

# Approche algébrique du problème $3n + 1$ généralisé

Pierre Lamothe

Février 2020

## Résumé

Cet essai retrace quelques étapes d'une démarche intuitive à propos de la conjecture de Syracuse qui ont mené à la découverte des cycles algébriques universels dont dérivent les cycles numériques selon un critère précis, et à calculer la probabilité d'existence de cycles dérivés, laquelle chute de façon exponentielle avec la longueur des suites.

## Étapes

– *Du numérique au fonctionnel.* La mise en ordre a été le moteur de cette recherche. Ayant atteint une limite avec un arbre des impairs dont la majorité des nœuds était vide, l'idée est venue de remplacer les nombres dans les nœuds par des fonctions, à l'instar des branches, afin d'avoir un arbre énumérable et une racine universelle.

– *Algèbre des suites généralisées.* Il devenait simple de généraliser à  $pn + q$  et de créer une structure de monoïde libre sur la base des fonctions de transition entre impairs conjoints. L'équation à résoudre pour retrouver les suites devenait  $2^d x - p^m y - qc = 0$ .

– *Cycles universels et cycles dérivés.* S'il faut résoudre une équation de Bezout pour retrouver les suites, dans le cas d'un cycle la solution est immédiate,  $qc / (2^d - p^m)$ . De ce critère d'existence d'un cycle découle que les paramètres  $c$  font partie de cycles de rotation  $(c_i)_m$  de longueur  $m$ , dont dérivent les cycles numériques si  $2^d - p^m$  divise les  $qc_i$ .

– *Équivalent triplet des fonctions.* Les triplets  $\langle a, b, c \rangle$  avec une loi de composition équivalente à celle des fonctions ont été utilisés pour obtenir des formules simples de puissance d'un triplet et de multiplication d'une suite de triplets.

– *Des fonctions aux suites numériques.* Il devenait simple d'établir et de solutionner les équations. Une méthode utilisant la fraction continue  $2^d/3^m$  pour trouver les suites numériques est proposée.

– *Représentation en réseau de classes.* Toute fonction est représentée par un trajet dans un réseau de classes  $[d, m]$ . On peut y visualiser la base infinie et l'énumération binaire. Ce réseau forme un triangle de Pascal pour le nombre de trajets aboutissant à un nœud. Des méthodes de calcul simples en découlent pour le paramètre  $c$ .

– *Discrimination des possibilités de cycle.* Peu de classes  $[d, m]$  peuvent posséder un cycle. Les deux premiers discriminants sont le  $\delta = 2^d - p^m$  et le centre  $\mu_0 = (2^{d/m} - p)^{-1}$ . Les zones de cycle possible sont confinées à un chapelet d'îlots de possibilités le long de la ligne  $\log_2 p$  qui sont les réduites  $d/m$  de la fraction continue de  $\log_2 p$ .

– *Probabilité d'existence d'un cycle en  $3n + 1$ .* Le troisième discriminant repose sur la coïncidence numérique  $qc \bmod \delta = 0$ . Sous l'hypothèse de l'équiprobabilité des  $\delta$  valeurs possibles, on peut calculer la probabilité  $1/N$  d'existence d'un cycle. La valeur  $N$  subit une inflation numérique : la probabilité est encore de  $1/37$  à la 6<sup>e</sup> réduite  $84/53$ , mais atteint déjà  $1/10^{4458}$  à la 13<sup>e</sup> réduite. Prenant en compte les vérifications par ordinateur actuelles on peut estimer la chance de trouver un nouveau cycle à  $1/10^{5\text{million}}$ .

**Table des matières, Liste les figures, Liste des tableaux, Références, pp. 37-38**

# 1 Introduction

## 1.1 Approche arithmétique habituelle

Le problème  $3n + 1$  prend sa source dans une conjecture émise par Collatz en 1937. Partant d'un nombre entier positif quelconque  $n$  on aboutirait toujours à 1 si on répète la procédure suivante :

- si  $n$  est pair  $\rightarrow$  on le divise par 2,
- si  $n$  est impair  $\rightarrow$  on le multiplie par 3 et on ajoute 1.

Pourquoi une conjecture aussi simple en apparence n'a pu être démontrée ou infirmée jusqu'ici? Où réside sa difficulté propre? Dans l'approche arithmétique habituelle c'est l'ensemble des suites numériques qui est l'objet de l'attention, plutôt que l'ensemble des suites de fonctions utilisées :

$$D(n) = n/2 \tag{1}$$

$$C(n) = 3n + 1 \tag{2}$$

Voici un exemple des deux types de suites qui se correspondent.

$$\begin{matrix} 11 & 34 & 17 & 52 & 26 & 13 & 40 & 20 & 10 & 5 \\ C & D & C & D & D & C & D & D & D & D \end{matrix} \tag{3}$$

À une suite numérique donnée correspond une seule suite de fonctions. Mais à cette suite de fonctions correspond une infinité de suites numériques. Voici celles de l'exemple paramétrées avec  $k$ . (Les suites négatives seront valides dans le cadre élargi par Kakutani.)

$$(128k + 11 \dots 54k + 5) = (11 \dots 5), (139 \dots 59), \dots$$

On n'observe quasiment aucune régularité dans les suites numériques. Aussi, la difficulté intrinsèque du problème  $3n + 1$  est-elle plus difficile à dégager. À l'inverse, dans les suites de fonctions  $C$  et  $D$  tout est régulier, à part cette contrainte :  $C$  doit être suivi de  $D$ .

Alors il suffit d'utiliser la fonction  $T = CD$  au lieu de  $C$  dans les suites de fonctions pour que toutes les combinaisons (de  $T$  et de  $D$ ) soient permises ; et on obtient ainsi à peu de frais une structure de monoïde libre. Certes, un nombre pair est dès lors éliminé de la suite numérique, mais on va aller encore plus loin en ce sens, on va construire en [1.6] une algèbre de fonctions qui correspond aux seuls impairs des suites numériques.

Précisons en passant le sens de la composition des fonctions  $C$  et  $D$ . Avec ces chaînes de monoïde il apparaît plus simple d'adopter la convention suivante

$$D(C(n)) = CD(n) \tag{4}$$

## 1.2 Problème $3n + 1$ généralisé

Dans l'approche arithmétique des suites de nombres on ne peut pas vraiment parler de problème généralisé. S'il est utile d'observer ce qui se passe avec  $5n + 3$  ou  $7n + 1$ , par exemple, ces problèmes demeurent séparés au niveau des nombres. Car pour une même suite de fonctions, les nombres peuvent être croissants dans un cas et décroissants dans l'autre, ou encore, faire partie d'un cycle ou une spirale dans un cas, et d'une suite divergente dans l'autre (comme la suite débutant à 11 en  $7n + 1$ ).

Pourtant, comme on le verra (16), tous ces problèmes partagent un même critère pour l'existence d'un cycle, et il convient alors de le traiter avec une approche algébrique dans le cadre du problème généralisé  $pn + q$ , dont on verra en [2.4] les restrictions sur  $p$  et  $q$ .

## 1.3 Structure d'ordre et énumération

En vue de montrer les limites de l'approche numérique, voyons d'abord jusqu'où on peut ordonner. Il existe plusieurs versions graphiques de l'arbre binaire des suites qui convergent vers le cycle (4 2 1). La figure 1 en montre un sous-arbre débutant à 8.

On peut ordonner tous les nombres qui apparaissent dans un arbre de telle sorte que toutes les suites soient ordonnées. Il suffit que le rang de chacun des nombres d'un niveau donné dans l'arbre soit plus petit que tous ceux d'un niveau supérieur. C'est le cas dans la figure 1 pour tout ordre qui respecte l'ordre partiel suivant :

$$8 < 16 < \{5, 32\} < \{10, 64\} < \{3, 20, 21, 128\}$$

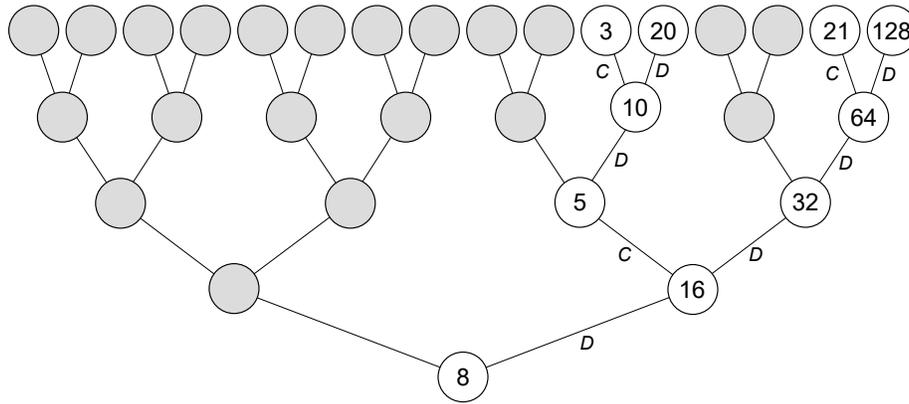


FIGURE 1 – Sous-arbre binaire de racine 8

Mais ordonner n'est pas énumérer. Il ne suffit pas d'établir une bijection avec les entiers naturels pour parler vraiment d'énumération. Si on peut parler d'énumération des nombres rationnels, par exemple, c'est qu'on peut, à l'aide de l'arbre de Stern-Brocot, construire aisément un nombre rationnel à partir de la représentation en base 2 de son rang dans l'arbre. Ce qu'on ne peut pas faire avec un arbre incomplet comme celui-ci. Il faut alors construire tout l'arbre et ça demande  $n$  étapes au lieu de  $\log(n)$ . De plus, c'est seulement si la conjecture de Collatz est vraie que tous les nombres naturels sont inclus dans l'arbre binaire des nombres qui convergent vers le cycle (4 2 1).

D'autre part Kakutani a étendu, de façon naturelle, la conjecture aux entiers relatifs en tenant compte des autres cycles connus :  $(-1 -2)$ ,  $(-5 -14 -7 -20 -10)$  et, pour ne citer que les impairs,  $(-17 -25 -37 -55 -41 -61 -91)$ . Dans ce cadre il n'est plus question d'arbre mais de forêt. Donc ni énumération ni ordre non plus. Dans l'approche algébrique, à l'inverse, on pourra énumérer toutes les fonctions ; cf. (11). Ce qui implique qu'il suffira de connaître le rang en base 2 pour déterminer rapidement la fonction.

#### 1.4 Arbre d'impairs : branches et nœuds

Avant de clore l'examen des limites de l'approche numérique, attardons-nous à la structure illustrée par la figure 2 qui s'avère la plus achevée dans le cadre  $3n + 1$ .

Il s'agit de l'arbre ternaire de mise en ordre des impairs convergeant vers 1. Les nœuds qui ont une seule branche ont été mis en évidence. C'est un arbre ternaire car il contient trois types de branches. Mais c'est aussi un arbre binaire car il n'y a jamais plus de deux branches par niveau. Il se construit à l'aide de ces trois fonctions :

$$\text{branche 1 : } U(n) = (2n - 1)/3$$

$$\text{branche 2 : } V(n) = (4n - 1)/3$$

$$\text{branche 0 : } W(n) = 4n + 1$$

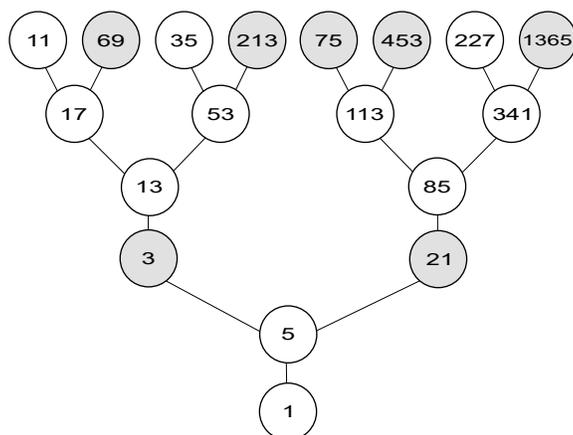


FIGURE 2 – Arbre ternaire des impairs

L'algorithme, tout simple, dépend du reste de la division par 3. Posant  $m = n \bmod 3$ ,

si  $m = 1$  alors branche 2 et branche 0,

si  $m = 2$  alors branche 1 et branche 0,

si  $m = 0$  alors branche 0.

Ces impairs peuvent ainsi être ordonnés de telle sorte que toute suite qui converge vers 1 soit ordonnée. Dans cet arbre, une suite d'impairs de Collatz est intercalée cette fois par d'autres nombres impairs au lieu de nombres pairs.

Il est remarquable qu'un tel arbre puisse être construit avec trois fonctions seulement alors qu'il existe une infinité de fonctions possibles entre deux impairs contigus dans une suite. La clé est dans la fonction  $W$ . Les fonctions  $U$  et  $V$  sont des fonctions montantes qui séparent deux impairs contigus ayant, respectivement, une et deux divisions.

$$U = (CD)^{-1} = D^{-1}C^{-1} \quad (5)$$

$$V = (CD^2)^{-1} = D^{-2}C^{-1} \quad (6)$$

Mais la fonction  $W$  ne se réduit pas à une combinaison de telles fonctions. En anticipant, on peut la définir ainsi

$$W = Z^2 \quad (7)$$

où  $Z$  est la fonction clé universelle dans l'approche algébrique du problème généralisé  $pn + q$ . La fonction  $W$  joue un rôle semblable seulement dans le cas où  $p = 3$ . Quand on aura vu et compris le rôle de la fonction  $Z$  en (12) on comprendra aussi le rôle de  $W$ . On pourra visualiser dans la figure 4 ces fonctions auxiliaires dans un réseau de classes.

## 1.5 Du numérique à l'algébrique

Mais à quoi a servi finalement de s'attarder à un bel arbre qui ne porte aucun fruit? C'est qu'on est à proximité du passage au mode algébrique. On a ici un arbre où les branches sont des fonctions, et les nœuds des nombres. Et cet arbre s'enracine sur un nombre cyclique dont on n'a pas la certitude qu'il soit le seul.

Hum!... Mais si les nœuds étaient aussi des fonctions plutôt que des nombres? On pourrait alors s'affranchir des contraintes rencontrées : arbres incomplets et racines potentiellement multiples. Oui!... Si les nœuds étaient des fonctions, on aurait une racine unique, la fonction identité, puis un seul arbre, un arbre complet et on pourrait énumérer. Une simple équation diophantienne à résoudre permettrait de retrouver toutes les suites numériques correspondant à une fonction donnée. Et le plus beau, comme on le verra, on n'a pas à s'efforcer de résoudre une équation pour repérer les cycles (15). Or dans le cadre du problème  $3n + 1$ , la tâche principale n'est-elle pas de s'assurer qu'il n'y a pas d'autres cycles que celui où ont convergé jusqu'ici toutes les suites qu'on a pu construire?

## 1.6 Monoïde des fonctions entre impairs d'une même suite

Travaillons désormais dans le cadre du problème généralisé  $pn + q$ . On a vu dès le départ qu'en utilisant la fonction  $T = CD$ , toutes les combinaisons de  $T$  et de  $D$  étaient permises et qu'ainsi l'ensemble des chaînes finies de  $T$  et de  $D$  formait une structure de monoïde libre sur la base  $\{T, D\}$ . Ceci reste valide avec la fonction généralisée

$$T(n) = (pn + q)/2 \quad (8)$$

*Définition 1.* Ce qu'on a en vue à présent, c'est le sous-ensemble  $\Omega$  des fonctions  $\omega$  qui relient les impairs d'une même suite, mais en sens inverse. Ça correspond à toutes les combinaisons finies de fonctions entre impairs contigus montants.

$$\{\beta_k\} = \{D^{-k}C^{-1}\} = \{D^{1-k}T^{-1}\} \text{ où } k > 0 \quad (9)$$

Cette fois encore, on a une structure de monoïde libre, mais sur une base infinie.

*Définition 2.* Soit à présent  $\Omega^*$  un monoïde élargi en adjoignant à  $\Omega$  la fonction clé

$$Z(n) = 2n + q/p \quad (10)$$

Ce monoïde élargi  $\Omega^*$  a l'importante propriété d'avoir une base finie,  $\{U, Z\}$  où  $U$  a été définie en (5). Le codomaine élargi de la fonction  $Z$ , qui déborde notre domaine de définition (restreint aux entiers impairs relatifs), implique une contrainte dans son utilisation. Ce qui va justement bien nous servir. Il est en effet assez remarquable que toutes les chaînes (de  $U$  et de  $Z$ ) qui commencent par  $U$  correspondent aux fonctions de  $\Omega$  alors

que toutes celles qui commencent par  $Z$  en sont exclues. Les images  $\omega^*(n)$  fractionnaires d'une chaîne ne correspondent qu'à celles qui débutent par  $Z$ .

Si bien qu'on peut énumérer les fonctions de  $\Omega$  à l'aide d'une bijection entre les chaînes débutant par  $U$  — qui peuvent construire auxiliairement les fonctions  $\omega$  — et la forme binaire de leur rang  $k$ , selon la correspondance :

$$U \rightarrow 1, Z \rightarrow 0 \quad (11)$$

Cette façon abstraite d'introduire l'énumération des fonctions de  $\Omega$  ne ressemble-t-elle pas un peu à de la magie? D'où vient cette fonction auxiliaire  $Z$ ? C'est le résultat d'une démarche toute naturelle : comment faire pour réduire la base infinie? Ce sera concret dans la figure 4, il suffit de trouver la fonction qui fait passer de  $\beta_k$  à  $\beta_{k+1}$ .

$$\beta_{k+1} = \beta_k Z \quad (12)$$

Quant à la fonction  $W$  qui a permis de construire l'arbre des impairs de  $3n + 1$ , son rôle était analogue. Elle faisait passer de  $\beta_k$  à  $\beta_{k+2}$  parce qu'on utilisait les deux premières fonctions de la base infinie :  $U = \beta_1$  et  $V = \beta_2$ . C'est pourquoi on avait pu écrire  $W = Z^2$ .

## 1.7 Premier fruit de l'approche : critère d'un cycle

Avant de passer aux calculs et aux démonstrations, pour bien montrer qu'on n'a nul besoin de passer par le numérique pour obtenir les cycles, on va expliciter l'unique critère de l'existence d'un cycle. Comme on le verra en (30), toute fonction de  $\Omega$  a la forme paramétrique suivante

$$\omega[d, m, c](n) = (2^d n - qc) / p^m \quad (13)$$

où  $d$  représente le nombre de divisions (par 2) et  $m$  le nombre de multiplications (par  $p$  avec ajout de  $q$ ), alors que le paramètre  $c$  indépendant de  $q$  ne dépend que de l'ordre des fonctions élémentaires. L'équation diophantienne  $s = \omega(r)$  à résoudre pour obtenir toutes les suites numériques débutant au sommet  $s$  et se terminant à la racine  $r$  est celle-ci :

$$2^d r - p^m s - qc = 0 \quad (14)$$

Or, on a un cycle si et seulement si la racine et le sommet coïncident, donc si  $s = r$ . Et la solution est alors évidente.

$$\boxed{s = \frac{qc}{2^d - p^m}} \quad (15)$$

Symbolisons par  $\delta$  cette quantité  $2^d - p^m$  qui est une importante caractéristique de la classe  $K_{dm}$  des fonctions  $\omega$  ayant les mêmes valeurs  $d$  et  $m$  (même nombre de divisions et même nombre de multiplications). Alors on peut formuler ainsi ce critère.

$$\text{Critère d'un cycle : le produit } qc \text{ doit être divisible par le } \delta \text{ de la classe } K_{dm} \quad (16)$$

Appelons « cycle trivial », en premier lieu, un cycle qui correspond à  $|\delta| = 1$ . Dans ce cas il y a forcément un cycle car  $qc$  est toujours divisible par  $\pm 1$ . Les valeurs de  $p$  qui devancent ou suivent une puissance de 2, comme 15 et 17 ou 63 et 65, par exemple, ont dès lors un cycle trivial. Le cas  $3n + 1$  a ceci de très particulier qu'il comporte trois  $|\delta|$  unitaires, soient entre 2 et 3, 3 et 4, et 8 et 9. Ça correspond respectivement aux cycles triviaux  $(-1)$ ,  $(1)$  et  $(-5 - 7)$ . En second lieu, lorsque  $q = \delta$  on peut parler de « cycle universel » – on utilisera aussi les  $\delta$  négatifs pour les cycles universels. Par exemple, dans  $5n + 3$ , vu la différence de 3 entre 125 et 128, on a  $\delta = 2^7 - 5^3 = q$ . Combien y a-t-il de fonctions  $\omega$  concernées ici? On verra en (40) que

$$\text{card } K_{dm} = \binom{d-1}{m-1} \quad (17)$$

On a donc 15 valeurs  $c$  différentes qui seront réparties dans 5 cycles de longueur  $m = 3$ . Plusieurs procédés distincts [3.6] permettent de calculer aisément ces valeurs.

$$(39 \ 99 \ 249), (43 \ 109 \ 137), (51 \ 129 \ 81), (53 \ 67 \ 169), (61 \ 77 \ 97)$$

Finalement, peut-on en déduire quelque chose à propos de  $5n + 1$ ? Absolument! Il suffit de regarder si des valeurs de  $c$  sont divisibles par  $\delta = 3$ . Comme le premier et le troisième cycles sont divisibles par 3, en les divisant on obtient les deux cycles de  $5n + 1$  de la même classe :

$$(13 \ 33 \ 83) \text{ et } (17 \ 43 \ 27)$$

Ce ne sont pas des cycles triviaux. Rien ne permet de prévoir si une valeur  $c$  est divisible par  $\delta$ , à ceci près que si l'une est effectivement divisible, toutes celles qui appartiennent au même cycle  $(c_i)_m$  sont aussi divisibles. Ces cycles qui englobent tous les  $c$  correspondent à la rotation de leur chaîne. On peut, tout au plus, estimer une probabilité d'occurrence des cycles non triviaux, comme on le verra (59), compte tenu de la grandeur de  $\delta$  et du nombre de cycles contenus dans la classe.

Voici l'exemple du cycle non trivial connu de  $3n + 1$ . Dans  $K_{dm}[11,7]$ , qui contient 210 valeurs  $c$  distinctes et dont le  $\delta = -139$ , on trouve, par exemple, une valeur  $c = 2363$  divisible par  $-139$ , ce qu'aucune règle ne peut prévoir. Alors  $2363 / \delta$  qui vaut  $-17$  appartient à un cycle non trivial, le quatrième cycle connu de  $3n + 1$

$$(-17 \ -25 \ -37 \ -55 \ -41 \ -61 \ -91)$$

### ***Petit intermède musical***

*Pour l'anecdote. Il suffit d'ajouter 1 à chaque nombre de cette suite pour obtenir la célèbre gamme de Zarlino (1 9/8 5/4 4/3 3/2 5/3 15/8). Multiplions par -11 pour ajuster au La international 440 Hz et usons du facteur 2, au besoin, pour tout ramener dans l'octave de ce La dont voici le calcul de fréquence :  $-11(-41 + 1) = 440$*

$$\text{Do } 264 \quad \text{Ré } 297 \quad \text{Mi } 330 \quad \text{Fa } 352 \quad \text{Sol } 396 \quad \text{La } 440 \quad \text{Si } 495$$

## 1.8 Cycles fondamentaux vs cycles dérivés

Voit-on tout ce qu'implique ce critère d'existence d'un cycle? Dans le cadre du problème généralisé  $pn + q$  on découvre des propriétés cycliques régulières universelles. Dans  $pn + \delta$  toutes les équations possèdent un cycle dont la solution est  $s = r = c$ . C'est de ces cycles fondamentaux (de rotation des chaînes) que dérivent les cycles qui se manifestent dans  $pn + q$  lorsque, de manière certes déterminée mais non régulière,  $cq \bmod \delta$  vaut 0 plutôt qu'une autre des valeurs possibles, au nombre de  $\delta$ . Il n'y a pas de nombres  $n$  cycliques comme tels, il y a des cycles dérivés faits de valeurs  $n$  qui sont des quotients entiers  $cq/\delta$ . Du cycle fondamental  $(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m)$  dérive un cycle  $(c_1q/\delta \ c_2q/\delta \ \dots \ c_mq/\delta)$  si, et seulement si, ces quotients sont des entiers.

Dans la forme paramétrique de la fonction  $\omega$  en (13) on peut voir que le paramètre  $c$  porte seul la spécificité combinatoire. Or, pour les classes ayant un même nombre  $m$  de multiplications (c'est la classe  $K_m$ ), l'ensemble des valeurs  $c$  est l'ensemble des solutions des équations (pour chacun des  $\delta$ ) aussi simples que

$$N_\delta^m(c) = c \quad (18)$$

où  $N_\delta(n) = \text{odd}(pn + \delta)$ . Ce qui donne lieu à un procédé très simple de calcul en [3.6].

## 2 Calculs et démonstrations

### 2.1 L'opérateur triplet

L'approche algébrique serait fastidieuse s'il fallait composer les fonctions  $\omega$  élément par élément. Voici un petit outil, l'opérateur triplet, qui permet de faciliter grandement la composition. À la fonction  $f(n) = (an + c)/b$  est associé l'opérateur  $\langle f \rangle = \langle a, b, c \rangle$  équivalent à  $f$  :

$$\langle f \rangle (n) = \langle a, b, c \rangle (n) = (an + c)/b = f(n) \quad (19)$$

Soit  $\langle g \rangle = \langle a', b', c' \rangle$ . Voici la *loi de composition* à droite  $\langle f \rangle \langle g \rangle = \langle fg \rangle$  équivalente à celle des fonctions :

$$\boxed{\langle a, b, c \rangle \langle a', b', c' \rangle = \langle aa', bb', bc' + ca' \rangle} \quad (20)$$

de sorte que l'on ait, tenant compte de la convention (3) :

$$fg(n) = g(f(n)) = (aa'n + bc' + ca')/bb' \equiv \langle fg \rangle (n) \quad (21)$$

Les opérateurs triplet munis de cette loi de composition à droite sont équivalents aux fonctions linéaires munies de leur propre loi de composition. Si les coefficients de

$\langle q_a, q_b, q_c \rangle$  sont des rationnels non entiers on peut toujours réduire à un triplet d'entiers car

$$\langle ka, kb, kc \rangle \equiv \langle a, b, c \rangle \quad (22)$$

En tant que groupe, voici l'élément neutre (fonction identité) et l'inverse :

$$\langle a, b, c \rangle^0 = \langle 1, 1, 0 \rangle \quad (23)$$

$$\langle a, b, c \rangle^{-1} = \langle b, a, -c \rangle \quad (24)$$

Bien sûr, il n'y a pas d'inverses dans le monoïde  $\Omega$ . L'ensemble des inverses des fonctions de  $\Omega$  forme le monoïde des suites descendantes. Avant d'aborder les deux formules qui simplifient considérablement les calculs et les démonstrations, voici quelques exemples d'opérateurs associés aux fonctions utilisées jusqu'ici, d'abord dans le cadre  $3n + 1$  :

$$\langle C \rangle = \langle 3, 2, 1 \rangle, \quad \langle D \rangle = \langle 1, 2, 0 \rangle$$

$$\langle U \rangle = \langle 2, 3, -1 \rangle, \quad \langle V \rangle = \langle 4, 3, -1 \rangle, \quad \langle W \rangle = \langle 4, 1, 1 \rangle$$

puis dans le cadre généralisé  $pn + q$  :

$$\langle U \rangle = \langle 2, p, -q \rangle$$

$$\langle Z \rangle = \langle 2, 1, q/p \rangle \equiv \langle 2p, p, q \rangle$$

$$\langle \beta_k \rangle = \langle 2^k, p, -q \rangle$$

$$\langle \omega [d, m, c] \rangle = \langle 2^d, p^m, -qc \rangle$$

## 2.2 Les deux formules de base des triplets

### 1. Puissance d'un triplet

$$\boxed{\langle a, b, c \rangle^k = \langle a^k, b^k, c(a^k - b^k)/(a - b) \rangle} \quad (25)$$

*Démonstration.* On peut utiliser la récurrence. Montrons d'abord que si c'est vrai pour  $k$  c'est vrai aussi pour  $k + 1$ . En effet on a :

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle^k \langle a, b, c \rangle &= \left\langle a^k, b^k, c(a^k - b^k)/(a - b) \right\rangle \langle a, b, c \rangle \\ &= \left\langle a^{k+1}, b^{k+1}, K \right\rangle \text{ où} \\ K &= b^k c + c(a^k - b^k)a/(a - b) \\ &= cb^k(a - b)/(a - b) + ca(a^k - b^k)/(a - b) \\ &= c(ab^k - b^{k+1} + a^{k+1} - ab^k)/(a - b) \\ &= c(a^{k+1} - b^{k+1})/(a - b) \end{aligned}$$

Reste à montrer que c'est vrai pour  $k = 1$ . En effet :

$$\langle a^1, b^1, c(a^1 - b^1)/(a - b) \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Suit un exemple de puissance d'une fonction élémentaire dans  $3n + 1$ .

$$\langle \beta_3^5 \rangle = \langle 2^3, 3, -1 \rangle^5 = \langle 2^{15}, 3^5, -(2^{15} - 3^5)/(2^3 - 3) \rangle = \langle 32368, 243, -6505 \rangle$$

## 2. Produit de triplets

$$\prod_{i=1}^k \langle a_i, b_i, c_i \rangle = \langle a, b, c \rangle \text{ où :}$$

$$a = \prod_{i=1}^k a_i$$

$$b = \prod_{i=1}^k b_i$$

$$c = \begin{array}{ccccccc} c_1 a_2 a_3 a_4 & \cdots & a_m \\ + b_1 c_2 a_3 a_4 & \cdots & a_m \\ + b_1 b_2 c_3 a_4 & \cdots & a_m \\ + b_1 b_2 b_3 c_4 & \cdots & a_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ + b_1 b_2 b_3 b_4 & \cdots & c_m \end{array} \quad (26)$$

*Démonstration.* Tout l'intérêt de la proposition réside dans la disposition particulière de la matrice des produits partiels de  $c$ . Inutile de se mettre martel en tête à formuler une démonstration pointilleuse ici. Il suffit d'exhiber comment évolue la matrice en passant d'un indice au suivant. Partons des trois premières étapes :

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle &= \langle a_1, b_1, c_1 \rangle \langle a_2, b_2, c_2 \rangle \dots \\ &= \langle a_1 a_2, b_1 b_2, (c_1 a_2 + b_1 c_2) \rangle \langle a_3, b_3, c_3 \rangle \dots \\ &= \langle a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3, (c_1 a_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 b_2 c_3) \rangle \langle a_4, b_4, c_4 \rangle \dots \end{aligned}$$

Oublions  $a$  et  $b$  qui évoluent de façon simple, et calculons la prochaine valeur de  $c$  :

$$c = (c_1 a_2 a_3 + b_1 c_2 a_3 + b_1 b_2 c_3) a_4 + b_1 b_2 b_3 c_4 \quad (27)$$

Il suffit d'aligner les termes pour découvrir le schéma matriciel et son évolution :

$$c = \begin{array}{l} ( c_1 a_2 a_3 \\ + b_1 c_2 a_3 \\ + b_1 b_2 c_3 ) a_4 \\ + b_1 b_2 b_3 \cdot c_4 \end{array}$$

Alors – ce qui est suffisamment probant – la somme de produits devient à l'étape 4 :

$$\begin{aligned}
 c &= c_1 a_2 a_3 a_4 \\
 &+ b_1 c_2 a_3 a_4 \\
 &+ b_1 b_2 c_3 a_4 \\
 &+ b_1 b_2 b_3 c_4
 \end{aligned} \tag{28}$$

### 2.3 Forme paramétrique des fonctions de $\Omega$

L'intérêt de la formule du produit de triplets est plus algébrique que numérique. On en déduit immédiatement, par exemple, la forme paramétrique (13). En effet, toute fonction  $\omega$  est le produit d'éléments de la forme  $\langle 2^k, p, -q \rangle = \langle \beta_k \rangle$  de la base infinie. Que représente  $k$  dans cette forme? Pour bien l'appréhender, revenons à la procédure descendante :

$$\langle \beta_k^{-1} \rangle (n) = \langle p, 2^k, q \rangle (n) = (pn + q)/2^k \tag{29}$$

Le paramètre  $k$  représente le nombre de divisions par 2. Désormais on va noter  $d_i$  le nombre de divisions correspondant à chacun des éléments  $\langle 2^{d_i}, p, -q \rangle$  et  $d$  le nombre total de divisions. Le premier paramètre du triplet résultant sera, comme le montre la formule du produit de triplets, tout simplement  $2^d$ , le produit des  $2^{d_i}$ . Puis symbolisons par  $m$  le nombre d'éléments de la chaîne qui comportent chacune, en descendant, une multiplication par  $p$ . Alors le second paramètre résultant sera, selon la formule,  $p^m$ . Montrons finalement que  $q$  est indépendant de  $c$ , le dernier paramètre qu'on utilisera dans la forme paramétrique de la fonction. En effet,  $q$  se retrouve sur la diagonale, donc une seule fois dans chacun des produits partiels, et peut être ainsi mis en facteur. Le paramètre  $c$  qui concentre en lui toute la combinatoire demeure le même si on utilise un  $q$  différent. Bref, ne reste qu'à écrire le triplet de cette forme anticipée en (13) :

$$\boxed{\langle \omega[d, m, c] \rangle = \langle 2^d, p^m, -qc \rangle} \tag{30}$$

### 2.4 Restrictions sur les paramètres $p$ et $q$

Avant de passer au calcul des fonctions  $\omega$  à partir de leur rang en binaire ou d'une suite d'éléments  $\beta_{d_i}$  abordons les restrictions sur  $p$  et  $q$ . Bien entendu  $p$  et  $q$  sont des nombres entiers impairs – disons positifs [voir 2.9], sauf pour trouver les cycles universels quand  $\delta$  est négatif. Lorsqu'on veut que les suites numériques soient, ou bien entièrement positives, ou bien entièrement négatives, on doit avoir  $q < p$  comme en  $3n + 1$  sinon ça empiète – chose aisée à vérifier. Reste un cas limite dont on doit tenir compte :  $p$  ne peut pas être un facteur de  $q$ , sinon on aura un « trou noir ». Par exemple, si  $q = 3 \times 5 \times 7 = 105$ , avec  $p = 3$  on aura  $C(-35) = 0$ , avec  $p = 5$  on aura  $C(-21) = 0$  et avec  $p = 7$  on aura  $C(-15) = 0$ . On ne pourra pas obtenir le nombre impair attendu par une suite finie de divisions par 2 du nombre pair 0.

## 2.5 Calcul de la fonction $\omega$ à partir d'une chaîne élémentaire

Il existe deux types de chaînes : la chaîne d'éléments  $\beta_{d_i}$  de la base infinie et la chaîne auxiliaire de la base  $\{U, Z\}$  qui sert à l'énumération. La première est représentée par la suite  $(d_i)_m$  du nombre de divisions à chaque multiplication, et la seconde par la suite binaire  $(b_i)_d$  du rang en base 2 de la fonction. Bien qu'on puisse calculer directement une fonction de rang donné à partir du produit des  $\langle U \rangle$  et  $\langle Z \rangle$ , il est plus rapide de transformer la suite  $(b_i)_d$  en suite  $(d_i)_m$  dont le calcul est plus simple. Chaque nombre  $d_i$  correspond au nombre de « 0 » qui suivent chaque « 1 », additionné de 1 car  $U$  comprend déjà une division. Par exemple avec  $\omega_{37}$  on a  $(b_i)_d = (100101)$ , alors  $(d_i)_m = (3\ 2\ 1)$ . Ça correspond à la suite numérique descendante (11 ... 5) du tout début (3), mais en sens inverse.

Soit donc une suite  $(d_i)_m$  qui correspond à une chaîne de  $\langle \beta_{d_i} \rangle = \langle 2^{d_i}, p, -qc \rangle$ . Selon la formule du produit de triplets (24), la fonction correspond au produit suivant

$$\langle \omega \rangle = \prod_{i=1}^m \langle 2^{d_i}, p, -qc \rangle \quad (31)$$

Si on se réfère à (30) la forme paramétrique de la fonction, les valeurs  $m$  et  $d = \sum d_i$  étant connues, il ne reste que la valeur de  $c$  à calculer.

$$c = \begin{array}{cccc} 1 & 2^{a_2} & 2^{a_3} & \dots & 2^{a_m} & + \\ p & 1 & 2^{a_3} & \dots & 2^{a_m} & + \\ p & p & 1 & \dots & 2^{a_m} & + \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & + \\ p & p & p & \dots & 1 & \end{array} \quad (32)$$

Pour obtenir une formule concise, il suffit de poser

$$\sigma_i = d - \sum_{j=1}^i d_j \quad (33)$$

Alors l'opérateur triplet  $\langle \omega \rangle$  de la fonction correspondant à la suite  $(d_i)_m$  s'écrit

$$\boxed{\langle \omega[(d_i)_m] \rangle = \left\langle 2^d, p^m, -q \sum_{i=1}^m 2^{\sigma_i} p^{i-1} \right\rangle} \quad (34)$$

Prenons l'exemple de la fonction  $\omega$  de  $K_{dm}[11, 7]$  correspondant au cycle  $-17$  dans  $3n + 1$ .

$$\begin{aligned} (d_i)_m &= (4\ 1\ 1\ 2\ 1\ 1\ 1) \\ (\sigma_i)_m &= (7\ 6\ 5\ 3\ 2\ 1\ 0) \end{aligned}$$

La valeur attendue est  $c = n\delta = -17 \times -139 = 2363$ , ce qui correspond bien au résultat du calcul.

$$c = 2^7 + 2^6 3^1 + 2^5 3^2 + 2^3 3^3 + 2^2 3^4 + 2^1 3^5 + 3^6 = 2363$$

Et si on demande quel est le rang au juste de cette fonction, le calcul est immédiat.

$$(4112111) \rightarrow 10001110111_2 = 1143$$

## 2.6 De l'algébrique au numérique

Les cycles sont choses rares si on exclut les cycles universels de  $pn + \delta$  qui forme les cycles  $(c_i)_m$  relatifs aux rotations de leur chaîne. Alors, devra-t-on se résoudre au cas par cas pour trouver les suites numériques qui ne comportent pas de cycle? Prenons l'exemple de la petite classe  $K_{dm}[6, 3]$  qui ne contient que dix fonctions  $\omega$ . Faudra-t-il résoudre les dix équations diophantiennes indépendamment pour obtenir toutes les suites numériques de cette classe? Non, il suffit de résoudre une seule équation diophantienne auxiliaire par classe  $K_{dm}$ , pour obtenir immédiatement les solutions des équations  $2^d r - p^m s - qc = 0$ , qui diffèrent seulement par la valeur de  $c$ . Décomposons la démarche pour obtenir ces solutions.

D'abord, il est bien connu que si on a déjà une solution particulière  $(r', s')$  à ces équations (dont les paramètres  $2^d$  et  $p^m$  sont toujours premiers entre eux), on peut en tirer immédiatement la plus petite solution positive :

$$\begin{aligned} r'' &= r' \bmod p^m \\ s'' &= s' \bmod 2^d \end{aligned} \quad (35)$$

et écrire la solution générale  $(p^m k + r'', 2^d k + s'')$ . Sauf qu'on ne retient que les solutions entre impairs. Alors si  $r''$  est pair on a  $(r, s) = (r'' - 2^d, s'' - 3^m)$  sinon  $(r, s) = (r'', s'')$  et soit on utilisera seulement les valeurs de  $k$  paires, soit on écrira

$$\forall k \in \mathbb{Z}, (2p^m k + r, 2^{d+1} k + s) \quad (36)$$

En second lieu, pour obtenir une solution particulière, il suffit de résoudre une seule fois (pour toute la classe) cette variante de l'équation de Bezout

$$2^d u - p^m v - 1 = 0 \quad (37)$$

En effet, si on connaît la solution  $(u, v)$  on a :

$$2^d uqc - p^m vqc - qc = 0 \quad (38)$$

et cette solution particulière dont on peut tirer une solution générale et les plus petites.

$$(r', s') = (uqc, vqc) \quad (39)$$

Le seul problème est donc d'obtenir ce couple  $(u, v)$  qui est, à l'instar de  $\delta$ , une caractéristique importante de la classe  $K_{dm}$ .

## 2.7 Détermination du couple $(u, v)$

Avant de montrer une méthode à la main pour déterminer ce couple, notons qu'on peut utiliser un programme qui résout l'équation de Bezout  $2^d u' + p^m v' = 1$ . Alors on a tout simplement :  $(u, v) = (u', -v')$ . La méthode de calcul qui suit se veut concise et sans tracas de signe. Elle comporte trois étapes : on calcule d'abord la fraction continue  $2^d/3^m$  puis on construit une matrice contenant  $2^d, p^m, u'$  et  $v'$ , et enfin on calcule  $d = 2^d u' - p^m v'$  qui vaut soit 1, soit  $-1$ . Alors on aura  $(u, v) = (du', dv')$ . Voyons d'abord un exemple, celui de la classe  $K_{dm}[6, 3]$  suivi de l'explication :

*Exemple.*  $2^d = 64$  et  $3^m = 27$ . Les valeurs attendues sont  $[2\ 2\ 1\ 2\ 3]$  et  $(-8, -19)$ .

64	10	10	3	3
27	27	7	7	1
2	2	1	2	3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 19 & 7 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 19 & 64 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$$

$$d = -1 \quad (u, v) = (-8, -19)$$

*Explications.* Pour la fraction continue, on commence avec  $2^d$  et  $p^m$  superposés. On divise le plus grand par le plus petit puis on écrit le quotient en dessous et le reste à droite du plus grand. On recopie le plus petit à sa droite puis on recommence jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste. La suite des nombres au bas est la fraction continue.

Pour la matrice contenant  $u'$  et  $v'$ , on débute avec une suite de matrices vides et on distribue à côté de chaque matrice, alternativement en haut et en bas, les valeurs de la fraction continue. On initialise avec la matrice identité et on construit les suivantes selon ce principe : si l'indice  $n$  est en haut, on ajoute  $n$  fois la colonne de gauche à celle de droite pour obtenir la nouvelle colonne de droite. La colonne de gauche est recopiée. Inversement, si l'indice est en bas, on ajoute  $n$  fois la colonne de droite à la colonne de gauche pour obtenir la nouvelle colonne de gauche. La colonne de droite est recopiée. À la fin on doit retrouver les valeurs  $2^d$  et  $p^m$ . Les éléments de la matrice peuvent se retrouver dans des configurations diverses, ça n'a pas d'importance, de même qu'on aurait pu inverser le rôle des indices. Ce qui ne varie pas, c'est que  $u'$  sera toujours en diagonale avec  $2^d$ . Il ne reste plus qu'à calculer  $d$  pour savoir si le couple  $(u, v)$  est positif ou négatif.

## 2.8 Détermination des suites numériques

Avant de procéder au calcul des suites numériques de l'exemple  $K_{dm}[6, 3]$  en  $3n + 1$  il nous faut déterminer les dix valeurs manquantes de  $c$  que nous n'avons pas encore calcu-

lées. On a vu en (34) la formule pour calculer  $c$ . La table 1 nous donne les dix valeurs de  $c$  en regard des suites  $(d_i)_3$  et  $(\sigma_i)_3$ . Ces suites de nombres de division  $(d_i)_3$  correspondent aux dix façons de décomposer  $d = 6$  en une somme de  $m = 3$  valeurs  $d_i > 0$ . Suivent les plus petites solutions positives  $(r', s') = (uqc \bmod p^m, vqc \bmod 2^d)$  et les solutions  $(r, s)$  ajustées après l'élimination de solutions (mises en évidence) où  $r'$  était pair :

$(d_i)_3$	4 1 1	3 2 1	3 1 2	2 3 1	2 2 2	2 1 3	1 4 1	1 3 2	1 2 3	1 1 4
$(\sigma_i)_3$	2 1 0	3 1 0	3 2 0	4 1 0	4 2 0	4 3 0	5 1 0	5 2 0	5 3 0	5 4 0
$c$	19	23	29	31	37	49	47	53	65	89
$-8c \bmod 27$	10	5	11	22	1	13	2	8	20	17
$-19c \bmod 64$	23	11	25	51	1	29	3	17	41	37
$r'$ ou $r' - 27$	-17	5	11	-5	1	13	-25	-19	-7	17
$s'$ ou $s' - 64$	-41	11	25	-13	1	29	-61	-47	-19	37

TABLE 1 – Calcul du paramètre  $c$  dans  $K_{dm}[6,3]$

La table 2 liste les suites minimales de Kakutani ayant 6 divisions et 3 multiplications :

19 →	-41	-122	-61	-182	-91	-272	-136	-68	-34	-17
23 →	11	34	17	52	26	13	40	20	10	5
29 →	25	76	38	19	58	29	88	44	22	11
31 →	-13	-38	-19	-56	-28	-14	-7	-20	-10	-5
37 →	1	4	2	1	4	2	1	4	2	1
49 →	29	88	44	22	11	34	17	52	26	13
47 →	-61	-182	-91	-272	-236	-68	-34	-17	-50	-25
53 →	-47	-140	-70	-35	-104	-52	-26	-13	-38	-19
65 →	-19	-56	-28	-14	-7	-20	-10	-5	-14	-7
89 →	37	112	56	28	14	7	22	11	34	17

TABLE 2 – Suites minimales de Kakutani dans  $K_{dm}[6,3]$

Dernière remarque à propos de ces suites minimales : la moitié d'entre elles sont liées à des cycles. L'une est à l'intérieur de la spirale 1 (3 cycles complets), deux autres sont des portions du cycle  $-17$  et deux autres enfin comportent un ou deux cycles  $-5$ .

## 2.9 Note sur les cycles triviaux élémentaires dans $pn + q$

Il est bien connu que si on utilise  $3n - 1$  au lieu de  $3n + 1$  (c'est-à-dire si  $q = -1$ ) on ne fait que changer le signe de toutes les suites numériques. Ça demeure vrai avec  $pn + q$ . C'est pourquoi on s'en tient généralement aux  $q$  positifs. On sait aussi que ce renversement ne correspond pas à une symétrie de réflexion positif-négatif. Mais on peut se demander pourquoi on retrouve en  $3n + 1$  un nombre inégal de cycles élémentaires, de part et d'autre; et de plus si cette dissymétrie apparente s'étend à  $pn + q$ ? Au départ on pourrait alléguer, d'abord, que le cycle  $-17$  n'est pas un cycle trivial et qu'il est ainsi normal qu'il apparaisse de manière insolite, puis que le cycle  $(-5 - 7)$  correspond à une singularité de  $p = 3$  où se retrouvent trois  $|\delta| = 1$ . Procédons à une recherche systé-

$pn$	$-q$	$+q$	$3p$	$-q$	$+q$	$5p$	$-q$	$+q$	$7p$	$-q$	$+q$
2			6			10			14		
$3n$	1	1									
4			12			20			28		
$5n$	1	3	15	3							
$7n$	3	1	21		3	35		5			
8			24			40			56		
$9n$	1	7	27	3		45	5		63	7	
$11n$	3	5	33	9							
$13n$	5	3	39		9						
$15n$	7	1	45		3	75		5	105		7
16			48			80			112		
$17n$	1	15	51	3		85	5		119	7	
$19n$	3	13	57	9		95	15				
$21n$	5	11	63	15							
$23n$	7	9	69	21							
$25n$	9	7	75		21						
$27n$	11	5	81		15	135		25			
$29n$	13	3	87		9	145		15	203		21
$31n$	15	1	93		3	155		5	217		7
32			96			160			224		

TABLE 3 – Calcul des cycles élémentaires dans  $pn + q$

matique des cycles élémentaires  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$ , à l'aide de la table 3. Les cycles  $\pm 1$  correspondent aux valeurs  $-q$  et  $q$  de la première colonne double, et les cycles  $\pm 3, \pm 5$  et  $\pm 7$  correspondent respectivement aux colonnes doubles 2, 3 et 4. On constate qu'il y a sy-

métrie pour  $\pm 1$  et  $\pm 3$ , mais qu'il apparaît, en revanche, une légère dissymétrie à partir de  $\pm 5$ , cette fois avec davantage de cycles du côté positif. L'ensemble des données de la table 3 est suffisamment probant pour affirmer ce qui suit, à propos des cycles élémentaires de  $pn + q$ , où  $q < p$  peut varier :

1. Il y a, à la fois, un cycle  $-1$  et un cycle  $1$  pour tout  $p$ .
2. Il y a soit un cycle  $-3$  soit un cycle  $3$  pour tout  $p$ .
3. Pour  $k > 3$ , il n'y a pas pour tout  $p$  l'un des cycles  $-k$  ou  $k$ .
4. Pour  $k > 3$ , le nombre de cycles  $-k$  est  $\leq$  au nombre de cycles  $k$ .

C'est la contrainte  $q < p$  qui invalide le pendant des cycles  $7n + 5$ ,  $27n + 25$  et  $29n + 21$  qui est  $5n + 5$ ,  $21n + 25$  et  $19n + 21$ . Enfin, en guise de synthèse de la table 3, où  $p$  varie de 3 à 31, voici l'ensemble des  $pn + q$  où se retrouve au moins l'un des cycles  $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$  :

$$\begin{aligned}
 & 3n + 1 \\
 & \{5, 7\}n + \{1, 3\} \\
 & 7n + 5 \text{ (pas de symétrie)} \\
 & \{9, 15\}n + \{1, 3, 5, 7\} \\
 & \{11, 13\}n + \{3, 5, 9\} \\
 & \{19, 29\}n + \{3, 9, 13, 15\} \\
 & 29n + 21 \text{ (pas de symétrie)} \\
 & \{21, 27\}n + \{5, 11, 15\} \\
 & 27n + 25 \text{ (pas de symétrie)} \\
 & \{23, 25\}n + \{7, 9, 21\}
 \end{aligned}$$

### 3 Représentation en réseau

#### 3.1 Les fonctions $\omega$ en réseau

On peut représenter le monoïde  $\Omega$  comme un arbre binaire d'énumération où chaque nœud correspond à une fonction  $\omega$  distincte. Une alternative utile est de représenter  $\Omega$  comme un réseau infini de classes de fonctions dans lequel chaque fonction  $\omega$  correspond à un parcours distinct depuis la fonction identité jusqu'à sa classe d'arrivée.

Pour concrétiser cette idée, utilisons une suite numérique de Collatz qui commence et se termine avec un nombre impair, disons de 9 à 5. Dans la figure 3, partant d'un nombre quelconque, le suivant est placé en-dessous du premier s'il résulte d'une multiplication, et placé à sa gauche s'il résulte d'une division. Ainsi la fonction  $C$  correspond à un vecteur unitaire vertical descendant et la fonction  $D$  à un vecteur unitaire allant vers la gauche.

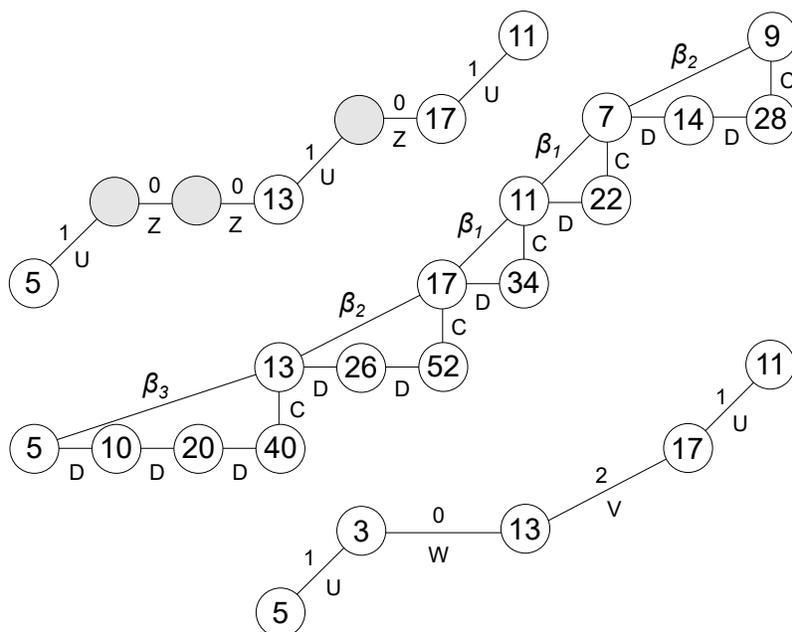


FIGURE 3 – Suites numériques et fonctions en réseau

Les vecteurs unitaires  $\{C, D\}$  forment une base qui permet de représenter toutes les suites numériques. C'est sur cette base, en l'inversant, qu'est construit l'arbre binaire (fig. 1) vu au tout début.

Si on relie les nombres impairs successifs de cette suite par des vecteurs diagonaux montants on obtient la chaîne  $\beta_3\beta_2\beta_1\beta_1\beta_2$  qui engendre la fonction  $\omega$  dont découle cette suite de nombres. L'ensemble des vecteurs diagonaux montants (une unité vers le haut et un nombre quelconque d'unités vers la droite) forme la base infinie  $\{\beta_k\}$  où  $k > 0$  qui permet de représenter toutes les fonctions du monoïde  $\Omega$ .

Au-dessus et en-dessous, sont représentées deux chaînes auxiliaires d'énumération de la sous-suite d'impairs (5 13 17 11). Les chaînes sont dites auxiliaires car elles utilisent les vecteurs Z ou W qui appartiennent bien à  $\Omega^*$  mais non à  $\Omega$ . Ainsi Z n'est pas l'inverse de D comme le laisse supposer la représentation. On a plutôt  $D^{-1}U = UZ$ . Au-dessus, on a la base  $\{U, Z\}$  qui permet l'énumération en base 2 de cette fonction  $\omega_{37} : 100101_2 = 37$ . En-dessous, on retrouve la base  $\{U, V, W\}$  qui a permis de construire l'arbre des impairs de la figure 2. Cette base permet l'énumération en base 3 de la même fonction :  $1021_3 = 34$ . Alors, pourquoi ce n'est pas le même rang ? Parce que les fonctions ne sont pas énumérées dans le même ordre.

Peut-on représenter l'arbre ternaire des impairs de  $3n + 1$  dans ce réseau ? Hum !... On se rendra vite compte que plusieurs nœuds de l'arbre aboutissent à un même nœud de réseau – ce qui est normal – mais surtout, qu'une partie seulement des nœuds du réseau

est utilisée – en somme un « réseau creux ». Ouais ! C’est bien beau de pouvoir visualiser le jeu vectoriel des fonctions, mais ça ne va pas très loin. Encore une fois, il faut effectuer le passage du numérique à l’algébrique, comme on a vu en [1.5].

### 3.2 Le réseau des classes $K_{dm}$

Avec les arbres mixtes où les branches étaient des fonctions et les nœuds des nombres, on ne pouvait pas construire une image globale. Il a fallu remplacer les nombres dans les nœuds par des fonctions. En réseau, les liens entre les nœuds sont encore des fonctions unitaires, mais les nœuds ne sont plus des fonctions. Les fonctions distinctes en réseau sont représentées par des chemins distincts à partir de la fonction identité.

Si plusieurs chaînes distinctes d’éléments de la base  $\{\beta_k\}$  peuvent aboutir au même nœud de réseau, peut-on définir précisément la classe des fonctions dont le trajet aboutit à un même nœud ? C’est simple. Comme on peut le voir dans la figure 4, seules les chaînes qui ont effectué le même nombre  $m$  de multiplications et le même nombre  $d$  de divisions aboutissent au nœud de coordonnées  $(d, m)$  dans le réseau. Ce nœud représente donc la classe  $K_{dm}$ .

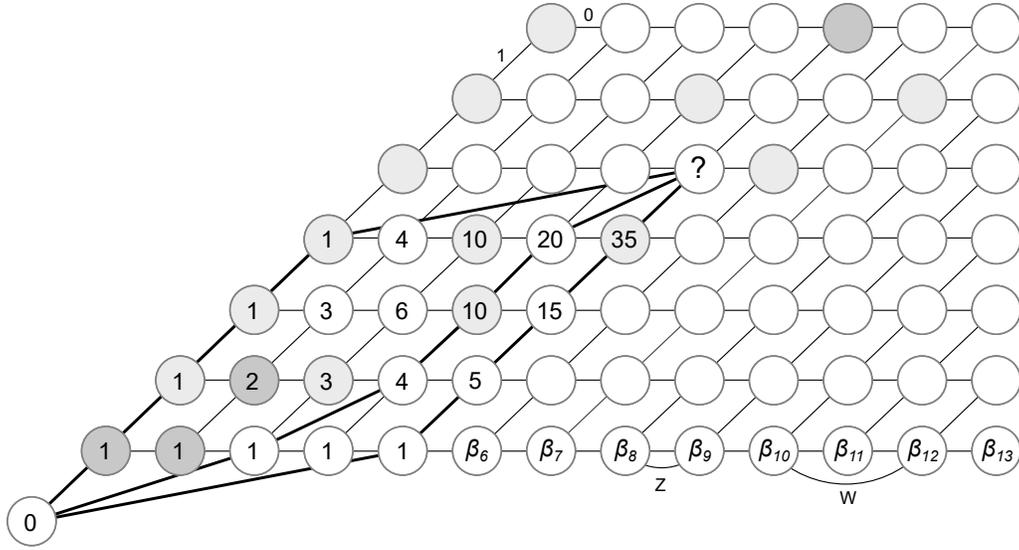


FIGURE 4 – Classe  $K_{dm}[9, 5]$  dans le réseau des classes  $K_{dm}$

Détaillons le contenu de la figure 4. Il y a d’abord les cercles qui représentent les nœuds. Pourquoi n’y en a-t-il pas partout ? Pour la bonne raison qu’il ne peut y avoir moins de divisions que de multiplications. Puis il y a le treillis des deux vecteurs unitaires  $U$  et  $Z$  qui correspondent, en haut à gauche, à 1 et 0. Cela permet de numéroter de façon immédiate en base 2 toutes les fonctions dont on peut voir le trajet en diagonales  $\beta_k$ . On



voir calculer aisément le cardinal de chacune des classes utiles que nous pouvons maintenant définir et représenter dans le réseau. Ces classes sont toutes des réunions de classes élémentaires  $K_{dm}$  déjà définies comme ensemble des fonctions qui correspondent à un même nombre  $d$  de divisions et un même nombre  $m$  de multiplications.

*Définition.* Classes  $K_d, K_m, K_t$  et  $K_k$  comme ensemble de fonctions ayant :

$K_d$	même nombre $d$ de divisions	(quelque soit $m \leq d$ )
$K_m$	même nombre $m$ de multiplications	(quelque soit $d \geq m$ )
$K_t$	même longueur $t = d + m$	( $t$ : temps de vol)
$K_k$	même cotangente $k = d/m$	( $k$ : kotangens)

Les propriétés du triangle de Pascal illustrées par la figure 5 permettent d'obtenir immédiatement le cardinal de chacune des classes, à ceci près que le triangle est placé à (1,1) plutôt qu'à (0,0); c'est pourquoi il faut soustraire d'une unité les valeurs de  $d$  et  $m$  dans les formules. Ainsi on a  $\text{card } K_d = 2^{d-1}$  et  $\text{card } K_t = F^{t-1}$  où  $F^n$  est le  $n^e$  nombre de Fibonacci. Évidemment, les classes  $K_m$  et  $K_k$  sont non finies. Quant à la classe élémentaire  $K_{dm}$  on a :

$$\begin{aligned} \text{card } K_{dm} &= \binom{d-1}{m-1} \\ &= (d-1)! / (d-m)! (m-1)! \end{aligned} \tag{40}$$

### 3.4 Les classes cotangentes $K_k$ et le paramètre $\mu_0$

On pourrait se demander quel peut bien être l'utilité du type de classe  $K_k$ . Revenons à la figure 4. Les quatre nœuds en gris plus foncé [1, 1], [2, 1], [3, 2] et [11, 7] correspondent aux classes qui contiennent, respectivement, les quatre cycles connus de  $3n + 1$ , soient  $(-1)$ ,  $(1)$ ,  $(-5 \ -7)$  et  $(-17 \dots -91)$ . En gris plus pâle on trouve les classes qui correspondent aux spirales, qui sont tout simplement les multiples des cycles élémentaires. On a vu un exemple dans la table 2. Pour  $c = 37$  dans la classe  $K_{dm}[6, 3] \equiv K_{dm} 3[2, 1]$  on retrouve le cycle  $(1)$  qui fait 3 tours. Les spirales d'un cycle dans  $K_{dm}$  recouvrent toute la classe cotangente  $K_k[d/m]$ . Ainsi :

$K_{dm}[1, 1]$	cycle $(-1)$	$K_k[1]$	spirales $(-1)$
$K_{dm}[2, 1]$	cycle $(1)$	$K_k[2]$	spirales $(1)$
$K_{dm}[3, 2]$	cycle $(-5 \ -7)$	$K_k[3/2]$	spirales $(-5 \ -7)$
$K_{dm}[11, 7]$	cycle $(-17 \dots -91)$	$K_k[11/7]$	spirales $(-17 \dots -91)$

Mais l'utilité des classes cotangentes  $K_k$  va bien au-delà de l'illustration des cycles et spirales. On a vu que les classes  $K_{dm}$  possèdent une caractéristique importante, le  $\delta$ , qui a permis de découvrir les cycles universels de  $pn + \delta$  dont dérivent, très rarement, des cycles non triviaux lorsque  $qc \text{ mod } \delta = 0$ . Les minima relatifs de  $\delta$  permettent aussi de distinguer [4.5] les réduites de  $\log_2(3)$  comme sites potentiels de cycle non trivial. Les classes  $K_k$

possèdent une caractéristique encore plus importante à ce point de vue, le paramètre  $\mu_0$ . Il permet de discriminer plus finement et d'affirmer de manière plus péremptoire. Par exemple, il ne peut y avoir de cycle pour  $d/m > 2$  ou encore  $d/m < 3/2$  sauf  $(-1)$ .

On va aborder ce paramètre  $\mu_0$  de manière heuristique à partir des triplets avant de le considérer de manière plus formelle pour en découvrir les propriétés. On recherche pour  $K_{dm}$  parmi les réels positifs une valeur cyclique centrale  $c_0$  universelle. On va donc supposer qu'au lieu de diviser par 2, un certain nombre de fois à chaque étape, on va diviser par un nombre réel  $x$ , une seule fois par étape, et constituer un trajet virtuel optimal unique vers le nœud  $[d, m]$ . On a ainsi :

$$\begin{aligned} \langle 2^d, p^m, -qc_0 \rangle &= \langle x, p, -q \rangle^m \\ &= \langle x^m, p^m, -q(x^m - p^m)/(x - p) \rangle \end{aligned} \quad (41)$$

Ainsi on a :

$$x = 2^{d/m} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} c_0 &= (2^d - p^m)/(2^{d/m} - p) \\ &= \delta/(2^{d/m} - p) \end{aligned} \quad (43)$$

$$= \delta\mu_0 \quad (44)$$

où on a inséré  $\mu_0$  qui correspond à la *définition* qui suit :

$$\boxed{\mu_0 = (2^{d/m} - p)^{-1}} \quad (45)$$

C'est de cette manière qu'il a été aperçu. Mais ça aurait pu se faire autrement. Soit une suite montante d'impairs  $(n_i)_m = (n_1, n_2, \dots, n_m)$ . On pose pour obtenir une valeur centrale  $n_0$

$$\prod_{i=1}^m \frac{pn_i + q}{n_i} = \left( \frac{pn_0 + q}{n_0} \right)^m \quad (46)$$

Si la suite  $(n_i)_m$  est cyclique, le suivant du dernier est le premier, alors les  $n_i$  se simplifient tous en laissant un résidu  $2^{d_i}$  car  $pn_i + q = 2^{d_i}n_{i+1}$ . Et le produit des résidus est  $2^d$ .

$$2^d = \left( \frac{pn_0 + q}{n_0} \right)^m \quad (47)$$

$$2^{d/m}n_0 = pn_0 + q \quad (48)$$

$$n_0 = q\mu_0 \quad (49)$$

où se retrouve le paramètre  $\mu_0$  défini en (45) qui caractérise la classe cotangente  $K_k[d/m]$ . Distinguons bien  $n_0$  et  $c_0$  et explicitons leur lien. La valeur  $n_0$  est le centre d'un cycle

numérique normal de  $pn + q$  alors que la valeur  $c_0$  est le centre d'un cycle virtuel universel de  $pn + \delta$  dont les valeurs  $n$  sont les paramètres  $c_i$  de la classe  $K_{dm}$  et aussi les valeurs d'un cycle normal lorsque  $\delta = q$ . Le lien est celui-ci

$$c_0 = \delta n_0 \tag{50}$$

### 3.5 La fonction $\mu$ et le centre d'équilibre

Le paramètre  $\mu_0$  a été défini de manière heuristique en (45) comme « centre » d'une classe cotangente sans présumer d'une quelconque propriété de ce centre. On va maintenant examiner comment se répartissent des valeurs cycliques  $(n_i)_m$  autour de la valeur réelle centrale  $n_0 = q\mu_0$ . Généralisons à ce propos l'usage des paramètres  $\mu_0$  grâce à la

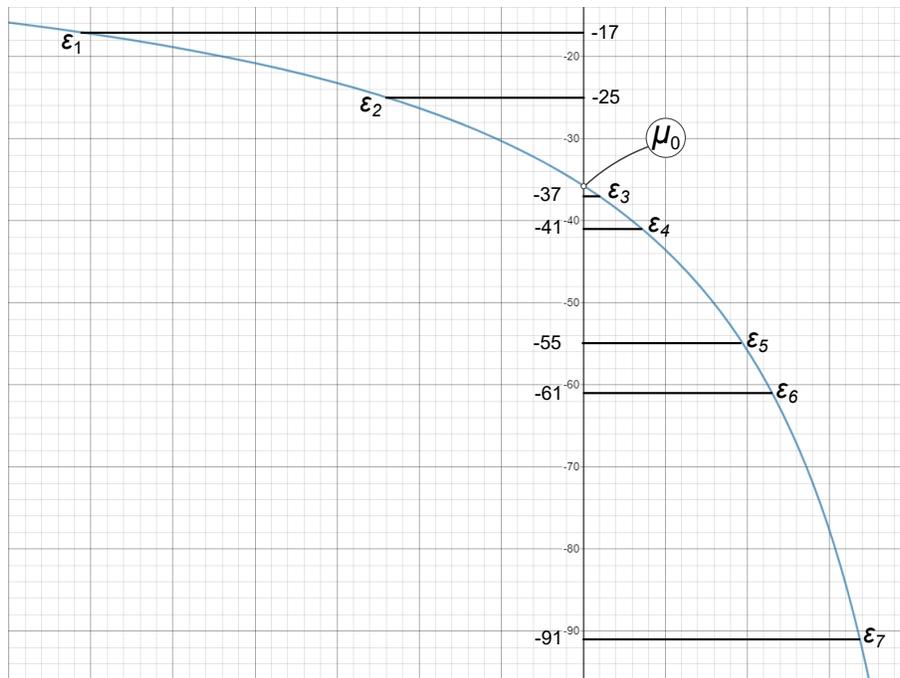


FIGURE 6 – Répartition des valeurs cycliques autour de  $k = d/m$

fonction génératrice de  $\mu_0$  à partir des cotangentes  $d/m$ . *Définition.*

$$\boxed{\mu(x) = (2^x - p)^{-1}} \tag{51}$$

Ainsi donc, pour la classe  $K_k$  des classes  $K_{dm}$  ayant le même rapport  $k = d/m$ , on a :

$$\mu_0 = \mu(k) = \mu(d/m) \tag{52}$$

À travers cette fonction  $\mu$  on va répartir les valeurs  $(n_i)_m$  autour du centre en fonction des écarts à la cotangente  $k = d/m$ . On peut mettre en évidence dès lors la propriété qu'illustre la figure 6 en démontrant que le poids des écarts est égal, de part et d'autre du centre, et qu'ainsi leur somme algébrique est nulle. Soit donc

$$n_i = q\mu(k + \epsilon_i) \quad (53)$$

$$n_i = q/(2^{k+\epsilon_i} - p)$$

$$2^{k+\epsilon_i} - p = q/n_i$$

$$2^{k+\epsilon_i} = \frac{pn_i + q}{n_i} \quad (54)$$

Alors en sommant les  $m$  valeurs  $(n_i)_m$  du cycle

$$\prod_{i=1}^m 2^k \prod_{i=1}^m 2^{\epsilon_i} = \prod_{i=1}^m \frac{pn_i + q}{n_i} \quad (55)$$

$$2^d \prod_{i=1}^m 2^{\epsilon_i} = 2^d \quad (56)$$

Le premier  $2^d$  vient de  $k = d/m$  et le second, comme on l'a déjà vu en (47), du fait que  $(n_i)_m$  est cyclique. D'où il résulte

$$\prod_{i=1}^m 2^{\epsilon_i} = 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^m \epsilon_i = 0} \quad (57)$$

Dans la figure 6, les écarts ont été multipliés par  $2^{12}$ , afin de bien visualiser, mais ces écarts sont en fait inférieurs à 1% de part et d'autre de la cotangente. Voici une façon de s'en faire une image. Le nombre de diviseurs est  $d = mk$ . Pour le cycle  $(-17 \dots -91)$  le nombre de diviseurs vaut 11. Pour l'écart maximal à  $-17$  c'est comme si le nombre de diviseurs était descendu à environ 10.895 selon le résultat du calcul suivant

$$m(k + \epsilon_1) = m \log_2(p - 1/n_1) = 7 \log_2(3 - 1/17)$$

Dans le cas des cycles simples, à un seul impair, il n'y a pas d'écart et la valeur est tout simplement  $q\mu(d/m)$  ou  $q\mu_0$ . Dans  $3n + 1$  on a les deux cycles simples :

$$\mu(1) = (2^1 - 3)^{-1} = -1$$

$$\mu(2) = (2^2 - 3)^{-1} = 1$$

On retrouve ces deux cycles dans la figure 7 qui illustre les contraintes, déjà évoquées, qu'implique le paramètre  $\mu_0$  des classes cotangentes. D'abord, du côté droit, on comprend que si la cotangente  $k = d/m$  dépasse 2 le  $\mu_0$  est inférieur à 1 et ainsi aucun cycle n'est possible. Cette zone est en gris pâle sur la figure. Du côté gauche, la cotangente  $k$  ne peut être plus petite que 1 car il ne peut y avoir plus de multiplications que de divisions. Cette zone est en gris plus foncé sur la figure. Entre le  $k = 1$  du cycle  $(-1)$  et le  $k = 3/2$  du cycle  $(-5 - 7)$ , les deux seules valeurs entières possibles sont  $-1$  et  $-5$ , les multiples de 3 ne pouvant faire partie d'un cycle. Or 1 et 5 appartiennent déjà à un cycle. En première

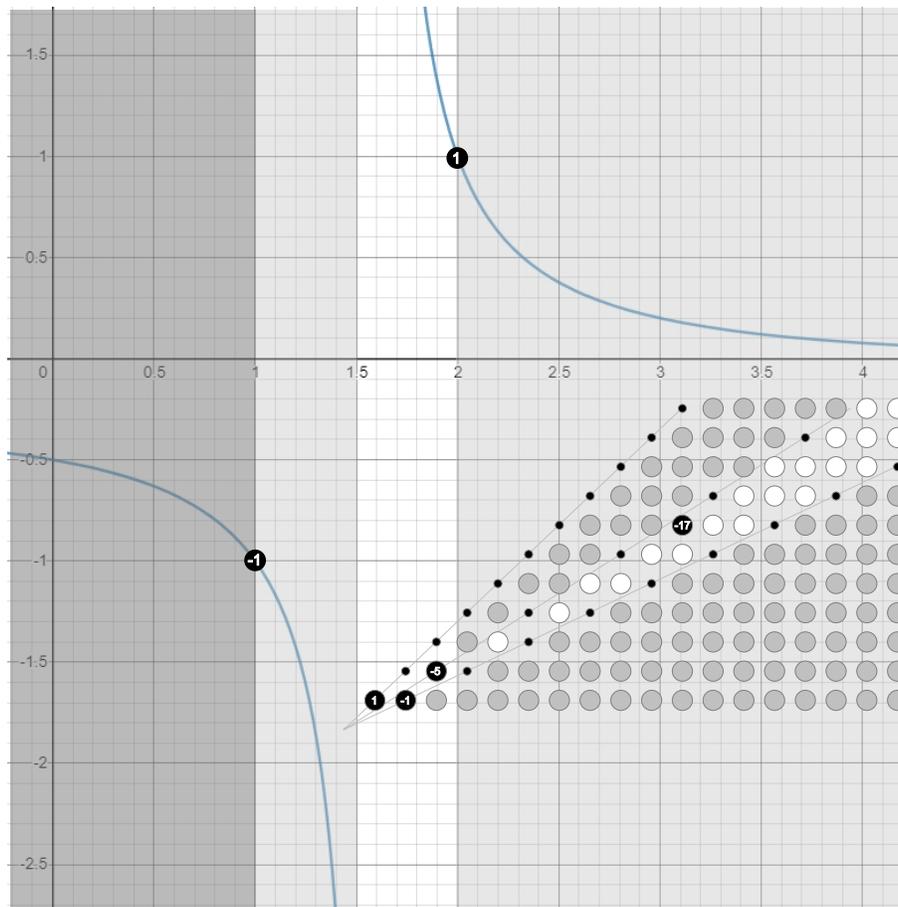


FIGURE 7 – Fonction  $\mu$  dans la région des cycles simples  $-1$  et  $1$

approximation, il ne peut y avoir d'autres cycles possibles que dans la zone blanche de la figure. C'est là qu'on trouve le cycle débutant à  $-17$ . On verra dans la figure 9 que la zone blanche, pour d'éventuels cycles inconnus, se réduit en fait à une ligne extrêmement fine autour de la valeur  $k = \log_2(3)$ .

On voit aussi dans la figure 7 une image superposée au graphique du réseau des classes  $K_{dm}$  où se retrouvent les mêmes zones, gris pâle et blanche, que dans le graphique. On aperçoit aussi les quatre cycles et les spirales.

### 3.6 Diverses méthodes de calcul des cycles universels

De même qu'on a compris l'utilité des classes  $K_k$  on va comprendre ici l'utilité des classes  $K_m$ . Mais on va d'abord passer en revue les moyens utilisés jusqu'ici et montrer d'autres méthodes de calcul dans les cas simples. Après quoi on verra une propriété importante des classes  $K_m$  et la méthode qu'elle induit pour un calcul très simple des paramètres  $c$  d'une classe  $K_m$  dont l'ensemble n'est pas fini.

On a vu jusqu'ici qu'à partir d'un trajet donné on peut calculer le paramètre  $c$  de la fonction  $\omega$  à l'aide de la formule (34) qui est suivie d'un exemple de  $K_{dm}[11,7]$ . Il y a aussi l'exemple de  $K_{dm}[6,3]$  dans la table 1 où on a le calcul cette fois de toutes les valeurs  $c$  de la classe et celui de leur suite numérique minimale. On a vu également en [1.8] que si on connaît le paramètre  $c$  d'une fonction de la classe  $K_{dm}$  on peut obtenir tous ceux qui correspondent à la rotation de la chaîne des  $\beta_k$  simplement en lui appliquant, avec le  $\delta$  de la classe, la procédure  $pn + \delta$  qui forme un cycle universel de  $m$  valeurs  $c$  (pas forcément distinctes si on est dans une spirale). Voyons la première méthode.

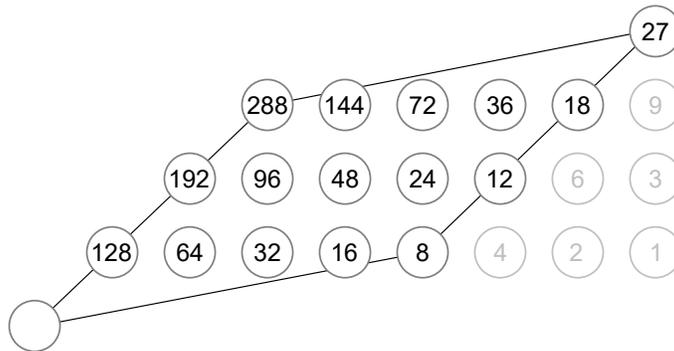


FIGURE 8 – Calcul des paramètres  $c$  en sommant sur les trajets

Supposons qu'on ait à calculer les 35 paramètres  $c$  de la classe  $K_{dm}[8,4]$ . Si on utilise la formule (34) on va devoir refaire plusieurs fois les mêmes produits  $2^x 3^y$ . Dans l'environnement réseau on peut disposer tous ces produits le long des trajets de sorte qu'on ait simplement à additionner les composantes rencontrées sur le trajet. La figure 8 illustre ce procédé.

On peut facilement dans un cas aussi simple faire tous les trajets en ordre. On commence par le trajet minimal ( $8 + 12 + 18 + 27 = 65$ ). On effectue alors les déplacements minimaux : 8 devient 16 et donc ( $16 + 12 + 18 + 27 = 73$ ). Puis 12 devient 24 et donc ( $16 + 24 + 18 + 27 = 85$ ). Et ainsi de suite jusqu'à ( $128 + 192 + 288 + 27 = 631$ ).

Il est simple également de décrire les trajets minimaux en exceptant leur rotation. On peut alors calculer les valeurs  $c$  correspondantes avec la formule 34, et trouver ensuite celles qui appartiennent au même cycle universel en appliquant la procédure  $pn + \delta$ . La table 4 illustre l'exemple de  $K_{dm}[8, 4]$ .

$(d_i)_4$	35 rotations	$(\sigma_i)_4$
5111	4	3210
4211 4121 4112	$4 + 4 + 4 = 12$	4210 4310 4320
3311 <span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">3131</span>	$4 + 2 = 6$	5210 5410
3221 3212 3122	$4 + 4 + 4 = 12$	5310 5320 5420
<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">2222</span>	1	6420

TABLE 4 – Description des trajets minimaux de  $K_{dm}[8, 4]$

Voyons à présent une remarquable propriété des classes  $K_m$ . Toutes les valeurs  $c$  de la classe  $K_{dm}[d, m]$  sont incluses dans la classe  $K_{dm}[d + 1, m]$  et on en retrouve au moins une dans chacun des cycles universels de cette dernière. La table 5 illustre le cas  $K_m[4]$ . Les valeurs de  $c$  qui sont des reprises sont mises en évidence. Ainsi on peut construire

-65	-49	$\delta$	-17		$\delta$	47			
65	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">65</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">65</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">73</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">85</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">65</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">73</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">85</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">103</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">101</span>
65	73	89	101	119	121	133	151	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">89</span>	175
65	85	125	143	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">85</span>	205	223	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">125</span>	157	143
65	103	179	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">103</span>	119	331	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">179</span>	211	259	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">119</span>
$\delta$		175							
<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">65</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">73</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">85</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">103</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">101</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">119</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">125</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">143</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">89</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">175</span>
185	197	215	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">121</span>	229	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">133</span>	275	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">151</span>	221	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">175</span>
325	383	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">205</span>	269	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">225</span>	287	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">125</span>	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">157</span>	419	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">175</span>
635	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">331</span>	395	491	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">211</span>	259	275	323	229	<span style="border: 1px solid black; padding: 1px;">175</span>

TABLE 5 – Génération des paramètres  $c$  de la classe  $K_m[4]$

de manière ordonnée toutes les valeurs  $c$  de  $K_m$  seulement en appliquant la procédure de Collatz avec  $pn + \delta$ . Il faut seulement calculer les  $\delta = 2^d - p^m$  successifs des classes  $K_{dm}$  en débutant par  $K_{dm}[m, m]$  dont la valeur  $\delta = 2^m - p^m$ . Il faut aussi calculer le germe, la

première valeur de  $c$ , à la manière de la figure 8. En  $3n + 1$  c'est simple, c'est l'inverse du premier  $\delta$  car on se trouve dans la spirale  $-1$ , la valeur  $c$  étant divisible par le  $\delta$ .

## 4 Examen du cas particulier $3n + 1$

### 4.1 Les acquis de $pn + q$

Où en sommes-nous ? On a construit dans le cadre de  $pn + q$  le monoïde libre des fonctions de transition  $\omega$  entre les impairs d'une même suite numérique, et on a représenté ces fonctions, soit comme des nœuds dans un arbre binaire d'énumération, soit comme des trajets dans un réseau de classes  $K_{dm}$ . Cela a permis de découvrir les cycles universels de rotation des trajets en utilisant  $pn + \delta$  avec des valeurs  $n$  qui sont les paramètres  $c$  des fonctions  $\omega$ . Et découvrir surtout que les cycles non triviaux en dérivent, quoique très rarement et de manière sporadique, lorsque les valeurs  $c_i$  d'un cycle  $(c_i)_m$  sont divisibles par le  $\delta$  de la classe. L'autre acquis majeur est la fonction  $\mu$  qui détermine le centre  $\mu_0$  des classes cotangentes et permet de sélectionner le peu de classes pouvant posséder un cycle.

Avec de tels outils en main, on va chercher à présent à mieux cerner ce qui rend difficile la tâche de démontrer la véracité ou non de la conjecture de Collatz, ou celle de Kakutani qui s'étend aux entiers négatifs. Toutefois on utilisera encore  $p$  au lieu de 3 chaque fois qu'une proposition s'avérera générale.

### 4.2 Lien avec le cycle des quintes

La cotangente limite qui sépare les valeurs négatives des valeurs positives dans la fonction  $\mu$  définie en (51) est l'asymptote verticale  $k = \log_2(p)$ . Aucun nombre rationnel ne coïncide avec  $\log_2(p)$  car  $p$  est impair. Par contre, on peut déterminer ses approximations rationnelles successives à partir de sa fraction continue. Dans le cas de  $p = 3$  la fraction continue de  $\log_2(3)$  est :

$$[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 23 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \dots]$$

On n'utilisera pas seulement les meilleures approximations, les réduites, qui correspondent aux tronçages successifs de la fraction continue tels que

$$[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2] = 27/17$$

$$[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3] = 84/53$$

mais aussi les valeurs intermédiaires, comme ici, complétant dès lors la montée pas à pas dans l'arbre de Stern-Brocot

$$[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 1] = 46/29$$

$$[1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 2] = 65/41$$

Comme alternative à la façon d'évaluer une fraction continue telle que

$$[11121] = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1)))) = 19/12$$

on peut utiliser les matrices comme déjà vu en [2.7] :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^1 \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

En sommant les colonnes de la dernière matrice on obtient 19/12. Les réduites précédentes, ici  $\{ 1/1, 2/1, 3/2, 8/5 \}$ , apparaissent aussi dans les colonnes des matrices.

Cette suite est très importante pour le cycle des quintes en musique. Longtemps avant d'avoir examiné sérieusement la question et d'avoir eu l'idée de l'approche algébrique, j'ai eu l'intuition que cette suite pouvait être liée à la conjecture de Syracuse. On va voir que les classes où les  $d/m$  font partie de cette suite se distinguent vraiment.

Regardons ça de près. Dans la table 6 qui illustre assez bien la croissance phénoménale de la suite, on peut déjà remarquer que les quatre cycles connus en  $3n + 1$  correspondent aux termes 1, 2, 3 et 6 de la suite. Les premiers sont des cycles triviaux car  $|\delta| = 1$ , mais le dernier, correspondant à 11/7, est non trivial. Il résulte du fait que le cycle des sept  $c_i$  débutant à 2363 est divisible par  $\delta = -139$ , d'où un cycle débutant à  $-17$ .

$d/m$	$c$ minimal	$ \delta $	$  \mu  $
1/1	1 1	1	1
2/1	1 1	1	1
3/2	5 1	6	6
5/3	19 5	6	6
8/5	211 13	37	37
11/7	2 059 139	36	36
19/12	527 345 7 153	295	295
27/17	129 009 091 5 077 565	147	147
46/29	68 629 840 493 971 1 738 366 812 781	386	386
65/41	36 472 994 178 147 530 851 420 491 770 248 316 829	1192	1192
84/53	19 383 245 658 672 820 642 055 731 40 432 553 845 953 101 497 907	8461	8461

TABLE 6 – Approximations rationnelles de  $\log_2(3)$  et paramètres pertinents

### *Petit intermède musical*

*En musique, le double de la fréquence de la tonique correspond à l'octave, et le triple de la fréquence, à la quinte du second octave. Dans la gamme occidentale l'écart en degrés entre la tonique (I) et l'octave (VIII) est 7 et l'écart jusqu'à la quinte du second octave est 11. Ainsi au*

rapport des fréquences  $3/2$  correspond le rapport des degrés  $11/7$ . Dans la gamme chinoise le rapport des degrés est  $8/5$ ; dans le tempérament usuel 12 le rapport des demi-tons est  $19/12$ ; enfin dans l'excellent tempérament 53 le rapport est  $84/53$ . Ces rapports privilégiés musicalement correspondent aux termes 5, 6, 7 et 11 de la suite illustrée dans la table 6.

### 4.3 Peut-on exclure les classes $K_{dm}[d, m]$ dont le ratio $d/m$ est réductible ?

Avant d'illustrer à l'aide du réseau des classes  $K_{dm}$  l'importance de la suite des approximations rationnelles de  $\log_2(3)$ , il faut aborder un autre aspect des classes cotangentes  $K_k$  qu'il aurait été peut-être prématuré d'évoquer avant qu'on puisse en percevoir concrètement l'utilité.

On peut voir, dans le tableau 5, que la classe  $K_m[4]$  contient une spirale de chacun des cycles triviaux. (Les spirales de l'autre cycle se retrouveront dans les classes  $K_m[m]$  où  $m$  est divisible par 7). Avec  $\delta = -65$  on a la spirale  $(c_i)_4 = (65 \ 65 \ 65 \ 65)$ ; avec  $\delta = -17$  on a la spirale  $(c_i)_4 = (85 \ 119 \ 85 \ 119)$ ; enfin avec  $\delta = 175$  on a la spirale  $(c_i)_4 = (175 \ 175 \ 175 \ 175)$ . Le second cas illustre mieux ce que l'on sait théoriquement :  $(85 \ 119 \ 85 \ 119) / -17 = (-5 \ -7 \ -5 \ -7)$ .

Mais qu'il induise ou non un cycle  $(n_i)_m$  dans  $pn + q$ , tout cycle de paramètres  $(c_i)_m$  dans  $K_{dm}[d, m]$  induit une suite de spirales dans la classe  $K_k[d/m]$  des classes  $K_{dm}[gd, gm]$ . Mais ceci n'implique pas de manière évidente que d'autres cycles ne peuvent pas exister plus loin qui soient des cycles simples à un seul tour, puisque le nombre de valeurs  $c$  sans lien avec les premiers va grandissant. C'est pourtant le cas mais il faut le démontrer. Ceci va nous fournir un moyen auxiliaire de sélection, la conséquence étant qu'il sera suffisant de ne considérer que les classes  $K_{dm}$  où  $d$  et  $m$  sont relativement premiers, en somme uniquement les couples  $(d, m)$  qui correspondent aux valeurs  $d/m$  qu'on retrouve dans l'arbre de Stern-Brocot. Alors place à la démonstration.

### 4.4 Preuve d'inexistence d'un cycle simple dans une classe réductible

Considérant d'abord les  $\delta$  d'une classe cotangente  $K_k$ , posons  $\delta_1 = \delta[d, m] = 2^d - p^m$  et  $\delta_g = \delta[gd, gm] = 2^{gd} - p^{gm}$ . Puisque  $a^n - b^n$  est divisible par  $a - b$ , alors il existe un entier  $h_g = (2^{gd} - p^{gm}) / (2^d - p^m)$  tel que

$$\delta_g = \delta_1 h_g \tag{58}$$

Un élément  $c_i$  d'un cycle paramétrique de  $K_{dm}[gd, gm]$  appartient à une spirale de  $K_{dm}[d, m]$  si et seulement si  $c_i$  est divisible par  $h_g$ . Alors si on suppose qu'il existe un cycle simple dans  $K_{dm}[gd, gm]$  qui soit divisible par  $\delta_g$  de sorte qu'il induise un cycle  $(n_i)_{gm}$  dans  $pn + q$ , il est forcément divisible par  $h_g$  car  $\delta_g = \delta_1 h_g$ , et alors il n'est pas simple, il est une spirale à  $g$  tours qui correspond à un cycle paramétrique de  $K_{dm}[d, m]$ . Finalement, dans la recherche de nouveaux cycles, on peut donc oublier toutes les classes  $K_{dm}[d, m]$  où  $d$  et  $m$

ne sont pas relativement premiers et s'en tenir à l'arbre de Stern-Brocot pour les rapports  $d/m$  pertinents.

#### 4.5 Les approximations rationnelles de $\log_2(3)$ dans le réseau des classes

Illustrons dans le réseau des classes  $K_{dm}$  la pertinence de la suite des approximations rationnelles de  $\log_2(3)$ . La figure 9 couvre les classes jusqu'à  $(d, m) = (19, 12)$  de sorte qu'il contient les sept premiers termes de la table 6 qui en contient onze. Les vides dans le réseau correspondent aux classes réductibles qui ne peuvent contenir un nouveau cycle. En admettant l'existence des trois cycles triviaux, la fonction  $\mu$  permet d'éliminer toutes les classes positives dont  $\mu(d/m) < 5$  et les classes négatives dont  $\mu(d/m) > -11$ , car les seules valeurs cycliques  $|n|$  possibles sont 1, 5, 7, 11, 13, 17...

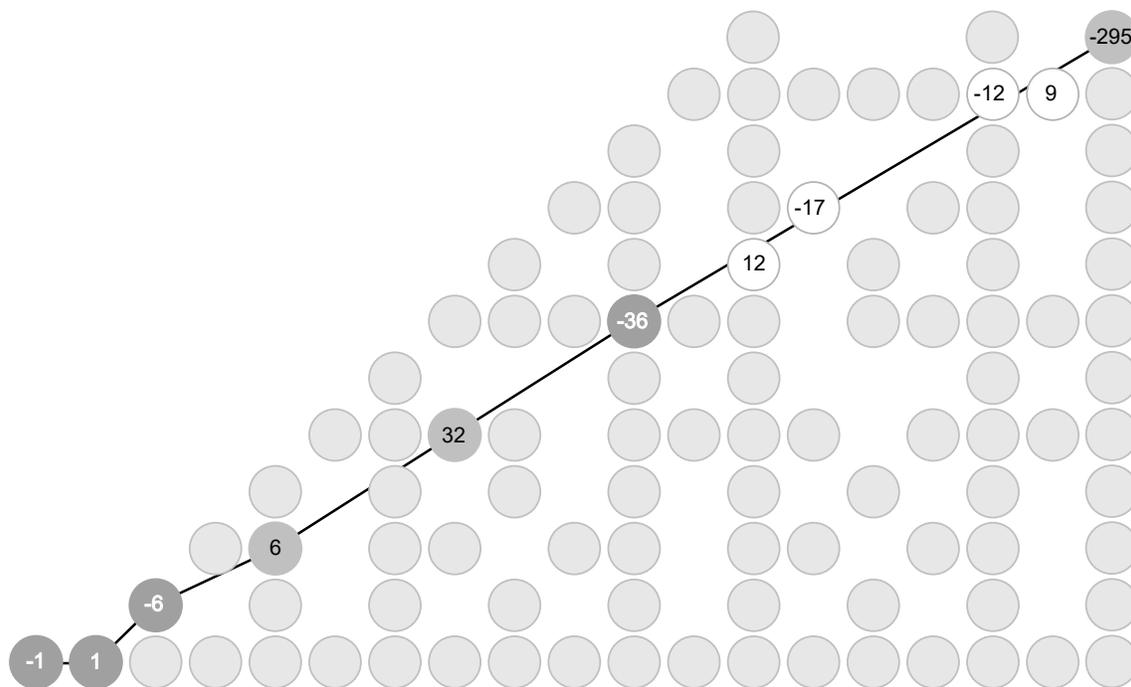


FIGURE 9 – Le paramètre  $\mu$  dans les classes cotangentes initiales

Il ne reste donc que 11 classes possibles. Les sept en gris foncé reliées par une ligne de l'une à l'autre correspondent aux sept premiers termes  $d/m$  de la suite des approximations rationnelles de  $\log_2(3)$ . La valeur  $\mu$  arrondie est en blanc pour les quatre cycles connus et en noir pour les autres. Quant aux quatre cercles blancs, ces classes n'ont pas été éliminées par la faible contrainte de l'existence des trois cycles triviaux.

Ceci vaut pour la partie initiale du réseau, mais on se doute bien qu'en prolongeant le

nombre de cercles blancs va grandir. Mais on va se doter d'un troisième critère et montrer à quel point les termes de la suite se distinguent bien de ceux qui l'entourent.

#### 4.6 Usage d'un calcul de probabilité comme critère de distinction

Du fait qu'on n'observe pas de régularité à propos du reste de la division du paramètre  $c$  par  $\delta$ , on est conduit à estimer une simple probabilité que ce reste soit nul et entraîne l'existence d'un cycle. Cette probabilité ne peut être objective puisque les valeurs sont déterminées. On va juste supposer qu'un reste est équivalent à un autre pour l'unique raison que je n'ai pas pu faire de distinction. Les valeurs estimées seront alors comparées entre elles afin de mettre en évidence le caractère particulier des classes qui correspondent à la suite des approximations rationnelles de  $\log_2(3)$ . Après avoir vu le mode de calcul, on va comparer la « probabilité » rattachée à la classe  $K_{dm}[84, 53]$  à celle des classes voisines où  $d$  varie de 82 à 86 et  $m$  varie de 51 à 55. On complétera ensuite l'exemple avec  $\mu_0$  et  $\delta$ .

On suppose donc que les  $\delta$  valeurs possibles  $r_i = c_i \bmod \delta$  sont équiprobables. Par ailleurs, on sait que si un paramètre  $c_i$  est divisible par  $\delta$  ce sont les  $m$  valeurs du cycle  $(c_i)_m$  qui sont divisibles, et autrement aucune n'est divisible. Le nombre des « essais » correspond donc au nombre de classes. Ce nombre correspond précisément au nombre de fonctions de la classe divisé par le nombre  $m$  d'éléments dans le cycle quand  $d$  et  $m$  sont relativement premiers et qu'ainsi la classe ne contient pas de spirale. Exprimons d'abord la probabilité  $P_{non}$  qu'il n'y ait pas de cycle dans une classe  $K_{dm}[d, m]$  :

$$P_{non} = \left(1 - \frac{1}{2^d - p^m}\right)^{\frac{1}{m} \binom{d-1}{m-1}} \quad (59)$$

La probabilité qu'il y ait au moins un cycle dans cette classe est  $P_{oui} = 1 - P_{non} = 1/N$ . La valeur  $1/N$  qui se dit « une chance sur  $N$  » est plus parlante que les suites de décimales des valeurs  $P_{non}$  et  $P_{oui}$ . C'est le nombre  $N$  qui apparaît dans la table 7. On y voit clairement

4 044 932	1 341 819	441 311	.	35 977
.	208 151	.	11 1148	.
94 851	23167	37	6552	7641
.	4 480	.	6 810	.
5 901	6 455	.	5 048	4 280

TABLE 7 – Probabilités autour de la classe  $K_{dm}[84, 53]$

que la « probabilité » d'un cycle pour l'approximation rationnelle  $84/53$  est au moins 115 fois plus élevée que pour les classes voisines de ratio irréductible.

Complétons cet exemple du caractère distinctif de  $K_{dm}[84, 53]$  avec les deux autres paramètres de sélection  $\delta$  et  $\mu$ . Quoique la croissance de  $\delta$  dans la table 6 ait l'allure d'une double exponentielle, les réduites correspondent alternativement aux minima positifs et négatifs successifs du  $\delta$ . Ce qui est comparé dans la table 8 ce sont les rapports (arrondis et en valeur absolu) du  $\delta$  de la classe à celui de la classe de référence  $K_{dm}[84, 53]$ . On voit que les  $\delta$  des classes voisines de la réduite sont beaucoup plus grands. Pour  $\mu_0$  c'est l'inverse. Les valeurs voisines (arrondies et en valeur absolue) sont beaucoup plus faibles.

4195	4075	3386	.	2401	5	6	8	.	23
.	1199	.	481	.	.	10	.	44	.
360	240	1	477	1434	13	26	8461	25	13
.	79	.	796	.	.	43	.	9	.
66	186	.	904	1860	21	11	.	6	5

TABLE 8 – Valeurs comparées  $\delta$  et  $\mu$  autour de la classe  $K_{dm}[84, 53]$

#### 4.7 Inflation numérique

La suite des approximations rationnelles de  $\log_2(3)$  permet donc de distinguer les classes susceptibles de posséder un cycle. Ce qui se passe avec les petites valeurs  $d/m$  jusqu'à  $84/53$  montre bien la cohérence et la validité jusqu'ici de cette distinction.

Mais à cette étape de la 6<sup>e</sup> réduite  $84/53$  on peut se demander si on est près d'un ordre de grandeur pertinent pour l'émergence d'un nouveau cycle. La longueur des suites de Collatz dans la classe  $K_{dm}[84, 53]$  est seulement de 137 et déjà les valeurs numériques peuvent avoisiner  $2^{84}$  dans les suites minimales. Or on aurait vérifié à ce jour l'absence de nouveau cycle pour tous les nombres allant jusqu'à  $5 \cdot 10^{20}$  ou encore  $2^{66}$ . En apparence, l'écart  $2^{18}$  semble nous situer confortablement en zone pertinente et serait, dans un cas, associé à la probabilité d'existence d'un cycle non négligeable de 1 sur 37.

Mais c'est vite oublier le rôle sélectif de  $\mu_0$ . Que signifie ce paramètre? S'il existe un cycle dans la classe  $K_{dm}[84, 53]$ , alors les 53 valeurs numériques impaires se répartissent autour du centre  $\mu_0$ , et il y a forcément des nombres qui sont inférieurs à cette valeur centrale qui vaut, à cette étape, à peu près 8461.

C'est ce nombre  $\mu_0$  qui doit excéder  $10^{20}$  pour qu'il puisse y avoir un nouveau cycle. La puissance de calcul nécessaire pour atteindre une valeur aussi élevée pour ce paramètre dépasse très largement celle d'une calculatrice. Les calculs ont donc été limités à ceux de la 6<sup>e</sup> à la 13<sup>e</sup> réduite. Et pour rendre ce calcul possible il a fallu user d'une approximation dont l'erreur est à peu près 1% à  $84/53$  mais tout à fait négligeable avec les grands nombres.

Soit  $e$  le nombre des « essais » qui est le nombre de cycles dans le calcul de  $P_{non}$ .

$$P_{non} = \left(\frac{\delta - 1}{\delta}\right)^e = 1 - \binom{e}{1}\delta^{-1} + \binom{e}{2}\delta^{-2} - \dots \quad (60)$$

$$\begin{aligned} 1/N = P_{oui} &\cong e\delta^{-1} \\ N &\cong \delta/e \end{aligned} \quad (61)$$

La table 9 illustre la chute déjà vertigineuse de la « probabilité » d'un cycle aux étapes accessibles à la calculatrice. Étant donné la croissance au moins exponentielle des valeurs, ce sont les logarithmes des valeurs qui sont comparées :  $d + m$  pour la longueur du cycle de Collatz,  $\mu_0$  pour le centre de ce cycle potentiel et  $N$  pour l'inverse de la probabilité. La dernière colonne où ne paraît que la valeur 20 est celle qu'on aurait voulu atteindre.

$n^e$ réduite	$6^e$	$7^e$	$8^e$	$9^e$	$10^e$	$11^e$	$12^e$	$13^e$	?
$\log(d + m)$	2.1	2.9	3.2	4.6	4.9	5.3	5.5	5.7	?
$\log(\mu_0)$	3.9	5.0	6.7	8.5	9.2	9.9	10	12	20
$\log(N)$	1.6	8.4	16.1	374	763	1897	2658	4458	?

TABLE 9 – Chute vertigineuse de la probabilité  $1/N$

Si les vérifications n'avaient pas déjà été faites jusqu'à un nombre qui avoisine  $10^{12}$  on aurait pu dire : pour qu'il existe un cycle à la  $13^e$  réduite, on a une chance sur

$$N = 10^{4458}$$

Convenons que ce n'est pas beaucoup. Mais on peut encore estimer, en gros, quelle valeur  $N$  pourrait être atteinte face à  $10^{20}$  à partir d'une observation dans les résultats de la table. De la  $9^e$  à la  $13^e$  réduite, les valeurs successives de  $\log \log N / \log \mu_0$  sont : ( 0.303, 0.309, 0.330, 0.342, 0.304 ). Et en faisant l'hypothèse que  $\log \log N / \log 10^{20} > 0.3$  on aurait une « probabilité » de l'ordre de

$$1 / 10^5 \text{ million}$$

Cette fois, si ce n'est pas encore zéro ça lui ressemble. On n'a jamais vu personne s'enrichir au jeu avec cet excès de chance.

#### 4.8 Au terme de cet essai

Il n'a jamais été question au cours de cette recherche de tenter de prouver la conjecture de Syracuse. Je n'ai jamais eu en vue que la compréhension du problème. J'ai exploré en cherchant à ordonner et à dégager des schémas, des règles, des formalismes... de sorte

que le seul impondérable du problème  $3n + 1$  s'est retrouvé mis à nu. Et le but de l'article était seulement de rendre compte de cette recherche, des trouvailles et résultats formels. Je ne connaissais pas encore la fécondité de l'écriture. Le meilleur a surgi au fil de l'écrit, par exemple les cycles universels et dérivés et la formulation d'un calcul de probabilité.

Et je me retrouve à la toute fin, avec des résultats de calcul auxquels, je ne m'attendais pas du tout, qui peuvent appuyer une argumentation à propos de la conjecture. Mais je n'entrerai pas dans une discussion qui dépasse le cadre de cet article. Il y a encore trop à explorer et à vérifier pour entrer dans le club des chercheurs de preuves.

Tout le calcul des « probabilités » ici repose sur l'hypothèse que les  $c_i$  dans les cycles universels et les  $\delta$  qui les produisent sont indépendants, de sorte que les valeurs  $c_i \bmod \delta$  sont équiprobables. Et pourtant...

J'ai jeté un œil sur un seul cas : les  $c_i$  de la table 5 associés au  $\delta = 47$  de  $K_m[4]$ . Les 47 cases (modulo 47) vont de 31 à 30 en passant par la case 0 qui aurait entraîné l'existence d'un cycle. Les points représentent les valeurs  $c_i \bmod 47$  associées au contenu de la table 5. Ce n'est pas là l'image que l'on peut avoir d'une distribution tout à fait au hasard, par contre, la façon de disposer a été choisie pour accentuer la séparation des zones vides et pleines. Y a-t-il là matière à explorer qui permettrait d'aller plus loin? Quoi qu'il en soit ça excède le cadre de cet essai.

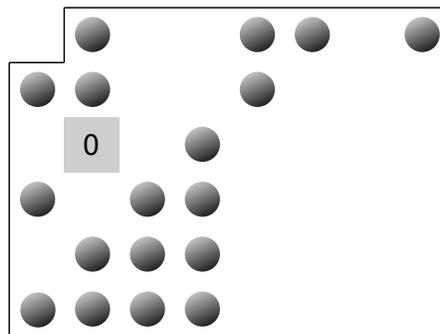


FIGURE 10 – Distribution des  $c_i \bmod 47$  dans  $K_m[4]$

L'important dans cet essai est le parcours intuitif. J'ai affirmé, par exemple, sans le démontrer que les cycles paramétriques universels sont des cycles de rotation. Dans ce contexte intuitif, l'évidence de la chose est suffisante. Mais j'ai préparé, pour un article subséquent, *Cycles universels et cycles dérivés en  $3x + 1$  généralisé*, une démonstration qui utilise la variable  $k$  au lieu du nombre 2, en vue de mettre en évidence ce qui est le plus important, le caractère purement algébrique de cette rotation.

Face une propriété apparemment nouvelle comme les cycles paramétriques universels, on peut se demander comment est-on arrivé à la découvrir? Cet essai peut répondre à plusieurs questions de ce genre.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Approche arithmétique habituelle . . . . .	2
1.2	Problème $3n + 1$ généralisé . . . . .	3
1.3	Structure d'ordre et énumération . . . . .	3
1.4	Arbre d'impairs : branches et nœuds . . . . .	4
1.5	Du numérique à l'algébrique . . . . .	6
1.6	Monoïde des fonctions entre impairs d'une même suite . . . . .	6
1.7	Premier fruit de l'approche : critère d'un cycle . . . . .	7
1.8	Cycles fondamentaux vs cycles dérivés . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Calculs et démonstrations</b>	<b>9</b>
2.1	L'opérateur triplet . . . . .	9
2.2	Les deux formules de base des triplets . . . . .	10
2.3	Forme paramétrique des fonctions de $\Omega$ . . . . .	12
2.4	Restrictions sur les paramètres $p$ et $q$ . . . . .	12
2.5	Calcul de la fonction $\omega$ à partir d'une chaîne élémentaire . . . . .	13
2.6	De l'algébrique au numérique . . . . .	14
2.7	Détermination du couple $(u, v)$ . . . . .	15
2.8	Détermination des suites numériques . . . . .	15
2.9	Note sur les cycles triviaux élémentaires dans $pn + q$ . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Représentation en réseau</b>	<b>18</b>
3.1	Les fonctions $\omega$ en réseau . . . . .	18
3.2	Le réseau des classes $K_{dm}$ . . . . .	20
3.3	Le triangle de Pascal et les diverses classes . . . . .	21
3.4	Les classes cotangentes $K_k$ et le paramètre $\mu_0$ . . . . .	22
3.5	La fonction $\mu$ et le centre d'équilibre . . . . .	24
3.6	Diverses méthodes de calcul des cycles universels . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Examen du cas particulier <math>3n + 1</math></b>	<b>29</b>
4.1	Les acquis de $pn + q$ . . . . .	29
4.2	Lien avec le cycle des quintes . . . . .	29
4.3	Peut-on exclure les classes $K_{dm}[d, m]$ dont le ratio $d/m$ est réductible? . . . . .	31
4.4	Preuve d'inexistence d'un cycle simple dans une classe réductible . . . . .	31
4.5	Les approximations rationnelles de $\log_2(3)$ dans le réseau des classes . . . . .	32
4.6	Usage d'un calcul de probabilité comme critère de distinction . . . . .	33
4.7	Inflation numérique . . . . .	34
4.8	Au terme de cet essai . . . . .	35

## Table des figures

1	Sous-arbre binaire de racine 8 . . . . .	4
2	Arbre ternaire des impairs . . . . .	5
3	Suites numériques et fonctions en réseau . . . . .	19
4	Classe $K_{dm}[9, 5]$ dans le réseau des classes $K_{dm}$ . . . . .	20
5	Le triangle de Pascal du cardinal des classes . . . . .	21
6	Répartition des valeurs cycliques autour de $k = d/m$ . . . . .	24
7	Fonction $\mu$ dans la région des cycles simples $-1$ et $1$ . . . . .	26
8	Calcul des paramètres $c$ en sommant sur les trajets . . . . .	27
9	Le paramètre $\mu$ dans les classes cotangentes initiales . . . . .	32
10	Distribution des $c_i \bmod 47$ dans $K_m[4]$ . . . . .	36

## Liste des tableaux

1	Calcul du paramètre $c$ dans $K_{dm}[6, 3]$ . . . . .	16
2	Suites minimales de Kakutani dans $K_{dm}[6, 3]$ . . . . .	16
3	Calcul des cycles élémentaires dans $pn + q$ . . . . .	17
4	Description des trajets minimaux de $K_{dm}[8, 4]$ . . . . .	28
5	Génération des paramètres $c$ de la classe $K_m[4]$ . . . . .	28
6	Approximations rationnelles de $\log_2(3)$ et paramètres pertinents . . . . .	30
7	Probabilités autour de la classe $K_{dm}[84, 53]$ . . . . .	33
8	Valeurs comparées $\delta$ et $\mu$ autour de la classe $K_{dm}[84, 53]$ . . . . .	34
9	Chute vertigineuse de la probabilité $1/N$ . . . . .	35