Coordinate transformations galileia space

Valery Timin

(July 2019)

Russia

This paper deals with the orthonormal transformation of the coordinates of 3+1 - and 4-dimensional Galilean space. Such transformations are transformations of displacement, rotation, and transition to a moving coordinate system. Formulas and matrices of these transformations are given.

The reasons for writing this work and the next few are two reasons.

1. The space in which classical mechanics is defined is the Galilean space, more precisely, its 3+1-dimensional interpretation.

2. Unlike the Galilean space, which has all the properties of the space in which tensors are defined, in classical mechanics not all parameters are tensors. In this regard, it is impossible to define classical mechanics in 4-dimensional form in 4-dimensional space in a simple way.

В данной работе рассмотрены вопросы ортонормированного преобразования координат 3+1- и 4-мерного галилеева пространства. Такими преобразованиями являются преобразования смещения, поворота и перехода в движущуюся систему координат. Даны формулы и матрицы этих преобразований.

Поводами для написания данной работы и нескольких следующих являются два повода.

1. Пространством, в котором определена классическая механика, является галилеево пространство, точнее, ее 3+1-мерная интерпретация.

2. В отличие от галилеева пространства, обладающей всеми свойствами пространства, в котором определены тензоры, в классической механике не все параметры являются тензорами. В связи с этим невозможно простым способом определить классическую механику в 4-мерном виде в 4-мерном пространстве.

Преобразования координат галилеева пространства

Нетензорность заключается в том, что кинематические параметры м.т. при галилеевых преобразованиях координат преобразуются не тензорно или не линейно. Например, вспомните преобразование кинетической K энергии, которая считается скаляром:

$$K(v+dv)=\frac{m(v+dv)^2}{2}=$$

$$=m\left(\frac{v^2}{2}+vdv+d\frac{v^2}{2}\right)=$$

$$= K(v) + mvdv + d\frac{v^2}{2}.$$

Эта формула говорит, что кинетическая энергия не является скаляром.

Галилеева и классическая 4–мерные механики строятся в 4–мерном пространстве–времени. КМН и МГ пространство и время являются ортонормированными пространствами P_1 и P_3 по отдельности сами по себе: $P_1 = (t)$, $P_3 = (r^1, r^2, r^3)$. В классической ньютоновой механике 4–я координата присутствует чисто формально, и рассматривать ее как тензорный элемент можно только в отдельных случаях. Это, скорее просто как параметр траектории движения, чем координата. В СТО пространство–время является пространством $P_4 = (t, r^1, r^2, r^3)$, ортонормированным во всех 4–х измерениях, причем время нельзя отделить от 3–пространства, как в предыдущем случае. Ортонормированность координат позволяет не учитывать существование тензора связности пространства–времени и вместо ковариантных производных применять обычные частные производные и дифференцирование.

1. Галилеево пространство

Пространством галилеевым (ГП) назовем абсолютное ортонормированное 4-мерное аффинное пространство, представляющее собой прямое произведение двух независимых (абсолютных) подпространств $P_1 \times P_3$, где P_1 –1-мерного пространство "время" с координатным представлением t и P_3 – 3–мерное "3–пространство" (далее просто "пространством") с координатным представлением (r^1, r^2, r^3). Количество измерений "пространства" может быть и более 3-х. Общим координатным представлением является представление в векторной форме (t, r^1, r^2, r^3) или (t, r^i) или обобщенной (q^i): $i \in \{0..3\}$. Некоторые теории, рассматривающие пространство–время в 4–х измерениях, принимают координату t в вещественных числах, а координаты r – в мнимых числах.

Группой допустимых преобразований координат КМН и МГ является группа галилеевых преобразований координат и времени. В качестве метрики в них будут выступать три параметра: $d\tau = dt$ – координатное время на мировой линии м.т., dl – расстояние между двумя точками 3–пространства в одно и то же время t: $dl^2 = dr^2$ и "интервал" ds: $ds^2 = dt^2 - dr^2$ (при определенных условиях). Они обладают свойством инвариантности относительно ГПТК. В них определена обычная тензорная алгебра, за исключением понятия 4–мерного метрического тензора g_{ij} и операций поднятия–опускания индекса. Ковариантность или контравариантность индекса тензора должна быть определена заранее при ее определении в одной из с.к. в связи с отсутствием полноценной операции поднятия/опускания индекса.

Замечание. Насчет последних двух предложений см. *ч. 5 и 6*.

На вопрос: являются ли сами координаты тензорами? – ответим так: с точки зрения тензорной алгебры координаты будут обладать тензорными свойствами только для косоугольной (в т.ч. ортонормированной) 4–мерной евклидовой с.о. с постоянно выделенной точкой начала отсчета координат, т.е. для преобразований без трансляции координат и времени. В общем случае нет: действительно, любое смещение начала отсчета координат придает нулевому исходному значению координат ненулевое значение, равное смещению.

Скорость обладает векторными свойствами с точностью до трансляции всех 4-х координат и вращения в 3-мерном пространстве, т.е в покоящейся с.о. Любое преобразование исходной с.о. в движущуюся с.о. изменит нулевое исходное состояние скорости в ненулевое, равное скорости движущейся с.о.

Ускорение обладает векторными свойствами во всех ИСО.

И эти свойства тензоров являются инвариантными свойствами во всех механиках.

Абсолютность и независимость означает, что при любых преобразованиях координат любой точки A его временная координата t может измениться только в зависимости от самого себя.

$$t' = t'(t). \tag{1.1}$$

Зависимости от пространственной координаты не может быть – это противоречит абсолютности координаты времени.

Пространственная координата r^i каждого слоя изменяется независимо от времени:

$$r'^i = r^i(r^1, r^2, r^3). \tag{1.2}$$

и при этом различные слои могут изменяться независимо от других слоев, что предполагает зависимость от t:

$$r'^i = r^i(t, r^1, r^2, r^3). \tag{1.3}$$

Аффинность означает, что координаты могут преобразовываться только линейно.

$$q'^i = g^i{}_j q^j - q_{(0)}{}^i \tag{1.4}$$

Ортонормированность означает, что оси координат взаимно перпендикулярны и длина единицы оси координат пространства нормирована и равна единице длины, предполагается – эталона длины, а длина единицы оси времени также равна единице, но – единице продолжительности (длины) времени. Ось времени перпендикулярна к любому пространственному объекту по определению.

4-мерная глобальная не вырожденная метрика в галилеевом пространстве не определена. Но метрика определена в каждом из слоев пространства и времени. В подпространстве "время" определена линейная метрика $\tau = g_0\Delta t = g_0(t_2 - t_1)$, а в 3-подпространстве определена биметрика $\Delta l^2 = \Delta r_i^2$. Метрику g_0 можно принимать как глобальная, но с ограничениями в силу ее линейности и вырожденности.

Галилеевость означает, что ее временная координата может только смещаться относительно начального значения, а пространственная координата r^i при этом может измениться также линейно от времени:

$$\begin{aligned} t' &= t - t_{(0)}, \\ r'^i &= \omega^i{}_j(t) r^j - v^i{}_0 t, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $v^i{}_0$ – векторный параметр галилеева преобразования (физически соответствующая галилееву преобразованию "скорость"),

$t_{(0)}$ – смещение по времени,

Галилеевость – это та же аффинность, только более физическое, чем математическое, понятие. Ну и математическое – тоже.

2. Преобразования координат 3-мерные

Галилеевы преобразования применяются по отношению к координатам и тензорам в галилеевом пространстве-времени. В этом пространстве время и координаты абсолютны и взаимно независимы и преобразования могут быть только ортонормированными линейными (см. выше – аффинность, ортонормированность и галилеевость).

Рассмотрим преобразования 4–мерных координат и времени при галилеевых преобразованиях тензоров и координат (ГПТК), удовлетворяющих этим условиям.

1. Трансляция координат и времени:

$$q' = q - q_{(0)}. \tag{2.1}$$

Здесь $q^i{}_{(0)}$ – смещение новой с.о. относительно старой. Знак "минус" при ней означает направление смещения исходной с.о. относительно новой.

Обратное преобразование осуществляется формулами

$$q = q' + q'_{(0)}. \tag{2.2}$$

Это преобразование не является тензорным, потому что любой выбранный вектор-координату q подобным преобразованием можно обнулить, переместив начало координат в эту точку. Это – преобразования аффинного пространства. Но при этом его дифференциал является тензором, точнее - вектором:

$$dq'^i = dq^i. \tag{2.3}$$

и обнулить ее аффинными преобразованиями невозможно. При этом пространственную часть дифференциала невозможно обнулить ни при каких условиях, но отдельно пространственную часть можно обнулить.

Скорость и ускорение в галилеевом пространстве являются физическими понятиями, а математически определяют некоторое связанное с отношениями дифференциалов векторное "направление". Скорость и ускорение при этом также остаются без изменения и обладают тензорными свойствами, в силу (2.3). Относительно этих преобразований временные элементы скорости v_0 и ускорения w_0 принимают тривиальные значения при параметризации траектории по координате t: $v^0 = dt/d\tau = 1$, $w^0 = d^2t/d\tau^2 = 0$ и не изменяются.

$$\begin{gathered} v' = v, \\ w' = w. \end{gathered} \tag{3}$$

2. Линейные преобразования поворота пространственных координат, соответствующие ГПТК, соответствующие повороту пространственных координат относительно начала координат:

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = \omega^i_j r^j, \\ v'^i = \omega^i_j v^j, \\ w' = \omega^i_j w^j. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь ω^i_j – тензор ортонормированного поворота пространственного слоя новой с.о. в старой. Знаки элементов матрицы зависят от ориентации систем отсчета. По умолчанию с.о. правая и за положительное направление поворота принимается последовательность $r^1 \to r^2 \to r^3 \to r^1$.

Обратные преобразования осуществляется этой же формулой (4), если считать штрихованной начальную систему. При этом значение параметра ω^i_j не изменяется, но как бы транспонируется.

2.1. Линейные преобразования поворота и смещения пространственных координат (сначала поворот, затем переход в ИСО со смещением, то формулой (5.1):

$$\begin{gathered} t' = t - t_{(0)}, \\ r'^i = \omega^i_j r^j - r_{(0)}, \\ v'^i = \omega^i_j v^j, \\ w' = \omega^i_j w^j. \end{gathered} \tag{5.1}$$

2.2. Результат перехода в новую с.о. зависит от порядка выполнения операций. Обратные преобразования (сначала смещение, затем поворот) осуществляются формулами:

$$\begin{gathered} t' = t - t_{(0)}, \\ r'^i = \omega^i_j (r^j - r_{(0)}), \\ v'^i = \omega^i_j v^j, \end{gathered} \tag{5.2}$$

$$w' = \omega^i_j w^j.$$

3. Линейные галилеевы преобразования перехода в движущуюся со скоростью $v^i_{(0)}$ ИСО:

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = r^i - v^i_{(0)}t, \\ v'^i = v^i - v^i_{(0)}, \\ w'^i = w^i. \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь $v^i_{(0)}$ – скорость новой с.о. относительно старой. Знак "минус" при ней означает направление движения исходной с.о. относительно новой (см. п.1).

Обратные преобразования осуществляется этой же формулой (6), если считать штрихованной начальную систему. При этом значение параметра $v^i_{(0)}$ не изменяется, но изменяется знак перед ней.

3.1. Линейные преобразования поворота и перехода в ИСО пространственных координат (сначала поворот, затем переход в ИСО), то формулой (7.1):

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = \omega^i_j r^j - v^i_{(0)}t, \\ v'^i = \omega^i_j v^j - v^i_{(0)}, \\ w' = \omega^i_j w^j. \end{gathered} \tag{7.1}$$

3.2. Обратные к (7.1) преобразования (сначала переход в ИСО, затем поворот). При этом значение параметра ω^i_j не изменяется, но как бы транспонируется, что соответствует изменению знака угла поворота.

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = \omega^i_j(r^j - v^i_{(0)}t), \\ v'^i = \omega^i_j(v^j - v^j_{(0)}), \\ w' = \omega^i_j w^j. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Результат перехода в новую с.о. зависит от порядка выполнения операций в силу не коммутативности операций смещения и поворота с.к.

4. Преобразования инверсии определяют изменение направления координатных линий и относятся к дискретным.

$$\begin{gathered} t' = \pm t, \\ r'^i = \pm r^i. \end{gathered} \tag{8}$$

Инверсия – это в каком-то смысле операция "сопряжения": одному исходному элементу сопоставляется другой.

Обратные преобразования осуществляется этой же формулой (8) с тем же знаком.

Частичная инверсия по определенным направлениям называется отражением.

5. В обобщенном виде преобразования с 1 по 4 (без масштабных преобразований) записываются следующими формулами.

5.1. Если сначала поворот, затем переход в ИСО со смещением, то формулой (7.1):

$$t' = t - t_{(0)}, \tag{9.1}$$

$$r'^i = \omega^i_j r^j - v^i_{(0)} t - r_{(0)},$$
$$v'^i = \omega^i_j v^j - v^i_{(0)},$$
$$w' = \omega^i_j w^j.$$

Результат перехода в новую с.о. зависит от порядка выполнения операций в силу не коммутативности операции поворота в композиции с другими. Только при таком порядке перехода новая с.о. будет двигаться со скоростью $v^i_{(0)}$ со смещением ($t_{(0)}$, $r^i_{(0)}$) в повернутом на угол ω^j_j положении. Формулы (9) представляют преобразование координат по алгоритму (сначала поворот, после смещение". Рассмотрим в этих формулах каждую строку.

Формула (9.1.1) представляет собой смещение координаты t в новой с.о. от старой.

Формула (9.1.2) представляет собой поворот с.к. на ω^j_j с переходом в другую ИСО со скоростью v^i_0.

Формула (9.1.3) представляет собой преобразование скорости м.т. в новой с.о.

Формула (9.1.4) представляет собой преобразование ускорения м.т. в новой с.о.

Порядок выполнения перехода в новую с.о. следующий:

1. Начала обоих с.о. совмещаются.
2. Новая с.о. поворачивается на угол ω^j_j.
3. Новой с.о. придается скорость $v^i_{(0)}$.
4. Производится смещение начала отсчета новой с.о. в старой на ($t_{(0)}$, $r^i_{(0)}$).

5.2. Обратный переход (после использования (9.1)) осуществляется формулами (9.2): сначала смещение, переход в ИСО, затем поворот. Обратите внимание на скобки:

$$\begin{gathered} t' = t - t_{(0)}, \\ r'^i = \omega^i_j[(r^j - r_{(0)}) - v^i_{(0)}(t - t_{(0)})], \\ v'^i = \omega^i_j(v^j - v^j_{(0)}), \\ w' = \omega^i_j w^j. \end{gathered} \tag{9.2}$$

Представленная формула (7.1) и (7.2) не соответствует правилам преобразования тензоров, в данном случае – вектора координаты, т.к. подбором смещения любой вектор можно обнулить. И только при нулевом смещении преобразование координат соответствует тензорным:

$$\begin{gathered} t' = t, \\ r'^i = \omega^i_j r^j - v^j_{(0)} t, \end{gathered} \tag{9.3}$$

6. ГПТК можно дополнить еще и масштабными преобразования координат и времени. Они соответствуют изменению единиц измерения. Обычно предполагается, что масштабные коэффициенты равны ±1 (см. предыдущий пункт):

$$\begin{cases} t' = \lambda \cdot t, \\ r'^i = g \cdot r^i. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} v'^i = g/\lambda \cdot v^i, \\ w'^i = g/\lambda^2 \cdot w^i. \end{cases}$$

3. Преобразования галилеевых координат как 4-вектора

Отличие в 4-мерных преобразованиях координат от 3-мерных заключается в том, что появляется еще одна координата – "время" t с индексом 0. 4-мерные координаты называются обобщенными и в отличие от 3-мерных обозначаются как q^i с индексами от 0 до 3.

$$q^i = \{q^0, q^1, q^2, q^3\}: q^0 \sim t, q^i : i \in \{1..3\} \sim r^i.$$

Каких либо отличий в формулах преобразования координат (6 - 9) не имеется, кроме добавления элементов с новым индексом. В обобщенном виде эти преобразования следующие:

$$\begin{gathered} q''^i = \omega^i_j\, q^j - q^i_{(0)} \text{ или } q''^i = \omega^i_j\, (q^j - q^j_{(0)}): i \in \{0..3\}, \\ v''^i = \omega^i_j\,(v^j - v^j_{(0)}) : i \in \{0..3\}, \\ w' = \omega^i_j\, w^j : i \in \{0..3\} \end{gathered} \tag{10.1}$$

Здесь ω^i_j включает в себя одновременно переход в движущуюся с.о. и поворот 3-мерного подпространства.

Для преобразований координат с начальным поворотом, переходом в ИСО и смещением в смешанной тензорно-матричной форме формулы преобразования следующие. Сначала поворот, потом в ИСО со смещением:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t_{(0)} \\ q^i{}_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{10.2}$$

или (сначала в ИСО со смещением, потом поворот):

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega^i{}_j v^j{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - t_{(0)} \\ r^j - r^j{}_{(0)} \end{pmatrix}. \tag{10.3}$$

(10.2) и (10.3) не совпадают из-за не коммутативности композиции этих операции.

4. Преобразования галилеевых координат как 5-вектора

Ранее на вопрос "являются ли координаты тензорами"? мы ответили отрицательно и назвали причину этого: любое смещение начала отсчета координат придает нулевому исходному значению координат ненулевое значение, равное смещению. Для избавления от этого недостатка имеется известный способ – добавление еще одной, дополнительной 5-ой координаты "s", которая принимает единственное, равное единице, значение. В таком 5-мерном пространстве 4-мерное пространство представляется 4-мерный "подпространством" с фиксированным значением координаты в 5-ом измерении, равным "1". Тогда любая точка 4-пространства будет определяться координатами (1, t, r^1, r^2, r^3), и любой пространственный вектор не сможет иметь нулевое значение всех координат. Соответственно изменится и тензор преобразования координат. Точка начала координат при этом будет иметь координаты (1,0,0,0,0). Следовательно, при любых преобразованиях координат любой пространственный вектор будет оставаться ненулевым вектором.

Для преобразований координат в обобщенном 5-мерном виде с начальным смещением в смешанной тензорно-матричной форме можно применить следующие формулы. Дополнительная координата при этом может иметь только одно значение – единица. По алгоритму "сначала поворот, затем смещение и переход в ИСО" производится по формуле:

$$V^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t^0 & 1 & 0 \\ -r_{(0)}{}^i & -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

$$q'^i = V^i{}_j q^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t_{(0)} & 1 & 0 \\ -r_{(0)}{}^i & -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t - t_{(0)} \\ \omega^i_j r^j - v^i{}_0 t - r_{(0)}{}^i \end{pmatrix}.$$

Обратная к (11.1) операция осуществляется по формулам (сначала смещение с переходом в ИСО, потом поворот):

$$V^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t^0 & 1 & 0 \\ -\omega^i{}_j r_{(0)}{}^i & -\omega^i{}_j v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}.$$

$$q'^i = V^i{}_j q^j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t_{(0)} & 1 & 0 \\ -\omega^i{}_j r_{(0)}{}^j & -\omega^i{}_j v^j{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t - t_{(0)} \\ \omega^i_j \left(r^j - v^j{}_0 t - r_{(0)}{}^i \right) \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Как видно, два способа – (11.1) и (11.2) – взаимно обратны друг к другу. Но также видно, что эти два способа не ковариантны по отношению друг к другу из-за не коммутативности композиции этих операции.

Векторы галилеева пространства в 5-мерной форме отличаются от векторов в 4-мерной форме только наличием еще одной, дополнительной, координаты, имеющей значение 0:

$$(q^i) \to (0,\, q^i).$$

В качестве индекса этого дополнительного элемента вектора в евклидовом пространстве можно взять индекс 4. Представление галилеева пространства в 5-мерном виде переводит смещение 4-координат в тензорный вид

В галилеевом и других псевдоевклидовых пространств индекс 0 занят координатой "время", поэтому альтернативами являются значения "4" или "s", и для наглядности записей тензоров можно элементы с этим индексом записывать до всех других элементов с другими индексами, как будто это индекс "-1".

Для "нормальных" тензоров произвольного порядка все элементы, включающие в себя этот индекс, должны быть равны 0. Но теоретически допустимы тензоры, у которых значения этих элементов будут константами или даже переменными. Их природа и полезность требуют дополнительного рассмотрения и обоснования.

5. Малые преобразования координат в 4-мерном виде

Для преобразований координат без начального смещения, но с поворотом и переходом в ИСО (первый способ – сначала поворот), в смешанной тензорно-матричной форме формулы преобразования следующие:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta v^i{}_0 & \Delta\omega^i{}_j + E^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Вычтем из нее исходные значения координат q^i:

$$\begin{aligned} dq^i &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Delta v^i{}_0 & \Delta\omega^i{}_j + E^i{}_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E^i{}_j \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\Delta v^i{}_0 & \Delta\omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\omega^i_j r^j - \Delta v^i{}_0 t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{13}$$

При этом изменятся все скорости:

$$\Delta v^i = \Delta\omega^i_{\ j} v^j - \Delta v^i_{\ 0}. \tag{14}$$

По второму способу (сначала переход в ИСО) имеем:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j})\Delta v^j_{\ \ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Вычтем из нее исходные значения координат q^i:

$$\begin{gathered} dq^i = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j})\Delta v^j_{\ \ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E^i_{\ j} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Delta\omega^i_{\ j}\Delta v^i_{\ 0} - \Delta v^i_{\ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ \sim \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\omega^i_{\ j} r^j - \Delta v^i_{\ 0} t \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{16}$$

Как видно из (16), результат почти тот же, что и в (13), только с "ошибкой" второго порядка из-за не коммутативности операции поворота в композиции с другими операциями. При этом также изменятся и все скорости:

$$\Delta v^i = \Delta\omega^i_{\ j} v^j - \Delta v^i_{\ 0}. \tag{17}$$

6. Малые преобразования координат со смещением в 5-мерной форме

Для преобразований координат с начальным смещением, поворотом и переходом в ИСО (первый способ – сначала поворот), в смешанной тензорно-матричной форме формулы преобразования следующие:

$$q'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Delta t_{(0)} & 1 & 0 \\ -\Delta r^i_{\ (0)} & -\Delta v^i_{\ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Вычтем из нее исходные значения координат q^i:

$$\begin{gathered} dq^i = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\Delta t_{(0)} & 1 & 0 \\ -\Delta r^i_{\ (0)} & -\Delta v^i_{\ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} + E^i_{\ j} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & E^i_{\ j} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\Delta t_{(0)} & 0 & 0 \\ -\Delta r^i_{\ (0)} & -\Delta v^i_{\ 0} & \Delta\omega^i_{\ j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ r^j \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ -\Delta t_{(0)} \\ \Delta\omega^i_{\ j} r^j - \Delta v^i_{\ 0} t - \Delta r^i_{\ (0)} \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, при малых преобразованиях координат значения новых координат отличаются от старых в соответствии с (19). Координата времени изменяется на значение смещения, а изменение 3-мерных координат изменяется зависимо от поворота, смещения и перехода в ИСО:

$$t' - t = -\Delta t_{(0)},$$
$$r'^i - r^i = \Delta\omega^i{}_j r^j - \Delta v^i{}_0 t - \Delta r^i{}_{(0)}.$$

При этом изменятся все скорости:

$$\Delta v^i = \Delta\omega^i_j v^j - \Delta v^i{}_0. \tag{20}$$

Второй способ с ошибкой второго порядка должен дать тот же результат:

Посмотрите, чем отличаются (19) и (16), а также (20) и (17).

7. Векторы и тензоры галилеева пространства

Для механики галилеево пространство необходимо не только потому, что оно является математической моделью пространства галилеевой механики, но и потому, что в них можно определить ковариантным образом тензорные объекты, математически описывающие свойства материальных объектов в ней. Например, скорости и ускорения, а также физические материальные и силовые поля. Выше мы рассматривали только следующие тензорные объекты: координата, скорость и ускорение м.т., тензор преобразования координат, состоящий из вектора смещения, тензора перехода в новое ИСО и тензора поворота 3-пространства.

Векторы галилеева пространства очень похожи на координаты и имеют в своем составе также 4 элемента: если $q^i = (t, r^i)$ – координаты, то $A^i = (A, A^i)$ – вектор. Еще одно различие – положение индекса. Векторы могут быть контравариантными с индексом наверху (пример - A^i) и ковариантными с индексом внизу (пример - A_i).

Тензоры ранга 2 очень похожи на тензор-матрицу преобразования координат V^i_j:

$$V'^i{}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{21.1}$$

Разница в том, что элементы произвольного тензора могут иметь произвольные значения:

$$A'^i{}_j = \begin{pmatrix} A^0{}_0 & A^0{}_j \\ -A^i{}_0 & A^i{}_j \end{pmatrix}. \tag{21.2}$$

Еще одно различие – положение индексов, причем каждое из них по отдельности, независимо друг от друга.

Кроме векторов и тензор-матриц ранга 2, возможно существование тензоров произвольного ранга.

Преобразования векторов и тензоров при переходе в новую с.к. производятся по тем же правилам, что и преобразования координат. Но при этом необходимо учитывать положение индекса: контра- или ковариантный индекс?. Например, контравариантный вектор $A^i = (A, A^i)$ преобразовывается по формуле

$$A'^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v^i{}_0 & \omega^i{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^0, & \omega^i{}_j A^j - v^i{}_0 A^0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

8. Метрики галилеева пространства

Изначально в галилеевом пространстве существуют две метрики: $d\tau$ – координатное время на мировой линии м.т.,

$$d\tau = dt \tag{23}$$

и dl – 3-мерное расстояние между двумя точками 3–пространства в одно и то же время t: $dl^2 = dr^2$. Метрика $d\tau$ является инвариантной метрикой, между всеми точками пространства, но метрика dl^2 определена только на плоскости одновременности $\tau = \mathrm{const}$.

$$dl^2 = dr^2 : t = \mathrm{const}. \tag{24}$$

Расстояние, взятое между точками в разные времена, не являются инвариантами.

Метрика "интервал" ds: $ds^2 = dt^2 - dr^2$ также является глобальной и определена между любыми точками пространства, но при определенных условиях, определенных в предыдущем параграфе – а именно, определена операция сопряжения.

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 \tag{25}$$

Как можно использовать полученные метрики?

Пространственная 3-метрика (24) "расстояние" является вырожденной метрикой, определенной в 3-мерном подпространстве одновременных событий. 4-метрика (27) "интервал" и временная метрика (23) "промежуток времени" определяют глобальные метрические константы галилеева пространства, только (23) вырожденная, а (25) – не вырожденная метрики. Эти константы можно выбрать в качестве параметров траектории м.т. Метрика (25) фактически является метрикой СТО, но определенной в галилеевом пространстве, и определяет метрику волновой механики для сплошных сред.