results based on the probability interpretation of these single photon, single electron interference, and EPR correlation can be reproduced.

These calculation processes along the physical phenomena can describe that there is the scalar potential in whole space-time and when there is some geometry in the space, the scalar potential forms the oscillatory field of the potential according to the shape of the geometry. It reveals the objective physical reality that the single-photon, single-electron interference, and EPR correlation are generated by the movement of the photons and electrons in the oscillatory field with interference.

In addition, we show that the oscillatory field formation of the scalar potential depending on the shape of the geometry arrangement existing in this space causes energy fluctuation in the space, which enables removal of infinite zero-point energy and causes spontaneous symmetry breaking and Casimir effect. Furthermore, we discuss the origin of the scalar potential that can explain such various phenomena by distinguishing the space where the substance exists and the vacuum.

Finally, by introducing the extended Lorentz gauge, we propose the new solution for the contradiction between the Lorentz gauge as an operator equation and the commutation relation in the covariant canonical quantization of Maxwell's equations with the conventional Lorentz gauge.

This paper is a compilation of the author's papers¹⁻³ with some corrections and adjustments.

CONTENTS

I. Introduction	4
II. Covariant quantization of Maxwell's equations	7
A. Quantization using Lorentz gauge	7
III. Single photon, Single electron interference and EPR correlation	11
A. Single photon interference	12
1. Calculation using probability interpretation	12
2. Calculation using reconstruction	13
B. Single electron interference	20
1. Calculation using probability interpretation	20
2. Calculation using reconstruction	21
C. EPR correlation	25
1. Calculation using probability interpretation	25
2. Calculation using reconstruction	30
IV. Application	37
A. Generalization of the geometry	38
B. Zero point energy of the electromagnetic fields	40
C. Casimir effect	43
D. Spontaneous symmetry breaking	44
E. General approach for single particle interference	45
V. Origin of the indefinite metric potential	46
VI. Contradiction of the covariant canonical quantization	49
A. canonical quantization and contradiction of commutation relations	49
B. Extended Lorentz gauge	51
C. discussion	52
VII. Summary	55
References	58

I. INTRODUCTION

The standard quantum theory has been constructed based on probability interpretation. An arbitrary state of a microscopic physical system such as an atom or elementary particle is represented by a state vector equate with a vector in Hilbert space. An expected value of a physical quantity is obtained from the eigenvalue equation of an operator representing a physical quantity. That is the calculation technique of the standard quantum theory based on probability interpretation.

According to the idea of equating this physical state with a vector in Hilbert space, the inner product of the vectors is interpreted as representing the probability that the state of the system exists in the space-time. Calculations using this basic concept are in agreement with experimental results. Without this concept, single photon and electron interference are difficult to explain. In addition, an entangled state exhibiting long-range correlation that seem to contradict relativity has been discussed by probability interpretation.

However, as long as follow this concept, it is difficult to solve the paradoxes associate with a wave packet reduction typified by "Schrödinger's cat" and "Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)".^{4,5}

To interpret quantum theory without these paradoxes, de Broglie and Bohm proposed the so-called "hidden variable" theory.^{6,7} However it is considered "hidden variable" has been rejected by violation of Bell's inequality. The rejection of "hidden variables" due to the violation of Bell's inequality is inconsistent with relativity that relies on the locality of physical laws.

Although the improvement has not been completed so far, some researchers have been trying to improve the quantum theory based on probability interpretation to fit relativity.⁸⁻¹²

Various discussions and experiments have been conducted associate with the correctness of the basic concept of quantum theory that requires description of physical phenomena beyond relativity and common sense. For examples, quantum mechanical superpositions by some experiments have been reviewed.¹³ The atom interference by using Bose-Einstein condensates (BECs) has been reported experimentally and theoretically.^{14,15} The coherence length of an electron or electron-electron interference by using the Aharonov-Bohm oscillations in an electronic MZI has been discussed theoretically.^{16,17} A plasmonic modulator utilizing an interference of coherent electron waves through the Aharonov-Bohm effect has

been studied by the author.¹⁸ The entangle states have been widely discussed experimentally and theoretically.^{19–24} The photon interference by using nested MZIs and vibrate mirrors has been measured and analyzed.^{25,26} The double-slit electron diffraction has been experimentally demonstrated.²⁷

These reports associated with quantum phenomena have convinced the validity of the basic concept of the probability interpretation, and the reliability of the standard quantum theory based on the probability interpretation has come to be considered unwavering.

However, these reports just confirmed the agreement between the measurement results and the calculation results based on the basic concept of the probability interpretation, and examined the application of the interference derived from the probability interpretation. They have considered no possibility other than the probability interpretation of quantum theory.

In this paper, we reconstruct the quantum theory without probability interpretation as a basic concept by showing the identical calculation results for single photon interference, single electron interference, and EPR correlation utilizing the both conventional probability interpretation and objective physical reality that describes photons and electrons are moving in space-time without probability interpretation.

According to the reconstruction, the concept of pure state of which probabilities are fundamental sense does not exist in nature. Only the concept of mixed states of which probabilities are statistical sense is physically valid as a natural law. Although the probability interpretation of the standard quantum theory using the mixed state is useful for calculations, it is shown that quantum theory will be deterministic physics without probability interpretation as in classical physics.

In addition, we show that the removal of infinite zero-point energy without artificial subtraction, Casimir effect and spontaneous symmetry breaking are spontaneously obtained.

The structure of this paper is as follows.

In chapter II, we summarize the covariant quantization of Maxwell's equation that requires an indefinite metric, which is the essence of this paper, and discuss that the indefinite metric obtained by the quantization should take precedence over the probability interpretation.

In chapter III, we indicate the difference in calculation and interpretation for single-photon interference, single-electron interference and EPR correlation between using the con-

ventional probability interpretation and the reconstruction. Despite the differences, except for the interpretation, the identical results can be obtained as the observable physical phenomena. In addition, we show a convenient format for calculation named “simple calculation method”, which simplifies the calculation of reconstruction. From the calculation results by the reconstruction, it becomes clear that the scalar potential is a physical reality with a minus sign of indefinite metric.

In chapter IV, as applications of the reconstruction, we show that the removal of infinite zero-point energy, Casimir effect, spontaneous symmetry breaking are spontaneously obtained utilizing the generalization of the geometry in the space discussed in the chapter III. We also refer to the general approach for single particle interference.

In chapter V, the origin of the indefinite metric potential and Maxwell’s equations in vacuum, which is the core of the reconstruction examined in this paper, is discussed.

In chapter VI, we discuss the contradiction between Lorentz condition as an operator and commutation relation in covariant canonical quantization of Maxwell’s equations, and propose the new method that can avoid the contradiction by introducing the extended Lorentz gauge. Then we study the validity of the approach using matrix representation of the operator.

In chapter VII, we summarize the reconstruction.

II. COVARIANT QUANTIZATION OF MAXWELL'S EQUATIONS

In order to reconstruct the basic concept of the conventional standard quantum theory based on probability interpretation into objective physical reality, covariant quantization of Maxwell's equations using Lorentz gauge is indispensable instead of using Coulomb gauge. That will be shown together with concrete calculations in the following chapters.

The purpose of the quantization described in this chapter is to clarify the introduction of the minus sign required by the indefinite metric, which is necessary for the discussion in the following chapters.

For that purpose, quantization is performed using Fourier transform without going into the details of canonical quantization. That is to say, the four-vector satisfying the covariant form of Maxwell's equations is expressed by the Fourier transform of plane wave expansion, and those Fourier coefficients are replaced by operators with setting commutation relations.

The canonical covariant quantization of Maxwell's equations with Lorentz gauge requires the discussions other than the purpose of this chapter, i.e., associate with the selection of Lagrangian density and the setting of commutation relations. Therefore the canonical quantization will be dealt with independently and discussed in Chapter VI.

However, there is no difference in calculations and explanations in the following chapters, whether we perform the quantization in this chapter or the canonical quantization.

A. Quantization using Lorentz gauge

The subject of the discussion is Maxwell's equations below.

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1)$$

where μ_0 and ε_0 are the permeability and permittivity of a vacuum respectively.

In the Maxwell's equations (1), the electromagnetic potentials ϕ and \mathbf{A} are expressed as following four-vector in Minkowski space.

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi/c, \mathbf{A}) \quad (2)$$

The charge density ρ and space currents \mathbf{i} are also expressed as following four-currents.

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \mathbf{i}) \quad (3)$$

Hence, by setting the axes of Minkowski space as $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, Maxwell's equations with Lorentz condition are expressed as following covariant form

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4)$$

In addition, the conservation of charge

$$\text{div } \mathbf{i} + \partial\rho/\partial t = 0 \quad (5)$$

is expressed as following covariant form.

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6)$$

where,

$$\partial_\mu = (1/c\partial t, 1/\partial x, 1/\partial y, 1/\partial z) = (1/\partial x^0, 1/\partial x^1, 1/\partial x^2, 1/\partial x^3) \quad (7)$$

and \square stands for the d'Alembertian : $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial^2/c^2 \partial t^2 - \Delta$.

The transformation between covariance and contravariance vector can be calculated by using the simplest form of Minkowski metric tensor $\mathbf{g}_{\mu\nu}$ as follows.

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$A_\mu = \mathbf{g}_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = \mathbf{g}^{\mu\nu} A_\nu \quad (9)$$

The following quadratic form of a four-vector is invariant under a Lorentz transformation.

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (10)$$

The above quadratic form applied a minus sign expresses the wave front equation and can be described by using metric tensor.

$$-\mathbf{g}_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x^\mu x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (11)$$

This quadratic form which includes minus sign is also introduced into inner product of arbitrarily vectors and commutation relations in Minkowski space.

The four-vector satisfied Maxwell's equations without the four-current in free space can be expressed as following Fourier transform in terms of plane wave solutions.²⁸

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 [a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}] \quad (12)$$

$$\tilde{k} = \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \quad k_0 = |\mathbf{k}| \quad (13)$$

where the unit vector of time-axis direction n and polarization vectors $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ are introduced as $n^2 = 1$, $n^0 > 0$ and $\epsilon^{(0)} = n$, $\epsilon^{(1)}$ and $\epsilon^{(2)}$ are in the plane orthogonal to k and n

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = -\delta_{\lambda,\lambda'} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2 \quad (14)$$

$\epsilon^{(3)}$ is in the plane (k, n) orthogonal to n and normalized

$$\epsilon^{(3)}(k) \cdot n = 0, \quad [\epsilon^{(3)}(k)]^2 = -1 \quad (15)$$

Then $\epsilon^{(0)}$ can be recognized as a polarization vector of scalar waves, $\epsilon^{(1)}$ and $\epsilon^{(2)}$ of transversal waves and $\epsilon^{(3)}$ of a longitudinal wave. Then we take these vectors as following the easiest forms.

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

The quantization is performed by replacing the Fourier coefficients of the four-vector with operators $\hat{A}_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ and setting the commutation relations as follows.

$$[\hat{A}_\mu(k), \hat{A}_\nu^\dagger(k')] = -\mathbf{g}_{\mu\nu} \delta(k - k') \quad (17)$$

The time-axis component (corresponds to $\mu, \nu = 0$ scalar wave, i.e., scalar potential because $\epsilon_\mu^{(0)}(k) = 0$ ($\mu \neq 0$)) has the opposite sign of the space axes. Because $\langle 0 | \hat{A}_0(k) \hat{A}_0^\dagger(k') | 0 \rangle = -\delta(k - k')$,

$$\langle 1 | 1 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle \int d\tilde{k} |f(k)|^2 \quad (18)$$

where $|1\rangle = \int d\tilde{k} f(k) \hat{A}_0^\dagger(k) |0\rangle$. Therefore, the time-axis component is the source of indefinite metric.

Here, when we identify $|1\rangle$ as the single photon state by the probability interpretation, the probability that there is one photon in space is negative. Therefore the probability interpretation fails.

Mathematically, the negative sign of the inner product of vectors is contrary to the definition of the inner product of vectors in Hilbert space.

In the first place, equating of the physical state vectors $|x\rangle$ and those inner product $\langle x|x\rangle$ with the vectors and those inner product in Hilbert space such as $|x\rangle \geq 0 \quad \langle x|x\rangle = 0 \Leftrightarrow |x\rangle = 0$ was not derived from theory, but artificially introduced.

The reliability of the identification has been established as a result of accumulating agreement between the calculation results obtained from the probability interpretation and various experimental results.

In addition to the reliability, the mathematical technique which can match the probability interpretation with the indefinite metric has been developed by cancel out the contribution of the scalar wave and longitudinal wave. However, such a procedure is not necessarily required by theory, and should be recognized as just a mathematical technique by an artificial operation.

On the other hand, the minus sign is necessarily introduced from Maxwell's equations and the theory of relativity. In the first place, the physical space of the natural world is expressed as Minkowski space even if gravity is ignored or Riemann space if gravity is included, and the metric is not limited to a positive definite value.

In this paper, we accept the introduction of the minus sign as an inevitable request from the theory, and reconstruct the quantum theory without probability interpretation. The calculation results of single-photon interference, single-electron interference and EPR correlation using probability interpretation can be faithfully reproduced by introducing the minus sign in the following chapters. Then we show these phenomena will be clear the image of objective physical reality.

If the Coulomb gauge is adopted, the scalar potential of the time axis component, which is the source of the indefinite metric, will be ignored. Therefore the discussion in the next chapter becomes difficult. In addition, the explicit covariance of Maxwell's equations is also lost, hence Lorentz gauge should be adopted to construct the basic concept of physical law independent of the coordinate system.

III. SINGLE PHOTON, SINGLE ELECTRON INTERFERENCE AND EPR CORRELATION

In this chapter, we show the calculation methods for the single photon interference, single electron interference, EPR correlation by using the both probability interpretation and reconstruction. We emphasize that the calculation of single-photon and single-electron interference by using probability interpretation imposes the description that a single particle that cannot be further divided must be considered as if it were divided into separate paths on us.

On the other hand, the calculation of single-photon and single-electron interference by using the reconstruction reveals that the scalar potential, which is the source of the indefinite metric, forms an oscillatory field due to the arrangement of the experimental setups. Then we can obtain the image of objective physical reality something like the inseparable single photon or electron moves in the oscillatory field while interfering with each other.

For EPR correlation, the calculation utilizing polarized photons will be discussed. On the calculation of EPR correlation by using probability interpretation, two photons having polarizations orthogonal to each other must be considered as a correlated photon pair state (Entanglement), which simultaneously splits into different paths and exists only stochastically. This kind of explanation requires not only the probability interpretation but also the "denial of locality" which contradicts the relativity such that the polarization of the photon of one path is determined at the very moment when the polarization is found by the polarization measurement of the photon of the other path.

On the other hand, according to the reconstruction, the correlation photon pair has the designated polarization that is determined when it generates, and when the polarization direction is measured, those photons are interfered with the scalar potential that forms an oscillatory field due to the arrangement of the experimental setup. We clarify that there seems to be a non-local long-range correlation beyond the causality due to the interference with the potential.

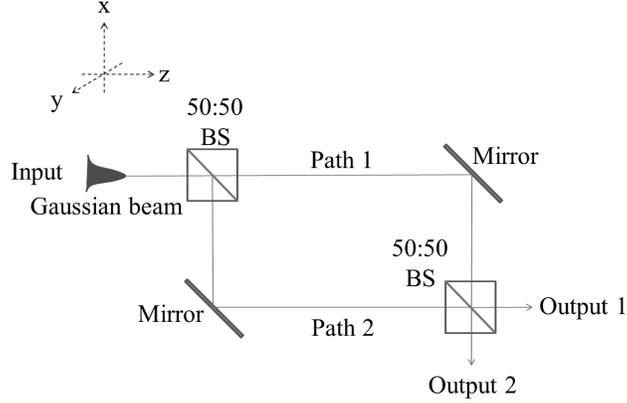


FIG. 1. Schematic view of Mach-Zehnder Interferometer (MZI). BS:Beam Splitter.

A. Single photon interference

1. Calculation using probability interpretation

Figure 1 shows a schematic view of the Mach-Zehnder Interferometer (MZI) and coordinate system.

On the probability interpretation, the calculation of the single photon interference by using Maxwell's equations (1) in free space ($\mathbf{i} = 0, \rho = 0$) with Coulomb gauge eliminates the scalar potential ϕ and only uses the quantized vector potentials \hat{a} and \hat{a}^\dagger as the photon annihilation and creation operator respectively.

To calculate the single photon interference of the MZI, the following electric field operator and number state $|n\rangle$ are introduced.

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \quad (19)$$

where $\hat{a}_{1\text{or}2}$ is the photon annihilation operator corresponding to an optical mode passing through path 1 or 2, respectively, θ is a phase difference corresponding to the difference in length between the two paths.

$\hat{a}_{1\text{or}2}$ and $\hat{a}_{1\text{or}2}^\dagger$ are defined along with the expected photon number from the photon creation and annihilation operators \hat{a} and \hat{a}^\dagger in free space (MZI input) before the photons are split into two paths as follows.

$$\langle n|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|n\rangle = \langle n|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|n\rangle = \langle n|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|n\rangle = \frac{1}{2}n \quad (20)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

The square of the electric field operator $\hat{E}^\dagger \hat{E}$ is used as an electric field intensity operator proportional to the photon number, and the photon number at the MZI output is calculated as follows by using the squared operator and the number state.²⁹

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle n | \hat{E}^\dagger \hat{E} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle + \cos \theta \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (22)$$

where $\langle \hat{I} \rangle$ is the expected field intensity proportional to the photon number.

Substituting 1 ($n = 1$) for the photon number as a single photon, the above expected value is calculated to be as follows.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (23)$$

In this calculation, the photon incident from the MZI is interpreted as passing through each of the paths 1 and 2 with probability 1/2, with the phase difference corresponding to the optical length between the two paths, as is clear from the form of the electric field operator introduced in (19), the expected photon number (20) on each path, the division of the photon creation and annihilation operator (21).

This interpretation is valid as statistical physics that when the intensity of light incident on the MZI is high and the photon number n is large, approximately $n/2$ photons are on one side and $n/2$ photons are on the other side.

This kind of statistical state has been introduced as a mixed state which is multiplied by a density matrix proportional to the probability including the pure state having a fundamental probability. The probability interpretation using the mixed state is considered statistically valid.

However, even if the intensity of light incident on the MZI is very low and it is considered to be a single photon that cannot be split any more, the single photon is considered as a pure state with fundamental probability and passes through both path 1 and 2 at the same time with probability 1/2.

2. Calculation using reconstruction

In order to reconstruct from this probability interpretation into a picture with an objective physical reality, we examine again the electromagnetic field of the incident photon beam on

the MZI in Figure 1.

First, assume that a light beam having an angular frequency ω and a propagation constant β polarized in the x-axis direction propagates in the z-axis direction, and the electric field of the light beam has, for example, a Gaussian distribution of which cross-sectional shape is well localized in free space. Then, the electric field of the input light beam can be expressed as follows.

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad (24)$$

where, \mathbf{e}_x is unit vector parallel to the x-axis. C_E is an arbitrary constant which is proportional to the magnitude of the electric field. w_0 is the radius of the optical beam. \mathbf{E} and \mathbf{B} are expressed by vector and scalar potentials as follows.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla\phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (25)$$

From (24) and (25), \mathbf{A} is expressed by introducing a vector function \mathbf{C} as follows.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= -\frac{1}{\omega}\mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{C} \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C} &= -\nabla\phi \end{aligned} \quad (26)$$

By taking \mathbf{C} as an irrotational vector function $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ in order for \mathbf{B} to localize in the space, for example, \mathbf{C} and ϕ can be expressed by introducing an arbitrary scalar function λ as $\mathbf{C} = \nabla\lambda$ and $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\lambda + \phi\right) = 0$ respectively.

Then \mathbf{B} is expressed as follows

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\beta}{\omega}\mathbf{e}_y \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) - \frac{2y}{\omega \cdot w_0^2}\mathbf{e}_z \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) \end{aligned} \quad (27)$$

Therefore, \mathbf{E} and \mathbf{B} are localized in the free space in the input. In contrast, the vector and scalar potentials are not necessarily localized. The above localized form (24) is one example, other forms which satisfy the Maxwell's equations (1) in free space $\mathbf{i} = 0$ and $\rho = 0$ can be employed.

Note that, the Gaussian beam radius will be spatially expanded due to the free space propagation. However, the radius of the propagated beam $w(z)$ will be approximately

10.5mm when the beam with the initial radius $w_0 = 10\text{mm}$ propagates $z = 100\text{m}$ in free space. This value can be calculated by $w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$ when the wavelength $\lambda = 1\mu\text{m}$ is applied. Then the spatially expansion of the beam will be negligible small when the paths of the MZI are less than several tens meters.

As described above, even if the photon is localized, the potential is not always localized. In particular, the scalar potential can exist in all spaces. The reconstruction is shown below by utilizing the existence of this scalar potential as the objective physical reality.

First, note that vector potentials and scalar potential are mixed by Lorentz transformation. Therefore from the Lorentz invariant, vector potentials and scalar potential should be equally treated as $\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_3^\dagger\hat{A}_3|1\rangle$.

For simplicity of calculation, the incident beam in the figure 1 is assumed to be perfectly polarized on the x-axis, and the longitudinal wave that is considered to be unphysical presence is ignored, i.e., $A_2 = 0$, $A_3 = 0$. However, as mentioned above, the scalar potential can exist in the whole space. Therefore, the four-vector at the input of the MZI is expressed as follows.

$$A_\mu = (A_0, A_1, 0, 0) \quad (28)$$

This scalar potential is split when there are two paths of the MZI as a physically reasonable phenomenon. Here, we examine that a single photon represented by a transverse wave polarized in the x-axis passes through path 1 and the scalar potential A_0 is divided into both paths 1 and 2 with a phase difference θ between the two paths. In this case, the four-vector ($\equiv A_{\mu:(\text{path1})}$) along path 1 and four-vector ($\equiv A_{\mu:(\text{path2})}$) along path 2 of MZI can be expressed as follows.

$$\begin{aligned} A_{\mu:(\text{path1})} &= \left(\frac{1}{2}e^{i\theta/2}A_0, A_1, 0, 0\right) \\ A_{\mu:(\text{path2})} &= \left(\frac{1}{2}e^{-i\theta/2}A_0, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (29)$$

By replacing Fourier coefficients of the four-vector with operators $\hat{A}_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{(\lambda)}(k)\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ and setting the commutation relations, the single photon interference can be calculated using the potentials as an operator. According to the quantization, photon annihilation operators corresponding to optical modes passing through MZI paths 1 and 2 are defined as $\hat{A}_{\mu:(\text{path1})}$ and $\hat{A}_{\mu:(\text{path2})}$ respectively. Here we must introduce the indefinite metric into the product of the operator as follows.

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = -\mathbf{g}_{\mu\nu} \hat{A}^{\mu\dagger} \hat{A}^\nu = -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \quad (30)$$

Hence the photon number operator at the output of MZI can be obtained as following expression by using the photon annihilation operator at the point $\hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}$.

$$-\mathbf{g}^{\mu\nu} \{ \hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})} \}^\dagger \{ \hat{A}_{\nu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\nu:(\text{path2})} \} = -\frac{1}{2} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \frac{1}{2} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \cos \theta \quad (31)$$

where, the following relations are used.

$$\begin{aligned} -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path1})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path1})} &= -\frac{1}{4} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \\ -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path1})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path2})} &= -\frac{1}{4} e^{-i\theta} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \\ -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path1})} &= -\frac{1}{4} e^{i\theta} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \\ -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path2})} &= -\frac{1}{4} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \end{aligned}$$

From (31) and |1) with the Lorentz invariant, $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$ can be calculated. By selecting the proper reference point of the phase difference, (23) is reproduced.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (32)$$

Here, in order to clarify the motion of the scalar potential and the single photon as an objective physical reality, we further study the single photon MZI experimental setup. Since the electromagnetic field has time reversal invariance, there is no particular reason to distinguish the input and output of the MZI. Therefore, the photon annihilation operator at the confluence of the input of the MZI should be represented as the output of the MZI. Then

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})} = \left(\cos \frac{\theta}{2} \hat{A}_0, \hat{A}_1, 0, 0 \right) \quad (33)$$

It is physically reasonable to assume that there is clearly single photon at the input of the MZI. If (28) is used to calculate the photon number with the single photon state at the input of the MZI, the result is calculated to be $\langle 1 | (-\hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1) | 1 \rangle = 0$. Therefore if we erase the scalar potential as $\hat{A}_0 = 0$, we can not obtain the interference. On the other hand, the photon number is 1 when $\theta = \pm N\pi$ (N : odd number) in (33). Therefore, we should recognize the scalar potential at the input of the MZI is nonzero (not empty, i.e., $\hat{A}_0 \neq 0$) and cancels each other out with opposite phase waves, i.e., $\cos(\theta/2) = 0$. From this study, it is possible to obtain a picture that the scalar potential generates an oscillatory field like $f(\theta) \cdot \hat{A}_0$ when there is a division in the space. Where $f(\theta)$ is the oscillatory function of θ . The formation of the oscillatory field can be recognized as a "hidden variable" associate with the EPR correlation, which will be dealt with in the next section. It is possible

to interpret that a substantial photon moves in the oscillatory field, which interferes with each other. Therefore, the expected value of the field intensity at any spatial position is calculated as $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$ using (33). From the discussion, no matter where the substantial photon moves in the space, no photon can be observed at the position where $\theta = \pm N\pi$ (N : odd number) in the space.

In this way, if we accept the indefinite metric required from the covariant quantization without probability interpretation, a clear image of objective physical reality is obtained. That is to say, there is a scalar potential on both paths of the MZI, which forms an oscillatory field by dividing the path of the MZI, and a single photon incident from one path passes through while interfering with the oscillatory field. The formation of the oscillatory field by dividing the path examined here corresponds to the fact that the phase term depending on the potentials introduced on the electron wave function cannot be eliminated in the spatially multiple-connected region in the Aharonov-Bohm effect.^{30,31}

We can replace the above calculation and picture as an analogy of electronic circuits that the scalar potential corresponds to the bias current (voltage) and the vector potential, which represents a single photon, corresponds to a signal current (voltage) added to the bias current (voltage). However, in this case, the bias current (voltage) is not direct current (DC) (or voltage), but an alternating bias current (AC) (or voltage) that interferes with the signal current (voltage), which causes output fluctuations. In summary, an observed signal fluctuates when the signal is added on a fluctuating reference. In addition, if we use the analogy of homodyne detection wireless communication or optical communication, the scalar potential corresponds to a continuously oscillating local oscillator placed at the receiving end and a single photon corresponds to a signal. This corresponds to extracting the signal information by the interference between the continuous wave of the local oscillator and the signal at the receiving end, and the image shows that each point in whole space-time has a local oscillator.

It is convenient to calculate the single photon interference by introducing the following operator \hat{A}'_0 instead of \hat{A}_0 using the above operator \hat{A}_1 .

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0 &= \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1 \\ \hat{A}'_0^\dagger &= \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger - \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger\end{aligned}\tag{34}$$

where $\gamma^2 = -1$ (i.e., γ corresponds to the square root of the determinant of Minkowski metric tensor $\sqrt{|\mathbf{g}_{\mu\nu}|} \equiv \sqrt{\mathbf{g}} \equiv \sqrt{-1} = \gamma$)

By using the operator, the expected field intensity $\langle \hat{I} \rangle \propto \langle 1 | (\hat{A}'_0 + \hat{A}_1)^\dagger (\hat{A}'_0 + \hat{A}_1) | 1 \rangle$ can be calculated as follows.

$$\begin{aligned}
\hat{A}'_0 \hat{A}'_0 &= -\frac{1}{4} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 - \frac{1}{4} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 + \frac{1}{4} e^{i\theta} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 + \frac{1}{4} e^{-i\theta} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 \\
&= -\frac{1}{2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 + \frac{1}{2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 \cos \theta \\
\hat{A}'_1 \hat{A}'_0 &= \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 - \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 \\
\hat{A}'_0 \hat{A}'_1 &= \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 - \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} \hat{A}'_1 \hat{A}'_1
\end{aligned} \tag{35}$$

Finally, we can obtain the following result.

$$\begin{aligned}
\langle 1 | \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 | 1 \rangle &= 1 \\
\langle 1 | \hat{A}'_0 \hat{A}'_0 | 1 \rangle &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \\
\langle 1 | \hat{A}'_1 \hat{A}'_0 | 1 \rangle &= \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} \\
\langle 1 | \hat{A}'_0 \hat{A}'_1 | 1 \rangle &= \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2}
\end{aligned}$$

$$\langle 1 | \hat{A}'_1 \hat{A}'_1 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}'_0 \hat{A}'_0 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}'_1 \hat{A}'_0 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}'_0 \hat{A}'_1 | 1 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \tag{36}$$

This form is equivalent to using the following four-vector instead of (29).

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\mu:(\text{path1})} &\equiv (0, \hat{A}_1, 0, 0) \\
\hat{A}_{\mu:(\text{path2})} &\equiv \left(\frac{1}{2} i e^{i\theta/2} \hat{A}_0 - \frac{1}{2} i e^{-i\theta/2} \hat{A}_0, 0, 0, 0 \right)
\end{aligned} \tag{37}$$

We call this expression “simple calculation method” in this paper. When this simple calculation method is interpreted by physical reality, the single photon passes through only path 1 and the oscillatory field formed by scalar potential exists only on path 2. Although the picture of oscillatory field formation of the scalar potential remains, we lost the natural picture discussed based on the Gaussian light beam that the scalar potential exists in whole space-time. Furthermore, as will be described later, it obscures the generalized picture of the oscillatory field formation by arbitrary number paths. Therefore, we should understand that it does not faithfully describe the objective physical reality, though this simple calculation method is a convenient format for reproducing the calculation results.

In the above calculations, the scalar potential that requires the indefinite metric was treated as an operator as a physical reality. Following the standard quantum theory, we call the form Heisenberg picture which the indefinite metric of the scalar potential is imposed on an operator. Then, we can call the form Schrödinger picture in which the indefinite metric of the scalar potential is imposed on a state vector.

In Schrödinger picture, the expected field intensity can be calculated using the state $|1\rangle_S + |\zeta\rangle$ at output 1 (or 2: $\frac{\pi}{2}$ phase difference) and the photon annihilation operator in Schrödinger picture \hat{A}_S , which is proportional to the electric field operator $\hat{E} \propto \hat{A}_S$ at output 1 (or 2). Where, $|1\rangle_S$ and $|\zeta\rangle$ are the states which indicate the single photon passes through only path 1 and the scalar potentials passes through (or exist) only path 2.

Nothing is observed on path 2, so $\langle\zeta|\zeta\rangle = 0$ is required.

For a more detailed definition is as follows. The operators \hat{A}_1 , \hat{A}_S and state $|1\rangle$, $|1\rangle_S$ can be translated by using the Hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}$ as $\hat{A}_1 = e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}\hat{A}_S e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}$ and $|1\rangle_S = e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}|1\rangle$ respectively. Then $\hat{A}'_0|1\rangle$ can be expressed by using simple calculation method (34) as follows.

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0|1\rangle &= e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}\hat{A}_S \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \right) |1\rangle \\ &= e^{i\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}\hat{A}_S \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} \right) |1\rangle_S\end{aligned}\quad (38)$$

Here we define

$$|\zeta\rangle \equiv \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} \right) |1\rangle_S\quad (39)$$

Hence $\langle 1|\hat{A}'_0\hat{A}'_0|1\rangle = \langle\zeta|\hat{A}'_0\hat{A}'_0|\zeta\rangle$. When $\theta = 0$, $|\zeta\rangle = 0$, i.e., $\langle\zeta|\zeta\rangle = 0$. Nothing is observed in this phase. The expected value of the field intensity using the probability interpretation is also reproduced by using Schrödinger picture of the simple calculation method.

$$\begin{aligned}\langle\hat{I}\rangle &\propto (\langle 1|_S + \langle\zeta|) \hat{A}'_0\hat{A}'_0 (|1\rangle_S + |\zeta\rangle) \\ &= 1 + \langle\zeta|\hat{A}'_0\hat{A}'_0|\zeta\rangle + \langle 1|\zeta\rangle_S + \langle\zeta|1\rangle_S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta\end{aligned}\quad (40)$$

Because $\langle\zeta|\zeta\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta$ and $\langle\zeta|\zeta\rangle \leq 0$ when $\theta \neq \pm N\pi$ (N : even number), so $|\zeta\rangle$ is an indefinite metric vector. Therefore we can understand that the above calculation represents Schrödinger picture which the indefinite metric of the scalar potential is imposed on a state vector.

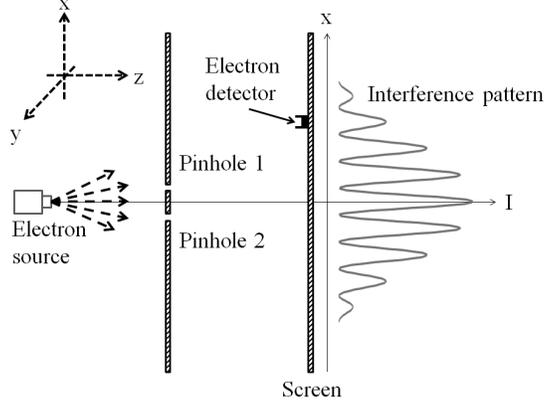


FIG. 2. Schematic view of a typical setup for the single electron interference experiment. : The electron emitted from the electron source passes through the two pinholes and is detected by the electron detector on the screen, and the detection frequency is recorded as an interference pattern on the screen.

B. Single electron interference

1. Calculation using probability interpretation

Figure 2 shows the schematic view of a typical setup for the single electron interference experiment.^{27,32} This experimental setup is also the equivalent setup for single photon interference that there are divided space.

In the quantum mechanical description using probability interpretation, the single-electron interference in the figure 2 is calculated using the following probability amplitude

$$\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle, \quad \phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle \quad (41)$$

and probability (density) of finding the electron on the screen.³²

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \quad (42)$$

Where $\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle$ and $\phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle$ are composed of probability amplitudes as follows.

$$\langle 1_{\text{or}}2|s\rangle \equiv \langle \text{electron arrives at pinhole 1 or 2} \mid \text{electron leaves } s \text{ (electron source)} \rangle$$

$$\langle x|1_{\text{or}}2\rangle \equiv \langle \text{electron arrives at screen } x \mid \text{electron leaves pinhole 1 or 2} \rangle$$

When either pinhole 1 or 2 is closed, the each and total probabilities are calculated to be $P_1 = |\phi_1|^2$, $P_2 = |\phi_2|^2$ and $P = P_1 + P_2 \neq P_{12}$. In this case, it does not reproduce the

interference when opening both pinholes at the same time. Therefore, we must admit that a single electron has passed through both pinholes at the same time, even though it cannot be further divided, and we must introduce probability interpretation.

This single electron interference also gives the same interference of the single photon interference described in section III A.

In probability interpretation, the charge operator is defined instead of the photon number operator defined in the calculation of the single photon interference, and the states of the single electron passing through path 1 and path 2 are introduced. The single electron interference can be calculated by using the charge operator and the above two states.

Specifically, we replace the n-photon number state with the electron-number state $|n\rangle$ where n electrons are present, and the photon number operator $\mathbf{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ composed of the operator \hat{a} of the expression (21) is replaced by defining the charge operator $\mathbf{Q} \equiv \int d^3x j_0(x)$.

Where $j_0(x)$ is the 0-th component of four-current $j_\mu = (q, \mathbf{i})$, $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$. Because the charge operator satisfies $\mathbf{Q}|n\rangle = nq|n\rangle$, n electronic states are eigenstates of \mathbf{Q} .^{28,33}

Here the state $|1\rangle_{1\&2}$ that a single electron simultaneously passes through both path 1 and 2 with probability 1/2 can be expressed as follows.

$$|1\rangle_{1\&2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \exp i\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (43)$$

where, θ is the phase corresponding to the difference of the path length. Then expected charge intensity $\langle \hat{I} \rangle$ can be calculated as follows.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle 1|_{1\&2} \mathbf{Q} |1\rangle_{1\&2} = q(1 + \cos \theta) \propto q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \quad (44)$$

This is the same expression as the single photon interference in the previous section.

2. Calculation using reconstruction

In order to reconstruct from the probabilistic interpretation into a picture with an objective physical reality, we start by reexamining the experimental setup in figure 2 with classical electromagnetism. In figure 2, the propagating electron can be equated with an electron beam having a spatial current density of $j = Nqv$ in classical electromagnetism. where N is the number of electron per unit volume, q is the electron charge and v is the

electron velocity. When the radius of the electron beam is w_0 , the current I can be expressed as $I = \pi w_0^2 j$. According to Biot-Savart Law, the propagation generates magnetic fields and potentials around the propagation path. Assume that the electron propagates parallel to z-axis at a constant velocity, then the vector potentials around the propagation path are expressed as follows.³⁴

$$\begin{aligned} A_x &= A_y = 0 \\ A_z &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (45)$$

where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, ϵ_0 is the permittivity and c is the speed of light.

Therefore the vector potential clearly passes through not only the pinhole the electron passes through but also the opposite pinhole.

Thus, similar to the single photon interference described in the previous section, we can obtain the picture that the electron as an objective physical reality propagates through the pinhole on one side and the potentials exist on both side. The potentials are composed of both the existing potentials in whole space-time and generated potentials by the movement of the electron.

In such a case, the electron wave functions should be expressed as follows.

$$\begin{aligned} \psi'_1 &= \psi_1 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole1} \rightarrow \text{screen}} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right] \\ \psi'_2 &= \psi_2 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole2} \rightarrow \text{screen}} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (46)$$

where ψ'_1 and ψ'_2 are the electron wave functions on the screen passing through pinhole 1 and 2 with the potentials respectively. ψ_1 and ψ_2 are the electron wave functions heading to pinhole 1 and 2 at the electron source without the effects of the potentials.

The following expression is the probability of finding an electron on the screen by using probability interpretation.

$$P_{12} \propto |\psi'|^2 = |\psi'_1 + \psi'_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - 2\text{Re} \left(\exp \left[i \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right] \psi_1^* \psi_2 \right) \quad (47)$$

where 1 and 2 of the integration path denote pinhole 1 and 2 respectively.

Although the probability interpretation says the single electron passes through pinholes 1 and 2 simultaneously, the expression (47) is derived from the picture that the single electron

passes through a pinhole on one side assuming that there are potentials on both sides as mentioned above. Hence this is considered to be the expected value of the charge intensity observed on the screen.

However, (47) uses the wave function. We need to shift from the wave function to the state vector to clarify the picture. Note that (47) is a formula equivalent to Aharonov-Bohm effect.³⁰ The phase term can be eliminated in a single connected region where the spatial region can contract to one point but cannot be eliminated in multiple-connected region where the spatial region can not contract to one point.

As generalize and discuss in Chapter IV, the spatial structure of the multiple-connected region is the cause of single photon or electron interference in the presence of two slits or two pinholes described in the previous section.

Here, we extend the electron wave function to the state vector, and introduce the state $|\psi_1\rangle$ where a single electron passes through the pinhole 1 and the state $|\psi_2\rangle$ where the potential passes through (exists) the pinhole 2 by using simple calculation method.

In Schrödinger picture of standard quantum theory, the state that electrons exist in a space without an electromagnetic field is expressed by direct product $|\psi\rangle|0\rangle \equiv |\psi, 0\rangle$, where $|\psi\rangle$ is the electron state and $|0\rangle$ is the 0-photon number state which considered as vacuum state. This direct product state can be recognized as a state $|\psi_1\rangle$ that the single electron passes through the pinhole 1.

On the other hand, the state that there exists only scalar potential without the single photon as an objective physical reality can be expressed as $|0\rangle + |\zeta\rangle$, i.e., the superposition of the 0-photon state $|0\rangle$ and $|\zeta\rangle$, by using the simple calculation method of Schrödinger picture.

The direct product of the state and the electron state is $|\psi\rangle(|0\rangle + |\zeta\rangle) = |\psi\rangle|0\rangle + |\psi\rangle|\zeta\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi\rangle|\zeta\rangle$. We can recognize the state $|\psi\rangle|\zeta\rangle$ as the same state as pinhole 2 with no electrons and only scalar potential exist. Therefore $|\psi\rangle|\zeta\rangle = |\psi_2\rangle$ will be justified.

Finally, the charge intensity on the screen of the single electron interference is obtained

by using (39) as follows.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{I} \rangle &\propto (\langle \psi_1 | + \langle \psi_2 |) \mathbf{Q} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \\
&= \langle \psi_1 | \left(1 + \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} \right) \mathbf{Q} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} \right) |\psi_1\rangle \\
&= q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right)
\end{aligned} \tag{48}$$

The interpretation of the simple calculation method is that there is the single electron or scalar potential in only one pinhole. As described at simple calculation method, the oscillatory field of the scalar potential existing on both pinholes is represented by the pinhole on one side. Therefore, by returning from the simple calculation method to the original method, we can obtain the picture that the scalar potential is divided by two pinholes to form an oscillatory field, and a single electron entering from one pinhole in the oscillatory field passes through while interfering with the oscillatory field and reaches the screen.

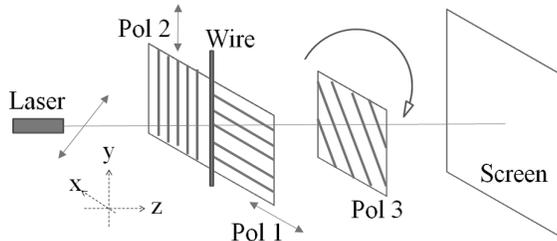


FIG. 3. Typical setup for the Quantum Eraser. Pol1 and Pol2 are fixed linear polarizers with polarizing axes perpendicular (x and y). Pol3 is a revoluble linear polarizer.

C. EPR correlation

1. Calculation using probability interpretation

For the calculation of EPR correlation using photon polarization by probability interpretation, it is helpful to first examine an experimental setup using polarizers called Quantum Eraser shown in figure 3.

The phenomenon of the Quantum Eraser is outlined below.

When there are no polarizers, an interference pattern composed of dark and bright fringes can be observed on the screen because light passing on the left of the wire is combining, or “interfering,” with light passing on the right-hand side. In other words, we have no information about which path each photon went.

When polarizers 1 and 2, which are called “which-path markers”, are positioned right behind the wire as shown in Figure 2, the launched light polarized in 45° direction from the Laser is polarized in perpendicular (x-polarized and y-polarized) by these polarizers. Then the interference pattern on the screen is erased because “which-path makers” have made available the information about which path each photon went.

When polarizer 3 is inserted in front of the screen with the polarization angle $+45^\circ$ or -45° in addition to “which-path makers”, the interference pattern reappears because polarizer 3 has made the information of “which-path makers” unusable.

We can produce a mathematical description of the erasure and reappearance of the interference pattern as follows. The x- and y-polarized photon passing through polarizer 1 and

2 can be expressed by the quantum-superposition state as follows.

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (49)$$

and

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (50)$$

where “+” and “-” represent polarizations $+45^\circ$ and -45° with respect to x .

The photons pass through polarizers 1 and 2 are polarized at right angles to each other as seen in the left-hand side of Eqs. (49) and (50), which prevent the interference pattern. In other words, “which-path makers” have made available the information about which path each photon went. Although there are same polarized states in the right-hand side of Eq. (49) and (50), the interference patterns consisting of bright and dark fringes made by $+45^\circ$ and -45° polarized states are reverted images and annihilate each other. Therefore, sum total of the images has no interference pattern.

When polarizer 3 is inserted with the polarization angle $+45^\circ$ or -45° , only $|+\rangle$ or $|-\rangle$ can pass through polarizer 3. Then the interference pattern made by either $|+\rangle$ or $|-\rangle$ of both Eqs. (49) and (50) reappears, which means that we can not identify which-path the photons had passed through, i.e., polarizer 3 has made the information of “which-path makers” unusable.

As is clear from (49) and (50), enable/disable information about which side of the wire each photon passed through is interpreted by the states that contains $+45^\circ$ and -45° polarized single photon with a probability of $1/2$ even if the laser light intensity becomes extremely low and it becomes an indivisible single photon.

In order to calculate the single photon interference by probability interpretation, we replace the side of the polarizer 1 with path 1 and the side of polarizer 2 with path 2 of MZI in the calculation of single photon interference in the previous section. In addition, the ratio of photon passage by polarizers 1, 2 and 3 are replaced with those rotation angles. We examine both x-polarized and y-polarized photon emitted from the laser in the calculation. These calculations give the same results as the EPR correlation described later.

In the calculation, all angles of the polarizers are based on the x axis. The x-polarized light beam emitted by the laser should not be able to pass through polarizer 2, which allows only y-polarization to pass. However, probability interpretation asserts that x-polarized light is a superposition of polarization states different from x-polarized light like (49). Therefore,

the calculation is possible by replacing the probability that a photon can pass with a phase that is proportional to the difference between the polarization angle of the photon and the angle of the polarizer.

The probability that an x-polarized photon can pass through the side of the polarizer 1 is described as the angle of the polarizer 1. In this case, since it is originally polarized on the x axis, the phase can be selected as 0. The photon polarized in the x-axis after passing through the polarizer 1 is described by introducing the rotation angle $|\phi|$ of the polarizer 3 corresponding to the probability that the photon can pass through the polarizer 3 into the phase.

On the other hand, the x-polarized photon passing through the polarizer 2 is described as a rotation angle $\pi/2$ corresponding to the probability that the photon can pass through the polarizer 2.

The rotation angle $\frac{\pi}{2} - |\phi|$ by the polarizer 3 is further introduced into the photon passing through the polarizer 2. In addition, the phase difference θ between the polarizer 1 and 2 is introduced on the x-polarized photon. Now we can define the following electric field operator.

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i|\phi| + \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - |\phi|\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i|\phi| + \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\{i(\pi - |\phi|)\}\end{aligned}\quad (51)$$

The interference on the screen is calculated as same as in the previous section.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle n | \hat{E}^\dagger \hat{E} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle - \cos(\theta + 2|\phi|) \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (52)$$

$\langle \hat{I} \rangle$ is the expected field intensity, which is proportional to the number of photons, as in the previous section. In the probability interpretation, the above expected value is calculated as follows, including the case of a single photon of which photon number is 1 ($n = 1$).

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (53)$$

In the case of the y-polarized light beam emitted by the laser, we transpose the phase θ to the y-polarized side and introduce the phases of the polarizers in the same way as for the x-polarized light. Then the electric field operator can be calculated as follows,

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + |\phi|\right)\right\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - |\phi| + \theta\right)\right\} \quad (54)$$

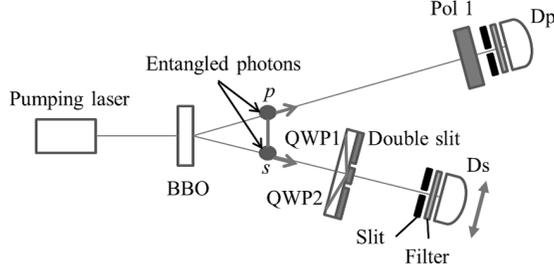


FIG. 4. Typical setup for the Delayed Choice Quantum Eraser. QWP1 and QWP2 are quarter-wave plates aligned in front of the double slit with fast axes perpendicular. Pol1 is a linear polarizer. BBO (β -BaB₂O₄) crystal generates entangled photons by spontaneous parametric down-conversion²²..

Finally, we can obtain as follows.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (55)$$

Here, if the laser beam contains one or more x-polarized and y-polarized photons each with a probability of 1/2, the intensity of the interference is given by the sum of (53) and (55) as follows.

$$\langle \hat{I} \rangle \propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (56)$$

In the expression, when $\phi = \pm\pi, \pm\frac{1}{2}\pi$, it becomes $\langle I \rangle \propto 1$ and the interference fringes are erased. $\pm\frac{1}{4}\pi$ becomes $\langle I \rangle \propto 1 \pm \sin \theta$, and the interference fringe is reproduced.

Even if the laser intensity is very weak and consists of an x-polarized single photon and a y-polarized single photon, (56) is satisfied.

The delayed-choice Quantum Eraser for examining the EPR correlation below corresponds to the case that the emitted photon from the laser is an x-polarized single photon and a y-polarized single photon of this Quantum Eraser. The intensity of the photon interference obtained in the experiment is the same as (53) and (55).

Figure 4 shows the typical setup for the Delayed Choice Quantum Eraser for examining EPR correlation. This experimental setup is similar setup where the polarizer 1 plays the role of the polarizer 3 in figure 3 of Quantum Eraser. In this setup, the BBO is excited by the light emitted from the laser to create p and s photons of which polarizations are orthogonal to each other. These photons propagate in different paths, and p is scanned by the polarizer 1 and measured by the detector Dp. The photon s is measured by Ds through

the quarter-wave plates 1 and 2 of which fast axes are orthogonal to each other and the double slit on the back surface thereof, and further through the slit and the filter.

In this experiment, the setup is arranged according to the following order, and the result in each arrangements is obtained.

1. When polarizer 1, QWP1 and QWP2 are removed, the coincidence counts of D_s versus D_p shows an intensity fluctuation of the photon which indicates the interference by the double slit.
2. When QWP1 and QWP2 are installed, the intensity fluctuation of the coincidence counts is erased.
3. The polarizer 1 is additionally installed in the direction that matches the fast axis of QWP1. Then, the intensity fluctuation of the coincidence counts reappears as the interference.
4. Subsequently, the angle of the polarizer 1 is rotated by 90 degrees. Then, the intensity fluctuation of the coincidence counts shows the interference of which the bright and dark reversed.

From this procedure, the polarizer 1 corresponds to the polarizer 3 of Quantum Eraser described above and looks like erases or reappears the information about which path (QWP1 or QWP2) each photon went. That is a phenomenon similar to the above-mentioned Quantum Eraser. Moreover, although the polarization direction setting of the photon p and the observation of the interference by the photon s are performed at spatially separated positions, the polarization of these photons is completely correlated with one side being x-polarized and the other side being y-polarized. Here the interferences in the opposite phase obtained in steps 3 and 4 are given by (53) and (55) calculated by the Quantum Eraser described above.

When the distance from BBO to D_p is arranged longer than the distance from BBO to the double slit, such arrangement becomes a delayed choice because the choice of the polarization direction of the photon p by the polarizer 1 is performed after the observation of the interference by the photon s . In this arrangement, the presence or absence of the interference can also be observed by the same procedure as above. This seems that the erasing or reproduction of the information of “which-path marker” by the polarizer 1 was

determined after the observation. Note that the experiment did not allow for the observer to choose the polarization angle in the time period after photon s was detected and before detection of p , as discussed in the reference²².

When s and p are single photons, the probability interpretation asserts that the photon s and p do not have a state of x polarization (or y polarization) that is fixed from the beginning such as $|x\rangle_s$ or $|y\rangle_s$ and $|x\rangle_p$ or $|y\rangle_p$. Instead they are in the superposition states of those polarizations as follows.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_s |y\rangle_p + |y\rangle_s |x\rangle_p) \quad (57)$$

Such perfect correlated state existing in a spatially separated region is called correlated photon pair state (Entanglement). According to the probability interpretation for the entanglement, the both photon s and p propagate either path as superposition of x -polarized and y -polarized state (57).

Therefore when the state of one photon (s or p) is observed and determined to be $|x\rangle$, that of the other photon (p or s) suddenly changes from the quantum-superposition state into $|y\rangle$ even if the photons separate from each other, which postulates the existence of long-range correlation beyond the causality that contradicts the locality of physical laws, i.e., theory of relativity. Historically, EPR paper⁵ written by “Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)” first pointed out the imperfections of the standard quantum theory by taking up such nonlocal correlation states. At present, the correlated photon pair state (Entanglement) is also called the EPR state.

2. Calculation using reconstruction

Here we reconstruct the incomprehensible probability interpretation such as correlated photon pair state into a picture with an objective physical reality.

The results of the interference (53) and (55) are obtained in both setups in figure 3 and figure 4 as mentioned above. These results has been thought to be peculiar to quantum theory, which cannot be obtained by classical calculation assuming that a single photon has a fixed polarization. The violation of Bell’s inequality supports the calculation results of the quantum theory.^{35,36}

However, the obtaining the identical calculation results both the probability interpretation and a picture of the objective physical reality with locality means that Bell’s inequality

violates in both cases.

In the following, the results of the interference (53) and (55) are reproduced with a picture of the objective physical reality by replacing the side of the polarizer 1 as the photon path s and the side of the polarizer 2 as the photon path p in the setup of figure 4 respectively.

As a picture of objective physical reality, we assume the laser creates either fixed x- or y-polarized single photon, or two photons with fixed x- and y-polarized single photon. Since there is a scalar potential in the space as described in the calculation of single photon interference, the four-vector in the space from the laser output to immediately before passing through the polarizer 1 and 2 is expressed as follows.

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, 0) \quad (58)$$

Where, in order to simplify the calculation, the non-physical longitudinal wave was ignored as $A_3 = 0$.

First, we calculate in the case of there exists an x-polarized single photon and scalar potential. This case corresponds to the calculated situation for (53). When the x-polarized single photon and the scalar potential pass through both polarizers, the x-polarized photon can only pass through polarizer 1 and not polarizer 2. When the scalar potential is divided on each side, a phase difference is introduced associated with the division. The following four-vector is appropriate after passing through each polarizer to describe this picture as it is.

$$A_{(\text{x pol 1}) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{i\theta_x/2} A_{(x)0}, A_{(x)1}, 0, 0 \right), \quad A_{(\text{x pol 2}) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{-i(\theta_x/2+\pi/2)} A_{(x)0}, 0, 0, 0 \right) \quad (59)$$

Here, a phase shift $\pi/2$ based on x-polarized photon is introduced into the scalar potential passing through the polarizer 2. Where, the phase difference due to the division of the scalar potential is divided into both sides for the symmetry description as θ_x .

When the x-polarize photon polarized by the polarizer 1 that represent the physical reality of real x-polarized photon among this four-vector is trying to pass through the polarizer 3, it can not pass through the polarizer 3 of which rotation angle is not x axis. However, because the scalar potential passes through with obtaining $|\phi|$ phase shift, which corresponds to the rotation angle of the polarizer 3, the phase term becomes $i(|\phi| + \theta_x/2)$.

On the other hand, the scalar potential that has passed through the polarizer 2 is polarized in y-direction. Therefore in the case of the rotation angle of the polarizer 3 is measured

from the x-axis ($x=0$), $\pi/2$ is added to the rotation angle of the polarizer 3, then the phase becomes $-i(|\phi| + \theta_x/2 + \pi)$.

Hence the four-vector at the polarizer 3 is expressed as follows.

$$\begin{aligned} A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3) \mu} &\equiv A_{(x \text{ pol } 1 \rightarrow 3) \mu} + A_{(x \text{ pol } 2 \rightarrow 3) \mu} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i(|\phi| + \theta_x/2)} A_{(x)0} + \frac{1}{2} e^{-i(|\phi| + \theta_x/2 + \pi)} A_{(x)0}, A_{(x)1}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (60)$$

Here from Lorentz invariance, $\langle 1|A_0^\dagger A_0|1\rangle = \langle 1|A_1^\dagger A_1|1\rangle = \langle 1|A_2^\dagger A_2|1\rangle = 1$ is required as in single photon interference. Then the following interference can be obtained.

$$\langle I_s \rangle \propto \langle 1|A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta_x) \quad (61)$$

Note that $A^\dagger A \equiv -g_{\mu\nu} A^{\mu\dagger} A^\nu = -A_0^\dagger A_0 + A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 + A_3^\dagger A_3$.

This can be interpreted that the interference between the oscillatory field by the scalar potential and x-polarized photon determines the photon intensity that can pass through the polarizer 3.

Similarly, in the case of there is y-polarized single photon and scalar potential, the phase difference of the divided the scalar potential can be θ_y as follows.

$$A_{(y \text{ pol } 1) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{i(\theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0}, 0, 0, 0 \right), \quad A_{(y \text{ pol } 2) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{-i\theta_y/2} A_{(y)0}, 0, A_{(y)2}, 0 \right) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3) \mu} &\equiv A_{(y \text{ pol } 1 \rightarrow 3) \mu} + A_{(y \text{ pol } 2 \rightarrow 3) \mu} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i(|\phi| + \theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0} + \frac{1}{2} e^{-i(|\phi| + \theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0}, 0, A_{(y)2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Then the following interference can be obtained.

$$\langle I_p \rangle \propto \langle 1|A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta_y) \quad (64)$$

Choosing the phase difference due to the division of the scalar potential as $\theta \equiv \theta_x - \pi = -\theta_y$, the identical interferences (53) and (55) are calculated as follows..

$$\langle I_s \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta), \quad \langle I_p \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (65)$$

Furthermore, when there are x-polarized single photon, y-polarized single photon, and scalar potential, the four-vector at polarizer 3 is the sum of (60) and (63), we can reproduce (56) by simple calculation as follows.

$$\langle 1|A_{(x, y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(x, y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (66)$$

Now, we have shown that the identical results (53), (55) and (56) can be obtained by using the indefinite metric based on the covariant quantization as it is. In addition, we show that the identical results can be obtained by the simple calculation method.

In the simple calculation method, we consider the state that only the scalar potential exists without real photon and forms the oscillatory field. This state is represented by $|\zeta\rangle$ as shown in the single photon calculation. Therefore, in this experimental setup, the state of x-polarized single photon in the space should be replaced by $|x\rangle + |\zeta\rangle$ instead of $|x\rangle$. However, when the scalar potential exists in a space without division, the phase difference due to the path difference is $\theta = 0$, and the oscillatory field due to the interference of the scalar potential is not formed, so $\langle\zeta|\zeta\rangle = 0$.

Here we note the above and choose the states of the x-polarized single photon and the y-polarized single photon as follows.

$$\begin{aligned} |x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle &= |x\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i|\phi|} e^{-i\theta/2} |x\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i|\phi|} e^{i\theta/2} |x\rangle \\ |y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle &= |y\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|+\frac{1}{2}\pi)} e^{i\theta/2} |y\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|+\frac{1}{2}\pi)} e^{-i\theta/2} |y\rangle \end{aligned} \quad (67)$$

By using the states we can calculate the interference in the presence of the x-polarized single photon as follows.

$$\langle I \rangle \propto (\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}|) (|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle) = \langle x|x\rangle - \frac{1}{2}\langle x|x\rangle - \frac{1}{2}\langle x|x\rangle \cos(2|\phi| + \theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (68)$$

This is identical with (53). Similarly, we can calculate the interference in the presence of the y-polarized single photon as identical as (55).

Finally, we can calculate the interference in the presence of both x-polarized and y-polarized photons as follows,

$$\langle I \rangle \propto \left(\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}| + \langle y| + \langle \zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}| \right) \left(|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle + |y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle \right) \quad (69)$$

where $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$, then

$$\langle I \rangle \propto (\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}|) (|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle) + (\langle y| + \langle \zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}|) (|y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle) \quad (70)$$

This is the sum of the result (53) when only x-polarized photon exists and the result (55) when only y-polarized photon exists. Therefore (56) is reproduced.

$$\langle I \rangle \propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (71)$$

This simple calculation method is the Schrödinger picture in which the calculation of an indefinite metric is imposed on the state vector. As in the case of single-photon interference, we can calculate the interference using Heisenberg picture in which the calculation of an indefinite metric is imposed on the operator. In Heisenberg picture, the photon number operator is replaced with $\mathbf{n} = (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_p^\dagger)(\hat{A}_1 + \hat{A}_p)$. Where, \hat{A}_1 and \hat{A}_p (p : polarization = x, y, \dots , etc.) are the photon annihilation operator that represents a real photon and a photon annihilation operator that represents a scalar potential polarized in the p direction. These operators can be defined as follows.

$$\hat{A}_x = \frac{1}{2}\gamma e^{i|\phi|} e^{-i\theta/2} \hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-i|\phi|} e^{i\theta/2} \hat{A}_1, \quad \hat{A}_x^\dagger = \frac{1}{2}\gamma e^{-i|\phi|} e^{i\theta/2} \hat{A}_1^\dagger - \frac{1}{2}\gamma e^{i|\phi|} e^{-i\theta/2} \hat{A}_1^\dagger \quad (72)$$

We can reproduce (68) by using the above operators of Heisenberg picture.

$$\langle I \rangle = \langle n | (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_x^\dagger)(\hat{A}_1 + \hat{A}_x) | n \rangle = \langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x | n \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (73)$$

Note that the Heisenberg picture imposes the indefinite metric calculation on the operator, so we should replace the ordinary photon annihilation operator for x-polarization \hat{A}_1 with $\hat{A}_1 + \hat{A}_x$, where \hat{A}_x is the photon annihilation operator derived from the scalar potential \hat{A}_x . Therefore, the photon number operator in the presence of x-polarized and y-polarized photons is $(\hat{A}_1 + \hat{A}_x) + (\hat{A}_2 + \hat{A}_y)$. We can reproduce (71) as follows by choosing the appropriate phase of these replacements.

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle n | (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_x^\dagger + \hat{A}_2^\dagger + \hat{A}_y^\dagger)(\hat{A}_1 + \hat{A}_x + \hat{A}_2 + \hat{A}_y) | n \rangle \\ &= \langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x | n \rangle + \langle n | \mathbf{n}_2 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y | n \rangle \\ &\propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \end{aligned} \quad (74)$$

Where, we assume that there are the same number of x-polarized and y-polarized photons. $\langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle \equiv \langle n | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 | n \rangle = \langle n | \mathbf{n}_2 | n \rangle \equiv \langle n | \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 | n \rangle = n$

Under the condition $|n\rangle \equiv |n\rangle_x + |n\rangle_y$, we can calculate equivalent relations to those in conventional quantum theory such as $\hat{A}_1 |n\rangle = \hat{A}_1 |n\rangle_x + \hat{A}_1 |n\rangle_y = \sqrt{n} |n-1\rangle_x$, $\hat{A}_2 |n\rangle = \hat{A}_2 |n\rangle_x + \hat{A}_2 |n\rangle_y = \sqrt{n} |n-1\rangle_y$ and $\langle n | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_2 | n \rangle = \langle n | \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_1 | n \rangle = 0$. Where $|n\rangle_x, |n\rangle_y$ is the n photon number state of the x- and y-polarized photon respectively.

Using the reconstruction, it is also possible that the polarization direction of the photon pair created in BBO in figure 4 is controlled by the scalar potential as describe below.

The scalar potential exists in whole space even if there is no photons. Therefore when the angle of the polarizer 1 is set to $|\phi|$, the scalar potential is affected by the setting. This

state can be expressed as the sum of $|0\rangle$ where no photon exists and $|\zeta_{|\phi|}\rangle$ where the scalar potential is oriented by the rotation of the polarizer 1. This state can be expressed as follows by a simple calculation method.

$$|0\rangle + |\zeta_{|\phi|}\rangle = |0\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|-|\psi|)} e^{i\theta/2}|0\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|-|\psi|)} e^{-i\theta/2}|0\rangle \quad (75)$$

Where, ψ is the polarization angle of the photon s that would be created by the BBO and propagates to the direction of the polarizer 1. The propagation speed of the scalar potential is equal to the speed of light because it is an electromagnetic potential. Therefore, the state that BBO creates photon $|\psi\rangle$ with polarization angle $|\psi|$ is calculated to be the product of state which represents the scalar potential arrived at BBO and photon creation operator $\hat{A}_{|\psi|}^\dagger$ of which polarization angle is $|\psi|$ as follows.

$$\hat{A}_{|\psi|}^\dagger |0\rangle + \hat{A}_{|\psi|}^\dagger |\zeta_{|\phi|}\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|-|\psi|)} e^{i\theta/2}|\psi\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|-|\psi|)} e^{-i\theta/2}|\psi\rangle \quad (76)$$

Note that in this setup, the scalar potential propagates a single path to BBO, so the phase is $\theta = 0$. Therefore

$$\langle I \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - 2|\psi|) \quad (77)$$

Because a single photon is created, $\langle I \rangle = 1$ is required and $\psi = \phi$ is obtained. That is to say, photons are created at the setting angle of the polarizer 1.

Where, even if the photon pair is created with random polarization from BBO regardless of the setting angle of the polarizer 1, the polarizations of the photon pair are orthogonal to each other. Hence, (65) is observed due to the interference between the classical local perfect correlation determined when the photon pair is created and the oscillatory field of the scalar potential.

Here, the reconstruction of the EPR correlation can be explained using the objective physical reality, which the real photons move in the oscillatory field of the scalar potential that causes interference. Then, at the polarizer, it is possible to interpret that the photon of the polarization different from that before the interference is created by the interference between the real photon and the scalar potential, and the photon before the interference is annihilated. This interpretation is consistent with the quantum field theory that particles are created and annihilated by the excitation of vacuum. In addition, it has been said that the quantum theory was proved to be correct due to the violation of Bell's inequality by various experimental setups of EPR correlation devised so as not to have a loophole.³⁷

However even if we use the picture of objective physical reality, we can obtain the identical results as quantum theory, therefore the violation of Bell's inequality does not show the denial of locality of physical laws and physical reality, nor does it support the validity of quantum theory.

IV. APPLICATION

We revealed that by examining photons, electrons, and scalar potentials as objective physical reality without using probability interpretation, the calculation results of single-photon interference, single-electron interference, and EPR correlation agree with those obtained by probability interpretation in the previous chapters. Here, we will discuss some phenomena peculiar to quantum theory that can be explained by a picture using the objective physical reality.

For the discussion, it is first necessary to generalize the formation of the oscillatory field of the scalar potential discussed in the previous chapters. The discussions in the previous chapter are all setups where there is two paths that divides the space into two. We will generalize the above setups and examine what kind of oscillatory field is formed when the whole space-time is divided into three or four to any number, and what kinds of physical phenomena are caused by that oscillatory field. As a result of the examination, it is shown that the fluctuation of zero-point energy of the electromagnetic field, Casimir effect, and the spontaneous symmetry breaking are naturally derived with the image of objective physical reality.

We also present a general approach for single particle interference associated with the generalization.

A. Generalization of the geometry

The division into two paths dealt with in the previous chapter divides the scalar potential into two, and the divided coefficient was set to $1/2$ and the phase difference was set to θ . In order to extend that into an arbitrary number of divided paths, we introduce divided coefficients r_j and phases θ_j of the scalar potential. Then, the scalar potential can be expressed as follows, where M is the number of divided paths.

$$\sum_{j=1}^M r_j e^{i\theta_j} A_0 \quad (78)$$

where $\sum_{j=1}^M r_j = 1$. The case of the previous chapter correspond to $M = 2$, $r_1 = r_2 = 1/2$ and $\theta_1 = -\theta_2 = \theta/2$ etc. Therefore, the expected value of the number of photons can be calculated by the following photon annihilation operator when there is an x-polarize single photon in arbitrary number of divided paths.

$$\hat{A}_\mu = \left(\sum_{j=1}^M r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_0, \hat{A}_1, 0, 0 \right) \quad (79)$$

Then

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto \langle 1 | -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu | 1 \rangle \\ &= - \left\{ \sum_{j=1, k=1}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \langle 1 | \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 | 1 \rangle \\ &= - \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + 1 \end{aligned} \quad (80)$$

Because $0 \leq r_j \leq 1$, then $0 \leq \langle 1 | -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu | 1 \rangle \leq 1$. When $M \rightarrow \infty$ and the phases are completely random, $\sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j}$ converges with 0. The division of the path is caused by the existence of matter in space-time, and $M \rightarrow \infty$ can be regarded as the actual physical space where there are many innumerable matter. We call this “real vacuum” in this paper.

On the other hand, $M = 1$ in (78) can be regarded as a space-time without any substance in space such as an empty container. We call this “ideal vacuum” in this paper.

Expressing the generalization by a simple calculation method, the following operators and states can be applied to arbitrary geometry instead of (34) and (39).

$$\begin{aligned}
\hat{A}'_0 &= \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_1 - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \hat{A}_1 \\
\hat{A}'_0^\dagger &= \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \hat{A}_1^\dagger - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_1^\dagger
\end{aligned} \tag{81}$$

$$|\zeta\rangle \equiv \left(\gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \right) |1\rangle_S \tag{82}$$

From the generalization of the divided path, it can be seen that when some geometry is brought into the “ideal vacuum” and the path is divided, the expected value fluctuates depending on the oscillatory field.

B. Zero point energy of the electromagnetic fields

The electric field operators obtained from traditional quantization procedure for quantum optics with Coulomb gauge have relationships with harmonic oscillator as follows. (We examine only x-polarized photon for simplicity.)

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p})\end{aligned}\quad (83)$$

where \hat{q} and \hat{p} are position and momentum operators obeying the commutation relation $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$. Hamiltonian of harmonic oscillator is expressed as follows.

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2) \quad (84)$$

Then following relations are obtained.

$$\begin{aligned}\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1 &= \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}^2 + \omega^2\hat{q}^2 + i\omega\hat{q}\hat{p} - i\omega\hat{p}\hat{q}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \\ \hat{A}_1\hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right)\end{aligned}\quad (85)$$

From (85) and $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = 0$, traditional zero-point energy has been recognized as $\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$, i.e.,

$$\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \langle 0| \left(\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) |0\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) = 0 \quad (86)$$

This traditional fixed zero-point energy originates from the definition of the electric field operators in (83) without the scalar potentials. However we have obtained the idea that there are potentials in whole space. Then we should replace (83) with followings by using the operators in (34).

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0 + \hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{A}'_0 + \hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p})\end{aligned}\quad (87)$$

Therefore Hamiltonian will be the same expression of the interference as follows.

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}'_\mu \hat{A}_\nu \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (88)$$

Hence the energy of single photon state also fluctuates.

$$\langle 1|\hat{\mathcal{H}}|1\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle \cos\theta + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (89)$$

The single photon can be observed at some point with $\theta = \pm N\pi$, (N : oddnumber). By using Lorentz invariant $\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle$

$$\begin{aligned} \langle 1|\hat{\mathcal{H}}|1\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \end{aligned} \quad (90)$$

Therefore, $\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \frac{1}{2}$. This leads to the replacement of the expected photon number as follows.

$$\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle 2|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|2\rangle = \frac{3}{2}, \quad \dots \quad (91)$$

Generally, $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle$ is considered to 0. However, we must recognize $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = -\frac{1}{2}$ which requires indefinite metric. We will revise this calculation later in this section. Even with the revision, the conclusion that the zero-point energy fluctuates is the same.

Then absolute value of the single photon interference moves depending on the selection of $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle$. However $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos\theta$ is maintained.

By using the expectation value, zero-point energy is calculated to be as follows.

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle &= -\hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle + \hbar\omega \langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

This shows that the zero-point energy fluctuates such that $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ depending on the path division. This also explains the spontaneous symmetry breaking. From this, infinite zero-point energy due to infinite degrees of freedom is removed when the phase is completely random with $M \rightarrow \infty$ in (92).

In the above discussion, we replaced the operator (83) with (87). However, if the operator \hat{A}_0 is introduced, we should replace the commutation relation of the position and momentum operators $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ with $[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = -g_{\mu\nu}i\hbar$ and examine the time axis component.

Therefore the followings are obtained.

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 &= \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}_0^2 + \omega^2 \hat{q}_0^2 + i\omega \hat{q}_0 \hat{p}_0 - i\omega \hat{p}_0 \hat{q}_0) \\
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2} i\omega [\hat{q}_0, \hat{p}_0] \right) = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \\
\hat{A}_0 \hat{A}_0^\dagger &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2} \hbar\omega \right)
\end{aligned} \tag{93}$$

where $\hat{\mathcal{H}}_0$ is the Hamiltonian corresponds to the energy of time axis. Hence, the total Hamiltonian $\hat{\mathcal{H}}_1$ can be calculated as follows using the Hamiltonian of the spatial component of (85)

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{\mathcal{H}}_1 - \hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) + \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{1}{2} \hbar\omega \tag{94}$$

Here we note that similar to the discussion the above, the last term obtained from the commutation relation between the position and momentum operator of the time axis component should include a mathematical expression that incorporates the phase by the path division, similar to $\{ \}$ in (80). We set the mathematical expression to f , then the zero-point energy can be expressed as follows.

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle &= \hbar\omega \langle 0 | \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) | 0 \rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \langle 0 | 0 \rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \langle 0 | f | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{1}{2} \hbar\omega f
\end{aligned} \tag{95}$$

In order to determine f , we use the energy of 1-photon state with the help of (80). Finally, the following zero-point energy expression is obtained.

$$\begin{aligned}
\langle 1 | \hat{\mathcal{H}} | 1 \rangle &= \hbar\omega \langle 1 | \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) | 1 \rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \langle 1 | 1 \rangle + \frac{1}{2} \hbar\omega \langle 1 | f | 1 \rangle \\
&= \hbar\omega - \hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{1}{2} \hbar\omega f
\end{aligned} \tag{96}$$

This is always single photon energy $\hbar\omega$ in whole space. Therefore, in the case of the ideal vacuum with 1 split path, $\{ \}$ will be 1, i.e., $f = 1$. In the case of the actual vacuum with $M \rightarrow \infty$ split paths, $\{ \}$ will be 0, i.e., the value will be $f = -1$. Otherwise, the value fluctuates such as $-1 < f < 1$ depending on $\{ \}$. Therefore, the zero-point energy fluctuates as follows depending on the geometry existing in the space.

$$0 \leq \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega + \frac{1}{2} \hbar\omega f \leq \hbar\omega \tag{97}$$

C. Casimir effect

The zero-point energy has been measured through Casimir effect.³⁸⁻⁴² The following circumstance can be identified as a typical setup for the measurement of Casimir effect. From the discussion in the zero-point energy, if a certain space that is not “real vacuum” but “ideal vacuum” is prepared and a certain geometry, e.g. two parallel plates, is placed in the space, then the zero-point energy of the space and geometry are calculated to be $\frac{1}{2}\hbar\omega$ and $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ using (92) respectively or $\hbar\omega$ and $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \hbar\omega$ using (97) respectively. Because the energy of the geometry is not exceed that of the space, the geometry is subjected to a compressive stress from the space in both calculations.

This kind of attractive force of the geometry derived from the energy difference is identical with the basic concept of Van der Waals force which will be the origin of Casimir effect.⁴³

D. Spontaneous symmetry breaking

Traditional approach of the spontaneous symmetry breaking, which explores the possibility of $\mathbf{Q}|0\rangle \neq 0$ or $|0\rangle$ is not an eigenstate of \mathbf{Q} , has been discussed using Goldstone boson or Higgs boson.^{28,44} Where $|0\rangle$ is vacuum state.

However, the scalar potential exists on the whole space as mentioned in this paper, and there are no electron at pinhole 2. Therefore, the state of pinhole 2 $|\psi_2\rangle$ can be identified as vacuum instead of $|0\rangle$. We have shown that the identical calculation result with the probability interpretation is obtained by using the identification. From the relation $\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 0$, if $|\psi_2\rangle$ is an eigenstate of \mathbf{Q} , i.e., $\mathbf{Q}|\psi_2\rangle = \alpha|\psi_2\rangle$, then $\langle\psi_2|\mathbf{Q}|\psi_2\rangle = \alpha\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 0$, where α is an eigenvalue.

However from (48) and the generalization of the geometry in section IV A, $\langle\psi_2|\mathbf{Q}|\psi_2\rangle$ fluctuates between $-q$ and 0 depending on the phase of the scalar potentials. Hence, the vacuum $|\psi_2\rangle$ is not an eigenstate of \mathbf{Q} , which expresses the spontaneous symmetry breaking.

There is no fluctuation in the real space with completely random phases as shown in section IV A. That is to say, there is symmetry. We can identify such space as “real vacuum”. However the fluctuation gains entrance into the real vacuum when the geometry in the space changes, and eventually the symmetry is broken towards “ideal vacuum” where has no geometry.

This idea holds even if the origin is set to the “ideal vacuum” instead of “real vacuum”. The space gains symmetry when $M = 1$ or $M \rightarrow \infty$.

The above discussion that the real vacuum is filled with potentials of which state exists under (or above) the original ground state is identical with the spontaneous symmetry breaking using the analogy of superconductivity when we replace \mathbf{Q} or $\hat{\mathcal{H}}$ with energy level reported by Y. Nambu and G. Jona-Lasinio.^{45,46} When the phase difference is fixed, the one vacuum is selected and the selection breaks the symmetry of vacuum.

In addition, as described in section IV B, the fluctuation of the zero-point energy of electromagnetic fields $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ (or $\hbar\omega$) also shows that the vacuum is not the eigenstate of the photon number. That is the spontaneous symmetry breaking. Eventually, the spontaneous symmetry breaking is caused by the geometry of space-time, which produces the oscillatory field of the scalar potential.

E. General approach for single particle interference

By generalizing (40) and (48), single particle interference can be described as follow.

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= (\langle \phi | + \langle \zeta |) \mathbf{F} (|\phi\rangle + |\zeta\rangle) \\ &= f + \langle \zeta | \mathbf{F} | \zeta \rangle + f \langle \phi | \zeta \rangle + f \langle \zeta | \phi \rangle\end{aligned}\quad (98)$$

When $\langle \zeta | \mathbf{F} | \zeta \rangle + f \langle \phi | \zeta \rangle + f \langle \zeta | \phi \rangle = -\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f \cos \theta$, single particle interferences of \mathbf{F} by 2-path geometry, i.e., $\langle I \rangle = f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right\}$ is generated. Where \mathbf{F} is an arbitrary observable operator of the particle, $|\phi\rangle$ is an eigenstate of \mathbf{F} , f is the eigenvalue of \mathbf{F} under state $|\phi\rangle$ and $|\zeta\rangle$ is an indefinite metric vector expressing the oscillatory field of the scalar potential.

When \mathbf{F} is number operator of the particle \mathbf{n} , and $|\phi\rangle$ is the single particle state of (98), the expected number of the particle fluctuates as follows.

$$\begin{aligned}(\langle 1 | + \langle \zeta |) \mathbf{n} (|1\rangle + |\zeta\rangle) &= 1 + \langle \zeta | \mathbf{n} | \zeta \rangle + \langle 1 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta\end{aligned}\quad (99)$$

In the case of arbitrary geometry, the expected number of the particle can be calculated as follows using similar expression (81), (82) and (80).

$$\langle \hat{I} \rangle \propto - \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + 1 \quad (100)$$

The electromagnetic field examined in this paper is a commutative (Abelian) gauge field. Although the description should be more complicated and future work, the above approach will be applicable to a non-commutative (non-Abelian) gauge field introduced from the invariance of the local phase transformation of multicomponent wave functions.

However, such single-particle self-fluctuation without interaction may be the origin of neutrino oscillation.^{47,48}

V. ORIGIN OF THE INDEFINITE METRIC POTENTIAL

In this paper, we reconstruct the quantum theory using the oscillatory field of the scalar potential, which is the source of the indefinite metric. Although this scalar potential is a well-known quantity in classical electromagnetism, we examine this scalar potential again and extract the meaning of the reconstruction of this paper and future issues.

Usually in quantum optics, we can split the electric field and current density by using Coulomb gauge as follows.²⁹

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L, & \nabla \cdot \mathbf{E}_T &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}_L &= 0 \\ \mathbf{i} &= \mathbf{i}_T + \mathbf{i}_L, & \nabla \cdot \mathbf{i}_T &= 0, & \nabla \times \mathbf{i}_L &= 0\end{aligned}\quad (101)$$

where the indexes ‘‘T’’ and ‘‘L’’ stand for ‘‘Transverse’’ and ‘‘Longitudinal’’, respectively. By using electromagnetic potentials, ‘‘Transverse’’ components of Maxwell’s equations can be described as follows.

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{i}_T \\ \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (102)$$

where \mathbf{B} is the magnetic field. We can also obtain following ‘‘Longitudinal’’ components.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_L &= -\nabla \phi, & \nabla \cdot \mathbf{E}_L &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \mathbf{i}_L &= \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t}\end{aligned}\quad (103)$$

Hence the transverse component seems associated with the magnetic field variation, and the longitudinal component seems associated with charges as the regular scalar potential.

However, these associations are justified in a particular coordinate system, i.e., ‘‘relative associations’’. When the coordinate system is changed according to Lorentz transformation, ‘‘Transverse’’ and ‘‘Longitudinal’’ components are mixed. Then the associations have no meaning which is the important assertion of relativity⁴⁹.

This is why we equate scalar potentials with vector potentials, i.e., identify the number operators as $\langle 1|A_0^\dagger A_0|1\rangle = \langle 1|A_1^\dagger A_1|1\rangle = \langle 1|A_2^\dagger A_2|1\rangle = 1$ by Lorentz invariance. In addition, the Coulomb gauge removes the explicit covariance of Maxwell’s equations. Hence we would better use Maxwell’s equations (4) with Lorentz gauge.

By utilizing the linearity of the equation (4), we can express Maxwell's equations with Lorentz condition as follows.

$$\begin{aligned}\square A^\mu &= \square(A_{(\text{mat})}^\mu + A_{(\text{vac})}^\mu) = \mu_0 j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= \partial_\mu(A_{(\text{mat})}^\mu + A_{(\text{vac})}^\mu) = 0\end{aligned}\tag{104}$$

where index “mat” and “vac” mean “matter” associated with four-current and “vacuum”, respectively. If we naturally assume that there are no four-current in vacuum, then $A_{(\text{mat})}^\mu$ and $A_{(\text{vac})}^\mu$ obey the following Maxwell's equations respectively.

$$\square A_{(\text{mat})}^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A_{(\text{mat})}^\mu = 0\tag{105}$$

$$\square A_{(\text{vac})}^\mu = 0, \quad \partial_\mu A_{(\text{vac})}^\mu = 0\tag{106}$$

Equation (105) will express substantial photon excited by the four-current. Note that when we consider the spatial domain far from and exclude the four-current, Equation (106) replacing $A_{(\text{vac})}^\mu$ with $A_{(\text{mat})}^\mu$ can express the motion of the potentials in the domain associated with the four-current.

In contrast, Equation (106) expresses the motion of the potentials unrelated to “matter” in vacuum. Therefore, we can imagine that vacuum is the sea filled with the potentials, which evokes the concept of an ether. Although the static ether has been rejected by special relativity⁴⁹, the above filling potentials are not static entity but propagate at the speed of light. Aharonov-Bohm effect clearly presents that the potentials without electromagnetic field can cause electron interference^{30,50,51}. By the same token, the filling potentials in Eq. (106) can cause interference with substantial photon. This is similar to the concept of the non-integrable phase factor associated with the multiple-connected region of the space, which was also noted in the Aharonov-Bohm effect.³¹ As the space is divided, a phase term associated with the division is introduced and cause interference.

We generally calculate photon related phenomena using A^μ in Eq. (104) unconsciously, i.e., without separation into “matter” and “vacuum”. However, we can not distinguish $A_{(\text{mat})}^\mu$ from $A_{(\text{vac})}^\mu$, which is very much like distinguish sea spray from seawater. Indeed, no separation will be required because both are ever-changing potentials derived from the same Maxwell's equations (104). Therefore, the filling potentials in vacuum can expel and incorporate the potentials associated with “matter”, which makes us imagine that vacuum can create and annihilate substantial photon.

The source of the indefinite metric scalar potential examined in this paper seems to be the time-axis component of the potential (106) in vacuum though it is difficult to distinguish.

On the other hand, Maxwell's equations, which has been formulated as a compilation of classical electromagnetism based on experimental facts of electric and magnetic phenomena from the Faraday era, can be considered as (105).

Here we recognize that (105) is derived from experimental facts, and (106) is derived as a gauge field under the local commutative gauge transformation regardless of experimental facts. Then the recognition emphasize the similarity between the introduction of the gauge field due to the invariance of the local phase transformation on the space-time structure and the phenomenon of vacuum fluctuation due to the geometry of the space examined in this paper.

In the analogy of the electronic circuit or the communication using homodyne detection mentioned in the previous chapter, (106) corresponds to the bias current (voltage) or the continuous wave generated from the local oscillator, and (105) corresponds to the signal wave. If the bias is a stable DC current (voltage), there is no problem in extracting only the AC current (voltage) as a signal. However when the DC current (voltage) fluctuates, the signal as the AC current (voltage) also fluctuates.

It is useful for engineering applications to examine the actual physical phenomenon as the circuit or communication in which the DC current (voltage) fluctuates.

VI. CONTRADICTION OF THE COVARIANT CANONICAL QUANTIZATION

In this chapter, We examine the contradiction between Lorentz gauge and commutation relations in covariant canonical quantization of Maxwell's equations, and conventional solution, and propose new solution.

A. canonical quantization and contradiction of commutation relations

First, an overview of canonical quantization and conventional solution are outlined below.

The subject is Maxwell's equations in free space with zero four-current as follows again.

$$\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (107)$$

In order to adopt canonical quantization, the following classical lagrangian density has been introduced.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{class} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \end{aligned} \quad (108)$$

Indeed the following Euler-Lagrange equation gives Maxwell's equations (107).

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{class}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathcal{L}_{class}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (109)$$

By using this lagrangian density, the canonically conjugate variables π^i , $i = (1, 2, 3)$ can be defined as follows.

$$\begin{aligned} \pi^i &= \frac{\partial \mathcal{L}_{class}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} (F_{0i} F^{0i}) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} ((\partial_0 A_i - \partial_i A_0) (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)) \\ &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{aligned} \quad (110)$$

However the conjugate variable π^0 can not be defined as follows.

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_{class}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (111)$$

Therefore a number of fixing gauge conditions have been proposed. Well-known gauges are Coulomb gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ and Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$. Because Coulomb gauge spoils the explicit covariance due to the separation of A_0 from the four-vector, fixing the Lorentz gauge has been examined by using following lagrangian density.

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\rho A^\rho)^2 \quad (112)$$

When we use the lagrangian density (112), Maxwell's equations in Lorentz gauge can be obtained from Euler-Lagrange equation (109).

$$\square A^\nu = 0 \quad (113)$$

Here the action integral of (108) is as follows.

$$\begin{aligned} S &\equiv \int d^4x \mathcal{L}_{class} \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right) \end{aligned} \quad (114)$$

The second term of the above integral is calculated to be $\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ by partial integration. Then the lagrangian density (112) which derives Maxwell's equations (113) can be calculated to be following lagrangian density.

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (115)$$

The canonically conjugate variables can be obtained by using this lagrangian density as follows .

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu \quad (116)$$

Here quantization is performed by replacing the fields with operators and set the following equal-time commutation relations.

$$\begin{aligned} [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= -[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] \\ &= i g^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (117)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (118)$$

However (117) and (118) derive the following relations.

$$[\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = i g^{0\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0 \quad (119)$$

Hence (119) is inconsistent with Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ as an operator.

Therefore some other lagrangian densities have been proposed. The following lagrangian with auxiliary scalar field B , which is called Nakanishi-Lautrup formalism, will be the most comprehensive form⁵².

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2 \quad (120)$$

Where α is an arbitrarily real parameter. The inconsistency between Lorentz gauge $\partial_\mu A^\mu = 0$ and (119) can be avoided by using the lagrangian (120), introduction of physical states $|\text{phys}\rangle$ and a restriction of Lorentz gauge in terms of the physical states defined by a subsidiary condition, i.e., $\langle \text{phys} | \partial_\mu A^\mu | \text{phys} \rangle = 0$.

B. Extended Lorentz gauge

The approach using (120) seems to be an artificially imposed mathematical technique by introducing an unreal physical field B and unphysical man-made mathematical formality called “subsidiary condition”. That is to say, there is a strong tendency to describe by artificial mathematical techniques that deviate from the mathematical description of natural laws. In addition, the approach has been introduced for avoidance of negative norm as premises for “probability interpretation”. However, as mentioned in this paper, the indefinite metric expresses the physical reality that is inevitably required by theory, which is indispensable to the law of nature. Just because it violates the probability interpretation, it is considered to be fatal fault to remove the indefinite metric by making full use of mathematical techniques according to the artificially introduced hypothesis and conditions.

Hence, we examine the lagrangian density (115) and Maxwell’s equations in Lorentz gauge (113) again. It is to be noted that Lorentz gauge is dispensable for deriving (113). Indeed (113) is derived from lagrangian density (112) or (115) independently of Lorentz gauge. Alternatively the following condition is indispensable from (107).

$$\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (121)$$

Hence from Lorentz invariance

$$\partial_\mu A^\mu = \epsilon(\text{scaler}) \quad (122)$$

This condition (we call this “extended Lorentz gauge”) also has the following gauge invari-

ance of (107) by introducing an arbitrary scalar function χ .

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \quad (123)$$

Although this replacement has been well known, we can imagine that four-vector A^{μ} move on the bias vector $\partial^{\mu}\chi$ such as AC signal and bias current (voltage) of an electric circuit or communication using homodyne detection.

By choosing $\square\chi = 0$, (122) can be obtained repeatedly as follows.

$$\partial_{\mu}A'^{\mu} = \partial_{\mu}A^{\mu} + \square\chi = \partial_{\mu}A^{\mu} = \epsilon \quad (124)$$

Hence

$$A^{\mu} = A_L^{\mu} + f^{\mu} \quad (125)$$

where A_L^{μ} and $f^{\mu} = f^{\mu}(\mathbf{x}, t)$ are a general solution of Lorentz gauge, i.e., $\partial_{\mu}A_L^{\mu} = 0$, and a linear formula as a function of \mathbf{x}, t with $\partial_{\mu}f^{\mu} = \epsilon$ respectively. The most common linear formula f^{μ} is the same as a coordinate transformation in form described as follows.

$$f^{\mu} = \beta(a_{\nu}^{\mu}x^{\nu} + b^{\mu}) \quad (126)$$

where β is a constant for fixing the appropriate dimension. Therefore

$$\epsilon = \beta(a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3) = \text{Tr}(\varepsilon) \quad (127)$$

Where, ε is 4×4 matrix with matrix elements a_{ν}^{μ} multiplied by β . Here we replace ϵ with operator $\hat{\epsilon}$ and substitute for (119)

$$[\partial_{\mu}A^{\mu}(\mathbf{x}, t), A^{\nu}(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\epsilon}, A^{\nu}(\mathbf{x}', t)] = i\mathbf{g}^{0\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0 \quad (128)$$

C. discussion

We examine the commutation relation $[\partial_{\mu}A^{\mu}, A] = [\hat{\epsilon}, A] \equiv \hat{\epsilon}A - A\hat{\epsilon} \neq 0$ by using matrix representation of the operator. The matrix representation of the photon creation and annihilation operators, A^{\dagger} and A , and photon number state vectors $|\mathbf{n}\rangle$ are expressed as follows.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \cdots \quad (130)$$

When $\hat{\epsilon} = \epsilon I$, where I is an identity matrix or operator, the operator $\hat{\epsilon}$ just serves as the constant scalar $[\hat{\epsilon}, A] = \epsilon[I, A] = \epsilon(IA - AI) = 0$, then (128) can not be obtained. From (127), we should adopt the operator $\hat{\epsilon}$ that satisfies $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \sum \epsilon^{ii} = \epsilon$ when we replace ϵ with the operator $\hat{\epsilon}$. Hence, the following matrix representation can be adopted as $\hat{\epsilon}$, where we set all diagonal elements to 0 for simplicity. Even if the diagonal element is not 0, the same result as below can be obtained.

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon^{00} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \epsilon^{11} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \epsilon^{22} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (131)$$

Here we can calculate as follows.

$$\begin{aligned}
[\hat{\epsilon}, A] &\equiv \hat{\epsilon}A - A\hat{\epsilon} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{00} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\epsilon^{11} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\epsilon^{22} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\epsilon^{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\epsilon^{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{00} - \epsilon^{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}(\epsilon^{11} - \epsilon^{22}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}(\epsilon^{22} - \epsilon^{33}) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{132}$$

Hence if at least one $\epsilon^{ii}(i > 0)$ is $\epsilon^{ii} \neq \epsilon^{i\pm 1i\pm 1}$ then $[\hat{\epsilon}, A] \neq 0$ will be satisfied.

By utilizing the relationship (127), we can define the operator $\hat{O} \equiv \hat{\epsilon}$ that satisfies $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \Sigma \epsilon^{ii} = 0$ because $\hat{\epsilon}$ satisfies $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \Sigma \epsilon^{ii} = \epsilon$ like (131). Therefore $\hat{O} \equiv \partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t)$ satisfies (119) as the conventional Lorentz gauge

As described in single photon calculation, even if the number of photon becomes 0 due to interference, there are invisible photons at the space-time due to the interference of the opposite phase waves.

It is necessary to identify that space with a space-time of the phase state such that $f(\theta) = 0$, and it cannot be set to 0 as an empty space-time.

Similarly, considering the right side of the Lorentz condition $\partial_\mu A^\mu = 0$ as empty 0 and quantizing it as 0 will ignore the space-time that has some geometry .

Since classical Lagrangian density (108) assumes free space which is an ideal vacuum with no geometry, the same approach will be applicable by introducing a phase into A_0 that includes the existence of the geometry.

VII. SUMMARY

Probability interpretation, which is the basic concept of quantum theory, has been considered essential in order to match the observation results of quantum phenomena with theory. However, the probability interpretation had not been able to provide the picture of objective physical reality like classical physics and gave rise to the famous paradox that an indivisible particle is in a quantum superposition state that stands for the state that they are divided into two or more paths instead of objective physical reality.

In addition, the probability interpretation asserts that the divided two particle in EPR state have a correlation even if they are far away, and one of pair is suddenly change at the same time from probability existence to a particle as objective physical reality when the other of pair is observed. This correlation leads to a physical phenomenon that exceeded the speed of light that contrary to relativity. Even a technology called quantum teleportation has been developing by applying the physical phenomenon that exceeds the speed of light.

In this paper, we have discarded the probability interpretation that conflicts with common sense and reconstructed the quantum theory using objective physical reality, which reproduces the same observation results as the conventional standard quantum theory.

For the reconstruction, we have used an indefinite metric associate with covariant quantization of Maxwell's equations. Although some mathematical procedures have been developed to remove it because the indefinite metric contradicts the probability interpretation, in this paper, we pay attention to the fact that the indefinite metric is inevitably required from the theory, and have approved that the probability interpretation should be removed instead. Therefore we have incorporated the indefinite metric into the the calculations of single photon, single electron interference and EPR correlation as it is. Then by using covariant description and simple calculation method, we have shown when the space is divided into two paths, the scalar potential, which is the source of the indefinite metric, forms an oscillatory field by the division. We have clarified the objective physical realities that the single photon, single electron and photon pair having opposite polarizations are move in the oscillatory field which occurs the interferences and correlations, and shown that the calculation results agree with the conventional standard quantum theory.

For EPR correlation, various reports have been made that suggest there exists a long-range correlation beyond the causality.^{19–21,37,53–55} We believe that these reports can be

explained by the oscillatory field of the scalar potential caused as the result of path division and the indefinite metric in this paper.

We have also shown that the number of space division in the ideal vacuum or real vacuum corresponds to 1 (no division) or ∞ respectively by generalizing the number of the division of the space from two into an arbitrary number, and clarified that the oscillatory field due to the scalar potential is formed when some geometry come into in the ideal space.

Furthermore, we have shown that the zero-point energy fluctuates due to the oscillatory field of the scalar potential, the removal of the infinite zero-point energy which was difficult for conventional quantum theory and the Cashmir effect originating from zero-point energy can be calculated.

Conventionally, there is an argument that the zero-point energy is simply subtracted to erase in engineering applications. By using an analogy from an electric circuit, we have discussed that this kind of approach corresponds to the signal of AC coupling which subtract DC bias voltage (current). And a real physical phenomenon corresponds to the electric circuit of which bias voltage (current) is not DC component but AC component, which causes interference with the AC component of the signal.

In addition, we have clarified that the space has symmetry when the number of division of the space is 1 (no division) or ∞ and at other number of division the oscillatory field of the scalar potential is generated which breaks the symmetry.

Moreover, we have discussed the generalization of a single particle interference and suggested that the neutrino oscillation may be caused by the self-interference fluctuation due to the oscillatory field of the physical quantity corresponding to the indefinite metric. In this generalization, we speculated that the approach for a commutative gauge field such as an electromagnetic field in this paper could be applied to a non-commutative gauge field, but it is a future subject to find a concrete expression. However, the introduction of indefinite metric is the theoretical requirement that should be introduced in any fields.

We have discussed the origin of the scalar potential, which is the essence of this paper, by separating Maxwell's equations into two equations associate with matter and vacuum and shown the picture that vacuum create and annihilate photons as the objective physical reality.

Finally, we have discussed the contradiction between Lorentz condition as an operator and commutation relation in covariant canonical quantization of Maxwell's equations, and

proposed the new method that can avoid the contradiction by introducing the extended Lorentz gauge.

Although the probability interpretation and the reconstruction in this paper give the same calculation results, this can be regarded as a one-to-one correspondence of the inverse problem. The conventional standard quantum theory is not a systematic representation of physical observations (outcome) by mathematical expression using objective physical reality, but the assumption replaced by non-physical state (fake reality) called probability interpretation, because it was initially difficult to explain the observation result (outcome) by objective physical reality. For example, we can estimate the sound (outcome) from the shape and state of the musical instrument (reality). On the contrary, from the sound (outcome), we can estimate some of sound sources, for example, an electric sound devices (fake reality), in addition to the musical instrument (reality) that actually makes the sound. Even if the observations (sounds or outcomes) are the same, the true reality is unique.

The reconstruction is definitely superior to probability interpretation because intuitively reasonable and exactly follows from Maxwell's equations, relativity and the indefinite metric derived from covariant quantization and gives the same result as the conventional standard quantum theory that reproduces the experimental results.

From the reconstruction, the incompleteness of quantum theory, which has been alerted by A. Einstein, will originates from lack of introduction of indefinite metric.

As A. Einstein continued to insist⁵, quantum theory should be re-constructed by using the indefinite metric as an objective physical reality without probability interpretation.

REFERENCES

- ¹Masahito Morimoto. Unobservable potentials to explain single photon and electron interference. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 14(8):4121–4132, 2017.
- ²Masahito Morimoto. Unobservable potentials to explain a quantum eraser and a delayed-choice experiment. *Progress In Electromagnetics Research M*, 62:111–122, 2017.
- ³Masahito Morimoto. Consideration of Covariant Quantization of Electromagnetic Field. *arXiv e-prints*, page arXiv:1806.02175, June 2018.
- ⁴J. D. Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger’s ”cat paradox” paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124(5):323–338, Oct 1980.
- ⁵A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev*, 47:777–780, May 1935.
- ⁶David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- ⁷David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- ⁸X. Oriols and J. Mompart. Overview of Bohmian Mechanics. *ArXiv e-prints*, June 2012.
- ⁹P. Pylkkänen, B. J. Hiley, and I. Pättiniemi. Bohm’s approach and Individuality. *ArXiv e-prints*, May 2014.
- ¹⁰D. Durr, S. Goldstein, T. Norsen, W. Struyve, and N. Zanghi. Can Bohmian mechanics be made relativistic? *Royal Society of London Proceedings Series A*, 470:30699, December 2013.
- ¹¹V. Allori, S. Goldstein, R. Tumulka, and N. Zanghi. Predictions and Primitive Ontology in Quantum Foundations: A Study of Examples. *ArXiv e-prints*, May 2012.
- ¹²Glen Dennis, Maurice A. de Gosson, and Basil J. Hiley. Fermi’s ansatz and bohm’s quantum potential. *Physics Letters A*, 378(3233):2363 – 2366, 2014.
- ¹³Markus Arndt and Klaus Hornberger. Testing the limits of quantum mechanical superpositions. *Nature Physics.*, 10:271–277, April 2014.
- ¹⁴Julian Grond, Ulrich Hohenester, Jörg Schmiedmayer, and Augusto Smerzi. Mach-zehnder interferometry with interacting trapped bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 84:023619, Aug 2011.

- ¹⁵G. D. McDonald, H. Keal, P. A. Altin, J. E. Debs, S. Bennetts, C. C. N. Kuhn, K. S. Hardman, M. T. Johnsson, J. D. Close, and N. P. Robins. Optically guided linear mach-zehnder atom interferometer. *Phys. Rev. A*, 87:013632, Jan 2013.
- ¹⁶Géraldine Haack, Michael Moskalets, Janine Splettstoesser, and Markus Büttiker. Coherence of single-electron sources from mach-zehnder interferometry. *Phys. Rev. B*, 84:081303, Aug 2011.
- ¹⁷Stéphane Ngo Dinh, Dmitry A. Bagrets, and Alexander D. Mirlin. Analytically solvable model of an electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. B*, 87:195433, May 2013.
- ¹⁸M. Morimoto. Proposal for a plasmonic mach-zehnder modulator utilizing quantum interference effect. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 19(6):14–20, Nov 2013.
- ¹⁹Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem. *Physical review letters*, 47(7):460, 1981.
- ²⁰Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger, et al. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell’s inequalities. *Physical review letters*, 49(2):91–94, 1982.
- ²¹Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804, 1982.
- ²²S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, Feb 2002.
- ²³Vincent Jacques, E Wu, Frédéric Grosshans, François Treussart, Philippe Grangier, Alain Aspect, and Jean-François Roch. Delayed-choice test of quantum complementarity with interfering single photons. *Phys. Rev. Lett.*, 100:220402, Jun 2008.
- ²⁴Stefano Longhi. Classical and quantum interference in multiband optical bloch oscillations. *Phys. Rev. B*, 79:245108, Jun 2009.
- ²⁵A. Danan, D. Farfurnik, S. Bar-Ad, and L. Vaidman. Asking photons where they have been. *Phys. Rev. Lett.*, 111:240402, Dec 2013.
- ²⁶Pablo L. Saldanha. Interpreting a nested mach-zehnder interferometer with classical optics. *Phys. Rev. A*, 89:033825, Mar 2014.
- ²⁷Roger Bach, Damian Pope, Sy-Hwang Liou, and Herman Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics*, 15(3):033018, 2013.
- ²⁸C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1985.

- ²⁹R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 2 edition, 1983.
- ³⁰Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959.
- ³¹Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, 12:3845–3857, Dec 1975.
- ³²R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics Vol. II, III*. Addison-Wesley, 1965.
- ³³E. Karlson and Rudolf Ernst Peierls. The eigenvalues of the charge operator. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 230(1182):382–389, 1955.
- ³⁴J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- ³⁵J. BELL. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- ³⁶JOHN S. BELL. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, Jul 1966.
- ³⁷Johannes Handsteiner, Andrew S. Friedman, Dominik Rauch, Jason Gallicchio, Bo Liu, Hannes Hosp, Johannes Kofler, David Bricher, Matthias Fink, Calvin Leung, Anthony Mark, Hien T. Nguyen, Isabella Sanders, Fabian Steinlechner, Rupert Ursin, Sören Wengerowsky, Alan H. Guth, David I. Kaiser, Thomas Scheidl, and Anton Zeilinger. Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars. *Phys. Rev. Lett.*, 118:060401, Feb 2017.
- ³⁸R. L. Jaffe. Casimir effect and the quantum vacuum. *Phys. Rev. D*, 72:021301, Jul 2005.
- ³⁹Eric Myers. Interpretation of the energy of the vacuum as the sum over zero-point energies. *Phys. Rev. Lett.*, 59:165–168, Jul 1987.
- ⁴⁰S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to 6 μ m range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8, Jan 1997.
- ⁴¹U. Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μ m. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552, Nov 1998.
- ⁴²Iver Brevik, Valery N. Marachevsky, and Kimball A. Milton. Identity of the van der waals force and the casimir effect and the irrelevance of these phenomena to sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 82:3948–3951, May 1999.
- ⁴³W. Arnold, S. Hunklinger, and K. Dransfeld. Influence of optical absorption on the van der waals interaction between solids. *Phys. Rev. B*, 19:6049–6056, Jun 1979.

- ⁴⁴Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.
- ⁴⁵Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, 122:345–358, Apr 1961.
- ⁴⁶Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Phys. Rev.*, 124:246–254, Oct 1961.
- ⁴⁷A. K. Mann and H. Primakoff. Neutrino oscillations and the number of neutrino types. *Phys. Rev. D*, 15:655–665, Feb 1977.
- ⁴⁸G.J. Feldman, J. Hartnell, and T. Kobayashi. Long-baseline neutrino oscillation experiments. *Adv.High Energy Phys.*, 2013:475749, 2013.
- ⁴⁹A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter krper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- ⁵⁰Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Junji Endo, Tatsuo Arii, and Kazuhiro Mihama. Direct observation of fine structure of magnetic domain walls by electron holography. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1430–1433, May 1980.
- ⁵¹A. Tonomura, H. Umezaki, T. Matsuda, N. Osakabe, J. Endo, and Y. Sugita. Is magnetic flux quantized in a toroidal ferromagnet? *Phys. Rev. Lett.*, 51:331–334, Aug 1983.
- ⁵²Noboru Nakanishi. Indefinite-metric quantum field theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 51:1–95, 1972.
- ⁵³D. Salart, A. Baas, J. A. W. van Houwelingen, N. Gisin, and H. Zbinden. Spacelike separation in a bell test assuming gravitationally induced collapses. *Phys. Rev. Lett.*, 100:220404, Jun 2008.
- ⁵⁴Yoon-Ho Kim, Rong Yu, Sergei P. Kulik, Yanhua Shih, and Marlan O. Scully. Delayed “ choice ” quantum eraser. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1–5, Jan 2000.
- ⁵⁵John F Clauser and Michael A Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Physical review D*, 10(2):526, 1974.

共変量子化による不定計量を用いた量子論の再構成

森本 政仁

2020年10月9日

概要

本論文では、現在の標準的な確率解釈を基礎概念として構成された量子論を、客観的な物理的実在を用いた確率解釈に依存しない基礎概念によって再構成することを試みた。

確率解釈を基礎概念とした量子論の典型的な物理現象として、単一光子干渉、単一電子干渉、光子の偏光を用いた EPR 相関実験を取り上げ、これらの現象が本論文で再構成した客観的な物理的実在を基礎概念とした計算によっても、確率解釈を採用した場合と同一の結果が得られることを示す。具体的計算には、共変形式の Maxwell 方程式の量子化において、4 元ポテンシャルの時間軸成分であるスカラーポテンシャルから生じる不定計量のマイナス符号を、確率解釈との矛盾を理由に数学的処方によって除去するのではなく、マイナス符号を理論からの必然の要請としてありのままに取り入れ、これら単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の計算を行っても確率解釈と同一の計算結果が再現されることを示した。

この計算過程を物理現象に沿って記述すると、時空間全域にスカラーポテンシャルが存在しており、空間に何らかの幾何学的配置が存在する場合、スカラーポテンシャルがその配置形状に応じたポテンシャルの振動場を形成し、この振動場の中を光子や電子がこの振動と干渉しながら運動することで、単一光子干渉、単一電子干渉、及び EPR 相関を生じる、という客観的な物理的実在による描像が得られることを明らかにした。

また、この空間に存在する幾何学的配置に依存するスカラーポテンシャルの振動場形成は、空間内にエネルギーの揺らぎを生じることを示し、このエネルギーの揺らぎが無限大の 0 点エネルギーの除去を可能にすること、自発的対称性の破れ、及び Casimir 効果を生じることも示した。

更に、このような様々な現象を説明可能とするスカラーポテンシャルの出所について、物質が存在する空間と真空を区別することで考察した。

最後に、従来の Lorentz ゲージを採用した共変形式の Maxwell 方程式の正準量子化における、演算子方程式としての Lorentz ゲージと交換関係の矛盾を、拡張した Lorentz ゲージを導入して回避する方法を提案した。

なお、本論文は著者の論文 [1, 2, 3] をまとめ直し、加筆修正を加えたものである。

目次

1	はじめに	2
2	共変形式による Maxwell 方程式の量子化	4
2.1	Lorentz ゲージによる量子化	4
3	単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の確率解釈及び再構成での計算	8
3.1	単一光子干渉の計算	9
3.2	単一電子干渉の計算	17
3.3	EPR 相関の計算	21
4	応用	31
4.1	干渉経路の一般化	32
4.2	電磁場の 0 点エネルギー	34
4.3	Casimir 効果	37
4.4	自発的対称性の破れ	38
4.5	単一粒子干渉の一般的取扱い	39
5	不定計量ポテンシャルの出所	40
6	共変形式による Maxwell 方程式の正準量子化における矛盾回避について	43
6.1	正準量子化及び交換関係の矛盾	43
6.2	拡張 Lorentz ゲージ	45
6.3	考察	46
7	まとめと今後の課題	49

1 はじめに

現在、標準的な量子論は確率解釈を基礎概念として構成されている。原子、素粒子のような微視的物理系の任意の状態は、Hilbert 空間のベクトルと同一視された状態ベクトルで表現され、物理量は演算子で表される。観測される物理量の期待値はこれらの固有方程式から得られる固有値と解釈される。この物理的状态を Hilbert 空間のベクトルと同一視した考えによると、そのベクトルの内積は、その系の状態が時空間に存在する確率を表すと解釈されている。この基礎概念を用いた計算は実験結果と一致し、この概念無しには単一光子、電子干渉は説明困難であり、更に、相対論に矛盾するように見える長距離相関を示す粒子対状態も確率解釈による議論が行われてきた。

しかし、この基礎概念に従う限り”Schrödinger の猫” や”Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)”論文に代表される波束の収縮のパラドックスを解決することは困難であった。[4, 5]

量子論をこれらパラドックスなしに解釈する為、de Broglie や Bohm は所謂”隠れた変数”理論 [6, 7] を提唱したが、”隠れた変数”は Bell の不等式の破れによって否定されたと考えられている。[8, 9] Bell の不等式の破れによって”隠れた変数”が否定されたことは、物理法則の局所性を抛り所とする相対論と矛盾するものであるが、一部の研究者によって、確率解釈を基にした量子論を相対論に適合するように拡張する試みも行われている。[10, 11, 12, 13, 14] しかし現在に至るまで、この拡張は未完である。

このような、相対論や常識的理解を超えた物理現象の描写を要求する量子論の基礎概念の正否に関連して、様々な議論や実験が行われている。一例を示すと、量子重ね合わせの複数の実験的考察 [15]、Bose-Einstein 凝縮 (BEC) を用いた原子干渉の理論的及び実験的報告 [16, 17]、電子 MZI 干渉計内の Aharonov-Bohm 効果による単一電子または電子-電子干渉のコヒーレンス長の理論的議論 [18, 19]、著者による Aharonov-Bohm 効果を使ったコヒーレント電子波干渉によるプラズモン変調器の検討 [20]、相関光子対の実験的および理論的な議論 [21, 22, 23, 24, 25, 26]、入子状になった MZI 干渉計と振動モータによる光子干渉の測定と解析 [27, 28]、2 スリット電子干渉の実験的デモンストレーション [29]、等である。

これらの量子現象に関する報告は、確率解釈の基礎概念の妥当性を納得させる結果となり、確率解釈を基礎概念とする標準量子力学の信頼性は揺るぎないものと考えられるようになってきた。

しかし、これらの報告は測定結果と、確率解釈を基礎概念とする計算結果が一致するこ

とを確認したものや、確率解釈で得られる干渉効果の応用について検討されたものであり、量子論の基礎概念として確率解釈以外の可能性を検討したものではない。

本論文では、単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関について従来の確率解釈による計算結果と、客観的な物理的実在としての光子や電子が時空間で運動している物理現象を描写した確率解釈を用いない計算結果が一致することを示し、確率解釈を基礎概念としない量子論を再構成することを試みた。

この再構成によれば、自然法則としての原理的な確率を持った純粋状態という概念は自然界には存在せず、統計的な意味での確率を持った混合状態の概念だけが自然法則として物理的に妥当であり、標準的な量子論の確率解釈はこの混合状態についての計算に有用ではあるが、量子論も古典物理学と同様に確率解釈を伴わない決定論的物理学であることが示される。

更にこの再構成によって、人為的な引き算を伴わない無限大のゼロ点エネルギーの除去、Casimir 効果、自発的対称性の破れが自明的に導かれることを示す。

本論文の構成は以下である。

第 2 章では、本論文の骨子である不定計量を要求する共変形式による Maxwell 方程式の量子化を要約し、この量子化で得られる不定計量が確率解釈よりも優先されるべきことを論じる。

第 3 章では、単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の各々について、従来の確率解釈を用いた計算と本再構成を用いた計算及び解釈の違いを述べ、解釈を除いた観測可能な物理現象としては全く同一の計算結果が得られることを示す。また、再構成の計算を簡易化する、「簡易計算法」と名付けた計算に便利な形式の取扱いを示す。この再構成による計算結果から、スカラーポテンシャルは不定計量のマイナス符号を持つ物理的実在であることが明確になる。

第 4 章では、本再構成の応用として、無限大のゼロ点エネルギーの除去、Casimir 効果、自発的対称性の破れが自然と導かれることを、第 3 章で考察した干渉の原因となる経路の分割を一般化することで示す。また、単一粒子干渉の一般的取扱いにも言及する。

第 5 章では本論文で考察した再構成の中核である不定計量ポテンシャルと真空の Maxwell 方程式について、その出所を議論する。

第 6 章では、共変形式による Maxwell 方程式の正準量子化における演算子としての Lorentz 条件と交換関係の矛盾について、従来の代表的な矛盾回避方法を概観した後、Lorentz ゲージを拡張したゲージ導入による矛盾回避手法を提案し、この提案の妥当性を行列表示による計算を援用して示す。

第 7 章で本論文のまとめを示す。

2 共変形式による Maxwell 方程式の量子化

確率解釈を前提とする現在の標準的量子基の理論概念を、客観的な物理的実在と対応付けて再構成するには、Maxwell 方程式の量子化において Coulomb ゲージを採用するのではなく、Lorentz ゲージを採用した共変形式による量子化が不可欠である。このことは次章以降で具体的な計算と共に示す。このため、この章では Maxwell 方程式の Lorentz ゲージによる共変形式の量子化について述べる。但し、この章で述べる量子化は、次章以降での議論に必要となる不定計量から要請されるマイナス符号の導入を明らかにすることが目的である。

この目的の為、この章では正準量子化の詳細には触れず、共変形式の Maxwell 方程式を満たす 4 元ベクトルを平面波展開の Fourier 変換で表し、その Fourier 係数を演算子に置き換え、それらの演算子間に交換関係を設定することで量子化する。

Lorentz ゲージを採用した共変形式での電磁場の正準量子化には、本章の目的以外の、Lagrangian 密度の選び方や交換関係の設定に伴う数学的計算技術の議論が必要となるため、その詳細については本章ではなく第 7 章にて独立に取り扱い議論する。

しかし、本章の量子化でも正準量子化でも次章以降の計算、議論に違いはない。

2.1 Lorentz ゲージによる量子化

議論の出発点となるのは、下記の Maxwell 方程式である。

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0 \mathbf{i} \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \phi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで μ_0 及び ε_0 は真空の透磁率及び誘電率である。

この Maxwell 方程式 (1) の電磁ポテンシャル ϕ と \mathbf{A} は、この 4 成分を Minkowski 空間の 4 元ベクトルとして

$$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3) = (\phi/c, \mathbf{A}) \quad (2)$$

と記述される。電荷密度 ρ と空間電流 \mathbf{i} も同様に、4 元電流として

$$j^\mu = (j^0, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \mathbf{i}) \quad (3)$$

と記述される。

ここで、Minkowski 空間の軸を $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ と設定すると、Maxwell 方程式と Lorentz 条件は次の共変形式で記述される。

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (4)$$

更に、電荷保存則

$$\text{div } \mathbf{i} + \partial\rho/\partial t = 0 \quad (5)$$

は

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (6)$$

の共変形式で表される。ここで、

$$\partial_\mu = (1/c\partial t, 1/\partial x, 1/\partial y, 1/\partial z) = (1/\partial x^0, 1/\partial x^1, 1/\partial x^2, 1/\partial x^3) \quad (7)$$

であり、 \square は d'Alembertian : $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \partial^2/c^2 \partial t^2 - \Delta$ である。

共変、反変ベクトル間の変換は以下に示す Minkowski 計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の簡素な形式

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

を用いて

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \quad (9)$$

で計算される。

ここで、次の 4 元ベクトルの 2 次形式は Lorentz 変換の下で不変であることに注意する。

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad (10)$$

この 2 次形式にマイナス符号を掛けたものは光の波面を表し、上記の計量テンソルを用いて

$$-g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = -x^\mu x_\mu = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (11)$$

と記述されることにも注意する。このマイナス符号を含めた 2 次形式は Minkowski 空間内の任意のベクトルの内積、及び交換関係にも導入される。

ここで、自由空間の電磁場を考察するため 4 元電流を 0 とすると、この Maxwell 方程式を満足する 4 元ポテンシャルは、以下の平面波展開による Fourier 変換で記述できる。

[30]

$$A_\mu(x) = \int d\tilde{k} \sum_{\lambda=0}^3 [a^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k) e^{-ik \cdot x} + a^{(\lambda)\dagger}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(k) e^{ik \cdot x}] \quad (12)$$

$$\tilde{k} = \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \quad k_0 = |\mathbf{k}| \quad (13)$$

但し、時間軸方向の単位ベクトル n と偏極ベクトル $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ は $n^2 = 1$, $n^0 > 0$ と $\epsilon^{(0)} = n$ として、 $\epsilon^{(1)}$ と $\epsilon^{(2)}$ は k と n に直交する面で

$$\epsilon^{(\lambda)}(k) \cdot \epsilon^{(\lambda')}(k) = -\delta_{\lambda,\lambda'} \quad \lambda, \lambda' = 1, 2 \quad (14)$$

と選ばれる。 $\epsilon^{(3)}$ は次のように n に直交する面 (k, n) に選び、正規化する。

$$\epsilon^{(3)}(k) \cdot n = 0, \quad [\epsilon^{(3)}(k)]^2 = -1 \quad (15)$$

この結果、 $\epsilon^{(0)}$ はスカラー波、 $\epsilon^{(1)}$ と $\epsilon^{(2)}$ は横波、 $\epsilon^{(3)}$ は縦波の偏極ベクトルと解釈可能になる。そこで、これらのベクトルとして、次の形を採用する。

$$\epsilon^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

この4元ポテンシャルの Fourier 係数を $\hat{A}_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ として演算子に置き換え、次の交換関係を設定することで、共変形式による電磁場の量子化が行われる。

$$[\hat{A}_\mu(k), \hat{A}_\nu^\dagger(k')] = -g_{\mu\nu} \delta(k - k') \quad (17)$$

この量子化を採用すると、時間軸成分 ($\mu, \nu = 0$ に相当するスカラー波、すなわち $\epsilon_\mu^{(0)}(k) = 0$ ($\mu \neq 0$) のスカラーポテンシャル) は空間軸成分と逆符号を持つこととなり、 $\langle 0 | \hat{A}_0(k) \hat{A}_0^\dagger(k') | 0 \rangle = -\delta(k - k')$ なので、

$$\langle 1 | 1 \rangle = -\langle 0 | 0 \rangle \int d\tilde{k} |f(k)|^2 \quad (18)$$

となる。但し、 $|1\rangle = \int d\tilde{k} f(k) \hat{A}_0^\dagger(k) |0\rangle$ である。よって時間軸成分は不定計量の源である。

ここで、 $|1\rangle$ を光子が1個ある状態と考え、確率解釈により、この内積は空間に1つの光子が存在する確率と解釈すると、その確率はマイナスであるという結果になり、確率解釈が破綻する。

数学的にもベクトルの内積がマイナス符号になることは、Hilbert 空間でのベクトルの内積の定義に反するものである。そもそも、物理的状态を Hilbert 空間のベクトル $|x\rangle$ と考え、その内積 $\langle x | x \rangle$ を Hilbert 空間でのベクトルの内積の定義に合わせて正定値 $\langle x | x \rangle \geq 0$; $\langle x | x \rangle = 0 \Leftrightarrow |x\rangle = 0$ であると設定して、物理的状态に関する確率と同一視する量子論の基礎概念は、理論から導出されたものではなく、人為的に導入されたものであ

る。この基礎概念から得られる計算結果と、様々な実験結果との一致が積み重ねられた結果としてその信頼性が確立されてきたものである。

この信頼性に加え、確率解釈と不定計量の矛盾を、スカラー波による寄与と縦波による寄与で相殺してマイナス符号を消去し、見かけ上、正定値 Hilbert 空間での議論に置き換え、確率解釈に抵触しない数学的定式化も行われている。しかし、そのような定式化は、理論から必然的に要請されるものではなく、人為的操作による数学的技巧と認識すべきである。

一方、このマイナス符号は Maxwell 方程式と相対性理論から必然的に導入されるものである。そもそも、自然界の物理空間は重力を無視しても Minkowski 空間、重力まで含めれば Riemann 空間として記述され、計量が正定値に限られるような空間ではない。

本論文では、このマイナス符号導入を理論からの必然の要請として受け入れ、確率解釈を用いずに量子論の再構成を行う。次章以降でこのマイナス符号の導入によって、確率解釈による単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 関連の計算結果を忠実に再現可能で、且つ、これらの現象が客観的な物理的実在の描像を与えることを明らかにしていく。

なお、Coulomb ゲージを採用すると、不定計量の源である時間軸成分のスカラーポテンシャルを表面上無視することになり、次章以降の議論が困難になるのに加え、Maxwell 方程式の明白な共変性も失われるので、物理法則の基礎概念を座標系に無依存に構成するには Lorentz ゲージを採用すべきである。

3 単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の確率解釈及び再構成での計算

本章では、従来の単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の確率解釈及び再構成による各計算方法を示す。単一光子干渉と単一電子干渉の計算に確率解釈を採用すると、それ以上分割できない粒子的描像を持った単一粒子をあたかも別々の経路に分割されたように取り扱わなければならないことを再認識する。一方、再構成によると単一光子干渉および単一電子干渉では、その実験系の配置によって不定計量の源であるスカラーポテンシャルが振動場を形成し、その振動場の中を単一光子、単一電子が分割されない単一の粒子として運動することで干渉が観測されるという、客観的な物理的実在を伴った描像が得られることを明らかにする。

また、EPR 相関については光子の偏光を用いた計算を取り上げる。この EPR 相関に確率解釈を採用すると、お互いに直交する偏光を持った 2 つの光子が、同時に別経路に分かれて確率的にのみ存在する相関光子対状態 (Entanglement) と考えなければならず、片側の経路での光子の偏光測定で偏光が判明した瞬間に別経路の光子の偏光が決定するという、確率解釈だけでなく相対論に矛盾する「局所性の否定」を伴った解釈まで要求されることを再認識する。一方、再構成によると、相関光子対は、それが発生した時点で偏光方向は決定されており、偏光方向が測定される際に、それらの光子が実験系の配置によって振動場を形成したスカラーポテンシャルと干渉を起こすため、非局所的な長距離相関があるように見えることを明らかにする。

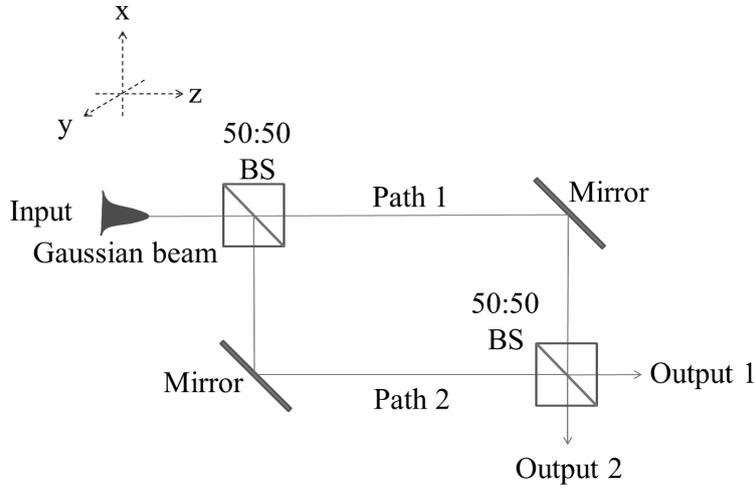


図1 MZ 干渉計の概略図. BS:ビームスプリッタ

3.1 単一光子干渉の計算

3.1.1 確率解釈による単一光子干渉の計算

図1に単一光子干渉の考察をモデル化したマッハツェンダー干渉計 (Mach-Zehnder Interferometer : MZ 干渉計) の概略図と座標系を示す。

従来の単一光子干渉の計算では、Maxwell 方程式 (1) において、 $\mathbf{i} = 0$ と $\rho = 0$ とした自由空間での電磁場を Coulomb ゲージでスカラーポテンシャル ϕ を消去し、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} のみを用いた量子化から得られた、光子消滅、生成演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger を用いて計算が行われる。

このモデルでの単一光子干渉の計算には、以下の電場演算子

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i\theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \quad (19)$$

と数状態 $|n\rangle$ が導入される。ここで、 \hat{a}_{1or2} は経路 1、2 を通過する光のモードに相当する光子消滅演算子であり、 θ は 2 つの経路の光路長差に相当する位相差である。 \hat{a}_{1or2} と \hat{a}_{1or2}^\dagger は、光子が 2 つの経路に分割される前の自由空間 (MZ 干渉計入力) における光子生成、消滅演算子 \hat{a} と \hat{a}^\dagger 、および光子数の期待値と共に、以下で定義される。

$$\langle n|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_1|n\rangle = \langle n|\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_2|n\rangle = \langle n|\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2|n\rangle = \frac{1}{2}n \quad (20)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{a}_1 + \hat{a}_2}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{a}_1^\dagger + \hat{a}_2^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (21)$$

この電場演算子の自乗 $\hat{E}^\dagger \hat{E}$ を光子数に比例する電場強度演算子として、これと数状態を用いて MZ 干渉計出力の光子数が以下のように計算される。[31]

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle n | \hat{E}^\dagger \hat{E} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle + \cos \theta \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (22)$$

但し $\langle \hat{I} \rangle$ は光子数に比例する場の強度の期待値である。

単一光子として光子数に 1 ($n = 1$) を代入すると、上記の期待値は

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (23)$$

と計算される。

この計算では、(19) で導入された電場演算子の形、各経路の光子数期待値 (20)、光子生成、消滅演算子の分割 (21) のやり方から明らかなように、MZ 干渉計から入射した光子は、2つの経路の光路長差に相当する位相差を伴って、経路 1 と 2 の各々の経路に確率 1/2 で分割され通過すると解釈されることとなる。

この解釈は、MZ 干渉計に入射する光の強度が大きく、光子数 n が大きい場合に、近似的に $n/2$ 個の光子が片側、 $n/2$ 個の光子が反対側の経路に分割されるという、統計的な意味での確率と考えれば統計力学として妥当なものである。このような統計的な状態は、原理的な確率を持った純粋状態に、その純粋状態を含む確率として密度行列を掛け合わせた混合状態として取り扱われている。この混合状態を用いた確率解釈については統計物理学的に妥当と考えられる。

しかし、MZ 干渉計に入射する光の強度が小さく、それ以上分割出来ない単一光子として取り扱われる状況であっても、これを原理的な意味での確率を伴った純粋状態として単一光子が確率 1/2 で経路 1 と 2 を同時に通過すると解釈することは、我々の常識的感覚に反するものである。

3.1.2 再構成による単一光子干渉の計算

この確率解釈から客観的な物理的実在を伴った描像に再構成する為、まず、図 1 における、MZ 干渉計への入射光子ビームの電磁場を再度考察する。

まず、x-軸方向に偏波した角周波数 ω 、伝搬定数 β の光ビームが z-軸方向に伝搬するとし、その光ビームの電界は、例えば断面形状が自由空間に良く局在化しているガウシアン分布で表せるとする。

このとき、入力的光ビーム電界は以下のように表現できる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) \quad (24)$$

但し、 \mathbf{e}_x は x-軸と平行の単位ベクトル、 C_E はその 2 乗が強度に比例する任意定数、 w_0 は光ビーム半径である。 \mathbf{E} と \mathbf{B} はベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A} - \nabla\phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\quad (25)$$

(24) と (25) から、 \mathbf{A} はベクトル関数 \mathbf{C} を用いて

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= -\frac{1}{\omega}\mathbf{e}_x \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z) + \mathbf{C} \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{C} &= -\nabla\phi\end{aligned}\quad (26)$$

と表せる。 \mathbf{C} を渦なしベクトル関数 $\nabla \times \mathbf{C} = 0$ ととることで \mathbf{B} が空間に局在化する。例えば、 \mathbf{C} と ϕ は任意のスカラー関数 λ を用いて $\mathbf{C} = \nabla\lambda$ と $\nabla\left(\frac{\partial}{\partial t}\lambda + \phi\right) = 0$ と表現でき、 \mathbf{B} は次のように計算される。

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{\beta}{\omega}\mathbf{e}_y \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \cos(\omega t - \beta z) - \frac{2y}{\omega \cdot w_0^2}\mathbf{e}_z \cdot C_E \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \cdot \sin(\omega t - \beta z)\end{aligned}\quad (27)$$

よって、 \mathbf{E} と \mathbf{B} は入力の実空間に局在化されている。一方、ベクトル、スカラーポテンシャルは必ずしも局在化していない。この局在形 (24) は一例であり、 $\mathbf{i} = 0$ と $\rho = 0$ とした Maxwell 方程式 (1) を満たす他の形状でも同様のことが言える。

ここで、ガウシアンビームは自由空間伝搬に伴い広がっていくが、伝搬ビームの半径 $w(z)$ は波長 $\lambda = 1\mu\text{m}$ で、初期半径 $w_0 = 10\text{mm}$ とすると、 $z = 100\text{m}$ 伝搬しても約 10.5mm であり、MZI の経路が数十 m 以下ならば、この伝搬広がり系は系の大きさに比較して無視できる。このビーム径は $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$ で計算できる。

上記のように、光子が局在していてもポテンシャルは必ずしも局在化していない。特にスカラーポテンシャルは全空間に存在する。このスカラーポテンシャルという客観的実在の存在を認識して、再構成を以下に示す。

まずベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは Lorentz 変換によって入り混じる為、この Lorentz 不変性から、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは同等に扱うべきであり、 $\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_2^\dagger\hat{A}_2|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_3^\dagger\hat{A}_3|1\rangle$ とするべきことに注意する。

計算の簡単化の為、図 1 における入射ビームは x 軸に完全偏光しているとし、非物理的と考えられる縦波を無視する、すなわち $A_2 = 0, A_3 = 0$ とする。しかし、前述したようにスカラーポテンシャルは全空間に存在する。よって、MZ 干渉計の入力部分での 4 元ポテンシャルは

$$A_\mu = (A_0, A_1, 0, 0) \quad (28)$$

と記述できることとなる。

MZ 干渉計により 2 つの経路が存在する場合の物理的に妥当な現象はスカラーポテンシャルが分割されることである。ここで、x 軸方向に偏光した横波で表現される単一光子が経路 1 を通過し、スカラーポテンシャル A_0 が経路 1 と 2 の両方に分割された状態を考える。この状態では、MZI の経路 1 に沿った 4 元ベクトルポテンシャル ($\equiv A_{\mu:(\text{path1})}$) と経路 2 に沿った 4 元ベクトルポテンシャル ($\equiv A_{\mu:(\text{path2})}$) は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} A_{\mu:(\text{path1})} &= \left(\frac{1}{2}e^{i\theta/2}A_0, A_1, 0, 0\right) \\ A_{\mu:(\text{path2})} &= \left(\frac{1}{2}e^{-i\theta/2}A_0, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (29)$$

但し、 θ は経路分割により生じた光路長差に相当するスカラーポテンシャルの位相差である。ここで、前章での量子化に従い、4 元ベクトルポテンシャルの Fourier 係数を $\hat{A}_\mu \equiv \sum_{\lambda=0}^3 \hat{a}^{(\lambda)}(k) \epsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$ として演算子に置き換え、交換関係を設定するとこのポテンシャルを演算子として単一光子干渉が計算可能となる。

この量子化に従い、MZI 経路 1 と 2 を通過する光モードに相当する光子消滅演算子を $\hat{A}_{\mu:(\text{path1})}$ と $\hat{A}_{\mu:(\text{path2})}$ と定義する。この演算子の積にも不定計量による演算

$$\hat{A}^\dagger \hat{A} = -g_{\mu\nu} \hat{A}^{\mu\dagger} \hat{A}^\nu = -g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \quad (30)$$

が導入される。

MZI 出力の光子消滅演算子は $\hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}$ なので、MZI 出力の光子数演算子は

$$-g^{\mu\nu} \{\hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}\}^\dagger \{\hat{A}_{\nu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\nu:(\text{path2})}\} = -\frac{1}{2} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \frac{1}{2} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \cos \theta \quad (31)$$

で得られる。但し、以下の関係を用いた。

$$\begin{aligned} -g^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path1})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path1})} &= -\frac{1}{4} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \\ -g^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path1})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path2})} &= -\frac{1}{4} e^{-i\theta} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \\ -g^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path1})} &= -\frac{1}{4} e^{i\theta} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \\ -g^{\mu\nu} \hat{A}_{\mu:(\text{path2})}^\dagger \hat{A}_{\nu:(\text{path2})} &= -\frac{1}{4} \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 \end{aligned}$$

(31) を 1 光子数状態 $|1\rangle$ で挟んで計算すると、 $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \theta$ が得られる。位相差の基準点を適切に選ぶと、

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \quad (32)$$

が得られ、(23) 式が再現される。

ここで、スカラーポテンシャルと単一光子の挙動を客観的な物理的実在として明白にする為、この単一光子 MZ 干渉実験系を更に考察する。

電磁場は時間反転不変性を有するので、MZ 干渉計の入力部分と出力部分を区別する特別な理由はない。よって MZ 干渉計の入力部の合流点の光子消滅演算子は MZ 干渉計出力部分と同等に表現される。すなわち

$$\hat{A}_\mu = \hat{A}_{\mu:(\text{path1})} + \hat{A}_{\mu:(\text{path2})} = \left(\cos \frac{\theta}{2} \hat{A}_0, \hat{A}_1, 0, 0 \right) \quad (33)$$

である。MZ 干渉計の入力には明らかに単一光子が存在すると考えるのが物理的に妥当であるが、(28) を用いて MZ 干渉計の入力における単一光子状態の光子数を計算すると結果は $\langle 1 | (-\hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 + \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1) | 1 \rangle = 0$ となる。しかし、 $\hat{A}_0 = 0$ としてスカラーポテンシャルを消去すると干渉は得られない。

一方、(33) で $\theta = \pm N\pi$ (N : 偶数) としたときの光子数は 1 である。よって、MZ 干渉計の入力のスカラーポテンシャルはゼロではなく（空ではなく、すなわち $\hat{A}_0 \neq 0$ ）逆位相の波で打ち消し合っている、すなわち $\cos(\theta/2) = 0$ と認識すべきである。このことから、経路に分割があると、スカラーポテンシャルは $f(\theta) \cdot \hat{A}_0$ のような振動場を作り出すという描像が得られる。但し $f(\theta)$ は θ の振動関数である。この振動場の形成は次節以降で取り扱う EPR 相関に関連した”隠れた変数”と認識することが可能である。実在の光子はこの振動場の中を、この振動場と干渉しながら運動すると解釈することが可能となる。よって、任意の空間位置での場の強度の期待値は (33) を用いて $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$ と計算される。このことから、実在の光子がどんな空間経路を進んでも、その経路上で $\theta = \pm N\pi$ (N : 奇数) となる位置では光子は観測出来ない。

このように、共変形式から要請される不定計量を確率解釈にとらわれず受け入れると、MZI の両方の経路にスカラーポテンシャルが存在し、それが MZ 干渉計の経路の分割によって振動場を形成し、片側の経路から入射した単一光子がこの振動場と干渉しながら通過する、という明確な物理的実在の描像が得られる。なお、ここで考察した経路の分割による振動場の形成は、Aharonov-Bohm 効果における、空間の多重連結領域では電子波動関数のポテンシャルに依存した位相項を消去できないことに相当している。[32, 33]

上記の計算と描像をアナロジーとして電子回路に置き換えて考えると、スカラーポテン

シャルは電子回路におけるバイアス電流（電圧）であり、単一光子であるベクトルポテンシャルはバイアス電流（電圧）に加わる信号電流（電圧）と考えることも可能である。但し、この場合、バイアス電流（電圧）は直流（DC）バイアス電流（電圧）ではなく、信号電流（電圧）と干渉して出力揺らぎを引き起こす、交流（AC）バイアス電流（電圧）である。要約すると、揺らいだ基準の上に信号が加わり、基準の揺らぎを受けて信号も揺らいでいる描像である。

ホモダイン検波方式の無線通信や光通信のアナロジーを用いれば、スカラーポテンシャルは受信端に置かれた連続発振する局発振器、単一光子は信号であり、受信端で局発振器の連続発振波と信号の干渉により信号情報を取り出していることに相当し、時空間各点に局発振器が備わっているという描像となる。

上記の演算子 \hat{A}_1 を用い \hat{A}_0 の代わりとして、次のような演算子 \hat{A}'_0 を導入すると、単一光子干渉の計算に便利である。

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0 &= \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1 \\ \hat{A}'_0{}^\dagger &= \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger - \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger\end{aligned}\quad (34)$$

但し、 $\gamma^2 = -1$ (すなわち、 γ は Minkowski 計量テンソルの行列式の平方根に相当する。 $\sqrt{|g_{\mu\nu}|} \equiv \sqrt{g} \equiv \sqrt{-1} = \gamma$)

この演算子を用いると、場の強度の期待値 $\langle \hat{I} \rangle \propto \langle 1 | (\hat{A}'_0 + \hat{A}_1)^\dagger (\hat{A}'_0 + \hat{A}_1) | 1 \rangle$ は下記のように計算できる。

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0{}^\dagger \hat{A}'_0 &= -\frac{1}{4}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \frac{1}{4}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \frac{1}{4}e^{i\theta}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \frac{1}{4}e^{-i\theta}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \\ &= -\frac{1}{2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 + \frac{1}{2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \cos \theta \\ \hat{A}_1^\dagger \hat{A}'_0 &= \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 \\ \hat{A}'_0{}^\dagger \hat{A}_1 &= \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1\end{aligned}\quad (35)$$

最終的に次の結果が得られる。

$$\begin{aligned}\langle 1 | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 | 1 \rangle &= 1 \\ \langle 1 | \hat{A}'_0{}^\dagger \hat{A}'_0 | 1 \rangle &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \\ \langle 1 | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}'_0 | 1 \rangle &= \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} \\ \langle 1 | \hat{A}'_0{}^\dagger \hat{A}_1 | 1 \rangle &= \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2}\end{aligned}$$

$$\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle + \langle 1|\hat{A}'_0\hat{A}'_0|1\rangle + \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}'_0|1\rangle + \langle 1|\hat{A}'_0\hat{A}_1|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\theta \quad (36)$$

この形式は、(29)の代わりに、次のような4元ポテンシャルを用いたことに相当する。

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mu:(\text{path}1)} &\equiv (0, \hat{A}_1, 0, 0) \\ \hat{A}_{\mu:(\text{path}2)} &\equiv \left(\frac{1}{2}ie^{i\theta/2}\hat{A}_0 - \frac{1}{2}ie^{-i\theta/2}\hat{A}_0, 0, 0, 0\right) \end{aligned} \quad (37)$$

この計算方法を本論文では簡易計算法と呼ぶこととする。この簡易計算法を物理的実在に照らし合わせて解釈すると、経路1は単一光子のみが通過し、経路2のみにスカラーポテンシャルの振動場が存在する、という描像になり、スカラーポテンシャルの振動場形成の描像は残るものの、スカラーポテンシャルが全空間に存在するという、ガウシアン光ビームを基に議論した自然な描像が失われる結果となる。更に、以降で述べるように、経路分割による振動場形成の一般化の描像を不明確にする。よって、この簡易計算法は計算結果を再現するという意味で便利な形式ではあるが、客観的な物理的実在を忠実に描写するものではないと捉えるべきである。

ここまでの計算は不定計量の計算を要求するスカラーポテンシャルを物理的実在であるとして演算子として取り扱ったが、従来の量子論の Heisenberg 描像および Schrödinger 描像に準え、演算子にスカラーポテンシャルの不定計量を押し付けた形式を、Heisenberg 描像と呼ぶことにする。そうすると、状態ベクトルにスカラーポテンシャルの不定計量を押し付けた形式として Schrödinger 描像を考えることが可能となる。

Schrödinger 描像では場の強度の期待値は出力1（または2: $\frac{\pi}{2}$ 位相が異なる）での状態 $|1\rangle_S + |\zeta\rangle$ と出力1（または2）での電場演算子 $\hat{E} \propto \hat{A}_S$ (添え字の S は Schrödinger の頭文字) に比例する Schrödinger 描像での光子消滅演算子 \hat{A}_S を用いて計算できる。但し、 $|1\rangle_S$ と $|\zeta\rangle$ は簡易計算法の解釈による、光子のみが経路1を通過する状態と、スカラーポテンシャルのみが経路2を通過する（存在する）状態を表す。経路2では何も観測されないので、 $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ が導かれる必要がある。より詳細な定義は、Hamiltonian \hat{H} を用いて、演算子 \hat{A}_1, \hat{A}_S および状態 $|1\rangle, |1\rangle_S$ を $\hat{A}_1 = e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}_S e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ と $|1\rangle_S = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|1\rangle$ に変換することで与えられる。簡易計算法の形式(34)を用いて $\hat{A}'_0|1\rangle$ を

$$\begin{aligned} \hat{A}'_0|1\rangle &= e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}_S \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} e^{-i\hat{H}t/\hbar} \right) |1\rangle \\ &= e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{A}_S \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} \right) |1\rangle_S \end{aligned} \quad (38)$$

ここで

$$|\zeta\rangle \equiv \left(\frac{1}{2}\gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\theta/2} \right) |1\rangle_S \quad (39)$$

と定義すると、 $\langle 1|\hat{A}'_0^\dagger \hat{A}'_0|1\rangle = \langle \zeta|\hat{A}_S^\dagger \hat{A}_S|\zeta\rangle$ となる。 $\theta = 0$ の時 $|\zeta\rangle = 0$ 、すなわち $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ となり、この位相で何も観察されない。この簡易計算法の形式を用いた Schrödinger 描像を用いても、確率解釈を用いた場の強度の期待値が再現される。

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto (\langle 1|_S + \langle \zeta|) \hat{A}_S^\dagger \hat{A}_S (|1\rangle_S + |\zeta\rangle) \\ &= 1 + \langle \zeta|\hat{A}_S^\dagger \hat{A}_S|\zeta\rangle + \langle 1|\zeta\rangle_S + \langle \zeta|1\rangle_S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \end{aligned} \quad (40)$$

なお、 $\langle \zeta|\zeta\rangle = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$ であり、 $\theta \neq \pm N\pi (N: \text{偶数})$ では $\langle \zeta|\zeta\rangle \leq 0$ となり、 $|\zeta\rangle$ は不定計量ベクトルであることが分かり、状態ベクトルに不定計量を押し付けた Schrödinger 描像であることが理解できる。

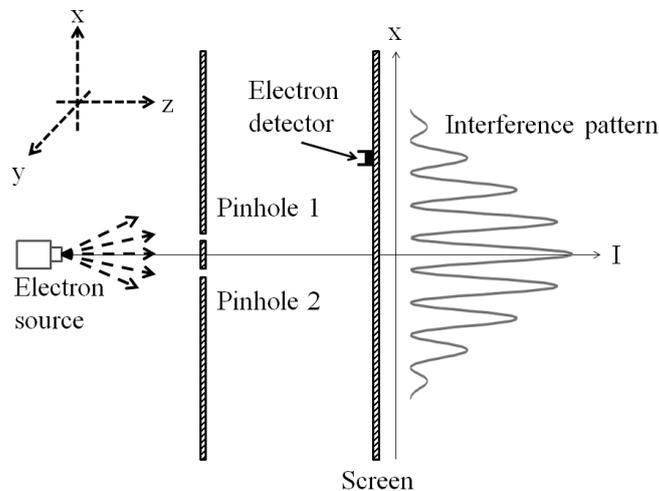


図2 代表的な単一電子干渉実験系の概略図。電子源から放出された電子が2つのピンホールを通過し、スクリーン上の電子受信機で受信され、その受信強度がスクリーン上の干渉パターンとして記録される。

3.2 単一電子干渉の計算

3.2.1 確率解釈を用いた単一電子干渉の計算

図2は単一電子干渉実験の代表的測定系の概略である。[29, 34] この測定系も空間に分割があるという単一光子干渉と同等の系になっている。

確率解釈を用いた量子力学的記述では、図2の単一電子干渉は次の確率振幅

$$\phi_1 = \langle x|1\rangle\langle 1|s\rangle, \phi_2 = \langle x|2\rangle\langle 2|s\rangle \quad (41)$$

を用いて電子をスクリーンに見出す確率（密度）

$$P_{12} = |\phi_1 + \phi_2|^2 \quad (42)$$

によって計算される。[34] ここで、

$\langle 1_{\text{or}}2|s\rangle \equiv \langle \text{電子がピンホール1又は2に到達する} | \text{電子が} s \text{(電子源)から出る} \rangle$

$\langle x|1_{\text{or}}2\rangle \equiv \langle \text{電子がスクリーン} x \text{に到達する} | \text{電子がピンホール1または2を出す} \rangle$

という確率振幅である。

ピンホール1又は2のどちらかが閉じられているとき、電子をスクリーンに見出す確率（密度）は夫々 $P_1 = |\phi_1|^2$ 、 $P_2 = |\phi_2|^2$ である。これらを足しわけても $P = P_1 + P_2 \neq P_{12}$ と計算され、両方のピンホールを同時に開けたときの干渉を再現しない。よって、単一電子

はそれ以上分割できないにも拘らず両方のピンホールを同時に通ったと認めざるを得なくなり、確率解釈の導入を余儀なくされる。

この単一電子干渉も、単一光子干渉と同じ干渉結果を与える。確率解釈では、単一光子干渉計算で定義された光子数演算子の代わりに電荷演算子を定義し、経路 1 を単一電子が通過する状態及び経路 2 を単一電子が通過する状態を考え、この状態で電荷演算子を挟むことで単一電子干渉が計算される。

具体的には、 n 光子数状態を n 個の電子が存在するという電子数状態 $|n\rangle$ に置き換え、(21) 式の演算子 \hat{a} から構成される光子数演算子 $\mathbf{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ を、電荷演算子 $\mathbf{Q} \equiv \int d^3x j_0(x)$ を定義して置き換える。ここで、 $j_0(x)$ は 4 元電流 $j_\mu = (q, \mathbf{i})$ 、 $\partial^\mu j_\mu = \frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{i} = 0$ の第 0 成分である。この電荷演算子は $\mathbf{Q}|n\rangle = nq|n\rangle$ を満足する。すなわち、 n 電子状態は \mathbf{Q} の固有状態である。[35, 30]

単一電子が経路 1 と経路 2 の両方を確率 1/2 で同時に通過する、という状態 $|1\rangle_{1\&2}$ を考えると、これは

$$|1\rangle_{1\&2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \exp i\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \quad (43)$$

で記述できる。但し、 θ は経路長に相当する位相差である。この状態で電荷演算子 \mathbf{Q} を挟むと、電荷の強度期待値 $\langle \hat{I} \rangle$ は、

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle 1|_{1\&2} \mathbf{Q} |1\rangle_{1\&2} = q(1 + \cos \theta) \propto q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \quad (44)$$

これは、前節の単一光子干渉と同じ形である。

3.2.2 再構成を用いた単一電子干渉の計算

この確率解釈から客観的な物理的実在を伴った描像に再構成する為、図 2 の実験状況を古典電磁気学で再考察することから始める。図 2 において、伝搬する電子は古典電磁気学的には空間電流密度が $j = Nqv$ の電子ビームと同一視できる。ここで N は単位体積当たりの電子数、 q は電荷、 v は電子速度である。電子ビームの半径が w_0 のとき、電流 I は $I = \pi w_0^2 j$ で与えられる。ビオサバール (Biot-Savart) の法則によると、そのような電子の運動はその経路の周りに磁場とポテンシャルを生じる。

電子の運動は一定速度で z -軸に平行と仮定すると、運動経路の周りのベクトルポテンシャルは次のように表現される。[36]

$$\begin{aligned} A_x &= A_y = 0 \\ A_z &= \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (45)$$

但し $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、 ε_0 は誘電率、 c は光速である。

よって、このベクトルポテンシャルは明らかに電子が通ったピンホールだけでなく、逆側のピンホールも通ることになる。

これを、前節の単一光子干渉と同様に、片側のピンホールを客観的な物理的実在である電子が伝搬し、両側のピンホールを全空間に存在するポテンシャル及び電子の運動によって生じたポテンシャルが存在するという状況を考えることが可能となる。

このような場合、電子波動関数は次のように表されるべきである。

$$\begin{aligned}\psi'_1 &= \psi_1 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole1} \rightarrow \text{screen}} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right] \\ \psi'_2 &= \psi_2 \cdot \exp \left[i \frac{q}{\hbar} \int_{s \rightarrow \text{Pinhole2} \rightarrow \text{screen}} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right]\end{aligned}\quad (46)$$

ただし ψ'_1 と ψ'_2 はポテンシャルと共にピンホール 1 と 2 を通ったスクリーン上の電子の波動関数であり、 ψ_1 と ψ_2 はポテンシャルの影響を受けていない、ピンホール 1 と 2 に向かう電子源の電子波動関数である。

確率解釈では、

$$P_{12} \propto |\psi'|^2 = |\psi'_1 + \psi'_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - 2\text{Re} \left(\exp \left[i \frac{q}{\hbar} \oint_{s \rightarrow 1 \rightarrow \text{screen} \rightarrow 2 \rightarrow s} (\phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \right] \psi_1^* \psi_2 \right) \quad (47)$$

をスクリーン上に電子を見出す確率と解釈している。但し、積分路の 1 と 2 はピンホール 1 と 2 を示す。確率解釈ではピンホール 1 及び 2 を単一電子が同時に通過すると考えているが、上記したように、片側のピンホールを単一電子が通過、両方にポテンシャルが存在するとして (47) を導いたので、これはスクリーン上で観察される電荷強度の期待値と考えるのが妥当である。但し、(47) では波動関数を用いているので、この描像をより明確にするには波動関数から状態ベクトルに移行する必要がある。なお、(47) は Aharonov-Bohm 効果と同等の表式である。[32] この位相項は空間領域が 1 点に収縮可能な単連結領域では消去できるが、1 点に収縮出来ない多重連結領域では消去することが出来ない。第 4 章で一般化して考察するように、この多重連結領域という空間構造が、前節の 2 つのスリットのある単一光子干渉や、この 2 つのピンホールが存在する場合の単一電子干渉の原因である。

この表式で、電子波動関数を状態ベクトルに拡張し、簡易計算法によってピンホール 1 を単一電子が通過する状態 $|\psi_1\rangle$ とポテンシャルがピンホール 2 を通過する（存在する）という状態 $|\psi_2\rangle$ を考える。

量子力学の Schrödinger 描像では、電磁場のない空間に電子が存在する状態は、電子の

状態 $|\psi\rangle$ と真空状態を 0 光子数状態と考え $|0\rangle$ の直積として $|\psi\rangle|0\rangle \equiv |\psi, 0\rangle$ と表記されるが、これはピンホール 1 を単一電子が通過する状態 $|\psi_1\rangle$ と考えることが出来る。

また、客観的な物理的実在としての単一光子が存在せず、スカラーポテンシャルだけが存在する状態は、前節の単一光子干渉の計算に用いた簡易計算法の Schrödinger 描像を使って、0 光子数状態 $|0\rangle$ と $|\zeta\rangle$ の重ね合わせである $|0\rangle + |\zeta\rangle$ と考えることが出来る。この状態と電子状態の直積を取ると、 $|\psi\rangle(|0\rangle + |\zeta\rangle) = |\psi\rangle|0\rangle + |\psi\rangle|\zeta\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi\rangle|\zeta\rangle$ となり、 $|\psi\rangle|\zeta\rangle$ は電子が存在せずスカラーポテンシャルのみが存在するピンホール 2 と同じ状態と考えることが出来るので $|\psi\rangle|\zeta\rangle = |\psi_2\rangle$ と置くことが出来る。。

よって、2 ピンホール単一電子干渉におけるスクリーン上での電荷強度は、電荷演算子をこのスクリーン上での電子状態 $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$ で挟むことで計算される。(39) 式を援用すると

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto (\langle \psi_1 | + \langle \psi_2 |) \mathbf{Q} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \\ &= \langle \psi_1 | \left(1 + \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} \right) \mathbf{Q} \left(1 + \frac{1}{2} \gamma e^{i\theta/2} - \frac{1}{2} \gamma e^{-i\theta/2} \right) |\psi_1\rangle \\ &= q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (48)$$

簡易計算法の解釈では片側のピンホールには、単一電子またはスカラーポテンシャルしか存在しないという描像になるが、簡易計算法の項で説明したように、元々、両側ピンホールに存在するスカラーポテンシャルの振動場を片側のピンホールに代表させた取り扱いとなっているので、この単一電子干渉も両側ピンホールに存在するスカラーポテンシャルが 2 つのピンホールで分割され振動場を形成し、この振動場の中を片側のピンホールから入射した単一電子が振動場と干渉しながら通過してスクリーンに到達する、という描像が得られる。

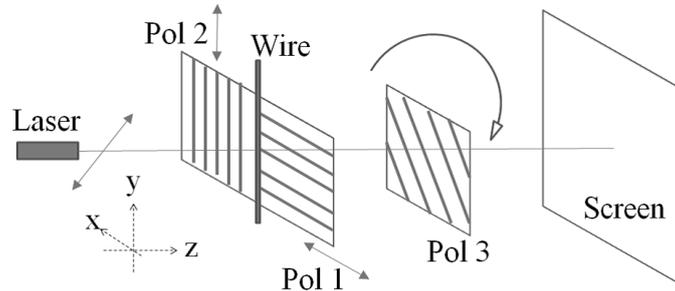


図3 Quantum Eraser の代表的実験配置. Pol1 と Pol2 は偏光軸が (x と y) に直交して固定された偏光板. Pol3 は回転する偏光板.

3.3 EPR 関連の計算

3.3.1 確率解釈を用いた EPR 関連の計算

確率解釈による光子の偏光を用いた EPR 関連の計算には、まず、図3に示す Quantum Eraser (量子消しゴム) と呼ばれる偏光板を用いた実験系を考察することが理解に役立つ。

この Quantum Eraser の現象について以下に概観する。

図3の系で全ての偏光板が無い場合、スクリーン上には明暗の縞模様で構成される干渉縞が観測される。これは、ワイヤーの左側を通るレーザー光が、ワイヤーの右側を通るレーザー光と合成又は干渉するからであるが、これを、レーザーから出射されたレーザー光を構成する各光子がワイヤーのどちら側を通ったかの情報がない、と言い換える。

次に、which-path markers と呼ばれる偏光板1と2が図3の様にワイヤーのすぐ後ろに設置されると、 45° の偏光角度でレーザーから出射されたレーザー光は、これらの偏光板によって、垂直方向 (x 偏光と y 偏光) に偏光される。この時、スクリーン上の干渉縞は消去される。これを、レーザー光を構成する各光子が、ワイヤーのどちら側を通ったかという情報を which-path makers が有効にした、と言い換える。

更に which-path makers に加えて、偏光板3が偏光角度 $+45^\circ$ 又は -45° でスクリーンの直前に設置されると、干渉縞が再度現れる。これを、偏光板3が which-path makers の持っていた情報を無効にした、と言い換える。

これらの言い換えから分かる様に、偏光板の配置により、レーザー光を構成する各光子が、ワイヤーのどちら側を通ったかという情報を有効にしたり、無効にしたりすることから、Quantum Eraser (量子消しゴム) と呼ばれている。

確率解釈による、この干渉縞の消去と再現の数学的表現は、偏光板1を通った x 偏光状

態 $|x\rangle$ と偏光板 2 を通った y 偏光状態 $|y\rangle$ を使って説明される。

偏光板 1 を通った x 偏光状態 $|x\rangle$ は

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (49)$$

偏光板 2 を通った y 偏光状態 $|y\rangle$ は

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle \quad (50)$$

と記述される。但し、 $|+\rangle$ と $|-\rangle$ は x 軸に対して偏光角度 $+45^\circ$ と -45° の状態である。

(49) と (50) の左辺だけ見ると、x 偏光と y 偏光は直交しているので干渉縞は現れないことは自明であるが、(49) と (50) の右辺には同一偏光状態が含まれている。しかし、偏光角度 $+45^\circ$ の光が作る干渉縞と偏光角度 -45° の光が作る干渉縞は、その明暗が逆であり打ち消し合うので、結局干渉縞は現れず、which-path makers は、レーザー光を構成する各光子が、ワイヤーのどちら側を通ったかという情報を有効にしたことになる。

ここで、偏光板 3 が偏光角度 $+45^\circ$ 又は -45° で設置されると、 $|+\rangle$ の状態、又は $|-\rangle$ の状態のレーザー光だけが偏光板 3 を通ることが可能となる。よって、(49) と (50) の両方の右辺にある $|+\rangle$ 又は $|-\rangle$ のどちらかの状態にあるレーザー光による干渉が再度現れることになる。これは、レーザー光を構成する各光子が、ワイヤーのどちら側を通ったかという情報が偏光板 3 によって無効にされたことになる。

このレーザー光を構成する各光子が、ワイヤーのどちら側を通ったかという情報の有効化、無効化は、レーザー光の強度が極度に小さくなり、単一光子となった場合にも、(49) と (50) から明らかなように、x 偏光または y 偏光の単一光子は、それ以上分割出来ない単一光子であるにもかかわらず、偏光角度 $+45^\circ$ と -45° の偏光を持った単一光子を $1/2$ の確率で含んだ状態と解釈される。

この干渉強度の計算を確率解釈で行うには、前節の単一光子干渉の計算において定義された電場演算子において、偏光板 1 の側を MZ 干渉計の経路 1 に置き換え、偏光板 2 の側を経路 2 に置き換えることに加え、偏光板 1、2、3 による光子通過の割合をその回転角度に置き換えることで同様に計算される。計算において、レーザーから出射される光ビームが x 偏光である場合と y 偏光である場合の両方を考える。これにより、後述の EPR 関連の計算と同一の結果が得られる。

まず計算では、偏光板の角度は全て x 軸を基準に取る。レーザーから出射される光ビームが x 偏光の光子である場合、y 偏光のみ通過させる偏光板 2 を通過することは出来ないはずであるが、x 偏光は (49) の様に、x 偏光とは異なる偏光状態の確率的重ね合わせである

と考え、光子が通過できる確率を光子の偏光角度と偏光板の角度の差に比例した位相と置き換えることで計算が可能となる。x 偏光の光子が偏光板 1 の側を通過できる確率は、偏光板 1 の角度として記述される。この場合は元々 x 軸に偏光しているので位相は 0 と選べる。この偏光板 1 を通った x 軸方向に偏光した光子は更に偏光板 3 により光子が通過できる確率に相当する偏光板 3 の回転角度 $|\phi|$ を位相に導入して記述される。

一方、偏光板 2 の側を通過する x 偏光の光子は偏光板 2 によって光子が通過できる確率に相当する回転角 $\pi/2$ として記述する。

この偏光板 2 を通った光子には更に偏光板 3 による回転角 $\frac{\pi}{2} - |\phi|$ が導入される。また、偏光板 1 と 2 の側の位相差 θ を x 偏光側に導入する。これにより、以下の電場演算子を定義することが出来る。

$$\begin{aligned}\hat{E} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i|\phi| + \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - |\phi|\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp(i|\phi| + \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\{i(\pi - |\phi|)\}\end{aligned}\quad (51)$$

この電場演算子の自乗 $\hat{E}^\dagger \hat{E}$ を光子数演算子として、これを数状態で挟むことで前節と同様にスクリーン上の干渉出力の光子数が計算される。

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \langle n | \hat{E}^\dagger \hat{E} | n \rangle = \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 | n \rangle + \frac{1}{2} \langle n | \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle - \cos(\theta + 2|\phi|) \langle n | \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 | n \rangle \quad (52)$$

$\langle \hat{I} \rangle$ は前節同様に光子数に比例する場の強度の期待値である。

確率解釈では光子数が 1 ($n = 1$) である単一光子である場合も含め、上記の期待値は

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (53)$$

と計算される。

次に、レーザから出射される光ビームが y 偏光の光子である場合、y 偏光側に位相 θ を移動し、x 偏光の場合と同様に考えると電場演算子は、

$$\hat{E} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_1 \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} + |\phi|\right)\right\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{a}_2 \exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - |\phi| + \theta\right)\right\} \quad (54)$$

であり、下記が得られる。

$$\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (55)$$

よって、レーザビームが x 偏光と y 偏光の光子を 1/2 の確率で各々 1 個以上含んでいる場合は、この干渉強度は (53) と (55) の和で与えられることになる。結局、

$$\langle \hat{I} \rangle \propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (56)$$

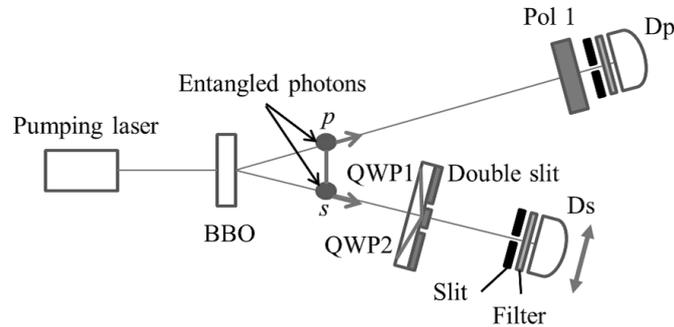


図4 遅延選択 Quantum Eraser の代表的実験系. QWP1 と QWP2 はダブルスリットの前に速軸を直交させて配置した 1/4 波長板. Pol1 は偏光板. BBO ($\beta\text{-BaB}_2\text{O}_4$) 結晶はパラメトリック下方変換により相関光子対を発生する.[24].

これで、 $\phi = \pm\pi, \pm\frac{1}{2}\pi$ の時、 $\langle I \rangle \propto 1$ となり干渉縞が消去され、 $\phi = \pm\frac{1}{4}\pi$ で $\langle I \rangle \propto 1 \pm \sin\theta$ となり、干渉縞が再生される。

レーザ強度が非常に弱く、x 偏光の単一光子と y 偏光の単一光子で構成される場合も、この (56) が成立する。以下の EPR 相関を検討するための遅延選択 Quantum Eraser は、この Quantum Eraser の考察に於いて、レーザから出射される光子が x 偏光の単一光子の場合と y 偏光の単一光子である場合に相当しており、実験で得られる光子干渉強度は (53) 及び (55) と同一となる。

図4に EPR 相関を検討するための遅延選択 Quantum Eraser の実験系の概略図を示す。この実験系は、前述の Quantum Eraser の図3の偏光板3の役割を偏光板1が担っているのと同じ状況となっている。この系で BBO がレーザから出射された光で励起され、偏光方向が直交した p と s の光を発生する。これらの光子は夫々別の経路に進行し p は偏光板1で偏光方向を走査して受信機 Dp で測定される。s は速軸を直交させた 1/4 波長板1と2およびその背面のダブルスリットを通り、更にスリットとフィルタを通して Ds で測定される。

この実験では以下の順序に沿って実験系が配置され、各配置での結果が得られる。

1. 偏光板1、QWP1 及び QWP2 を取り去った場合、Ds と Dp の同時計数は、二重スリットによる干渉を示す光子強度の変動が観測される。
2. QWP1 及び QWP2 を設置すると、同時計数の強度変動は消去される。
3. 偏光板1を QWP1 の速軸に一致する方向に追加設置する。すると、同時計数の強度変動は再度干渉を示す。..
4. 引き続いて偏光板1の角度を90度回転する。すると、同時計数の強度変動は3.と

強弱が反転した干渉を示す。

この手順から、偏光板 1 は前述の Quantum Eraser の偏光板 3 に相当して、QWP1 または QWP2 のどちらを通過するかという経路情報を消去したり再生したりしているように見え、前述の Quantum Eraser と類似の現象である。また、光子 p の偏光方向設定と s の干渉観測は空間的に離れた位置で行われているにも関わらず、それら光子の偏光は片側が x 偏光であれば反対側は y 偏光であると完全な相関を保っている。なお、この 3、4. で得られる逆位相での干渉が上述の Quantum Eraser で計算した、(53) と (55) で与えられる。

BBO から Dp までの距離を BBO からダブルスリットまでの距離より遠くした場合、光子 s の干渉観測の後に、光子 p の偏光板 1 による偏光方向の選択を行う遅延選択となる。この場合にも、上記同等の手順で同一の干渉効果の有無が得られる。このことは、偏光板 1 による経路情報消去再生が、その観測よりも後で決定されたように見える。但し、文献 [24] でも述べられているように、偏光板 1 の方向選択は、光子 s の干渉が観測された後から、光子 p が観測される前までの時間内に選択することは禁じられる。

確率解釈では、この現象を s も p も単一光子である場合に、光子 s は始めから確定した x 偏光（又は y 偏光）を持つ状態 $|x\rangle_s$ 又は $|y\rangle_s$ ではなく、光子 p も同様に $|x\rangle_p$ 又は $|y\rangle_p$ ではなく、それらの重ね合わせである

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x\rangle_s |y\rangle_p + |y\rangle_s |x\rangle_p) \quad (57)$$

が両方の経路での光子の状態であるとして取り扱う。このような、完全な相関を持つ状態が空間的に離れた領域に存在するような状態は相関光子対状態（Entanglement）と呼ばれる。このような状態を観察結果に照らし合わせて解釈すると、光子 s 及び p は x 偏光と y 偏光の重ね合わせの状態 (57) として何方の経路にも進み、片側の経路で光子 s（または p）の偏光方向を測定しそれが x 偏光の状態 $|x\rangle$ と決定されると、もう一方の経路の光子 p（または s）は光子 s と p がどんなに離れていようとも、(57) の重ね合わせ状態である相関光子対状態から、突然 y 偏光状態 $|y\rangle$ に収縮する。これは物理法則の局所性と矛盾する長距離相関の存在を要求する解釈であり、相対性理論に反する。歴史的には、このような非局所的な相関状態を取り上げて、現在の標準となった量子論の不完全性を最初に指摘したのが“Einstein, Podolsky and Rosen (EPR)” [5] による EPR 論文であり、現在では相関光子対状態（Entanglement）は EPR 状態とも呼ばれるようになっている。

3.3.2 再構成を用いた EPR 相関の干渉計算

この相関光子対状態のような常識的には不可解な確率解釈を、客観的な物理的実在を伴った描像に再構成する。上述したように図 3 でも図 4 の系でも、干渉結果は (53) と (55) である。この結果は単一光子が確定した偏光を持っているとして古典的に計算すると得られない、量子論特有の結果と考えられてきた。その量子論の計算結果を支持したのが Bell の不等式の破れである。[8, 9]

しかし、確率解釈と同一の計算結果が、局所的な物理現象と客観的な物理的実在を伴った描像でも得られることは、どちらでも Bell の不等式が破れることを意味する。

以下で客観的な物理的実在を伴った描像により干渉結果を再現するが、この計算では図 3 の系において、偏光板 1 の側を図 4 の系における光子 s の経路、偏光板 2 の側を光子 p の経路と見做して (53) と (55) の干渉を導出する。

客観的な物理的実在を伴った描像として、レーザから出射される光子は x 偏光の単一光子か y 偏光の単一光子の何れか、または各 1 光子の計 2 光子で、予め決定しているとする。また、空間には単一光子干渉の計算と同様にスカラーポテンシャルが存在するので、レーザ出力から偏光板 1 と 2 を通過する直前の空間での 4 元ポテンシャルは

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, 0) \quad (58)$$

と表現するのが妥当である。但し、計算の簡略の為、非物理的と考えられる縦波光子を $A_3 = 0$ として無視した。

まず、x 偏光の単一光子とスカラーポテンシャルが存在する場合を計算する。これは確率解釈では (53) の計算の状況に相当する。x 偏光の単一光子とスカラーポテンシャルが両方の偏光板を通過する時、x 偏光の光子は偏光板 1 のみを通り、偏光板 2 を通れない。また、スカラーポテンシャルは各側に分離されるとそれに相当する位相差が発生するので、この描像をありのままに記述すると、夫々の偏光板を通過した後の 4 元ポテンシャルは以下の形が妥当である。

$$A_{(x \text{ pol } 1) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{i\theta_x/2} A_{(x)0}, A_{(x)1}, 0, 0 \right), \quad A_{(x \text{ pol } 2) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{-i(\theta_x/2+\pi/2)} A_{(x)0}, 0, 0, 0 \right) \quad (59)$$

ここで、偏光板 2 を通過したスカラーポテンシャルには x 偏光の光子を基準にした位相シフト $\pi/2$ を導入している。なお、スカラーポテンシャルが分割されたことによる位相差を θ_x として記述の対称性の為に両側に分けた。

この 4 元ポテンシャルが更に偏光板 3 を通過する時、偏光板 1 を通過した 4 元ポテンシャルの要素の内、x 偏光の実在の光子を表す x 軸成分のベクトルポテンシャルは偏光

板 3 の回転角度が x 軸方向に一致しない場合は通過できない。しかし、スカラーポテンシャルは偏光板 3 の回転角に相当する $|\phi|$ の位相シフトを受けて通過するので、位相項は $i(|\phi| + \theta_x/2)$ となる。一方、偏光板 2 を通過したスカラーポテンシャルは y 方向に偏光されているので、偏光板 3 の回転角度を x 軸を 0 として基準に取った場合は、偏光板 3 の回転角度に $\pi/2$ が追加され、 $-i(|\phi| + \theta_x/2 + \pi)$ となる。よって、この偏光板 3 での 4 元ポテンシャルは

$$\begin{aligned} A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3) \mu} &\equiv A_{(x \text{ pol } 1 \rightarrow 3) \mu} + A_{(x \text{ pol } 2 \rightarrow 3) \mu} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i(|\phi| + \theta_x/2)} A_{(x)0} + \frac{1}{2} e^{-i(|\phi| + \theta_x/2 + \pi)} A_{(x)0}, A_{(x)1}, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (60)$$

となる。ここで、単一光子干渉の時と同様に、Lorentz 不変性から $\langle 1|A_0^\dagger A_0|1\rangle = \langle 1|A_1^\dagger A_1|1\rangle = \langle 1|A_2^\dagger A_2|1\rangle = 1$ を要求すると

$$\langle I_s \rangle \propto \langle 1|A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(x \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta_x) \quad (61)$$

が計算される。なお不定計量 $A^\dagger A \equiv -g_{\mu\nu} A^{\mu\dagger} A^\nu = -A_0^\dagger A_0 + A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 + A_3^\dagger A_3$ に注意する。これは偏光板 3 でのスカラーポテンシャルの振動場と x 偏光の光子が干渉することによって偏光板 3 を通過できる光子強度を決めていると解釈できる。

同様にして、y 偏光の単一光子とスカラーポテンシャルが存在する場合にも、スカラーポテンシャルが分割された位相差を θ_y として、

$$A_{(y \text{ pol } 1) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{i(\theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0}, 0, 0, 0 \right), \quad A_{(y \text{ pol } 2) \mu} = \left(\frac{1}{2} e^{-i\theta_y/2} A_{(y)0}, 0, A_{(y)2}, 0 \right) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3) \mu} &\equiv A_{(y \text{ pol } 1 \rightarrow 3) \mu} + A_{(y \text{ pol } 2 \rightarrow 3) \mu} \\ &= \left(\frac{1}{2} e^{i(|\phi| + \theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0} + \frac{1}{2} e^{-i(|\phi| + \theta_y/2 + \pi/2)} A_{(y)0}, 0, A_{(y)2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (63)$$

よって

$$\langle I_p \rangle \propto \langle 1|A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta_y) \quad (64)$$

が得られる。スカラーポテンシャルの分割による位相差を $\theta \equiv \theta_x - \pi = -\theta_y$ と選ぶと、以下のように (53) と、(55) と全く同じ干渉が計算される。

$$\langle I_s \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta), \quad \langle I_p \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (65)$$

更に、x 偏光の単一光子、y 偏光の単一光子及びスカラーポテンシャルが存在する場合には偏光板 3 での 4 元ポテンシャルは (60) と (63) の和であるので、淡々と計算すると、

$$\langle 1|A_{(x, y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}^\dagger A_{(x, y \text{ pol } 1, 2 \rightarrow 3)}|1\rangle = 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (66)$$

結局、(56) が再現される。

これで、共変形式の量子化による不定計量をありのままに使うことで、客観的な物理的実在の描像を与えながら、確率解釈と全く同じ結果 (53)、(55) 及び (56) が得られることを示した。更に、簡易計算法でも同一の結果が得られることを示す。

簡易計算法では、実在の光子が存在しないスカラーポテンシャルだけが存在して、振動場を形成している状態を考えることになるが、これは単一光子計算でも示した $|\zeta\rangle$ で表現される。よって、この実験系において x 偏光の単一光子が空間に存在する状態は、 $|x\rangle$ ではなく、 $|x\rangle + |\zeta\rangle$ と置き換えるべきである。但し、スカラーポテンシャルが分割経路のない空間に存在する場合、経路の違いによる位相差は $\theta = 0$ となり、干渉による振動場は形成されないため、 $\langle \zeta|\zeta\rangle = 0$ である。

これに注意して、x 偏光の単一光子、y 偏光の単一光子の状態を次のように選ぶ。

$$\begin{aligned} |x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle &= |x\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i\phi} e^{-i\theta/2}|x\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\phi} e^{i\theta/2}|x\rangle \\ |y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle &= |y\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|+\frac{1}{2}\pi)} e^{i\theta/2}|y\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|+\frac{1}{2}\pi)} e^{-i\theta/2}|y\rangle \end{aligned} \quad (67)$$

ここで x 偏光の単一光子が存在する場合の干渉を計算すると

$$\langle I \rangle \propto (\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}|) (|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle) = \langle x|x\rangle - \frac{1}{2}\langle x|x\rangle - \frac{1}{2}\langle x|x\rangle \cos(2|\phi| + \theta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (68)$$

これは (53) である。同様に y 偏光の単一光子が存在する場合の干渉を計算すると (55) と同一の結果となる。

最後に x 偏光と y 偏光が存在する場合を計算すると

$$\langle I \rangle \propto (\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}| + \langle y| + \langle \zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}|) (|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle + |y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle) \quad (69)$$

であり、 $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$ であるから、

$$\langle I \rangle \propto (\langle x| + \langle \zeta_{\phi,x}|) (|x\rangle + |\zeta_{\phi,x}\rangle) + (\langle y| + \langle \zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}|) (|y\rangle + |\zeta_{\phi+\frac{1}{2}\pi,y}\rangle) \quad (70)$$

これは、x 偏光のみ存在する場合の結果 (53) と、y 偏光のみ存在する場合の結果 (55) の和であり、

$$\langle I \rangle \propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \quad (71)$$

となって (56) が再現される。

この簡易計算法は状態ベクトルに不定計量の計算を押し付けた、Schrödinger 描像である。単一光子干渉の場合と同様に、演算子に不定計量の計算を押し付けた Heisenberg 描像でも計算が可能である。Heisenberg 描像では光子数演算子は $\mathbf{n} = (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_p^\dagger)(\hat{A}_1 + \hat{A}_p)$ と置き換える。但し、 \hat{A}_1 と \hat{A}_p (p : polarization = $x, y, \dots, etc.$) は実在の光子を表す光子消滅演算子と p 方向に変更されたスカラーポテンシャルを表す光子消滅演算子であり、次のように定義できる。

$$\hat{A}_x = \frac{1}{2}\gamma e^{i\phi} e^{-i\theta/2} \hat{A}_1 - \frac{1}{2}\gamma e^{-i\phi} e^{i\theta/2} \hat{A}_1, \quad \hat{A}_x^\dagger = \frac{1}{2}\gamma e^{-i\phi} e^{i\theta/2} \hat{A}_1^\dagger - \frac{1}{2}\gamma e^{i\phi} e^{-i\theta/2} \hat{A}_1^\dagger \quad (72)$$

この演算子を用いて Heisenberg 描像での計算を行うと (68) が再現される。

$$\langle I \rangle = \langle n | (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_x^\dagger) (\hat{A}_1 + \hat{A}_x) | n \rangle = \langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x | n \rangle \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) \quad (73)$$

なお、Heisenberg 描像では演算子に不定計量の計算を押し付けるので、 x 偏光の光子消滅演算子は通常の x 偏光の光子消滅演算子 \hat{A}_1 にスカラーポテンシャルから生じる光子消滅演算子 \hat{A}_x を加えた、 $\hat{A}_1 + \hat{A}_x$ に置き換える必要があることに注意する。よって、 x 偏光と y 偏光が存在する場合の光子数演算子は $(\hat{A}_1 + \hat{A}_x) + (\hat{A}_2 + \hat{A}_y)$ となる。この置き換えによる位相を適切に選ぶと、

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle n | (\hat{A}_1^\dagger + \hat{A}_x^\dagger + \hat{A}_2^\dagger + \hat{A}_y^\dagger) (\hat{A}_1 + \hat{A}_x + \hat{A}_2 + \hat{A}_y) | n \rangle \\ &= \langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_x^\dagger \hat{A}_x | n \rangle + \langle n | \mathbf{n}_2 | n \rangle + \langle n | \hat{A}_y^\dagger \hat{A}_y | n \rangle \\ &\propto 1 - \frac{1}{2} \cos(2|\phi| + \theta) + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - \theta) \end{aligned} \quad (74)$$

が得られ、(71) が再現される。但し、 x 偏光の光子と y 偏光の光子は同数存在するとした。 $\langle n | \mathbf{n}_1 | n \rangle \equiv \langle n | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 | n \rangle = \langle n | \mathbf{n}_2 | n \rangle \equiv \langle n | \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_2 | n \rangle = n$

この条件 $|n\rangle \equiv |n\rangle_x + |n\rangle_y$ の下では、 $\hat{A}_1 |n\rangle = \hat{A}_1 |n\rangle_x + \hat{A}_1 |n\rangle_y = \sqrt{n} |n-1\rangle_x$ 及び $\hat{A}_2 |n\rangle = \hat{A}_2 |n\rangle_x + \hat{A}_2 |n\rangle_y = \sqrt{n} |n-1\rangle_y$ 、更に $\langle n | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_2 | n \rangle = \langle n | \hat{A}_2^\dagger \hat{A}_1 | n \rangle = 0$ といった、従来の量子論での計算と同等の計算が可能である。但し、 $|n\rangle_x, |n\rangle_y$ は x 偏光、 y 偏光光子の n 光子状態である。

この再構成を用いると、図 4 で BBO で発生される光子対の偏光方向はスカラーポテンシャルによって制御される、という考えも可能となる。これを以下に考察する。

光子が空間に存在しなくてもスカラーポテンシャルは存在しているので、偏光板 1 の角度が $|\phi|$ と設定されると、それに応じてスカラーポテンシャルは影響を受ける。この状態は光子が存在しない状態 $|0\rangle$ とスカラーポテンシャルが偏光板 1 の回転によって向き付け

された状態 $|\zeta_{|\phi|}\rangle$ の和と考えることが出来る。この状態は簡易計算法により以下のように表現できる。

$$|0\rangle + |\zeta_{|\phi|}\rangle = |0\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|-|\psi|)} e^{i\theta/2}|0\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|-|\psi|)} e^{-i\theta/2}|0\rangle \quad (75)$$

ここで、 ψ は BBO で発生される偏光板 1 の方向に進行する光子 s の偏光角度である。この向き付けされたスカラーポテンシャルは偏光板 1 から全空間に伝搬して BBO にも到達する。この伝搬速度は電磁ポテンシャルなので光速に等しい。よって、BBO が偏光角度 $|\psi|$ の光子 $|\psi\rangle$ を発生した状態は、この BBO に到達したスカラーポテンシャルの状態に偏光角度 $|\psi|$ の光子生成演算子 $\hat{A}_{|\psi|}^\dagger$ を掛けて

$$\hat{A}_{|\psi|}^\dagger |0\rangle + \hat{A}_{|\psi|}^\dagger |\zeta_{|\phi|}\rangle = |\psi\rangle + \frac{1}{2}\gamma e^{i(|\phi|-|\psi|)} e^{i\theta/2}|\psi\rangle - \frac{1}{2}\gamma e^{-i(|\phi|-|\psi|)} e^{-i\theta/2}|\psi\rangle \quad (76)$$

で与えられることとなる。なお、この系ではスカラーポテンシャルは BBO まで単一経路を進むので位相 $\theta = 0$ である。よって

$$\langle I \rangle \propto \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2|\phi| - 2|\psi|) \quad (77)$$

と計算されるが、単一光子が発生されるなら $\langle I \rangle = 1$ が要求され、 $\psi = \phi$ が得られる。すなわち、偏光板 1 の設定角度で光子が生成されることとなる。

但し、BBO からの光子対がこのような偏光板 1 の設定角度に依存して生成されるのではなく、ランダムな偏光で発生される場合でも光子対の偏光は互いに直交であり、この光子対発生時に決定された古典的な局所完全相関とスカラーポテンシャルの振動場との干渉により、(65) の干渉が観測される。

ここまでの、EPR 相関の再構成を客観的な物理的実在を用いて描写すると、スカラーポテンシャルの振動場の中で実在の光子が干渉を生じながら運動していると解釈できる。そして偏光板では実在の光子とスカラーポテンシャルの干渉によって、干渉前とは異なる偏光の光子が生成され、干渉前の光子は消滅すると解釈することが可能である。これは真空の励起によって粒子が生成消滅されるという場の量子論の考えに合致するものである。なお、EPR 相関を様々な実験系で抜け穴が無いように工夫して、Bell の不等式の破れを検証し [37]、それによって量子論が正しいことが主張されてきたが、客観的な物理的実在の描像を用いても量子論と全く同じ結果が得られるので、Bell の不等式の破れは物理法則の局所性及び物理的実在の否定を示すものでなく、量子論の正当性を支持するものでもない。

4 応用

ここまで、確率解釈を用いず客観的な物理的実在として光子、電子、スカラーポテンシャルを考えて、単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の計算結果が確率解釈で得られたものと一致することを述べたが、ここでは更に、この客観的な物理的実在を用いた描像で説明可能な幾つかの量子論特有の現象について議論する。

この議論の為には、まず、前章までで考察したスカラーポテンシャルの振動場の形成を一般化する必要がある。前章の議論は全て、空間を 2 つに分割する経路が存在する状況である。これを一般化して 3 つ、4 つと任意の数まで分割した場合にどのような振動場が形成され、その振動場によってどのような物理的現象が生じるのかを考察することで、電磁場の 0 点エネルギーの揺らぎ、Casimir 効果、自発的対称性の破れが客観的な物理的実在の描像を伴って自然と導かれることを示す。

また、この一般化に伴う、単一粒子の干渉について一般的な取り扱いを示す。

4.1 干渉経路の一般化

前章で取り扱った2経路への分割はスカラーポテンシャルを2分割するものである。分割の際に、分割係数を1/2、位相差を θ と設定したが、任意数の分割経路に拡張する為、スカラーポテンシャルの分割係数 r_j と位相 θ_j を導入する。そうすると分割経路数を M として、スカラーポテンシャルは次のように表現できる。

$$\sum_{j=1}^M r_j e^{i\theta_j} A_0 \quad (78)$$

但し、 $\sum_{j=1}^M r_j = 1$ 。前章までのケースは $M=2, r_1=r_2=1/2$ と $\theta_1=-\theta_2=\theta/2$ 等に相当する。よって、任意数の分割経路にx偏光の単一光子が存在する場合の、光子数期待値は次の光子消滅演算子によって計算できる。

$$\hat{A}_\mu = \left(\sum_{j=1}^M r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_0, \hat{A}_1, 0, 0 \right) \quad (79)$$

これから

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle &\propto \langle 1 | -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu | 1 \rangle \\ &= - \left\{ \sum_{j=1, k=1}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \langle 1 | \hat{A}_0^\dagger \hat{A}_0 | 1 \rangle + \langle 1 | \hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 | 1 \rangle \\ &= - \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k} r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + 1 \end{aligned} \quad (80)$$

$0 \leq r_j \leq 1$ であるので $0 \leq \langle 1 | -\mathbf{g}^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu | 1 \rangle \leq 1$ 。

$M \rightarrow \infty$ の時、振動場を形成する $\sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j}$ は位相が完全にランダムであれば0に収束する。このとき、 $\langle \hat{I} \rangle \propto 1$ である。経路の分割は時空間に物質が存在することで発生するものであり、 $M \rightarrow \infty$ は現実の数え切れない多数の物質が存在する現実の物理空間と捉えることができる。これを”現実の真空”と呼ぶことにする。

一方、(78)で $M=1$ は空間に何の物質も存在しない空虚な入れ物としての時空間と捉えることができる。これを”理想の真空”と呼ぶこととする。

この一般化を簡易計算法で表現すると、(34)と(39)の代わりに、下記の演算子と状態を任意形状に適用することができる。

$$\hat{A}'_0 = \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_1 - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \hat{A}_1$$

$$\hat{A}'_0 = \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \hat{A}_1^\dagger - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} \hat{A}_1^\dagger \quad (81)$$

$$|\zeta\rangle \equiv \left(\gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{i\theta_j} - \gamma \sum_{j=1}^{\infty} r_j e^{-i\theta_j} \right) |1\rangle_S \quad (82)$$

この分割経路の一般化から、”理想の真空”に何らかの形状が持ち込まれ経路の分割が発生すると、期待値は振動場によって変動することが分かる。

4.2 電磁場の 0 点エネルギー

Coulomb ゲージを用いた従来の量子光学における演算子の量子化は、次の調和振動子と関係付けられる。(簡単の為、x 軸偏光のみ考える)

$$\begin{aligned}\hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p})\end{aligned}\quad (83)$$

但し、 \hat{q} と \hat{p} は位置及び運動量演算子であり、交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ に従う。調和振動子の Hamiltonian は

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (84)$$

で表現される。よって、以下の関係が得られる。

$$\begin{aligned}\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1 &= \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2 + i\omega\hat{q}\hat{p} - i\omega\hat{p}\hat{q}) \\ &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \\ \hat{A}_1 \hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}\hbar\omega \right)\end{aligned}\quad (85)$$

(85) と $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1|0\rangle = 0$ より、従来の取り扱いではゼロ点エネルギーは $\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega$ と認識されていた。すなわち

$$\langle 0|\hat{A}_1^\dagger \hat{A}_1|0\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \langle 0|\left(\hat{\mathcal{H}} - \frac{1}{2}\hbar\omega \right)|0\rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) = 0 \quad (86)$$

この従来の固定されたゼロ点エネルギーは、スカラーポテンシャルを無視した (83) における演算子の定義に起因している。しかし、全空間にはスカラーポテンシャルが存在するという前章までの考察結果を使うと、(83) は (34) を用いて次のように置き換えることが出来る。

$$\begin{aligned}\hat{A}'_0 + \hat{A}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} + i\hat{p}) \\ \hat{A}'_0^\dagger + \hat{A}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (\omega\hat{q} - i\hat{p})\end{aligned}\quad (87)$$

よって、Hamiltonian は前章で考察した干渉の表現と同様の形式になる。

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}'_\mu \hat{A}'_\nu \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (88)$$

この Hamiltonian で 2 つの経路分割がある場合には単一光子状態のエネルギーも変動する。

$$\langle 1|\hat{\mathcal{H}}|1\rangle = -\frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle\cos\theta + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad (89)$$

ある観測点では $\theta = \pm N\pi$, (N : 奇数) に単一光子が観測されるので、 $\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle = \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle$ の Lorentz 不変性を使うと

$$\begin{aligned} \langle 1|\hat{\mathcal{H}}|1\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \end{aligned} \quad (90)$$

よって、 $\langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \frac{1}{2}$ となり、次の光子数期待値の置き換えに繋がる。

$$\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = -\frac{1}{2}, \quad \langle 1|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|1\rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle 2|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|2\rangle = \frac{3}{2}, \quad \dots \quad (91)$$

通常 $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle$ は 0 と考えるべきであるが、この計算では $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle = -\frac{1}{2}$ と認識しなければならないことになり、不定計量の導入が必要となる。この計算については本節後半に修正するが、0 点エネルギーが揺らぐ結論は同じである。

よって、単一光子干渉の絶対値は $\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle$ の選び方で変動する。しかし、 $\langle \hat{I} \rangle \propto \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cos\theta$ は維持される。

この期待値を用い、(80) の演算子形式に戻すとゼロ点エネルギーは

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle &= -\hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle + \hbar\omega\langle 0|\hat{A}_1^\dagger\hat{A}_1|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= \frac{1}{2}\hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} \end{aligned} \quad (92)$$

と計算され、ゼロ点エネルギーも変動する。これは自発的対称性の破れをも説明している。

このことから、無限大の自由度を起因とする無限大のゼロ点エネルギーは (92) の経路分割数 $M \rightarrow \infty$ で位相が完全にランダムなった場合に除去される。なお、これはゼロ点エネルギーが経路分割の状況によって揺らぐ、すなわち $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ を示している。

上記の議論では演算子 (83) を (87) に置き換えたが、演算子 \hat{A}_0 の導入を行うのであれば、位置、運動量演算子の交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を $[\hat{q}_\mu, \hat{p}_\nu] = -g_{\mu\nu}i\hbar$ に置き換え、時間軸成分まで含めて考えるのが妥当である。この交換関係の置き換えも含めると、

$$\hat{A}_0^\dagger\hat{A}_0 = \frac{1}{2\hbar\omega} (\hat{p}_0^2 + \omega^2\hat{q}_0^2 + i\omega\hat{q}_0\hat{p}_0 - i\omega\hat{p}_0\hat{q}_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2}i\omega[\hat{q}_0, \hat{p}_0] \right) = \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \\
\hat{A}_0\hat{A}_0^\dagger &= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 - \frac{1}{2}\hbar\omega \right) \tag{93}
\end{aligned}$$

と得られる。ここで、 $\hat{\mathcal{H}}_0$ は時間軸成分のエネルギーに相当する Hamiltonian である。よって、全 Hamiltonian は $\hat{\mathcal{H}}_1$ を (85) の空間成分の Hamiltonian として

$$\hat{\mathcal{H}} \equiv \hat{\mathcal{H}}_1 - \hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) + \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{94}$$

となる。但し、時間軸成分の位置、運動量の演算子の交換関係から得られた最後の項は、今までの議論と同等に、空間に経路分割がある場合には、分割経路の位相を取り入れた (80) の $\{ \}$ 内と同様に位相に依存した数式表現が入るはずであり、これを f とすると 0 点エネルギーは

$$\begin{aligned}
\langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle &= \hbar\omega\langle 0| \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) |0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 0|0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 0|f|0\rangle \\
&= \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega f \tag{95}
\end{aligned}$$

ここで、 f を決めるため、1 光子状態のエネルギーを (80) を援用して計算すると

$$\begin{aligned}
\langle 1|\hat{\mathcal{H}}|1\rangle &= \hbar\omega\langle 1| \left(-g^{\mu\nu} \hat{A}_\mu^\dagger \hat{A}_\nu \right) |1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|1\rangle + \frac{1}{2}\hbar\omega\langle 1|f|1\rangle \\
&= \hbar\omega - \hbar\omega \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega f \tag{96}
\end{aligned}$$

これは全空間では常に単一光子のエネルギー $\hbar\omega$ になる。よって分割経路数が 1 の理想の真空の場合、 $\{ \}$ 内は 1 となるので $f = 1$ 、分割経路数が $M \rightarrow \infty$ の現実の真空の場合、 $\{ \}$ 内は 0 となるので $f = -1$ という値を取るようになる。それ以外の場合は $\{ \}$ に従って、 $-1 < f < 1$ の値を取る。

よって、0 点エネルギーは

$$0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega + \frac{1}{2}\hbar\omega f \leq \hbar\omega \tag{97}$$

のように空間の分割経路の存在によって揺らぐこととなる。

4.3 Casimir 効果

ゼロ点エネルギーは Casimir 効果を通して測定されている。[38, 39, 40, 41, 42] 次の状況は Casimir 効果の代表的測定系と同一である。前節の議論から、測定を行う空間、それは”現実の真空”ではない”理想の真空”のような経路分割がない空間が準備され、ある形状、例えば 2 つの並行板、がその空間に配置されると、その空間および形状のゼロ点エネルギーは、(92) を用いれば其々 $\frac{1}{2}\hbar\omega$ および $0 \leq \langle 0|\hat{H}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ と計算され、同様に (97) を用いても $\hbar\omega$ および $0 \leq \langle 0|\hat{H}|0\rangle \leq \hbar\omega$ と計算されることになり、どちらで計算しても、その形状のエネルギーはその空間のエネルギーを超えないので、その形状はその空間から圧縮力を受ける。

このようなエネルギー差によって、ある形状に発生する引力は Casimir 効果の源泉である Van der Waals 力の基本概念と同一である。[43]

4.4 自発的対称性の破れ

従来の自発的対称性の破れの取り扱いでは、 $\mathbf{Q}|0\rangle \neq 0$ または $|0\rangle$ は \mathbf{Q} の固有状態ではないことを、Goldstone ボソンや Higgs ボソンを用いて議論されている。[30, 44] 但し、 $|0\rangle$ は真空状態である。

しかし、単一電子干渉の計算で示したように、スカラーポテンシャルは全空間に存在し、ピンホール 2 には電子は存在しない。よって、ピンホール 2 の状態 $|\psi_2\rangle$ は $|0\rangle$ に代わり、真空と同一視できることを使って確率解釈と同一の計算結果が得られることを示した。この $\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 0$ の関係から、 $|\psi_2\rangle$ が \mathbf{Q} の固有状態 $\mathbf{Q}|\psi_2\rangle = \alpha|\psi_2\rangle$ であるなら、 $\langle\psi_2|\mathbf{Q}|\psi_2\rangle = \alpha\langle\psi_2|\psi_2\rangle = 0$ となるはずである。但し、 α は固有値である。しかし (48) の計算、および 4.1 節の分割経路の一般から導かれるように $\langle\psi_2|\mathbf{Q}|\psi_2\rangle$ はスカラーポテンシャルの位相差によって $-q$ から 0 の間で揺らいでいる。よって真空 $|\psi_2\rangle$ は \mathbf{Q} の固有状態ではない。これは自発的対称性の破れを表現している。

4.1 節で示唆したように完全にランダムな位相を持った現実の空間には揺らぎが無い。すなわち対称性がある。このような空間は”現実の真空”と考えることが出来る。しかし、この空間の経路分割の形状が変化するとゆらぎが入り込み、最終的に経路分割が存在しない”理想の真空”に向かって文字通り対称性が壊される。この考えは基準を理想の真空に取っても成立し、分割経路数 $M = 1$ と $M \rightarrow \infty$ の極限で対称性を持った状態になる。

この様な、空間はポテンシャルで満たされており、現実の真空状態は理想の真空の基底状態より上（又は下）にある、という議論は、 \mathbf{Q} または $\hat{\mathcal{H}}$ をエネルギーレベルに置き換えれば、Y. Nambu と G. Jona-Lasinio. [45, 46] によって報告された超伝導体のアナロジーを用いた自発的対称性の破れと同等の考えである。位相差が固定されると、1 つの真空が選ばれ、その選択が対称性を破る。

なお、4.2 節でも述べたように、電磁場の 0 点エネルギーの振動 $0 \leq \langle 0|\hat{\mathcal{H}}|0\rangle \leq \frac{1}{2}\hbar\omega$ (又は $\hbar\omega$) も、真空が光子数の固有状態ではないことを示しており、自発的対称性の破れである。結局、自発的対称性の破れは、スカラーポテンシャルの振動場を生じる、時空間の経路分割によって生じていることになる。

4.5 単一粒子干渉の一般的取扱い

(40) と (48) を一般化すると、単一粒子干渉は次の形式で記述できると考えられる。

$$\begin{aligned}\langle I \rangle &= (\langle \phi | + \langle \zeta |) \mathbf{F} (|\phi\rangle + |\zeta\rangle) \\ &= f + \langle \zeta | \mathbf{F} | \zeta \rangle + f \langle \phi | \zeta \rangle + f \langle \zeta | \phi \rangle\end{aligned}\quad (98)$$

よって、 $\langle \zeta | \mathbf{F} | \zeta \rangle + f \langle \phi | \zeta \rangle + f \langle \zeta | \phi \rangle = -\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}f \cos \theta$ の時に、 \mathbf{F} の 2-経路分割による単一粒子干渉、すなわち $\langle I \rangle = f \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right\}$ が生じる。但し、 \mathbf{F} は粒子の任意のオブザーバブル演算子、 $|\phi\rangle$ は \mathbf{F} の固有状態、 f は \mathbf{F} の $|\phi\rangle$ 状態での固有値および、 $|\zeta\rangle$ はスカラーポテンシャルの振動場を記述する不定計量ベクトルである。

\mathbf{F} が粒子の数演算子 \mathbf{n} であり、 $|\phi\rangle$ が (98) の単一粒子状態の時、単一粒子数の期待値はゆらぐ。すなわち

$$\begin{aligned}\langle (|1\rangle + \langle \zeta |) \mathbf{n} (|1\rangle + |\zeta\rangle) \rangle &= 1 + \langle \zeta | \mathbf{n} | \zeta \rangle + \langle 1 | \zeta \rangle + \langle \zeta | 1 \rangle \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta\end{aligned}\quad (99)$$

任意形状の場合には、上記の期待値は (81)、(82) と同様の形式を用いて次のように (80) と同一となる。

$$\langle \hat{I} \rangle \propto - \left\{ (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2) + \sum_{j \neq k}^M r_j r_k e^{i(\theta_j - \theta_k)} \right\} + 1 \quad (100)$$

本論文で考察した電磁場は可換 (Abelian) ゲージ場であるが、多成分の波動関数の局所的位相変換の不変性から導入される非可換 (non-Abelian) ゲージ場にも、この取り扱いは適用可能と考えられるが、その記述はもっと複雑になるはずである。

しかし、このような相互作用のない単一粒子の自己揺らぎは neutrino 振動の起源の可能性がある。[47, 48]

5 不定計量ポテンシャルの出所

本論文で不定計量の源泉であるスカラーポテンシャルを用いて量子論の再構成を試みた。このスカラーポテンシャルは古典電磁気学からも周知の量であるが、再度、このスカラーポテンシャルについて考察して、本論文の再構成の意味および今後の課題を抽出する。

通常、Coulomb ゲージで議論される量子光学では、電磁場と電流密度を以下のように分離して取り扱われる。[31].

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L, & \nabla \cdot \mathbf{E}_T &= 0, & \nabla \times \mathbf{E}_L &= 0 \\ \mathbf{i} &= \mathbf{i}_T + \mathbf{i}_L, & \nabla \cdot \mathbf{i}_T &= 0, & \nabla \times \mathbf{i}_L &= 0\end{aligned}\quad (101)$$

但し、添え字の“T”と“L”は“Transverse : 横”と“Longitudinal : 縦”を意味する。電磁ポテンシャルを用いると Maxwell 方程式の T 成分は

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}_T}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{i}_T \\ \mathbf{E}_T &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}\quad (102)$$

と記述できる。但し、 \mathbf{B} は磁束密度である。同様に L 成分も以下のように記述できる。

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_L &= -\nabla\phi, & \nabla \cdot \mathbf{E}_L &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \mathbf{i}_L &= \epsilon_0 \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t}\end{aligned}\quad (103)$$

よって、T 成分は磁場の変動に関連した現象で、L 成分はスカラーポテンシャルと電荷に関連した現象と考えることが出来る。

しかしながら、これは絶対的な関連ではなく、特定の座標系で記述した相対的な関連である。Lorentz 変換によって座標を変換すると T 成分と L 成分は混ざり合い、相対論の主張通りこの関連は意味を失う。[49]

本論文中の計算で $\langle 1|A_0^\dagger A_0|1\rangle = \langle 1|A_1^\dagger A_1|1\rangle = \langle 1|A_2^\dagger A_2|1\rangle = 1$ と同一視したのも、この Lorentz 不変性からである。また、Coulomb ゲージは Maxwell 方程式の明白な共変性を壊すので、4 元ポテンシャルを平等に取り扱うには Lorentz ゲージを採用した Maxwell 方程式 (4) を考察するのが適切である。

(4) の線形性から、Lorentz ゲージの Maxwell 方程式は

$$\begin{aligned}\square A^\mu &= \square(A_{(\text{mat})}^\mu + A_{(\text{vac})}^\mu) = \mu_0 j^\mu \\ \partial_\mu A^\mu &= \partial_\mu(A_{(\text{mat})}^\mu + A_{(\text{vac})}^\mu) = 0\end{aligned}\quad (104)$$

と記述出来ることが分かる。但し、添え字“mat”と“vac”は、夫々4元電流に関連する“matter：物質”と“vacuum：真空”の意味である。真空には4元電流は存在しないと仮定すると、 $A_{(\text{mat})}^{\mu}$ と $A_{(\text{vac})}^{\mu}$ は、下記のMaxwell方程式に従うことになる。

$$\square A_{(\text{mat})}^{\mu} = \mu_0 j^{\mu}, \quad \partial_{\mu} A_{(\text{mat})}^{\mu} = 0 \quad (105)$$

$$\square A_{(\text{vac})}^{\mu} = 0, \quad \partial_{\mu} A_{(\text{vac})}^{\mu} = 0 \quad (106)$$

(105)は4元電流によって励振された実在の光子を表現する式である。なお、4元電流の存在する領域から離れ、4元ポテンシャルを含まない空間領域を対象とすると、 $A_{(\text{vac})}^{\mu}$ を $A_{(\text{mat})}^{\mu}$ に置き換えた(106)はその領域での4元電流に励振されたポテンシャルの運動を表現している。

一方、(106)は物質に無関係な真空のポテンシャルの運動を表現する。このことから、真空はポテンシャルで満たされた海のような空間と想像することが可能である。これはエーテルの概念を想起させる。静止エーテルは特殊相対論により否定されたが[49]上記の空間を満たすポテンシャルは静止することなく光速で伝搬する物理量である。

Aharonov-Bohm効果はポテンシャルが電磁場の存在しない空間での電子の干渉を引き起こすことを明らかにした。[32, 50, 51] 同様に、空間に満ちたポテンシャル(106)は実在の光子(105)と干渉を起こしている。これはAharonov-Bohm効果でも注意喚起された、空間の多重連結領域に伴う非可積分位相項(nonintegrable phase factor)という概念と類似している。[33]空間が分割されることで、それに伴う位相項が生じ干渉を生じるのである。

通常は光子に関連した計算は“matter：物質”と“vacuum：真空”を分別することなく無意識に(104)の A^{μ} を用いている。しかし、 $A_{(\text{mat})}^{\mu}$ と $A_{(\text{vac})}^{\mu}$ を分別することは出来ない。それは海水とその飛沫を見分けるようなものである。実際は、どちらもMaxwell方程式(104)を出所とする変幻自在のポテンシャルであり分別は不要である。それゆえ、真空に満ちたポテンシャルは物質に関連したポテンシャルを吐き出したり、組み込んだりすることになるが、これは真空が実在の光子を生成、消滅させることを描写している。

本論文で考察した不定計量の源泉であるスカラーポテンシャルの出所を考えると、分別は出来ないが、真空に満ちたポテンシャル(106)の時間軸成分と考えるのが妥当と思われる。

一方、Faradayの時代から電気、磁気現象の実験事実を基に古典電磁気学の集大成として定式化されたMaxwell方程式は(105)と考えることが出来る。

(105) は実験事実を出所とし、(106) は実験事実とは無関係に局所可換ゲージ変換の下で不変なゲージ場として導かれた場であると考え、本論文で考察した経路分割による真空の揺らぎという時空構造に関する現象と、各時空点での局所位相変換の不変性という時空構造に起因するゲージ場導入の考えの類似性が強調される。

また、前章で取り上げた電子回路やホモダイン検波方式の通信のアナロジーでは、(106) はバイアス電流（電圧）や局発振器から発生する連続発振波に相当し、(105) は信号波と捉えることが出来る。バイアスが安定した DC 成分であれば、信号として AC 成分だけを取り出しても問題ないが、DC 成分が揺らぐ場合は AC 成分としての信号強度も揺らぐことになる。現実の物理現象も、これと同等の DC 成分が揺らいだ回路や通信と捉えると工学的応用にも有用と思われる。

6 共変形式による Maxwell 方程式の正準量子化における矛盾回避について

この章では、共変形式の Maxwell 方程式の正準量子化における Lorentz ゲージと交換関係の矛盾と、その従来の回避策と新しく提案する回避策について述べる。まず、正準量子化の概要と従来の矛盾回避方法について以下に概観する。

6.1 正準量子化及び交換関係の矛盾

量子化の対象は 4 元電流を 0 とした自由空間における共変形式の Maxwell 方程式である。これを再掲する。

$$\square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (107)$$

電磁場のラグランジアン密度としては、まず次の形が採用される。

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_{class} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \end{aligned} \quad (108)$$

確かに、このラグランジアン密度を採用すると、Euler-Lagrange 方程式から Maxwell 方程式 (107) が導出される。

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathfrak{L}_{class}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial \mathfrak{L}_{class}}{\partial A_\nu} = 0 \quad (109)$$

しかし、(108) 式のラグランジアン密度を採用すると、正準共役量 π^i , $i = (1, 2, 3)$ については

$$\begin{aligned} \pi^i &= \frac{\partial \mathfrak{L}_{class}}{\partial \dot{A}_i} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} (F_{0i} F^{0i}) \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \dot{A}_i} ((\partial_0 A_i - \partial_i A_0) (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i)) \\ &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \end{aligned} \quad (110)$$

と定義できるが、下記に示すように正準共役量 π^0 が定義できない。

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathfrak{L}_{class}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad (111)$$

そこで、幾つかのゲージ固定条件を用いた方法が提案されている。よく知られたゲージが Coulomb ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ と Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ であるが、Coulomb ゲージは A_0 を 4 元ポテンシャルから切り離して取り扱うので明白な共変性が失われる。そこで以下のような Lagrangian 密度を採用して Lorentz ゲージでの量子化が検討される。

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}(\partial_\rho A^\rho)^2 \quad (112)$$

この Lagrangian 密度を採用すると、Euler-Lagrange 方程式 (109) から Lorentz ゲージによる Maxwell 方程式が得られる。

$$\square A^\nu = 0 \quad (113)$$

ここで、Lagrangian 密度 (108) の作用積分を計算すると

$$\begin{aligned} S &\equiv \int d^4x \mathcal{L}_{class} \\ &= \int d^4x \left(-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu \right) \end{aligned} \quad (114)$$

となるが、積分内の第 2 項は部分積分することで $\frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$ と計算される。よって、Lagrangian 密度 (112) は次の形で良いことになる。もちろん、この Lagrangian 密度を採用しても Maxwell 方程式 (113) が得られる。

$$\mathcal{L}'_0 = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu \quad (115)$$

この Lagrangian 密度を採用すれば、正準共役量が以下のように全て定義できる。

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}'_0}{\partial \dot{A}_\mu} = -\dot{A}^\mu \quad (116)$$

ここで、正準共役量を演算子に置き換え、それらの同時交換関係を設定することで量子化が行われる。

$$\begin{aligned} [A^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] &= -[A^\mu(\mathbf{x}, t), \dot{A}^\nu(\mathbf{x}', t)] \\ &= ig^{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned} \quad (117)$$

$$[A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\pi^\mu(\mathbf{x}, t), \pi^\nu(\mathbf{x}', t)] = 0 \quad (118)$$

しかし、この (117) と (118) から、次の関係式が導出される。

$$[\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = ig^{0\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0 \quad (119)$$

よって (119) の演算子である $\partial_\mu A^\mu$ は、Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ と矛盾することとなる。

そこで、この矛盾を解消する幾つかの Lagrangian 密度が提案されている。その中で、Nakanishi-Lautrup 形式と呼ばれる補助スカラー場を取り入れた、次の Lagrangian 密度が最も包括的なものと考えられる。[52].

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + B\partial^\mu A_\mu + \frac{1}{2}\alpha B^2 \quad (120)$$

ここで、 α は任意の実パラメータである。この Lagrangian 密度 (120) において、物理的状態 $|\text{phys}\rangle$ を導入し、補助条件により Lorentz ゲージの物理的状態を制限する、すなわち $\langle \text{phys} | \partial_\mu A^\mu | \text{phys} \rangle = 0$ 、とすることで、Lorentz ゲージ $\partial_\mu A^\mu = 0$ と (119) の矛盾を回避する取り扱いが行われている。

6.2 拡張 Lorentz ゲージ

(120) を用いた Nakanishi-Lautrup 形式の取り扱いでは、非物理的な補助場 B や補助条件と言った人為的数学形式および時空間は物理的空間と非物理的空間の和であると言った仮説が採用されており、自然法則の数学的記述を逸脱した人為的な数学的的技巧による記述の傾向が強い。更に、この取り扱いは確率解釈を前提とした不定計量の除去を目的として考案されたものである。しかし、本論文で述べたように、不定計量は理論から必然的に要求される、自然法則に不可欠の物理的実在を表現しており、これを確率解釈に反するとして人為的に導入した仮説や条件によって数学的的技巧を駆使して除去することは本末転倒と考えられる。

よって、ここで再度 Lagrangian 密度 (115) と Lorentz ゲージでの Maxwell 方程式 (113) を考察する。

初歩的ではあるが、(113) を導出するには Lorentz ゲージは必須でないことが分かる。実際、(113) は Lagrangian 密度 (112) または (115) から導出される。

(107) から (113) の導出に必要なのは、Lorentz ゲージの代わりに次の関係である。

$$\partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \quad (121)$$

よって、Lorentz 不変性より

$$\partial_\mu A^\mu = \epsilon(\text{スカラー}) \quad (122)$$

この条件 (121) を、拡張 Lorentz ゲージと呼ぶこととする。この条件は任意のスカラー関数 χ を導入して、以下の良く知られたゲージ不変性を有している。

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (123)$$

良く知られたゲージ不変性ではあるが、この式を本論文で論じた物理的実在として電子回路や通信のアナロジーで解釈すると、4元ポテンシャル A^μ は信号電流（電圧）、 $\partial^\mu\chi$ はバイアス電流（電圧）や局発振器の連続発振波に相当する。 $\partial^\mu\chi$ をゲージ変換によって消去することは、この電子回路や通信を AC 結合回路に通して DC 成分を除去することに相当する。

$\square\chi = 0$ と選ぶと、以下のように再度 (122) が得られる。

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square\chi = \partial_\mu A^\mu = \epsilon \quad (124)$$

よって

$$A^\mu = A_L^\mu + f^\mu \quad (125)$$

が一般解である。但し、 A_L^μ は Lorentz ゲージ、すなわち $\partial_\mu A_L^\mu = 0$ の一般解、 $f^\mu = f^\mu(\mathbf{x}, t)$ は $\partial_\mu f^\mu = \epsilon$ を満たす \mathbf{x}, t の関数である。

最も簡単な f^μ の形は、形式的には以下の座標変換と同じものとなる。

$$f^\mu = \beta(a_\nu^\mu x^\nu + b^\mu) \quad (126)$$

但し、 β は適切な次元に揃えるための定数である。よって

$$\epsilon = \beta(a_0^0 + a_1^1 + a_2^2 + a_3^3) = \text{Tr}(\epsilon) \quad (127)$$

ということになる。但し、ここで a_ν^μ を行列要素とする 4×4 行列に β を掛けたものを ϵ と置いた。そこで、 ϵ を演算子 $\hat{\epsilon}$ に置き換えて (119) に代入すると

$$[\partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{x}', t)] = [\hat{\epsilon}, A^\nu(\mathbf{x}', t)] = i g^{0\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \neq 0 \quad (128)$$

という関係が導出される。

6.3 考察

この演算子 $\hat{\epsilon}$ を用いて交換関係 (128) を考察する。この為、生成、消滅演算子の行列表示を援用して $[\partial_\mu A^\mu, A] = [\hat{\epsilon}, A] \equiv \hat{\epsilon}A - A\hat{\epsilon} \neq 0$ を考察する。

生成、消滅演算子 A^\dagger 、 A の行列表示と数状態ベクトル $|\mathbf{n}\rangle$ は下記の様な行列とベクトルで与えられる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, |3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \dots \quad (130)$$

ここで $\hat{\epsilon} = \epsilon I$ 、但し I は単位行列とすると、演算子 $\hat{\epsilon}$ は $[\hat{\epsilon}, A] = \epsilon[I, A] = \epsilon(IA - AI) = 0$ と計算され (128) の関係は得られない。(127) を見ると、 ϵ の演算子 $\hat{\epsilon}$ への置き換えに際しては ϵ も $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \sum \epsilon^{ii} = \epsilon$ を満足する演算子 $\hat{\epsilon}$ に置き換えるのが妥当と考えられる。よって $\hat{\epsilon}$ として以下の行列表示を取ることが出来る。但し簡単の為、対角要素を全て 0 とする。対角要素が 0 以外でも以下と同様の結果が得られる。

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon^{00} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \epsilon^{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \epsilon^{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (131)$$

そうすると、

$$\begin{aligned} [\hat{\epsilon}, A] &\equiv \hat{\epsilon}A - A\hat{\epsilon} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{00} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\epsilon^{11} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\epsilon^{22} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\epsilon^{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\epsilon^{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \epsilon^{00} - \epsilon^{11} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2}(\epsilon^{11} - \epsilon^{22}) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}(\epsilon^{22} - \epsilon^{33}) & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (132)$$

よって、少なくとも 1 つの $\epsilon^{ii} (i > 0)$ が $\epsilon^{ii} \neq \epsilon^{i+1i+1}$ であれば $[\hat{\epsilon}, A] \neq 0$ を満足することになる。

この (127) の関係を参考にして、 $\hat{\epsilon}$ は $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \sum \epsilon^{ii} = \epsilon$ を満足する (131) のような形だとすると、 $\text{Tr}(\hat{\epsilon}) = \sum \epsilon^{ii} = 0$ となるような $\hat{\epsilon}$ を演算子 $\hat{O} \equiv \hat{\epsilon}$ と定義すれば、 $\hat{O} \equiv \partial_\mu A^\mu(\mathbf{x}, t)$ となるので、通常の Lorentz ゲージでも (119) は満足されることとなる。

単一光子干渉の計算でも述べたが、干渉によって光子数が0となっても、その時空点では逆位相の波の干渉で光子が見えなくなっているので、 $f(\theta) = 0$ となるような位相状態の時空点であるとして取り扱う必要があり、これを空虚な時空点であるとして0としてはならない。同様に、Lorentz条件 $\partial_\mu A^\mu = 0$ の右辺を空虚な0と考え量子化しても0であると考えすることは、分割経路が存在する時空間を無視することになる。

古典的ラグランジアン密度 (108) は分割経路が無い理想の真空である自由空間を前提としているので、 A_0 に分割経路の存在を取り入れた位相を導入することでも同様の取り扱いが可能と考えられる。

7 まとめ

量子論の基礎概念である確率解釈は、量子的現象の観測結果を理論と整合させるために必須と考えられてきた。しかし確率解釈では、古典物理学のような客観的な物理的実在の描像を得られず、それ以上分割できない粒子が2つ以上の経路に、ある確率で分割された状態として物理的実在とは掛け離れた、量子重ね合わせ状態にあるとされ、有名なパラドックスを生んだ。また、EPR 相関では分割された状態は分割前の位置から遠くに離れても相関を持ち、観測されたと同時に確率的な存在から突然、物理的実在である粒子に変化し、その変化は他の分割されていた粒子にも瞬間的に伝達する、という相対論に反する光速を超えた物理現象を容認しなければならなかった。この光速を超えた物理現象を工学的に応用しようとする量子テレポーテーションと呼ばれる技術開発も行われている。

しかし、本論文ではこのような、常識的描写を否定する確率解釈を破棄して、客観的な物理的実在の描写により従来の量子論と同一の観測結果が得られる理論の再構成を行った。

この再構成の為に、共変形式の Maxwell 方程式の量子化の際に必要な不定計量を用いた。不定計量は確率解釈に矛盾するとして、これを取り除く数学処方が開発されてきた。しかし、本論文では不定計量が理論から必然的に要請されていることに注目し、取り除かれるべきは確率解釈であるとして、不定計量をありのままに計算に取り入れた。そして、単一光子干渉、単一電子干渉、EPR 相関の実験系を注意深く考察することで、空間に2つの経路への分割がある場合には、不定計量の源泉であるスカラーポテンシャルがその分割によって振動場を形成することを、共変形式及び簡易計算方式によって明らかにし、この振動場の中を客観的な物理的実在の単一光子、単一電子、互いに逆方向の偏光を持った光子対が運動することで、これらの干渉や相関が生じることを明らかにし、その計算結果は従来の量子論に一致することを示した。

EPR 相関については相対論に背く長距離相関が存在することを示唆した実験に関する様々な報告が行われているが [53, 54, 21, 22, 23, 55, 37]、本論文の不定計量と経路分割によるスカラーポテンシャルの振動場の描像で、これらの報告も説明できると考える。

また、この空間の2つの経路への分割を、任意数の分割に一般化することで、分割数が1（分割無し）の場合は理想の真空、分割数 ∞ の場合は現実の真空と捉えて、理想の空間に経路の分割が生じるとスカラーポテンシャルによる振動場が形成されることを明らかにした。

更に、0点エネルギーについてもスカラーポテンシャルの振動場により、揺らぎを生じることを示し、従来の取り扱いでは困難であった無限大の0点エネルギーを解消できる

ことを示すと共に、0点エネルギーが起源の Casimir 効果も計算できることを示した。従来、工学的応用では0点エネルギーを単純に引き算で消去するという議論もあるが、このような取り扱いは電子回路的な考えでは直流バイアス電圧（電流）を引いて、信号としての交流成分を観測する AC 結合回路に相当すること、しかし現実の物理現象としては、この電子回路においてバイアス電圧（電流）が直流ではなく、信号としての交流成分と干渉を起こす交流バイアスに相当することをアナロジーとして議論した。

また、このスカラーポテンシャルの振動場が自発的対称性の破れを生じ、空間の分割経路数が1（分割無し）の場合と分割数 ∞ の場合に空間は対称性を持ち、それ以外の分割数になると振動場が生じ対称性を破る、という描像を明らかにした。

この考えを適応して、単一粒子干渉への一般化について述べ、不定計量に相当する物理量の振動場による自己干渉揺らぎがニュートリノ振動の原因である可能性を示唆した。この一般化では電磁場のような可換ゲージ場を非可換ゲージ場に適用できると推測したが、その具体的表式を求めることは今後の課題である。しかし、不定計量はどのような場であっても導入すべき理論的要請である。

この本論文の骨子であるスカラーポテンシャルの出所について、物質と真空に関して Maxwell 方程式を分離して議論し、真空が光子を生成、消滅する現象を客観的な物理的実在の描写として示した。

最後に、従来の Lorentz ゲージを採用した共変形式の Maxwell 方程式の正準量子化において、演算子方程式としての Lorentz ゲージが交換関係と矛盾する困難について考察し、Lorentz ゲージを拡張したゲージを考察することでこの困難を回避できる手法を提案した。

確率解釈と、本論文での再構成とは同一の結果を与えるが、これは逆問題の1対1対応の問題と捉えることが出来る。量子論は、主として物理的な観測結果（outcome）を客観的な物理的実在（reality）を用いた数式表現で体系化されたものとは異なり、その観測結果（outcome）を客観的な物理的実在によって説明することが当初困難であった為、その起源を確率解釈という非物理的な状態（偽物の reality）を想定してしまったものと思われる。例えば、楽器（reality）の形状や状態から、楽器の奏でる音（outcome）を推測することは可能である。逆に、観測結果である音（outcome）からは、幾つかの音源、すなわち、実際に音を出している楽器（reality）以外にも偽物の音源、例えば電子音響機器（偽物の reality）を推測できる。観測結果（音や outcome）が同じであっても、本当の源（reality）は唯一である。直観的に理にかなない、Maxwell 方程式、相対論および共変形式による不定計量から厳密に導かれ、実験結果を再現する従来の標準量子論と同一の結果を与える本再構成は確率解釈より優れているのは明らかである。

本再構成によれば、A.Einstein によって指摘された量子論の不完全さは、不定計量の導

入の欠如に起因する。A.Einstein が生涯主張し続けたように [5]、従来の量子論は、本再構成のように客観的な物理的实在の描像を用いて再構成されるべきである。

参考文献

- [1] Masahito Morimoto. Unobservable potentials to explain single photon and electron interference. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 14(8):4121–4132, 2017.
- [2] Masahito Morimoto. Unobservable potentials to explain a quantum eraser and a delayed-choice experiment. *Progress In Electromagnetics Research M*, 62:111–122, 2017.
- [3] Masahito Morimoto. Consideration of Covariant Quantization of Electromagnetic Field. *arXiv e-prints*, page arXiv:1806.02175, June 2018.
- [4] J. D. Trimmer. The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger’s ”cat paradox” paper. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 124(5):323–338, Oct 1980.
- [5] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete’ ? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935.
- [6] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [7] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of ”hidden” variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [8] J. BELL. On the einstein-podolsky-rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1964.
- [9] JOHN S. BELL. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, Jul 1966.
- [10] X. Oriols and J. Mompart. Overview of Bohmian Mechanics. *ArXiv e-prints*, June 2012.
- [11] P. Pylkkänen, B. J. Hiley, and I. Pättiniemi. Bohm’s approach and Individuality. *ArXiv e-prints*, May 2014.
- [12] D. Durr, S. Goldstein, T. Norsen, W. Struyve, and N. Zanghi. Can Bohmian mechanics be made relativistic? *Royal Society of London Proceedings Series A*, 470:30699, December 2013.
- [13] V. Allori, S. Goldstein, R. Tumulka, and N. Zanghi. Predictions and Primitive Ontology in Quantum Foundations: A Study of Examples. *ArXiv e-prints*, May 2012.
- [14] Glen Dennis, Maurice A. de Gosson, and Basil J. Hiley. Fermi’s ansatz and bohm’s quantum potential. *Physics Letters A*, 378(3233):2363 – 2366, 2014.

- [15] Markus Arndt and Klaus Hornberger. Testing the limits of quantum mechanical superpositions. *Nature Physics.*, 10:271–277, April 2014.
- [16] Julian Grond, Ulrich Hohenester, Jörg Schmiedmayer, and Augusto Smerzi. Mach-zehnder interferometry with interacting trapped bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 84:023619, Aug 2011.
- [17] G. D. McDonald, H. Keal, P. A. Altin, J. E. Debs, S. Bennetts, C. C. N. Kuhn, K. S. Hardman, M. T. Johnsson, J. D. Close, and N. P. Robins. Optically guided linear mach-zehnder atom interferometer. *Phys. Rev. A*, 87:013632, Jan 2013.
- [18] Géraldine Haack, Michael Moskalets, Janine Splettstoesser, and Markus Büttiker. Coherence of single-electron sources from mach-zehnder interferometry. *Phys. Rev. B*, 84:081303, Aug 2011.
- [19] Stéphane Ngo Dinh, Dmitry A. Bagrets, and Alexander D. Mirlin. Analytically solvable model of an electronic mach-zehnder interferometer. *Phys. Rev. B*, 87:195433, May 2013.
- [20] M. Morimoto. Proposal for a plasmonic mach-zehnder modulator utilizing quantum interference effect. *Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 19(6):14–20, Nov 2013.
- [21] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via bell’s theorem. *Physical review letters*, 47(7):460, 1981.
- [22] Alain Aspect, Philippe Grangier, Gérard Roger, et al. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment: a new violation of bell’s inequalities. *Physical review letters*, 49(2):91–94, 1982.
- [23] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell’s inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804, 1982.
- [24] S. P. Walborn, M. O. Terra Cunha, S. Pádua, and C. H. Monken. Double-slit quantum eraser. *Phys. Rev. A*, 65:033818, Feb 2002.
- [25] Vincent Jacques, E Wu, Frédéric Grosshans, François Treussart, Philippe Grangier, Alain Aspect, and Jean-François Roch. Delayed-choice test of quantum complementarity with interfering single photons. *Phys. Rev. Lett.*, 100:220402, Jun 2008.
- [26] Stefano Longhi. Classical and quantum interference in multiband optical bloch oscillations. *Phys. Rev. B*, 79:245108, Jun 2009.
- [27] A. Danan, D. Farfurnik, S. Bar-Ad, and L. Vaidman. Asking photons where they have been. *Phys. Rev. Lett.*, 111:240402, Dec 2013.

- [28] Pablo L. Saldanha. Interpreting a nested mach-zehnder interferometer with classical optics. *Phys. Rev. A*, 89:033825, Mar 2014.
- [29] Roger Bach, Damian Pope, Sy-Hwang Liou, and Herman Batelaan. Controlled double-slit electron diffraction. *New Journal of Physics*, 15(3):033018, 2013.
- [30] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, 1985.
- [31] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, 2 edition, 1983.
- [32] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory. *Phys. Rev.*, 115:485–491, Aug 1959.
- [33] Tai Tsun Wu and Chen Ning Yang. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. *Phys. Rev. D*, 12:3845–3857, Dec 1975.
- [34] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. L. Sands. *The Feynman Lectures on Physics Vol. II, III*. Addison-Wesley, 1965.
- [35] E. Karlson and Rudolf Ernst Peierls. The eigenvalues of the charge operator. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 230(1182):382–389, 1955.
- [36] J. A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, 1941.
- [37] Johannes Handsteiner, Andrew S. Friedman, Dominik Rauch, Jason Gallicchio, Bo Liu, Hannes Hosp, Johannes Kofler, David Bricher, Matthias Fink, Calvin Leung, Anthony Mark, Hien T. Nguyen, Isabella Sanders, Fabian Steinlechner, Rupert Ursin, Sören Wengerowsky, Alan H. Guth, David I. Kaiser, Thomas Scheidl, and Anton Zeilinger. Cosmic bell test: Measurement settings from milky way stars. *Phys. Rev. Lett.*, 118:060401, Feb 2017.
- [38] R. L. Jaffe. Casimir effect and the quantum vacuum. *Phys. Rev. D*, 72:021301, Jul 2005.
- [39] Eric Myers. Interpretation of the energy of the vacuum as the sum over zero-point energies. *Phys. Rev. Lett.*, 59:165–168, Jul 1987.
- [40] S. K. Lamoreaux. Demonstration of the casimir force in the 0.6 to $6\mu\text{m}$ range. *Phys. Rev. Lett.*, 78:5–8, Jan 1997.
- [41] U. Mohideen and Anushree Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to $0.9\mu\text{m}$. *Phys. Rev. Lett.*, 81:4549–4552, Nov 1998.
- [42] Iver Brevik, Valery N. Marachevsky, and Kimball A. Milton. Identity of the van der waals force and the casimir effect and the irrelevance of these phenomena to sonoluminescence. *Phys. Rev. Lett.*, 82:3948–3951, May 1999.
- [43] W. Arnold, S. Hunklinger, and K. Dransfeld. Influence of optical absorption on the van

- der waals interaction between solids. *Phys. Rev. B*, 19:6049–6056, Jun 1979.
- [44] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, Aug 1962.
- [45] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. i. *Phys. Rev.*, 122:345–358, Apr 1961.
- [46] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. ii. *Phys. Rev.*, 124:246–254, Oct 1961.
- [47] A. K. Mann and H. Primakoff. Neutrino oscillations and the number of neutrino types. *Phys. Rev. D*, 15:655–665, Feb 1977.
- [48] G.J. Feldman, J. Hartnell, and T. Kobayashi. Long-baseline neutrino oscillation experiments. *Adv.High Energy Phys.*, 2013:475749, 2013.
- [49] A. Einstein. Zur elektrodynamik bewegter krper. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [50] Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Junji Endo, Tatsuo Aarii, and Kazuhiro Mihama. Direct observation of fine structure of magnetic domain walls by electron holography. *Phys. Rev. Lett.*, 44:1430–1433, May 1980.
- [51] A. Tonomura, H. Umezaki, T. Matsuda, N. Osakabe, J. Endo, and Y. Sugita. Is magnetic flux quantized in a toroidal ferromagnet? *Phys. Rev. Lett.*, 51:331–334, Aug 1983.
- [52] Noboru Nakanishi. Indefinite-metric quantum field theory. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 51:1–95, 1972.
- [53] D. Salart, A. Baas, J. A. W. van Houwelingen, N. Gisin, and H. Zbinden. Spacelike separation in a bell test assuming gravitationally induced collapses. *Phys. Rev. Lett.*, 100:220404, Jun 2008.
- [54] Yoon-Ho Kim, Rong Yu, Sergei P. Kulik, Yanhua Shih, and Marlan O. Scully. Delayed “choice” quantum eraser. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1–5, Jan 2000.
- [55] John F Clauser and Michael A Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Physical review D*, 10(2):526, 1974.
- [56] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, Sep 1949.