Cheating with Complex Numbers
Der Selbstbetrug mit den komplexen Zahlen

Martin Erik Horn

University of Applied Sciences for Engineering and Economics Berlin
Hochschule für Technik und Wirtschaft – HTW Berlin
hornmar@htw-berlin.de / mail@martinerikhorn.de

Abstract

Together with complex conjugation, complex numbers are misused to model anti-commutative structures.

Kurzfassung

Komplexe Zahlen werden zur Modellierung anti-kommutativer Strukturen missbraucht, wenn die komplexe Konjugation genutzt wird.

Mathematicians do not understand structures. Mathematicians only understand how to draw logical conclusions. And when drawing conclusions they very often overlook, what is going wrong – even if they work in a logically correct way.

This can be seen when mathematicians handle complex numbers. Nearly no math book about complex numbers forgets to explain that the multiplication of complex numbers is commutative. No statement can be more wrong and more correct at the same time.

Of course the statement is correct because the product of two complex numbers z_1 and z_2 will always give the same result. It does not matter in which order the two complex factors are multiplied: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

And the statement is completely wrong, because mathematicians will deceive themselves and will cheat others, if they use complex conjugation when working with complex numbers. Written on a sheet of paper the computation still is commutative: $z_1^* z_2 = z_2 z_1^*$.

But the basic underlying structure has not been understood by mathematicians. The commutative multiplication $z_1^* z_2$ does not model a commutative interchange of two factors, but a non-commutative product: $z_1^* z_2 \neq z_2^* z_1$. This product has a name which mathematicians do not like and which – at least in German speaking countries (Horn 2019) – mostly is ignored by physicists.

In the English speaking world $z_1^* z_2$ is called (two-dimensional) Geometric Product. In many foundational books, e.g. (Hestenes 2002 & 2015), (Snygg 1997), (Doran & Lasenby 2003) the Geometric Pro-

Mathematikerinnen und Mathematiker sind nicht gut im Erkennen von Strukturen. Sie sind lediglich gut darin, logische Schlussfolgerungen zu ziehen. Dabei übersehen sie oft, was sie beim Schlussfolgern so alles falsch machen – obwohl ihre Schlussfolgerungen selbstredend logisch einwandfrei sind.

Der Umgang mit den komplexen Zahlen zeigt dies. Kaum ein mathematisches Buch zu den komplexen Zahlen vergisst zu erwähnen, dass die Multiplikation komplexer Zahlen kommutativ ist. Und keine Aussage könnte gleichzeitig so falsch und so richtig sein.

Richtig ist sie selbstverständlich deshalb, weil das Produkt zweier komplexer Zahlen z_1 und z_2 immer das Gleiche ergibt, egal, in welcher Reihenfolge diese multipliziert werden: $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

Falsch ist diese Aussage, weil Mathematikerinnen und Mathematiker sich und andere betrügen, wenn sie beim Arbeiten mit den komplexen Zahlen auf die komplexe Konjugation zurückgreifen. Auf dem Papier ist zwar immer noch alles kommutativ: $z_1^* z_2 = z_2 z_1^*$.

Die zugrunde liegende Struktur wird aber nicht erkannt: Die kommutative Multiplikation $z1^* z_2$ modelliert keine kommutative Vertauschung mehr, sondern ein nicht-kommutatives Produkt: $z_1^* z_2 \neq z_2^* z_1$. Dieses Produkt hat auch einen Namen, den Mathematikerinnen und Mathematiker nicht mögen und der auch im deutschsprachigen Raum von Physikerinnen und Physikern größtenteils ignoriert wird (Horn 2019).

Im englischsprachigen Raum wird $z_1^* z_2$ als (zweidimensionales) Geometrisches Produkt bezeichnet und in zahlreichen einführenden Werken (Hestenes 2002 & 2015), (Snygg 1997), (Doran & Lasenby duct and consequently Geometric Algebra is seen as an appropriate mathematical language of physics (Hestenes 2003 & 2013), (Parra Serra 2009).

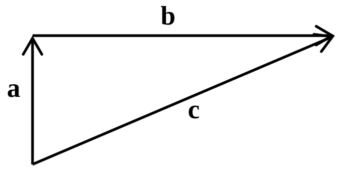
What is now the definite difference between commutative and anti-commutative structures? A convincing starting point can be to take the Pythagorean theorem seriously both geometrically **and** algebraically. And please, do not be shocked: The Pythagorean theorem says: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

This theorem is valid for all triangles: The sum of vectors **a** and **b** of two sides of a triangle will always result in vector **c** of the third side of the triangle. Always and without exception! And of course also in the special case of a rectangular triangle.

2003) als Teil einer geeigneten mathematische Sprache der Physik (Hestenes 2003 & 2013), (Parra Serra 2009) gedeutet.

Wie unterscheiden sich kommutative und anti-kommutative Strukturen nun konkret? Eine Möglichkeit ist, den Satz des Pythagoras geometrisch **und** algebraisch ernst zu nehmen. Und jetzt bitte nicht erschrecken: Der Satz des Pythagoras lautet: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Und dieser Satz gilt für alle Dreiecke: Die Summe der Vektoren von Seite **a** und Seite **b** eines Dreiecks ergibt immer den Vektor der Seite **c**. Immer und ohne Ausnahme! Und natürlich auch im Spezialfall von rechtwinkligen Dreiecken.



The simple vector addition $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ seems to be banal or trivial, unfortunately the mathematical application of it isn't. Having a background in physics the author of these lines is strongly obsessed by his firm belief in conservation laws. It does not matter, what happens – equality will be conserved as long as on the right hand side of an equation and on the left hand side of an equation the same things happen. Both sides of the equation are equivalent.

Of course they are equivalent also after squaring. This is not negotiable: The equation $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$ has always to be valid, always and under all circumstances. If a mathematical system is not capable of guaranteeing this equality, the system is useless and has to be urgently dismissed. In this sense present-day vector algebra used at schools should be disposed in the didactical waste basket.

The quadratic version of the Pythagorean theorem can now be written in more detail as:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Now it is clear how the geometric property of having two orthogonal sides can be expressed algebraically: If the sum of the two mixed terms $\mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ equals zero and disappears, we will get the conventional version of the Pythagorean theorem $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Thus the rectangularity of the two side vectors **a** and **b** is expressed by their anti-commutativity: $\mathbf{ab} = -\,\mathbf{ba}$.

This disappearance of mixed terms characterizes anti-commutative structures. If all mixed terms completely survive, commutative quantities will be modeled. (If two scalars a and b are added, all this is called binomial formula: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$, the mixed terms $ab = ba$ completely survive; there-

Die einfache Vektoraddition $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ ist trivial, der Umgang mit ihr ist es leider nicht. Aus der Physik kommend ist der Autor geprägt durch den festen Glauben an Erhaltungssätze. Egal, was passiert, so lange auf der rechten Gleichungsseite das Gleiche gemacht wird wie auf der linken Gleichungsseite, bleibt die Gleichheit erhalten. Beide Gleichungsseiten sind äquivalent.

Sie sind dies selbstverständlich auch nach einer Quadratur. Für den physikalisch geprägten Autor ist dies unverhandelbar: $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{c}^2$ hat zu gelten, immer und unter allen Umständen. Leistet ein mathematisches System dies nicht, ist es nutzlos und zwingend zu verwerfen. In diesem Sinne gehört die aktuell praktizierte schulmathematische Vektorrechnung uneingeschränkt in den didaktischen Mülleimer.

Ausführlicher erhalten wir für den quadratisch formulierten Satz des Pythagoras also:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ab} + \mathbf{ba} + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$$

Jetzt ist klar, wie die geometrische Eigenschaft der Rechtwinkligkeit algebraisch ausgedrückt wird: Wenn die Summe der Mischterme $\mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ gleich Null wird und verschwindet, dann erhalten wir die klassische Formulierung des Pythagoras mit $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$. Die Rechtwinkligkeit der beiden Seitenvektoren **a** und **b** drückt sich somit aus durch deren Anti-Kommutativität: $\mathbf{ab} = -\,\mathbf{ba}$.

Dieses Verschwinden von Mischtermen charakterisiert anti-kommutative Strukturen. Sind die Mischterme vollständig vorhanden, werden kommutative Größen modelliert (Bei zwei skalaren Zahlen a und b nennt sich dies dann binomische Formel: $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$, die Mischterme $ab = ba$

therefore scalars are commutative quantities.) If the mixed terms are cancelled completely, anti-commutative quantities will be modeled. And if the mixed terms are cancelled only partly, non-commutative quantities will be modeled. Please, tell this your students in school and university. And please remember this, it is important!

A demonstrative presentation of the inherent difference between commutative and anti-commutative structures can also be given with the help of higher-dimensional powers (Horn 2020). Not for no reason Pascal's triangle accompanies mankind since more than three quarters of a millennium (Olivastro 1993, p. 82 & 1995, p. 102) through the history of mathematics.

The coefficients of powers of a sum of two parallel vectors a σ_x + b σ_x (Please note: the two vectors a σ_x and b σ_x are pointing into identical directions of σ_x) will now be compared with the coefficients of powers of a sum of two orthogonal vectors a σ_x + b σ_y (now the two vectors a σ_x and b σ_y are pointing into the different directions of σ_x and σ_y).

As usual base vectors are indicated by the symbols σ_x for a base vector into x-direction and σ_y for a base vector into y-direction in Geometric Algebra for historical reasons. And yes, it might be "the greatest intellectual shock" (Gull et al. 1993, p. 1184): Pauli matrices represent base vectors of three-dimensional space, Dirac matrices represent base vectors of four-dimensional spacetime (Horn 2014 & 2018). Thus vectors are written as linear combinations of Pauli matrices (or naively as sums of Pauli vectors in the schoolroom). It is not really necessary to tell students at school, that matrices exist (Horn 2011).

In the first case of identical directions we will get the usual binomial coefficients (see left side), while mixed terms cancel each other in the second, anti-commutative case of different directions as expected (see right side):

bleiben vollständig erhalten; deshalb sind Skalare kommutativ). Heben sich die Mischterme vollständig gegenseitig weg, werden anti-kommutative Größen modelliert. Kompensieren sich die Mischterme nur teilweise, werden nicht-kommutative Größen modelliert. Bitte merken Sie sich diesen Zusammenhang und erzählen Sie ihn bitte auch Ihren Schülerinnen und Schülern sowie Ihren Studierenden weiter.

Zur anschaulichen Einprägung des Unterschieds zwischen kommutativen und anti-kommutativen Strukturen ist es hilfreich, auch höhere Potenzen kommutativer und anti-kommutativer Größen heranzuziehen (Horn 2020). Nicht ohne Grund begleitet uns das Pascalsche Dreieck schon über ein dreiviertel Jahrtausend (Olivastro 1995, S. 102) durch die Mathematikgeschichte.

Die Koeffizienten der Potenzen einer Summe zweier paralleler Seiten a σ_x + b σ_x (immer die gleiche σ_x-Richtung) werden dann mit den Koeffizienten der Summe zweier orthogonal zueinander stehender Seiten a σ_x + b σ_y verglichen. Wie in der Geometrischen Algebra üblich werden Basisvektoren historisch bedingt durch die Symbole σ_x für den Basisvektor in x-Richtung und σ_y für den Basisvektor in y-Richtung ausgedrückt.

Und ja, vielleicht ist es der „größtmögliche intellektuelle Schock" (Gull et al. 1993, S. 1184): Pauli-Matrizen repräsentieren Basisvektoren des dreidimensionalen Raumes, Dirac-Matrizen repräsentieren Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit (Horn 2014 & 2018). Vektoren werden hier also als Linearkombinationen von Pauli-Matrizen (oder schulisch naiv: Summen von Pauli-Vektoren) geschrieben. Schülerinnen und Schülern muss man ja nicht unbedingt erzählen, dass Matrizen existieren (Horn 2011).

Im ersten Fall identischer Richtungen erhalten wir die üblichen Binomialkoeffizienten (links), während sich im zweiten, anti-kommutativen Fall unterschiedlicher Richtungen wie erwartet (rechts) die Mischterme gegenseitig kompensieren:

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_x)^0 = \mathbf{1}$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_x)^1 = \mathbf{1}\,a\,\sigma_x + \mathbf{1}\,b\,\sigma_x$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_x)^2 = \mathbf{1}\,a^2 + \mathbf{2}\,ab + \mathbf{1}\,b^2$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_x)^3 = \mathbf{1}\,a^3\,\sigma_x + \mathbf{3}\,a^2b\,\sigma_x + \mathbf{3}\,ab^2\,\sigma_x + \mathbf{1}\,b^3\,\sigma_x$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_x)^4 = \mathbf{1}\,a^4 + \mathbf{4}\,a^3b + \mathbf{6}\,a^2b^2 + \mathbf{4}\,ab^3 + \mathbf{1}\,b^4$

etc…

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_y)^0 = \mathbf{1}$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_y)^1 = \mathbf{1}\,a\,\sigma_x + \mathbf{1}\,b\,\sigma_y$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_y)^2 = \mathbf{1}\,a^2 + \mathbf{0} + \mathbf{1}\,b^2$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_y)^3 = \mathbf{1}\,a^3\,\sigma_x + \mathbf{1}\,a^2b\,\sigma_y + \mathbf{1}\,ab^2\,\sigma_x + \mathbf{1}\,b^3\,\sigma_y$

$(a\,\sigma_x + b\,\sigma_y)^4 = \mathbf{1}\,a^4 + \mathbf{0} + \mathbf{2}\,a^2b^2 + \mathbf{0} + \mathbf{1}\,b^4$

etc…

The bold printed coefficients on the left side now give the classical, commutatively generated Pascal triangle. And the coefficients on the right side result in an anti-commutatively generated Pauli Pascal triangle (Horn 2020):

Für die fett gedruckten Koeffizienten ergeben sich also das klassisch kommutativ generierte Pascal-Dreieck auf der linken Seite und ein anti-kommutativ generiertes Pauli-Pascal-Dreieck (Horn 2020) auf der rechten Seite:

$$\begin{array}{c}
\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{2}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{4}\quad\mathbf{6}\quad\mathbf{4}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{5}\quad\mathbf{10}\quad\mathbf{10}\quad\mathbf{5}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{6}\quad\mathbf{15}\quad\mathbf{20}\quad\mathbf{15}\quad\mathbf{6}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{7}\quad\mathbf{21}\quad\mathbf{35}\quad\mathbf{35}\quad\mathbf{21}\quad\mathbf{7}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{8}\quad\mathbf{28}\quad\mathbf{56}\quad\mathbf{70}\quad\mathbf{56}\quad\mathbf{28}\quad\mathbf{8}\quad\mathbf{1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{2}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{2}\quad\mathbf{2}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{3}\quad\mathbf{1}\quad\mathbf{1}\\
\mathbf{1}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{4}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{6}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{4}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{1}
\end{array}$$

Coefficients which show the classical binomial structure always, forever and undeniably describe powers of quantities which are composed of two commutative base units. Powers of quantities which are composed of two anti-commutative base units always, forever and undeniably show a tripling of the classical binomial coefficients. And they show zeros at the empty positions between the tripled classical coefficients.

Now let's have a closer look at complex numbers. Coefficients of powers of a complex number $z = x + i\,y$ indeed behave in a classical way (if minus signs of squared imaginary values on pairs of diagonals are neglected). As expected real part x and imaginary part $i\,y$ can be transposed without consequences.

Now we will cheat: we rig symmetry and insert additional minus signs into the powers of complex numbers using complex conjugation. Nobody cares and nobody under the sun will notice. Et voilà, symmetry has changed completely:

Koeffizienten, die die klassische Binomial-Struktur zeigen, beschreiben immer und unzweifelhaft Potenzen von Größen, die sich aus zwei kommutativen Basiseinheiten zusammensetzen. Koeffizienten, die aus zwei anti-kommutativen Basiseinheiten zusammengesetzt werden, zeigen eine Verdreifachung der klassischen Binomialkoeffizienten und eine Nullsetzung der zwischen diesen verdreifachten Koeffizienten entstehenden Lücken.

Schauen wir uns also noch einmal die komplexen Zahlen an: Die Koeffizienten der Potenzen einer komplexen Zahl $z = x + i\,y$ zeigen (abgesehen von im Vorzeichen alternierend Paaren von Diagonalen) das klassisch kommutative Verhalten. Das ist zu erwarten, da Realteil x und Imaginärteil $i\,y$ erwartungsgemäß vertauschen.

Und jetzt betrügen wir: Mit Hilfe der komplexen Konjugation schummeln wir zusätzliche Vorzeichen in die Potenzen komplexer Zahlen – es merkt ja keiner. Et voilà, das Symmetrieverhalten verändert sich grundlegend:

z^0	=	$\mathbf{1}$	
z	=	$\mathbf{1}\,x + \mathbf{1}\,iy$	
z^*z	=	$\mathbf{1}\,x^2 + \mathbf{0}\,ixy + \mathbf{1}\,y^2$	← Pythagorean theorem of the complex plane
$z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^3 + \mathbf{1}\,ix^2y + \mathbf{1}\,xy^2 + \mathbf{1}\,iy^3$	
$z^*z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^4 + \mathbf{0}\,ix^3y + \mathbf{2}\,x^2y^2 + \mathbf{0}\,ix\,y^3 + \mathbf{1}\,y^4$	
$z\,z^*z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^5 + \mathbf{1}\,ix^4y + \mathbf{2}\,x^3y^2 + \mathbf{2}\,ix^2y^3 + \mathbf{1}\,x\,y^4 + \mathbf{1}\,iy^5$	
$z^*z\,z^*z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^6 + \mathbf{0}\,ix^5y + \mathbf{3}\,x^4y^2 + \mathbf{0}\,ix^3y^3 + \mathbf{3}\,x^2y^4 + \mathbf{0}\,ix\,y^5 + \mathbf{1}\,y^6$	
$z\,z^*z\,z^*z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^7 + \mathbf{1}\,ix^6y + \mathbf{3}\,x^5y^2 + \mathbf{3}\,ix^4y^3 + \mathbf{3}\,x^3y^4 + \mathbf{3}\,ix^2y^5 + \mathbf{1}\,x\,y^6 + \mathbf{1}\,iy^7$	
$z^*z\,z^*z\,z^*z\,z^*z$	=	$\mathbf{1}\,x^8 + \mathbf{0}\,ix^7y + \mathbf{4}\,x^6y^2 + \mathbf{0}\,ix^5y^3 + \mathbf{6}\,x^4y^4 + \mathbf{0}\,ix^3y^5 + \mathbf{4}\,x^2y^6 + \mathbf{0}\,ix\,y^7 + \mathbf{1}\,y^8$	
etc…			

The lesson is clear: **Complex conjugation was invented to model non-commutative structures by using commutative quantities**. Whenever we use the Geometric Product a*b, we are working (unknowingly or without wanting to know or by wanting not to know!!) with a product **a b**, composed of the two vectorial, non-commutative quantities $\mathbf{a} = a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y$ and $\mathbf{b} = b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y$.

Fazit: **Die komplexe Konjugation wurde erfunden, damit wir nicht-kommutative Strukturen mit Hilfe kommutativer Größen modellieren können**. Immer, wenn wir das geometrische Produkt a*b verwenden, arbeiten wir (ohne es zu merken oder ohne es merken zu wollen!!) mit einem Produkt **a b** aus zwei vektoriellen, nicht-kommutativen Größen $\mathbf{a} = a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y$ und $\mathbf{b} = b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y$.

The reversal of signs caused by complex conjugation can be explained as a multiplication by the identity element $\sigma_x^2 = 1$ inserted in the middle of a Geometric Product:

Die durch die komplexe Konjugation verursachte Vorzeichenumkehr entsteht durch eine simple mittige Einmultiplikation des neutralen Elements $\sigma_x^2 = 1$:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,\sigma_x^2\,\mathbf{b} = (a_x\,\sigma_x + a_y\,\sigma_y)\,\sigma_x^2\,(b_x\,\sigma_x + b_y\,\sigma_y) = (a_x + a_y\,\sigma_y\sigma_x)\,(b_x + b_y\,\sigma_x\sigma_y)$$
$$= (a_x - a_y\,\sigma_x\sigma_y)\,(b_x + b_y\,\sigma_x\sigma_y) = (a_x - i\,a_y)\,(b_x + i\,b_y) = (a_x + i\,a_y)^*\,(b_x + i\,b_y) = a^*b$$

In the second line bivector $\sigma_x\sigma_y$ has been replaced by the imaginary base unit i, because purely spacelike bivectors square with a negative result in Geometric Algebra: $i^2 = (\sigma_x\sigma_y)^2 = -1$.

In a similar way Geometric Products of spacetime vectors $\mathbf{r} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x$ in two dimensions, Geometric Products of purely spacelike vectors $\mathbf{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z$ in three dimensions, or Geometric Products of spacetime vectors $\mathbf{r} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x + y\,\gamma_y + z\,\gamma_z$ in four dimensions (Horn 2019) can be transformed. But this is another story which will be told when cheating with quaternions is on the agenda. Short and sweet: Hamilton completely failed, he hasn't got a clue. The real hero is Grassmann. And this has been ignored by the mathematical world already far too long.

Therefore the mathematical world should make a decision: Do mathematicians really again and again want to commit a crime against symmetry by using complex conjugation? Do mathematicians really want to go on with cheating the world by expressing anti-commutative structures by commutative quantities? Do mathematicians really want to lead the world of symmetry into chaos and confusion by hiding simple symmetries behind conjugated quantities?

And do they really want to mislead poor physicists who desperately try to understand the mathematical meaning of quantum mechanics expressions like $\psi^*\varphi$? How can mankind understand the physical behavior of quantum mechanical probability densities one day if mathematicians are doing everything to hide the relevant symmetries? At present mathematicians are throwing red herrings!

Therefore a word of advice at the end: Trash complex conjugation and throw it into the didactical waste basket – right next to present-day schoolroom vector algebra.

Dabei wurde in der zweiten Zeile der Bivektor $\sigma_x\sigma_y$ abkürzend durch die imaginäre Basiseinheit i ausgedrückt, denn in der Geometrischen Algebra quadrieren rein räumliche Bivektoren negativ zu $i^2 = (\sigma_x\sigma_y)^2 = -1$.

Ähnliches gilt natürlich auch für Produkte raumzeitlicher Vektoren $\mathbf{r} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x$, rein räumlicher Vektoren in drei Dimensionen $\mathbf{r} = x\,\sigma_x + y\,\sigma_y + z\,\sigma_z$ und raumzeitlicher Vektoren in vier Dimensionen $\mathbf{r} = ct\,\gamma_t + x\,\gamma_x + y\,\gamma_y + z\,\gamma_z$ (Horn 2019). Aber das ist eine andere Geschichte, die dann erzählt werden soll, wenn der Selbstbetrug mit Quaternionen auf der Tagesordnung steht. Nur so viel: Hamilton hat deutlich versagt, er hat's einfach nicht kapiert. The real hero is Grassmann. Aber das ignorieren wir leider schon viel zu lange.

Die Entscheidung liegt nun bei Ihnen: Wollen Sie wirklich immer weiter mit Hilfe der komplexen Konjugation ein Symmetrieverbrechen begehen, indem Sie anti-kommutative Strukturen durch kommutative Größen ausdrücken und so das Symmetrieverhalten einfacher Größen in dramatischer Weise chaotisieren und verschleiern?

Wollen Sie tatsächlich weiterhin arme Physikerinnen und Physiker in die Irre schicken, die verzweifelt den mathematschen Sinn von quantenmechanischen Ausdrücken wie $\psi^*\varphi$ zu ergründen suchen? Wie soll die Menschheit jemals das physikalische Verhalten von Wahrscheinlichkeitsdichten in der Quantenmechanik verstehen, wenn die Mathematik alles tut, die dahinter stehenden Symmetrien zu verbergen?

Deshalb der Tipp zum Schluss: Schmeißen Sie die komplexe Konjugation dorthin, wo sich die schulische Vektorrechnung schon befindet: in den didaktischen Mülleimer.

Literature / Literatur

Doran, C. & Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime. *Foundations of Physics,* (23) 9, 1175–1201.

Hestenes, D. (2002). *New Foundations for Classical Mechanics* (2. ed.). New York: Kluwer.

Hestenes, D. (2003). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics. *American Journal of Physics*, (71) 2, 104–121.

Hestenes, D. (2013). Modeling Theory for Math and Science Education. Especially section 3.8: Epilogue – A New Generation of Mathematical Tools. In R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford

(Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*, ICTMA 13 Proceedings. Dordrecht: Springer, 13–41.

Hestenes, D. (2015). *Space-Time Algebra* (2. ed.). Cham, Heidelberg, New York: Springer.

Horn, M.E. (2011). Grassmann, Pauli, Dirac – Special Relativity in the Schoolroom. In H.-J. Petsche, A.C. Lewis, J. Liesen & S. Russ (Eds.), *From Past to Future – Graßmann's Work in Context*. Basel, Berlin: Birkhäuser, 435–450.

Horn, M.E. (2014). An Introduction to Geometric Algebra with some Preliminary Thoughts on the Geometric Meaning of Quantum Mechanics. In D. Schuch & M. Ramek (Eds.), *Symmetries in Science XVI, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2013*. Journal of Physics: Conference Series, 538 (2014) 012010. Bristol: IOP Publishing.

Horn, M.E. (2018). Another Introduction to Geometric Algebra with some Comments on Moore-Penrose Inverses. In D. Schuch & M. Ramek (Eds.), *Symmetries in Science XVII, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2017*. Journal of Physics: Conference Series, 1071 (2018) 012012. Bristol: IOP Publishing.

Horn, M.E. (2019). Verstecken wir die Geometrische Algebra in den komplexen Zahlen! Poster presentation P 119 at the yearly scientific meeting of FDdB and GDCP at Sept. 10, 2019 in Vienna. To be published in S. Habig (Ed.), *Naturwissenschaftliche Kompetenzen in der Gesellschaft von morgen*. Tagungsband der Gesellschaft für Didaktik der Chemie und Physik, Vol. 40.

Horn, M.E. (2020). If You Split Something into Two Parts, You Will Get Three Pieces: The Bilateral Binomial Theorem and its Consequences. Talk given at Symmetries in Science XVIII at Aug. 9, 2019 in Bregenz. To be published in D. Schuch & M. Ramek (Eds.), *Symmetries in Science XVII, Proceedings of the International Symposium in Bregenz 2019*. Journal of Physics: Conference Series, Bristol: IOP Publishing.

Olivastro, D. (1993). *Ancient Puzzles*. New York, Toronto, London: Bantam Books.

Olivastro, D. (1995). *Das Chinesische Dreieck* (Lizenzausgabe). Frankfurt am Main: Zweitausendeins.

Parra Serra, J.M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. *Advances in Applied Clifford Algebras*, (19) 3/4, 819–834.

Snygg, J. (1997). *Clifford Algebra. A Computational Tool for Physicists*. New York, Oxford: Oxford University Press.