کیا طبیعیاتی ماہیّت کی کوانٹم میکانیکی تصریح کامل گردانی جا سکتی ہے؟
(Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?)

اے۔ آئن سٹائن (A. Einstein) ، بی۔ پوڈولسکی (B. Podolsky) اور این۔ روزن (N. Rosen)
انسٹیٹیوٹ فار ایڈوانسڈ سٹڈی (Institute for Advanced Study)
پرنسٹن (Princeton) ، نیو جرسی (New Jersey)

موصول ہوا : 25 مارچ 1935
Physical Review, Volume 47 , pp 777-780 (1935)

ملخّص

آئن سٹائن ، پوڈولسکی اور روزن کے 1935 میں شائع ہونے والے معرکتہ الآرا مقالے کا اردو میں ترجمہ پیش خدمت ہے اس امید کے ساتھ کہ یہ ترجمہ اس زبان کے قارئین کیلئےعلمی اور تحقیقی دلچسپی کا باعث ہوگا۔

Abstract:
An Urdu translation of the landmark article by Einstein, Podolsky and Rosen from the year 1935 is presented with the hope that it will be of academic and research interest to the readers in that language.

Translated by (ترجمہ) : Azhar Iqbal † ‡ (اظہر اقبال) , Pervez Hoodbhoy ◊ (پرویز ہود بھائی) and Derek Abbott ‡ (ڈیرک ایبٹ)

†Urdu Scientific, P.O. Box 1025 , Flinders Park, South Australia 5025 , Australia: https://www.linkedin.com/in/urdu-scientific-629761181/
Email: Urdu.Scientific@gmail.com

‡School of Electrical & Electronic Engineering, University of Adelaide, Adelaide, South Australia 5005 , Australia.

◊Department of Physics, Forman Christian College University, Ferozepur Road, Lahore 54600 , Pakistan.

I. انتساب

آئن سٹائن، پوڈولسکی اور روزن کے اس معرکتہ الآرا مقالے کا اردو میں ترجمہ پاکستان کے ان طلبہ و طالبات کیلئے وقف ہے جو ذہنی تجسّس اور علمی جذبے کے ساتھ ساتھ اردو سے شغف بھی رکھتے ہیں۔

II. خلاصہ

ایک مکمل نظریہ میں ماہیت کے ہر عنصر سے مماثل ایک عنصر ہوتا ہے۔ ایک طبیعیاتی مقدار کے ماہیت رکھنے کیلئے ایک شرط ء معتدبہ (sufficient condition) وہ امکان ہے جس سے کسی متعلقہ نظام (system) میں خلل ڈالے بغیر اس مقدار کی یقین کے ساتھ پیشین گوئی کی جا سکتی ہے۔ دو طبیعیاتی مقداروں کی اس تفصیل میں جو عدم مبادلاتی عاملات (non-commuting operators) کو استعمال کرتے ہوئے کوانٹم میکانیات بیان کرتی ہے اسکی وجہ سے ایک مقدار کے علم کا ہونا ہمیں دوسری مقدار کے بارے میں باعلم ہونے سے باز رکھتا ہے۔ اسطرح یا تو : 1) ماہیت کی وہ تفصیل جو کوانٹم میکانیات میں موجی تفاعل (wave function) کے استعمال سے دی جاتی ہے، وہ کامل نہیں، یا پھر : 2) ان دونوں مقداروں کی یک وقتی ماہیت نہیں ہو سکتی۔ ان مشکلات کا لحاظ کرتے ہوئے جو ایک ایسے نظام کے بارے میں پیشین گوئیاں کرتے ہوئے در پیش ہیں جن کی بنیاد وہ پیمائشیں ہوں جو ایک دوسرے نظام پہ کی گئی ہوں اور جس نے پہلے سے اول الذکر نظام سے تعامل (interaction) کیا ہو ، یہ نتیجہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ اگر 1) باطل ہے تو 2) بھی باطل ہے۔ اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ماہیت کی وہ تفصیل جو موجی تفاعل دیتا ہے دراصل کامل نہیں۔

III. حصہ نمبر 1

ایک طبیعیاتی نظریہ پر کسی سنجیدہ غور و فکر کو معروضی ماہیت (objective reality) ، جو کہ کسی بھی نظریہ سے بے نیاز ہوتی ہے، اور ان طبیعیاتی تصورات جن کے استعمال سے وہ نظریہ عمل پزیر ہوتا ہے، کے درمیان موجود باہمی امتیاز کا لحاظ کرنا چاہیے۔ طبیعیاتی تصورات کی تشکیل کا مقصد معروضی ماہیت سے ان کا تعلق پیدا کرنا ہوتا ہے ، اور انہی تصورات کے ذریعے سے ہم اس ماہیت کو جاننے کی غرض سے اپنے لئے تصویر کشی کرتے ہیں۔

ایک طبیعیاتی نظریہ کی کامیابی جاننے کی خاطر ہم اپنے آپ سے یہ دو سوال پوچھ سکتے ہیں : 1) " کیا یہ نظریہ درست ہے؟ " اور 2) " کیا نظریے کی طرف سے دی گئی تفصیل مکمل ہے؟ " نظریے کے تصورات کے بارے میں ہم صرف اس صورت میں یہ کہ سکتے ہیں کہ وہ تسلی بخش ہیں کہ جب ان دونوں سوالات کے جوابات اثبات میں دیے جا سکیں۔ نظریے کے نتائج اور انسانی مشاہدہ کے درمیان باہمی اتفاق کے معیار سے ہی اس نظریے کی درستگی کے بارے میں فیصلہ ہو سکتا ہے۔ یہ مشاہدہ / جانچ ہے جو اکیلا ہی ہمیں اس قابل بناتا ہے کہ ہم ماہیت کے بارے میں نتائج اخذ کر سکیں اور طبیعیات میں یہ تجربے اور پیمائش (measurement) کی صورت اختیار کر لیتا ہے۔ یہاں ہم دوسرے سوال یعنی 2) کے بارے میں جاننا چاہیں گے جب اسکا اطلاق کوانٹم میکانیات میں کیا جائے۔

لفظ کامل سے جو بھی معنی منسوب کئے جائیں ، ایک کامل نظریے کیلئے درج ذیل مطالبہ ناگزیر نظر آتا ہے : طبیعیاتی ماہیت کے ہر عنصر کیلئے طبیعیاتی نظریے میں ضرور ایک مماثل عنصر موجود ہو . ہم اسے مکملیت (completeness) کی شرط کہیں گے۔ جونہی ہم یہ فیصلہ کرنے کے قابل ہوں کہ طبیعیاتی ماہیت کے عناصر کیا ہیں ، دوسرے سوال کا جواب آسانی سے دیا جا سکتا ہے۔

طبیعیاتی ماہیت کے عناصر کواستخراجی/استنباطی (a priori) نوعیت کے فلسفیانہ ملاحظات (philosophical considerations) سے متعین نہیں کیا جاسکتا ، لیکن تجربے اور پیمائش سے انکی دریافت ہو سکتی ہے۔ تاہم ماہیت کی ایک قابل فہم اور جامع تعریف ہمارے مدعا کیلئے ضروری نہیں ہے بلکہ ہم درج ذیل کسوٹی (criterion) سے ہی مطمئن ہو سکتے ہیں اور جسے ہم معقول بھی سمجھتے ہیں :

اگر ایک نظام میں کسے طرح سے بھی کوئی مداخلت کئے بغیر ہم یقین کیساتھ ایک طبیعیاتی مقدار کی قدر (value) کی پیشین گوئی کر سکیں (یعنی جسکے ہونے کا امکان مکمل ہو) تو اس طبیعاتی مقدار کے مماثل ایک طبیعیاتی ماہیت کا عنصر وجود رکھتا ہے۔

ہمیں یہ دکھائی دیتا ہے کہ یہ کسوٹی اگرچہ ایک طبیعیاتی ماہیت کی شناخت کرنے کی ہر ممکن راہ کیلئے حتمی نہیں لیکن کم از کم یہ ہمیں ایک ایسا طریقہ فراہم کرتی ہے جب اس میں دی گئی شرائط رو پزیر (occur) ہو جائیں۔ یہ کسوٹی ماہیت کو جاننے کیلئے بطور شرطِ لازمی (necessary condition) کے نہیں بلکہ شرطِ معتدبہ (sufficient condition) کے طور پر ماہیت کے بارے میں کلاسیکی مزید براں کوانٹم تصورات کے ساتھ ہم آہنگ ہے۔

متعلقہ تصورات کی وضاحت کیلئے آئیے ہم ایک بنیادی ذرّے کے رویے کی کوانٹم میکانیکی تفصیل کو دیکھیں جس کا درجہء آزادی (degree of freedom) ایک عدد ہو۔ اس نظریے کی بنیاد کیفیت (state) کا تصور ہے جس کا کردار باالفرض مکمل طور پر موجی تفاعل (wave function) ψ سے بیان ہوتا ہے ، جو کہ اس بنیادی ذرے کے رویے کو بیان کرنے کیلئے منتخب کئے گئے مقدارء متغیر (variable) کا تفاعل ہے۔ طبیعیاتی طور پر ہر ایک قابلِء مشاہدہ (observable) مقدار A کے مماثل ایک عامل ہوتا ہے جسے اسی حرف (letter) سے موسوم کیا جاسکتا ہے۔

اگر عامل A کا ایک آئگنی تفاعل (eigenfunction) ψ ہو یعنی کہ

$$\psi' \equiv A\psi = a\psi, \qquad (١)$$

جہاں a ایک عدد ہے ، تو جب بھی بنیادی ذرّہ دی گئی کیفیت ψ میں ہو گا تو طبیعیاتی مقدار A کی قیمت (value) یقینی طور پر a ہو گی۔ ایک بنیادی ذرّے کیلئے جو کہ کیفیت ψ میں ہو اور اس کیفیت کیلئے مساوات (١) درست ہو ، ماہیت کی جانچ سے متعلق ہمارے معیار اور کسوٹی کی موافقت سے

طبیعیاتی ماہیت کا ایک عنصر جو کہ طبیعیاتی مقدار A کے مماثل ہو ، موجود ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\psi = e^{(2\pi i/h)p_0 x}, \tag{٢}$$

ایک کیفیت ہے، جس میں h پلانک کی مستقل مقدار (Planck's constant) ہے ، p_0 ایک مستقل عدد ہے ، اور x ایک خود مختار متغیّر (independent variable) ہے۔ کیونکہ بنیادی ذرّے کے مومینٹم (momentum) کے مماثل یہ عامل

$$p = (h/2\pi i)\partial/\partial x, \tag{٣}$$

ہے ، اور اس سے ہمیں کیفیت (٢) کیلئے

$$\psi' = p\psi = (h/2\pi i)\partial\psi/\partial x = p_0\psi, \tag{٤}$$

حاصل ہوتا ہے۔

اسطرح مساوات (٢) میں دی گئی کیفیت میں مومینٹم کی مقدار یقین کیساتھ p_0 ہوتی ہے۔ اسطرح اسکا یہ مطلب ہے کہ ایک بنیادی ذرّہ جس کی کیفیت مساوات (٢) میں دی گئی ہےاس کا مومینٹم ایک حقیقی وجود یا ماہیت رکھتا ہے۔

علاوہ ازیں اگر مساوات (١) قائم نہیں رہتی تو ہم طبیعیاتی مقدار A کے متعلق نہیں کہہ سکتے کہ اس کی ایک مخصوص قیمت ہے۔ مثال کے طور پر یہ صورت حال ایک بنیادی ذرّے کے محدد (coordinate) کیلئے ہوتی ہے۔ اس محدد کے مماثل عامل q ہو تو یہ خود مختار متغیّر (independent variable) پر ضربی عامل (multiplicative operator) ہو گا۔ اسطرح

$$q\psi = x\psi \neq a\psi. \tag{٥}$$

کوانٹم میکانیات کے مطابق ہم صرف یہ کہہ سکتے ہیں کہ محدد کی ایک پیمائش کرنے کا نتیجہ یہ حاصل ہو کہ وہ a اور b کے درمیان پایا جائے، یعنی کہ اس کا اضافی امکان (relative probability) یہ ہے

$$P(a,b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = b - a. \tag{٦}$$

کیونکہ یہ امکان a پر منحصر نہیں ہے ، بلکہ اس کا انحصار صرف اس فرق b - a پر ہے ، ہم دیکھتے ہیں کہ محدد کی تمام قیمتیں برابر طور پر قابلِ وقوع (equally probable) ہیں۔

ایک بنیادی ذرّے کیلئے، جو کہ مساوات (۲) میں دی گئی کیفیت میں ہو ، محدد کی ایک مخصوص قیمت (definite value) پیشین گوئی کے قابل نہیں ہوتی ، لیکن اسے براہ راست پیمائش سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تاہم ایسی پیمائش بنیادی ذرّے کو غیر یقینیت کا شکار کر دیتی ہے اور اس کی کیفیت کو تبدیل کرتی ہے۔ جب پیمائش سے محدد کو متعیّن کر لیا جائے تو بنیادی ذرّہ مساوات (۲) میں دی گئی کیفیت میں نہیں رہتا۔ کوانٹم میکانیات میں اس سے عموماء یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ جب ایک بنیادی ذرّے کا مومینٹم معلوم ہو تو اس کے محدد کی کوئی طبیعاتی ماہیت نہیں ہوتی۔

کوانٹم میکانیات میں زیادہ عمومی طور پر یہ دکھایا جاتا ہے کہ دو طبیعیاتی مقداروں ، جو کہ A اور B ہیں ، کے مماثل عاملات اگر مبادلہ (commute) نہیں کرتے ، یعنی اگر $AB \neq BA$ ، تو ان میں سے ایک کا حتمی علم ہمیں دوسری مقدار کے بارے میں اسی طرح کے علم سے باز رکھتا ہے۔ علاوہ ازیں ، موخرالذکر کو تجرباتی طور پر متعین کرنے کی کوئی کوشش زیرِ مطالعہ نظام کی کیفیت کو اسطرح تبدیل کرے گی کہ جو اول الذکر کےعلم کو ضائع کر دے گا۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ یا تو (1) ماہیّت کی وہ تصریح جو موجی تفاعل کوانٹم میکانیات میں دیتا ہے وہ مکمل نہیں ، یا پھر (2) جب دو طبیعیاتی مقداروں کے مماثل عاملات مبادلہ نہ کریں تو دونوں مقداریں یک وقتی ماہیت نہیں رکھ سکتیں۔ کیونکہ اگر دونوں کی یک وقتی ماہیت ہوتی ، اور اسطرح ان کی مخصوص قیمتیں بھی ہوتیں ، تو مکملیت کی شرط کے مطابق یہ قیمتیں مکمل تصریح میں شامل ہوتیں۔ اگر تو موجی تفاعل ماہیت کی ایسی ایک مکمل تصریح فراہم کرتا تو یہ قیمتیں اس میں شامل ہوتیں اور تب یہ قابلِ پیشین گوئی ہوتیں۔ ایسا چونکہ نہیں ہوتا اسلئے وہ متبادل رہ جاتا ہے جوکہ بیان کیا گیا ہے۔

کوانٹم میکانیات میں عام طور پر فرض کیا جاتا ہے کہ ایک نظام کی کیفیت کے مماثل موجی تفاعل طبیعیاتی ماہیت کی ایک مکمل تصریح رکھتا ہے۔ پہلی نگاہ دوڑانے پہ لگتا ہے کہ یہ مفروضہ مکمل طور پر معقول ہے ، کیونکہ ایک موجی تفاعل سے حاصل کردہ معلومات نظام کی کیفیت کو تبدیل کئے بغیر کی جا سکنے والی قابلِ پیمائش مقداروں کے باالکل مماثل لگتی ہیں۔ تاہم ہم یہ دکھائیں گے کہ یہ مفروضہ ، ماہیت کیلئے اوپر دی گئی کسوٹی کے ساتھ ساتھ ، ایک تضاد کی طرف لے جاتا ہے۔

IV. حصہ نمبر 2

اس مقصد کیلئے آئیے فرض کریں کہ ہمارے پاس دو نظامات ، I اور II ہیں ، جنہیں ہم وقت $t = 0$ سے $t = T$ تک ایک دوسرے پر عمل کرنے کی اجازت دیتے ہیں ، اور ہم فرض کرتے ہیں کہ اس وقت

کے گزرنے کے بعد دونوں حصوں کے مابین کوئی تعامل نہیں رہتا۔ مزید براں ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ $t = 0$ سے پہلے دونوں نظامات کی کیفیات معلوم تھیں۔ شروڈنگر کی مساوات کی مدد سے تب ہم کسی بھی مستقبل کے وقت کیلئے مجموعی نظام (combined system) یعنی I+II کی کیفیت کا حساب کر سکتے ہیں ؛ خاص کر ، کسی بھی T $t >$ کیلئے۔ آئیے اب ہم مماثلی موجی تفاعل کو Ψ سے موسوم کریں۔ تاہم ہم اس کیفیت کا حساب نہیں کر سکتے جس میں دونوں نظامات میں سے کوئی ایک دوسرے سے تعامل کے بعد پایا جائے گا۔ کوانٹم میکانیات کے مطابق ایک عمل ، جسے موجی پیکٹ (wavepacket) کی تخفیف (reduction) کہتے ہیں ، کے استعمال سے اور مزید پیمائیشوں کی مدد سے ایسا کیا جا سکتا ہے۔ آئیے ہم اس عمل کی تفصیل کو دیکھتے ہیں۔ نظام I سے متعلق ایک ایسی طبیعیاتی مقدار A کو لیجئے جس کی آئگنی اقدار (eigenvalues) اگر $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ہوں اور ان کے مماثل آئگنی تفاعلات (eigenfunctions) اگر $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1), \ldots$ ہوں ، جبکہ x_1 پہلے نظام کی توضیح کرنے کیلئے مقدارء متغیر ہے۔ تو x_1 کے تفاعل کے طور پر Ψ کو اسطرح ظاہر کر سکتے ہیں

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2) u_n(x_1), \tag{۷}$$

جبکہ x_2 دوسرے نظام کو بیان کرنے کیلئے مقدارء متغیر ہے۔ یہاں $\psi_n(x_2)$ کو محض Ψ کے عمودی تفاعلات (orthogonal functions) $u_n(x_1)$ کے ایک سلسلے میں کئے گئے پھیلاو (expansion) کے عددی سر (coefficients) کے طور پر لینا چاہیے۔ اب فرض کریں کہ مقدار A کی پیمائش کی جاتی ہے اور اسکی قدر a_k حاصل ہوتی ہے۔ اس سے یہ نتیجہ اخذ کیا جاتا ہے کہ پیمائش کے بعد پہلا نظام اس کیفیت میں رہ جاتا ہے جو کہ موجی تفاعل $\psi_k(x_2)$ سے دی گئی ہے۔ یہی موجی پیکٹ کی تخفیف کا عمل ہے؛ لا متناہی تسلسل (۷) میں دیا گیا موجی پیکٹ ایک واحد مقدار (single term) جو کہ $\psi_k(x_2)u_k(x_1)$ ہے، میں خفیف (reduce) ہو جاتا ہے۔ طبیعیاتی مقدار A کا انتحاب تفاعلات $u_n(x_1)$ کے سیٹ کو متعین کرتا ہے۔ اگر اس کی بجائے ایک دوسری مقدار B کا انتخاب کیا ہوتا جس کی آئگنی اقدار $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ہوتیں اور جس کے آئگنی تفاعلات $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1), \ldots$ ہوتے ، تو مساوات (۷) کی بجائے ہمیں یہ پھیلاو حاصل ہوتا

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s(x_2) v_s(x_1), \tag{۸}$$

جس میں سارے φ_s نئے عددی سر ہیں۔ اب اگر مقدار B کی پیمائش کی جائے اور اس کی قیمت b_r پائی جائے تو ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ پیمائش کے بعد پہلا نظام اس کیفیت میں پایا جائے گا جو کہ $v_r(x_1)$ سے دی گئی ہے اور دوسرا نظام اس کیفیت میں پایا جائے گا جو کہ $\varphi_r(x_2)$ سے دی گئی ہے۔ اسلئے ہم دیکھتے ہیں کہ پہلے نظام پر دو مختلف پیمائشیں کرنے کے نتیجے میں دوسرا نظام ایسی کیفیات میں پایا جا سکتا ہے جن کے دو مختلف موجی تفاعلات ہوں۔ دوسری طرف چونکہ پیمائش

کے وقت دونوں نظامات کوئی تعامل نہیں کرتے ، اسلئے پہلے نظام پر کچھ کرنے کے نتیجہ میں کوئی حقیقی تبدیلی واقع نہیں ہو سکتی۔ بے شک یہ ایک محض بیان ہے کہ دونوں نظامات کے درمیان کوئی تعامل نہ ہونے کا کیا مطلب ہے۔ چناچہ یہ ممکن ہے کہ ایک ہی ماہیت (reality) کو دو مختلف موجی تفاعلات (جو کہ ہماری مثال میں ψ_k اور φ_r ہیں) تفویض (assign) کر دیے جائیں (دوسرے نظام کے پہلے کے ساتھ تعامل کے بعد) ۔ اب یہ واقع ہو سکتا ہے کہ دو موجی تفاعلات ، ψ_k اور φ_r ، کچھ طبیعیاتی مقداروں (physical quantities) P اور Q کے مماثل دو باالترتیب عدم مبادلاتی عاملات کے آئگنی تفاعل ہوں۔ ایک مثال سے ہی یہ بہتر طور پہ دکھایا جا سکتا ہے کہ ایسا در حقیقت ہو سکتا ہے۔ آئیے فرض کریں کہ دو نظامات دو بنیادی ذرّات ہیں اور یہ کہ

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x_1 - x_2 + x_0)p} dp, \tag{۹}$$

جس میں x_0 ایک مستقل مقدار ہے۔ پہلے بنیادی ذرّے کا مومینٹم A ہو تو پھر جیسا کہ ہم نے مساوات (٤) میں دیکھا کہ آئگنی قدر p کے مماثل اس کے آئگنی تفاعلات

$$u_p(x_1) = e^{(2\pi i/h)px_1}, \tag{۱۰}$$

ہونگے۔ چونکہ ہمارے پاس صورت حال ایک مسلسل طیف (continuous spectrum) کی ہے ، مساوات (۷) کو اسطرح لکھا جائیگا

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(x_2) u_p(x_1) dp, \tag{۱۱}$$

جس میں

$$\psi_p(x_2) = e^{-(2\pi i/h)(x_2 - x_0)p}, \tag{۱۲}$$

ہے۔ تاہم یہ ψ_p دوسرے بنیادی ذرّے کے مومینٹم کی آئگنی قیمت $-p$ کے مماثل عامل

$$P = (h/2\pi i)\partial/\partial x_2, \tag{۱۳}$$

کا آئگنی تفاعل ہے۔ دوسری طرف اگر پہلے بنیادی ذرّے کا محدد B ہو تو آپریٹر (۱۳) کیلئے آئگنی قیمت x کے مماثل آئگنی تفاعل

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \tag{۱٤}$$

ہوگا ، جس میں $\delta(x_1 - x)$ جانا پہچانا ڈیراک کا ڈیلٹا تفاعل (Dirac delta-function) ہے۔ اس صورت میں مساوات (۸) یہ ہو جاتی ہے

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \tag{۱۵}$$

جس میں

$$\varphi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(2\pi i/h)(x-x_2+x_0)p} dp = h\delta(x - x_2 + x_0). \quad (١٦)$$

تاہم یہ φ_x آپریٹر

$$Q = x_2 \quad (١٧)$$

کا آئگنی تفاعل ہے جو کہ دوسرے بنیادی ذرّے کے محدد کی آئگنی قدر $x+x_0$ کے مماثل ہے۔ چونکہ

$$PQ - QP = h/2\pi i, \quad (١٨)$$

اسلئے ہم نے یہ دکھایا ہے کہ ψ_k اور φ_r کیلئے یہ عمومی طور پر ممکن ہے کہ وہ طبیعیاتی مقداروں کے مماثل دو عدم مبادلاتی عاملات کے آئگنی تفاعل ہوں۔

اب مساواتوں (٧) اور (٨) میں تصور کردہ عمومی صورت حال کی طرف واپس آتے ہوئے ہم یہ فرض کرتے ہیں کہ ψ_k اور φ_r بے شک کوئی عدم مبادلاتی عاملات P اور Q کے آئگنی تفاعل ہیں جو کہ آئگنی قیمتوں p_k اور q_r کے باالترتیب مماثل ہیں۔ چنانچہ A یا B کی پیمائش کرنے سے ہم یقین کیساتھ ، اور دوسرے نظام میں کسی طرح سے بھی کوئی مداخلت کئے بغیر ، یا تو مقدار P کی قیمت (جو کہ p_k ہے) یا پھر مقدار Q کی قیمت (جو کہ q_r ہے) کی پیشین گوئی کرنے کی حالت میں ہوتے ہیں۔ ماہیّت کی جانچ کے ہمارے اصول کے موافق ، پہلی صورت میں ہمیں مقدار P کو ماہیّت کے ایک عنصر کے طور پر گرداننا چاہیے ، اور دوسری صورت میں مقدار Q ماہیّت کا ایک عنصر ہے۔ لیکن جیسا کہ ہم نے دیکھا کہ دونوں موجی تفاعل ψ_k اور φ_r ایک ہی ماہیّت سے متعلق ہیں۔

پہلے ہم نے یہ ثابت کیا کہ یا تو 1) ماہیّت کی کوانٹم میکانیکی تصریح جو موجی تفاعل دیتا ہے وہ کامل نہیں ، یا پھر 2) جب دو طبیعیاتی مقداروں کے مماثل عاملات مبادلہ نہ کریں تو دونوں مقداروں کی ہم وقتی ماہیّت نہیں ہو سکتی۔ اس مفروضے سے ابتداء کرتے ہوئے کہ موجی تفاعل طبیعیاتی ماہیّت کی ایک کامل تصریح دیتا ہے ، ہم اس نتیجے پر پہنچے کہ دو طبیعیاتی مقداریں جن کے مماثل عاملات عدم مبادلاتی ہوں ، وہ ہم وقتی ماہیّت رکھ سکتی ہیں۔ چنانچہ 1) کی تردید سے ایک ہی دوسرے متبادل 2) کی تردید ہو جاتی ہے۔ چنانچہ ہم یہ نتیجہ اخذ کرنے پر مجبور ہوجاتے ہیں کہ طبیعیاتی ماہیّت کی کوانٹم میکانیکی تصریح جو موجی تفاعل دیتا ہے وہ کامل نہیں۔

کوئی شخص اس نتیجہ پر اس بنیاد پہ اعتراض کر سکتا ہے کہ ماہیّت سے متعلق ہماری کسوٹی حسب ضرورت امتناعی (restrictive) نہیں ہے۔ بے شک اگر وہ شخص اصرار کرے کہ صرف اس صورت میں دو یا اس سے زیادہ طبیعیاتی مقداریں ماہیّت کی بیک وقت عناصر ہو سکتی ہیں جب ان کی بیک وقت

پیمائش یا پیشین گوئی کی جا سکے۔ اس نقطۂ نظر سے کیونکہ دو مقداروں P اور Q میں سے ایک یا پھر دوسری مقدار ، لیکن دونوں بیک وقت نہیں ، کی پیشین گوئی کی جا سکتی ہے اسلئے یہ دونوں بیک وقت ماہیت نہیں رکھ سکتیں۔ اس سے P اور Q کی ماہیّت پہلے نظام پر کئے جانے والے پیمائشی عمل پر منحصر ہو جاتی ہے جو کہ دوسرے نظام پر کسی طرح سے بھی کوئی خلل نہیں ڈالتا۔ ماہیّت کی کسی معقول تعریف سے یہ امید نہیں رکھی جا سکتی کہ وہ اس کی اجازت دے۔

اگرچہ ہم نے اس طرح سے یہ دکھایا ہے کہ موجی تفاعل طبیعیاتی ماہیّت کی ایک کامل تصریح مہیا نہیں کرتا ، ہم نے یہ مسئلہ کہ کیا ایسی تصریح وجود رکھتی ہے یا نہیں تصفیہ طلب چھوڑا دیا ہے۔ تاہم ہمیں یہ یقین ہے کہ ایک ایسا نظریہ ممکن ہے۔

V. TRANSLATORS' CONTRIBUTIONS

PH's life and work provided motivation and the concept development for this work. AI translated the EPR article; PH checked its technical correctness and conformity to the standards required of an Urdu translation of this landmark article; and DA supervised the work and advised on LaTex typesetting in the multilingual environment.