

Struktur des Universums

Autor: Dipl. Ing. Gerd Pommerenke • Augsburg 2000-2013

E-Mail-Adresse: GerdPommerenke@arcor.de

Titel der deutschen Originalausgabe: Struktur des Universums

2. Ausgabe Augsburg 2005-2013

E-Mail-Adresse: GerdPommerenke@arcor.de

1. Autorreferat

Ursprüngliches Ziel dieser Arbeit war, festzustellen, ob es möglich ist, den HUBBLE-Parameter mit anderen als astronomischen Methoden zu bestimmen und diesen gegebenenfalls auch zu berechnen. Bisher war die Bestimmung nur durch umfangreiche astronomische Beobachtungen möglich, wobei die Genauigkeit jedoch zu wünschen übrigließ. Mit den verbesserten technischen Mitteln, wie z.B. dem HUBBLE-Weltraumteleskop gelingt es nun, immer weiter in den Weltraum vorzudringen und neue, genauere Daten zu erhalten. Dabei wird sichtbar, daß es immer dringlicher wird, ein genaues Modell des Universums als ganzes zu haben, um diese Daten richtig interpretieren zu können, denn je weiter man in das Universum und damit in die Tiefen der Zeit vordringt, um so mehr machen sich Effekte bemerkbar, die sich mit den bisherigen Modellen nur schwer oder überhaupt nicht interpretieren lassen.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, ein solches Modell zu erstellen, wobei dafür vor allem solche Daten Verwendung finden, die im lokalen Bereich liegen und mit den heutigen technischen Mitteln zugänglich sind. Dies wären vor allem die universellen Naturkonstanten und ihre Beziehungen zueinander sowie die Elektronenladung, -masse und ähnliche Werte sowie die bekannten physikalischen Gesetze. Als Grundlage hierfür dient ein kosmologisches Modell, aufbauend auf einem Vortrag, der von Prof. Cornelius LANCZOS anläßlich des EINSTEIN-Symposiums 1965 in Berlin in deutscher Sprache gehalten wurde. Dieser Vortrag ist meiner Kenntnis nach außer in [1] nicht weiter veröffentlicht worden. Aus diesem Grund habe ich den Vortrag dieser Arbeit vorangestellt und als Zitat kenntlich gemacht. Das erleichtert auch die Bewertung, inwieweit die vorliegende Arbeit eine Erweiterung seiner Theorie darstellt.

LANCZOS geht in seinem Modell von der Existenz eines streng agitierten Wellenfelds aus, welches nach seiner Meinung die eigentliche Ursache für die Eigenschaften der Raumzeit und der relativistischen Effekte allgemein sein soll. Weitere Einzelheiten entnehmen Sie bitte dem Vortrag, der insgesamt nur 7 DIN-A4-Seiten lang ist. Da mich diese Idee fasziniert und LANCZOS sein Modell auch nur in groben Umrissen skizziert hat, habe ich versucht, anhand der bekannten Tatsachen und Phänomene ein echtes Modell aufzustellen, das den Forderungen LANCZOS' gerecht wird und dennoch nicht mit der bisher akzeptierten Wirklichkeit kollidiert.

Da LANCZOS' Modell an sich schon recht unkonventionell ist, mußte auch ich zu Anfang einige unkonventionelle Ansätze machen. Der wichtigste davon ist, daß es zusätzlich zur Influenzkonstante und Dielektrizitätskonstante noch eine von Null verschiedene spezifische Leitfähigkeit des Vakuums gibt, die die Ursache der Expansion des Universums ist, aber bisher nicht entdeckt wurde, da man ja bisher mit den klassischen MAXWELLSchen Gleichungen recht gut gefahren ist. Im Laufe der Arbeit erkennt man aber, daß die tatsächliche Wellenausbreitung im Vakuum vielleicht doch etwas komplizierter vor sich gehen könnte. Auch erweist sich die spezifische Leitfähigkeit als das »missing link« im System der universellen Naturkonstanten.

Mit Hilfe dieser Annahme läßt sich eine spezielle explizite Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen finden, die sowohl die Anforderungen von LANCZOS' Modell erfüllt, als auch über die Eigenschaften verfügt, die man dem jüngst postulierten HIGGS-Feld zuschreiben muß, soll es nicht gegen schon als gesichert geltende Erkenntnisse und Beobachtungen verstoßen. Ob beide Felder identisch sind, sei erst einmal dahingestellt. Die von mir vorgestellte Lösung wird in dieser Arbeit als metrisches Wellenfeld bezeichnet. Aufgrund dieser Lösung kann schließlich ein Linienelement (Vakuumlösung) dargestellt werden, das ebenfalls explizit die Eigenschaften der Raumzeit auch für stärkere Gravitationsfelder beschreibt und für den Fall schwächerer Felder mit den bisherigen EINSTEINSchen bzw. klassischen Beziehungen zusammenfällt. Die Betrachtung wird weitergeführt bis zur Bestimmung der einzelnen Krümmungstensoren und des Energie-Impuls-Tensors bzw. der Geometrie. Da alle diese Lösungen explizit sind, konnte auf die Anwendung der Variationsrechnung vollständig verzichtet werden.

Es wird eine alternative Ausbreitungsfunktion für EM-Wellen im Vakuum vorgestellt – unter Berücksichtigung des o. g. metrischen Wellenfelds – mit deren Hilfe Effekte wie z. B die kosmologische Rotverschiebung und die Abweichungen beim SN-Kosmologie-Experiment genau vorhergesagt werden können und zwar ohne dunkle Materie etc. Anders als allgemein angenommen, sind diese bedingt durch eine zusätzliche parametrische Dämpfung, die direkt aus der Expansion des Universums resultiert und bei der Standardlösung der klassischen MAXWELLSchen Gleichungen nicht berücksichtigt wird. Den Ergebnissen des SN-Kosmologie-Experiments und deren Interpretation ist ein eigener Abschnitt gewidmet.

Weiterhin erklärt sich auch die Dominanz normaler Materie gegenüber der Antimaterie, die eigentliche Bedeutung der PLANCKschen Elementarlänge als das wahre Potential des Gravitationsfeldes sowie die Bedeutung der SOMMERFELDSchen Feinstrukturkonstante.

Am Schluß der Arbeit wird dann eine Gleichung dargestellt, die die Bestimmung des HUBBLE-Parameters aus lokal zugänglichen physikalischen Größen erlaubt, sowie ein Vergleich mit den in der Arbeit bestimmten und aus aktuellen Quellen stammenden astronomischen Werten vorgenommen. Wenn insgesamt auch viele Fragen beantwortet werden, handelt es sich bei der vorliegenden Arbeit doch um keine vollständige Kosmologie.

In der Arbeit wird die in der Theoretischen Elektrotechnik übliche Schreibweise verwendet (j anstelle von i). Auch wird konsequent mit SI-Einheiten gearbeitet, da ich der Meinung bin, daß das in der Relativitätstheorie übliche Setzen von Konstanten, wie z.B. der Lichtgeschwindigkeit auf 1, zu einer Verschleierung von Zusammenhängen führt, die bisher noch nicht bekannt sind. Da die Arbeit sehr stark interdisziplinär angelegt ist, habe ich versucht, alles so darzustellen, daß es auch von Nicht-Spezialisten verstanden werden kann.

Ich bitte um Verständnis, daß der Begriff MINKOWSKISches Linienelement zu Beginn nicht im Sinne seiner eigentlichen Bedeutung verwendet wird. Der Grund liegt darin, daß mir für das physikalische Objekt (MLE), das ich damit beschreiben will, einfach kein anderer Name eingefallen ist. Auch ist ja in LANCZOS' Vortrag ständig von einem MINKOWSKISchen Linienelement die Rede, auch wenn es nur annähernd MINKOWSKISch ist.

2. Inhalt

1.	Autorreferat.....	3
2.	Inhalt.....	5
3.	Kosmologisches Modell.....	9
3.1.	Grundlagen und Hypothesen.....	9
3.1.1.	Ausgangspunkt der Arbeit.....	9
3.1.2.	Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur (Zitat).....	9
3.2.	Aufstellung des Modells.....	16
3.3.	Kräfte im Modell.....	16
3.4.	Das MINKOWSKIsche Linienelement als Schwingkreis.....	23
3.5.	Nachteile des statischen Modells.....	25
4.	Dynamisches ell.....	26
4.1.	Weitergehende Betrachtungen.....	26
4.2.	Differentialgleichung und Lösungen.....	29
4.2.1.	Aufstellung der Differentialgleichung.....	29
4.2.2.	Allgemeine Lösung der Differentialgleichung.....	31
4.2.3.	Spezielle Lösungen.....	33
4.2.3.1.	Die harmonische Lösung ($A=1/2$).....	33
4.2.3.2.	Die Besselsche Lösung ($A=1$).....	34
4.2.3.3.	Lösungsverhalten.....	35
4.2.3.4.	Konsequenzen für das Modell.....	35
4.2.4.	Asymptotische Entwicklung.....	36
4.3.	Laplace-Transformierte.....	38
4.3.1.	Zeitbereich.....	38
4.3.2.	Bildfunktion.....	39
4.3.3.	Eigenschaften des Modells.....	44
4.3.4.	Ausbreitungsfunktion.....	46
4.3.4.1.	Klassische Lösung für verlustfreies Medium.....	46
4.3.4.2.	Klassische Lösung für verlustbehaftetes Medium.....	47
4.3.4.3.	Alternative Lösung für verlustbehaftetes Medium mit Expansion.....	50
4.3.4.3.1.	Lösung.....	50
4.3.4.3.2.	Näherungslösungen.....	59
4.3.4.3.3.	Ausbreitungsfunktion.....	60
4.3.4.4.	Lösung für verlustbehaftetes Medium mit Expansion und überlagerter Welle.....	67
4.3.4.4.1.	Modell.....	67
4.3.4.4.2.	Näherungslösung.....	68
4.3.4.4.3.	Ausbreitungsfunktion.....	73
4.3.4.4.4.	Vollständige Lösung.....	73
4.3.4.4.5.	Grenzfrequenz.....	75
4.3.4.4.6.	Die kosmologische Rotverschiebung.....	76
4.3.4.4.7.	Der HERTZsche Dipol.....	79
4.4.	Aktuelle Werte der universellen Naturkonstanten.....	81
4.5.	Ergänzende Betrachtungen zur Metrik.....	82
4.5.1.	Konstanter Abstand.....	82
4.5.2.	Konstanter Wellenzahlvektor.....	84
4.5.2.1.	Lösung.....	84
4.5.2.2.	Näherungslösungen.....	86
4.5.2.3.	Der HUBBLE-Parameter.....	88
4.6.	Energie und Entropie.....	90
4.6.1.	Entropie.....	90
4.6.2.	Partikelhorizont.....	94
4.6.3.	Temperatur.....	95
4.6.4.	Energie.....	96
4.6.4.1.	Das PLANCKsche Wirkungsquantum.....	96
4.6.4.1.1.	Zeitliche Abhängigkeit.....	96
4.6.4.1.2.	Räumliche Abhängigkeit.....	99
4.6.4.2.	Energie des metrischen Wellenfelds.....	103
4.6.4.2.1.	Energie des MINKOWSKIschen Linienelements (MLE).....	104

4.6.4.2.2.	Verlustleistung	106
4.6.4.2.3.	Eigenschaften der kosmischen Hintergrundstrahlung	110
4.6.4.2.4.	Emissionsrate, Energie	116
4.6.4.2.5.	Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung.....	118
4.6.4.2.6.	Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung.....	123
4.6.4.2.7.	Feldstärke des metrischen Wellenfeldes.....	125
4.6.5.	Der Uripuls.....	134
4.6.5.1.	Der DIRAC-Impuls.....	134
4.6.5.2.	Der aperiodische Grenzfall	135
4.6.5.3.	Spektralfunktion	137
4.6.5.4.	Energiedichte.....	138
4.6.5.4.1.	Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen für den aperiodischen Grenzfall.....	140
4.6.5.4.2.	Bestimmung der mittleren Energiedichte des Uripulses	142
5.	Lichtgeschwindigkeit.....	144
5.1.	Photonen	146
5.2.	Neutrinos.....	150
5.3.	Rotverschiebung von Photonen und Neutrinos.....	153
5.3.1.	Grundlagen.....	153
5.3.2.	Ausbreitungsfunktion für Photonen und Neutrinos.....	156
5.3.2.1.	Zeitartige Photonen	159
5.3.2.2.	Raumartige Photonen	159
5.3.2.3.	Neutrinos.....	161
5.3.2.4.	Antineutrinos.....	161
6.	Das spezielle Relativitätsprinzip	163
6.1.	Geschwindigkeit und Relativität	163
6.1.1.	Grundlagen.....	163
6.1.2.	Geschwindigkeit und Länge.....	165
6.1.2.1.	Beziehungen zwischen Länge, Geschwindigkeit und Güte.....	165
6.1.2.1.1.	Näherungslösungen	165
6.1.2.1.2.	Exakte Lösung.....	173
6.1.2.2.	Relativistische Längenkontraktion	174
6.1.2.3.	Relativistische Dopplerverschiebung	184
6.1.3.	Geschwindigkeit und Zeit	187
6.1.4.	Geschwindigkeit und Masse	187
6.1.5.	Geschwindigkeit und andere Größen	190
6.2.	Physikalische Größen von besonderer Bedeutung	190
6.2.1.	Die Feinstrukturkonstante	191
6.2.2.	Die Elektronenladung	192
6.2.2.1.	Statische Betrachtung	192
6.2.2.2.	Dynamische Betrachtung	197
6.2.3.	Der klassische Elektronenradius	202
6.2.4.	Der BOHRsche Wasserstoffradius	203
6.2.5.	Die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons/Protons/Neutrons... ..	203
6.2.6.	Das BOHRsche Magneton/Kernmagneton	204
6.2.7.	Die Gravitationskonstante.....	204
6.2.7.1.	Zeitliche Abhängigkeit	204
6.2.7.2.	Räumliche Abhängigkeit	206
7.	Das allgemeine Relativitätsprinzip.....	212
7.1.	Die Grundgrößen des Gravitationsfeldes.....	212
7.1.1.	Potential und Feldstärke pro Längeneinheit	212
7.1.2.	Ladung und Feldstärke pro Flächeneinheit.....	216
4.4.	Das Wesen der Gravitation	219
7.2.1.	Noch einmal das MINKOWSKische Linienelement.....	219
7.2.2.	Das Linienelement als Funktion von Masse, Raum, Zeit und Geschwindigkeit.....	225
7.2.3.	LORENTZ-Transformation und Addition von Geschwindigkeiten	230
7.2.4.	Prinzip der maximalen gravitativen Kopplung	242
7.2.5.	Metrische Funktionen	242
7.2.5.1.	Der metrische Zusammenhang.....	243
7.2.5.2.	Der RIEMENNSche Krümmungstensor	244
7.2.5.3.	Der RICCI-Tensor	245

7.2.5.4.	Lösungen für dieses Modell ohne Navigationsgradient	246
7.2.5.5.	Lösungen für dieses Modell mit Navigationsgradient	247
7.2.6.	Der Energie-Impuls-Tensor	254
7.2.7.	Lösung der Feldgleichungen der Relativitätstheorie.....	257
7.2.7.1.	Die Kopplungskonstante.....	257
7.2.7.2.	Die Geometrie des Vakuums	259
7.2.7.3.	Das 3-Schichten-Modell der Metrik.....	260
7.3.	Ebene Gravitationswellen.....	261
7.4.	Experimentelle Tests	262
7.5.	Beziehungen zwischen dem HUBBLE-Parameter und lokal meßbaren Größen	263
7.5.1.	EDDINGTONS Zahlen und die Einheit der physikalischen Welt.....	263
7.5.2.	Entfernungsvektoren	266
7.5.3.	Bestimmung des Hubble-Parameters mit Hilfe der Temperatur der CMBR.....	273
7.5.4.	Das Supernova-Kosmologie-Projekt.....	274
7.5.4.1.	Meßgrößen und Umrechnungen.....	275
7.5.4.2.	Ergebnisse des Supernova-Kosmologie-Projekts	276
7.5.5.	Die Bedeutung der zweiten und dritten Lösung	280
7.6.	Schlußbetrachtung.....	284
8.	Literaturverzeichnis.....	285
9.	Abbildungsverzeichnis	289
10.	Kurzzeichen	295
11.	Eidesstattliche Erklärung.....	300

3. Kosmologisches Modell

3.1. Grundlagen und Hypothesen

3.1.1. Ausgangspunkt der Arbeit

Ausgangspunkt aller Betrachtungen ist der Vortrag [1] von Prof. Cornelius LANZOS anlässlich des Einstein-Symposiums 1965 in Berlin. Hierbei offene Fragen, wie z.B. die Expansion, die Existenz und Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung sollen im Verlauf der Arbeit geklärt werden. Weiterhin soll untersucht werden, ob es möglich ist, die Hubble-Konstante aus den universellen Naturkonstanten und anderen meßbaren Größen rechnerisch zu ermitteln.

3.1.2. Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur (Zitat)

»...EINSTEIN hat sich in seinen späteren Jahren von dem naiv Empirischen der MACHschen Schule vollends abgewandt und die Anbetung der “sense data” (d.h. der unmittelbaren Sinneseindrücke) verspottet, die etwas für bare Münze nimmt, was nur die Konsequenz einer viel komplizierteren Situation ist. Da sind z.B. der Druck und die Temperatur eines Gases zwei beobachtbare Zahlen, die aber nicht mehr sind, als makroskopische Mittelwerte eines unendlich komplizierten Vorgangs, den wir nur statistisch erfassen können. Wäre es nicht möglich, daß etwas derartiges auch auf das MINKOWSKISCHE Linienelement zutreffen könnte? Da sind nun diese g_{ik} , die im Vakuum nahezu konstante Werte annehmen sollen. Ja, wir wissen aber doch aus gewissen quantentheoretischen Erfahrungen, – wie z.B. die sogenannte Vakuum-Polarisation, oder die Nullpunkts-Energie, – daß das Vakuum keineswegs eine so passive Rolle spielen kann, was mit einer glatten quasi-euklidischen Geometrie zu beschreiben wäre. Ich habe mir nun in den vierziger Jahren den Gedanken erlaubt, daß da etwas viel dynamischeres vor sich geht, nämlich, daß da ein stark agitiertes Wellenfeld vorhanden ist, das nur darum nicht explizit in Erscheinung tritt, weil die Frequenzen kolossal hoch sind und die Trägheit der Materie nur auf statistische Mittelwerte reagiert, so ähnlich wie beim Druck des Gases. In den letzten Jahren habe ich dann dieses etwas verschwommene Bild viel genauer ausgebaut durch die Annahme, daß man vielleicht bei der Lösung der geometrischen Feldgleichungen nicht nach kugelsymmetrischen Lösungen zu suchen hat, – sondern nach Lösungen, die *periodisch* sind in allen vier Koordinaten. Dann erhält man also eine kristallartige Struktur für das metrische Plateau, das der Weltgeometrie zugrunde liegt. Die konstanten g_{ik} des MINKOWSKISCHEN Linienelements wären dann nur Mittelwerte, die dadurch bedingt sind, daß die Gitterkonstante von einer ungeheuren Kleinheit ist. Tatsächlich erhält man ja aus den drei dimensionierten Weltkonstanten Lichtgeschwindigkeit, Gravitationskonstante, PLANCKsche Konstante eine Fundamentallänge von der Größenordnung 10^{-32} cm, also eine phantastisch kleine Länge, der gegenüber auch die atomaren Größen noch makroskopisch sind. Diese Fundamentallänge der Gitterkonstante gleichzusetzen, kann also nicht als a priori unmöglich betrachtet werden. (Ich möchte hier hinzufügen, daß ich erst durch Professor TREDERs Arbeiten erfuhr, daß PLANCK selber diese Länge schon als Fundamentallänge erkannt und in seinen Vorlesungen über Wärmestrahlung diskutiert hat. In der englischen Übersetzung konnte ich diesbezüglich keinen Hinweis finden.)

Nun habe ich diese Idee eines solchen Wellenhintergrundes in seiner primitiveren Fassung mit EINSTEIN des öfteren besprochen, und er hat die Idee wohl nicht a priori verworfen, aber sein Einwand war hauptsächlich, daß durch einen derart agitierten Hintergrund ein bevorzugtes Bezugssystem eingeführt würde, was mit der Tatsache der LORENTZ-Transformation in Widerspruch steht. Dieser Einwand ist durchaus berechtigt, wenn er von EINSTEIN kommt, der ja auf Grund der Nichtexistenz eines bevorzugten Koordinatensystems so kolossale Triumphe gefeiert hat, daß er nicht anders konnte, als diesen Gedanken für etwas Endgültiges und Unumstößliches anzusehen.

Und doch kann man auch anders argumentieren. Wir kennen die Kristalle der sogenannten kubischen Symmetriegruppe, die sich makroskopisch durchaus isotrop verhalten, obwohl sie durch drei wohlausgeprägte orthogonale Hauptachsen charakterisiert sind. Die drei Hauptachsen sind aber makroskopisch gleichwertig, was eine scheinbare Isotropie in sowohl elastischer wie optischer Hinsicht zur Folge hat. Überträgt man diese Betrachtung ins Vierdimensionale, so kommt man zu der Erkenntnis, daß ein mikroskopisch bevorzugtes Ko-

ordinatensystem trotzdem makroskopisch die Äquivalenz aller LORENTZschen Bezugssysteme vortäuschen kann.

Beschäftigen wir uns etwas eingehender mit den Hauptachsen eines solchen kristallinen Gitters. GAUSS hat in seinen unvergleichlich schönen Untersuchungen über krumme Flächen zwei fundamentale quadratische Differentialformen eingeführt, die erste und zweite Fundamentalform. Mit Hilfe dieser zwei Formen lassen sich dann die zwei Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche in jedem Punkt invariant definieren. In einer rein RIEMANNschen Geometrie ist allerdings nur die erste Fundamentalform vorhanden, und die Frage nach den Hauptachsen bleibt vorerst unbeantwortet. Nun hat man aber da gerade noch einen zweiten Tensor, nämlich den von EINSTEIN eingeführten Krümmungstensor R_{ik} – oder auch den Materietensor T_{ik} – der ja gemäß unserer Annahmen jetzt keineswegs Null ist. Man hat also die zwei Fundamentalformen

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad \text{und} \quad (0.1)$$

$$d\sigma^2 = R_{ik} dx^i dx^k \quad (0.2)$$

und dementsprechend lassen sich die Hauptkrümmungsrichtungen durch das vektorielle Eigenwertproblem

$$R_{i\alpha} h^{\alpha} - \lambda g_{i\alpha} h^{\alpha} = 0 \quad (0.3)$$

definieren. Um das oft gebrauchte Symbol λ nicht zu überlasten, wollen wir die vier Eigenwerte lieber mit $\sigma_1 \dots \sigma_4$ bezeichnen und das Hauptachsenproblem in der Form

$$R_{i\alpha} h^{\alpha k} - \sigma_k g_{i\alpha} h^{\alpha k} = 0 \quad (0.4)$$

hinschreiben. Der erste Index der Größen h^{ik} ist hierbei ein echter kontravarianter Index, während der zweite Index nur zur Numerierung dient, um die vier Hauptvektoren h^i als erster, zweiter, dritter, vierter Vektor zu unterscheiden.

Die Größen h^{ik} sind also keineswegs als Tensor aufzufassen, sondern als vier Vektoren mit insgesamt 16 Komponenten. Es folgen dann rein algebraisch die Beziehungen

$$\begin{aligned} h_{ia} &= h^{\alpha a} g_{i\alpha} \\ g_{ik} &= h_{ia} h_{ka} \\ g^{ik} &= h^{ia} h^{ka} \\ h^{ia} h_{ka} &= h^{ai} h_{ak} = \delta_k^i \end{aligned} \quad (0.5)$$

Interessanterweise sind dies genau die Beziehungen, die EINSTEIN in seiner Theorie des ‘‘Distanzparallelismus’’ 1928 eingeführt hat. Es war dies gerade das Jahr, in dem ich als sein Mitarbeiter nach Berlin berufen wurde. Er war von den neuen Ideen sehr beglückt, während ich für die neue Theorie nicht die richtige Begeisterung aufbringen konnte, da es mir künstlich erschien, auf die RIEMANNsche Geometrie etwas aufpfropfen zu wollen, was mit ihr in keinerlei organischer Beziehung steht. Und doch hat die EINSTEINsche Theorie etwas sehr Berückendes und Anziehendes an sich. War doch hier die Möglichkeit gegeben, zu den 10 symmetrischen g_{ik} noch ein anti-symmetrisches Element hinzuzufügen, charakterisiert durch 6 Größen, die so gut dem anti-symmetrischen Feldtensor der elektromagnetischen Feldstärke zuzuordnen wären. Betrachten wir nun unsere Hauptachsendefinition, so sehen wir, daß sich ja diese EINSTEINschen h^{ia} Größen ganz ungezwungen einstellen, ohne auf einen Distanzparallelismus Bezug zu nehmen. Natürlich haben diese vier Vektoren jetzt eine ganz andere Bedeutung. Sie führen in jedem Punkt eine Tetrade von vier aufeinander senkrechten Vektoren ein, die imstande sind, unser metrisches Gitter zu charakterisieren. Darüber hinaus geben sie aber nicht nur die g_{ik} in algebraischer Form, sondern auch die R_{ik} nach der Gleichung

$$R_{ik} = \sigma_a h_{ia} h_{ka} \quad (0.6)$$

oder auch

$$R^{ik} = \sigma_a h^{ia} h^{ka}. \quad (0.7)$$

Das hat nun seine besonderen Vorteile, wenn es sich darum handelt, ein Wirkungsprinzip aufzustellen, aus dem die Feldgleichungen für die Geometrie der Welt abgeleitet werden sollen. Das EINSTEINSche Variationsprinzip bedient sich der skalaren Krümmung

$$R = R_{ik} g^{ik} = \sigma_1 + \dots + \sigma_4, \quad (0.8)$$

und das Wirkungsintegral wird hier

$$W = \int (\sigma_1 + \dots + \sigma_4) h dx^1 \dots dx^4, \quad (0.9)$$

wo h die Determinante der h_{ia} Größen bedeutet. Arbeitet man andererseits mit einem quadratischen Wirkungsprinzip, um der Eichinvarianz Genüge zu tun, so wird die LAGRANGESche Funktion unseres Wirkungsprinzips jetzt

$$L_0 = \frac{1}{2} [\sigma_1^2 + \dots + \sigma_4^2 - C(\sigma_1 + \dots + \sigma_4)^2] h \quad (0.10)$$

wo C eine a priori unbestimmte numerische Konstante ist. Wir sehen also, daß der Unterschied zwischen den verschiedenen Wirkungsprinzipien gar nicht so groß ist, wenn man mit den h_{ia} als Fundamentalgrößen operiert. Natürlich kommt da noch als Nebenbedingung hinzu, daß die R_{ik} ja durch einen ganz bestimmten Differential-Operator gegeben sind, so daß das vollständige Wirkungsprinzip durch die LAGRANGESche Funktion

$$L = L_0 - p^{ik} [\sigma_a h_{ia} h_{ka} - D(h_{ia} h_{ka})] h \quad (0.11)$$

charakterisiert ist, wo ich symbolisch mit $D(h_{ik})$ den bekannten Differentialausdruck zweiter Ordnung in den g_{ik} bezeichnet habe. Zum Glück kommen darin die zweiten Ableitungen der g_{ik} nur *linear* vor, so daß man sofort durch partielle Integration die zweiten Ableitungen loswerden kann und auf eine LAGRANGESche Funktion kommt, die nur die ersten Ableitungen der Wirkungsgrößen enthält. Dabei sind die Wirkungsgrößen, die frei variiert werden, wie folgt gegeben:

$$16h_{ia}, \quad 4\sigma_i, \quad 10p^{ik}, \quad \text{insgesamt 30 Größen.}$$

Ich möchte mich hier natürlich nicht auf rechnerische Einzelheiten einlassen, mein Zweck ist ja nur, den Gedankengang zu skizzieren und die Resultate zu registrieren.

Das erwähnte metrische Gitter ist ja noch nicht das Ende. Vielmehr entspricht es so weit nur dem leeren Raum, was gewöhnlicherweise mit dem MINKOWSKISchen Linienelement wiedergegeben wird. Stattdessen haben wir jetzt unser periodisches Gitter mit den mikroskopischen metrischen Wellen. Die materiellen Partikel sind diesem Gitter superponiert als modifizierte Lösungen der Feldgleichungen, für die die periodischen Randbedingungen nicht mehr gelten. Lassen wir mal die Frage nach der Struktur dieser Partikel beiseite. Was passiert in einem Punkt der Welt, der weit weg ist von materiellen Teilchen, also im Vakuum? Es ist dies eine ähnliche Situation, als wenn wir einen Kristall nehmen und ihn biegen. Die Biegung des Gitters kommt eben durch die Wirkung der fernen Massen und Ladungen zustande.

Wir haben also mathematisch ein Störungsproblem vor uns und wir müssen nach der Störung der LAGRANGESchen Funktion suchen. Da wir aus einer tatsächlichen Lösung der Feldgleichungen ausgegangen sind (denn wir nehmen ja an, daß das metrische Gitter eine mögliche, obwohl nicht einzig mögliche Lösung der Feldgleichungen darstellt), so kommt es auf die *zweite Variation* $\sigma^2 L$ an, die quadratisch von den variierten Wirkungsgrößen abhängt. Es sind also die Größen δh_{ia} , die uns besonders interessieren, und die linearen Feldgleichungen, die für sie gefunden werden müssen.

Denken wir nun an unser Hauptachsenproblem. Eine Deformation der Hauptachsen kann in zwei Teile zerlegt werden, nämlich eine bloße Drehung und eine elastische Deformation. Wir können mit EINSTEIN vermuten, daß die elastische Deformation der Gravitation, die Drehung dem elektromagnetischen Feld entsprechen wird. Wieso kommt es aber, daß die elektromagnetischen Felder die Gravitationsfelder so stark überragen?

Zu diesem Punkt ist folgendes zu sagen. Wir wissen, daß die sogenannten “kosmologischen Gleichungen”

$$R_{ik} = \lambda g_{ik} \quad (0.12)$$

die Feldgleichungen des quadratischen Wirkungsprinzips *exakt* erfüllen. Bei dieser Lösung werden alle vier Eigenwerte gleich:

$$\sigma_i = \lambda \quad (0.13)$$

und die Richtung der Hauptachsen bleibt unbestimmt. Die kleinste Störung kann hier eine beliebig starke Drehung der Hauptachsen zur Folge haben. Dieser Fall der Degeneration wird für uns von geringem Interesse sein. Wohl aber können wir annehmen, daß wir diesem Fall *nahe* sind, d.h., daß

$$\sigma_i = \lambda + \varepsilon_i \quad (0.14)$$

gilt, wo die ε_i klein sind gegenüber der großen Konstante λ . Dann haben wir bestimmte Hauptachsenrichtungen, aber die Bevorzugung dieser Richtungen ist schwach, so daß bei einer Störung eine Drehung besonders leicht zustande kommt, während die metrische Änderung nur klein bleibt. So läßt sich also die überragende Stärke der elektrischen Wirkungen gegenüber den Gravitationswirkungen erklären.

Die Variation δh_{ia} läßt sich jetzt auf einen wahren Tensor F_{ik} zurückführen, indem wir setzen

$$\delta h_{ia} = F_i^\mu h_{\mu a} \quad (0.15)$$

Dieser Tensor tritt bei EINSTEIN nicht auf. Er setzt im Voraus für das Grundfeld die euklidischen Werte

$$\delta h_{ia} = \delta_{ia} \quad (0.16)$$

da er ja für das ungestörte Feld das MINKOWSKISCHE Linienelement annimmt. Dann wird

$$\delta h_{ia} = F_{ia} \quad (0.17)$$

während in unserem Fall der Tensor F_{ik} von den vier Vektoren δh_{ia} streng zu trennen ist. Nun kann man zeigen, daß im Fall einer bloßen *Drehung* der Hauptachsen der Tensor F_{ik} antisymmetrisch wird und sich auf einen Vektor φ_i zurückführen läßt, nach der Gleichung

$$F_{ik} = \varphi_{i,k} - \varphi_{k,i} \quad (0.18)$$

Was nun die LAGRANGESCHE Funktion des Überlagerungsfeldes betrifft, so können wir schon aus der Struktur des Problems heraus gewisse ganz bestimmte Voraussagen machen. Wir wissen im voraus, daß $L' = \delta^2 L$ quadratisch von den Wirkungsgrößen abhängen wird, so ähnlich wie bei den mechanischen Schwingungen eines festen Körpers um die Gleichgewichtslage herum, wo ja auch die LAGRANGESCHE Funktion mit den quadratischen Gliedern anfängt (die linearen Glieder fallen weg, da wir aus einer Gleichgewichtslage ausgegangen sind), während

die höheren Glieder infolge der Kleinheit der Schwingungen vernachlässigt werden können. Wir haben also die Größen F_{ik}^2 , und die müssen mit gewissen Koeffizienten hereinkommen, die irgendwo von der Gitterstruktur abhängig werden. Es ist plausibel, anzunehmen, daß dazu

die vier Skalare σ_i , – die Eigenwerte des Hauptachsenproblems – besonders geeignet sein werden. Nun haben wir in (0.14) angenommen, daß diese σ_i nahezu konstant sind und sich von der großen Konstanten λ nur durch die kleinen Größen ε unterscheiden. Demnach werden wir für die Koeffizienten einen Ausdruck erwarten, der in erster Näherung von den ε_i linear abhängt. Der konstante Teil muß aber verschwinden, denn wenn alle ε_i Null sind, so haben wir ja den entarteten Fall (0.12), in dem sogar eine endliche Drehung keine metrische Änderung erzeugt und somit $L'=0$ werden muß. Es kann also nur eine homogen lineare Funktion der ε_i als Faktor von F_{ik}^2 in Frage kommen, die außerdem noch symmetrisch in i und k sein muß. Das natürlichste ist, $\varepsilon_i + \varepsilon_k$ als Faktor anzunehmen. Nun kann man aber weiterhin aus allgemeinen Prinzipien zeigen, daß eine Änderung aller ε_i durch die selbe Konstante keine Änderung in L' erzeugen darf. Wir müssen also $\varepsilon_i + \varepsilon_k$ folgendermaßen korrigieren:

$$\varepsilon_i + \varepsilon_k - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \quad (0.19)$$

mit dem Resultat

$$L' = \beta \left[\varepsilon_i + \varepsilon_k - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) \right] F_{ik}^2, \quad (0.20)$$

wo β eine bloße Konstante ist. Dies ist in der Tat der Ausdruck, den die ausführliche Berechnung für $L' = \sigma^2 L$ ergibt.

Dieses Resultat hat sofort die folgende Konsequenz. Die 6 Terme, die in L' auftreten, reduzieren sich sofort auf nur 3 Terme, da nur die Kombinationen

$$F_{12}^2 - F_{34}^2, \quad F_{23}^2 - F_{14}^2, \quad F_{31}^2 - F_{24}^2 \quad (0.21)$$

auftreten, d.h., wir erhalten sofort, daß die elektrischen und magnetischen Größen im Wirkungsprinzip mit *entgegengesetztem* Vorzeichen erscheinen. Wenn dann nur noch unser metrisches Gitter makroskopisch isotrop ist in bezug auf x_1, x_2, x_3, x_4 , so erhalten wir sofort die übliche Invariante des elektromagnetischen Feldes

$$E^2 - H^2, \quad (0.22)$$

aus dem sich bekanntlich die MAXWELLSchen Gleichungen ableiten lassen. Das eigentümliche negative Vorzeichen, das man üblicherweise aus der MINKOWSKISchen imaginären Signatur $x_4 = ict$ ableitet, kommt hier in ganz natürlicher Weise als makroskopische Überlagerungserscheinung infolge einer schwachen Störung des metrischen Gitters zustande, hervorgerufen durch eine infinitesimale Drehung des fundamentalen Vierbeines.

Die Abänderung einer rein RIEMANNschen Metrik zu einer Metrik, in der der pythagoräische Lehrsatz in der Form

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (0.23)$$

auftritt, wird meistens ohne große Diskussion als mehr oder weniger selbstverständlich hingenommen. Für EINSTEIN war die $+++ -$ Signatur des Linienelements ein unbegreifliches Rätsel, das man wohl hinnimmt, weil es nun mal so *ist*, ohne jedoch zu begreifen, warum es so sein *muß*. In den hier diskutierten Ausführungen ist die Situation ganz anders. Wir sind aus einer wirklichen, unverfälschten RIEMANNschen Geometrie ausgegangen, die positiv definit ist (ohne diese Forderung könnten wir ja die Existenz reeller Eigenwerte des Hauptachsenproblems gar nicht generell garantieren). Wir arbeiten also von Anfang an mit einer rationalen Geometrie, in der die Bedingungen jeder rationalen Metrik:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{BA} \\ \overline{AB} &= 0 \quad \text{heißt} \quad A = B \\ \overline{AC} &\leq \overline{AB} + \overline{BC} \end{aligned} \quad (0.24)$$

erfüllt sind (im Fall der MINKOWSKISchen Signatur geht die zweite und dritte Bedingung verloren). Weiterhin haben wir ein Wirkungsprinzip zugrunde gelegt, das quadratisch ist in den Krümmungskomponenten und somit der Forderung der Eichinvarianz genügt. Somit stellen wir ein Weltbild maximaler Rationalität auf. Dennoch gelingt es, für den *makroskopischen Erfahrungsraum* (dem alle physikalisch meßbaren Größen angehören) eine Metrik abzuleiten, die sich MINKOWSKISch verhält und die übliche Ausbreitung aller physikalisch meßbaren Größen mit Lichtgeschwindigkeit garantiert. Die Störung des fundamentalen metrischen Gitters ergibt nämlich eine LAGRANGESche Funktion, die man MINKOWSKISch deuten muß, wenn man sie als *primär* auffaßt und das fundamentale Gitter, aus dem sie hervorgeht, negiert.

Hat man das Recht, eine Theorie dieser Art als eine natürliche Weiterentwicklung der EINSTEINSchen Ideen zu betrachten? Die Mehrzahl meiner Kollegen wird diese Frage wahrscheinlich verneinen, während ich glaube, mit einem Ja antworten zu dürfen. In jeder großen wissenschaftliche Entdeckung darf man wohl wesentliche und unwesentliche Elemente unterscheiden. Das unerhört große der EINSTEINSchen Entdeckung war, die Geometrie der Natur als gekrümmt zu erkennen und die physikalische "Materie" als einen Krümmungszustand der Raum-Zeit-Welt aufzufassen, auf Grund der Gleichung

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = T_{ik} \quad (0.25)$$

was vielleicht als die größte Errungenschaft aller Zeiten auf dem Gebiet abstrakten Denkens hingestellt werden darf. Weiterhin war es EINSTEINS Bestreben, den Zusammenhang zwischen Materie und Feld durch Feldgleichungen zu beschreiben. Die Gleichung $R_{ik} = 0$ drückt das Verschwinden des Materietensors aus, was ja nur makroskopische Geltung haben kann, ohne das eigentliche Problem der Materie zu lösen, wie das EINSTEIN wohl bekannt war. Aber sogar angenommen, daß wir die richtigen Feldgleichungen haben, so bleibt es immer noch ein Problem, die richtige Auswahl aus einer unendlichen Mannigfaltigkeit von möglichen Lösungen zu treffen. EINSTEIN macht hier aus empirischen Gründen zwei Annahmen. Er sucht nach kugel-symmetrischen Lösungen, und er nimmt als Randbedingung an, daß im Vakuum, fern von Materie, das Linienelement nahezu MINKOWSKISch wird. Diese zwei durch Empirie erzwungenen (und somit nur makroskopisch bewiesenen) Annahmen würde ich als das Akzidentelle der EINSTEINSchen Theorie betrachten, um so mehr, als EINSTEIN selbst die MINKOWSKISche Signatur des Linienelements nicht als das letzte Wort angesehen hat.

In der hier skizzierten Theorie sucht man nicht nach kugel-symmetrischen Lösungen, sondern nach periodischen (vierfach periodischen) Lösungen der Grundgleichungen, wodurch eine gitterartige Struktur der Raum-Zeit-Welt zustande kommt. Dabei erscheint sofort eine Fundamentallänge, nämlich die Gitterkonstante dieser kristallartigen Metrik. Dazu gesellt sich sofort eine zweite Fundamentallänge, die der kosmologischen Konstante λ zugeordnet ist, da die kosmologischen Gleichungen exakte Lösungen der Feldgleichungen sind und die kosmologische Konstante in dieser Theorie eine Eichgröße des Mikrokosmos (und nicht des Makrokosmos) wird. Man hat also zwei voneinander unabhängige Grundlängen zur Verfügung, was gut mit den so verschiedenen Größenordnungen der HEISENBERGSchen und der PLANCKSchen Fundamentallänge harmonisiert, nämlich einerseits 10^{-13} , andererseits 10^{-32} cm. Darüber hinaus gelingt es der Theorie, die MAXWELLSchen Gleichungen auf Grund einer infinitesimalen Störung des Gitters abzuleiten. Über die Möglichkeit, die verschiedenen Elementarteilchen als angeregte Eigenlösungen der Feldgleichungen anzusehen, kann in dieser Näherung noch nichts ausgesagt werden. Es ist aber nicht ausgeschlossen, die Gitterschwingungen mit der HEISENBERGSchen Unbestimmtheitsrelation in Verbindung zu bringen. In dieser Beziehung ist es vielleicht nicht uninteressant, auf folgendes hinzuweisen. Für die Messung irgendeiner physikalischen (d.h. dem Gitter überlagerten) Größe können nur solche Gitterpunkte in Frage kommen, die hinsichtlich der Fundamentallänge kongruent liegen. Denn nur dann wird man das messen, worauf es ankommt, ohne durch die metrischen Schwingungen des Gitters gestört zu werden. So kommt also praktisch eine anscheinend körnige Struktur des Raumes zustande, mit der Gitterkonstante als kleinstmöglicher Länge. Andererseits ergibt die HEISENBERGSche Unschärferelation, - einer Bemerkung Professor TREDERS zufolge, - daß kleinere Längen als die PLANCKSche Fundamentallänge (hier als Gitterkonstante gedeutet) prinzipiell nicht meßbar sind

Ich möchte mit einer Bemerkung allgemeiner Art schließen. Bekanntlich ist die Invarianz gegenüber LORENTZ-Transformationen an das MINKOWSKISCHE Linienelement gebunden, also traditionsmäßig an einen Raum mit verschwindender Krümmung. Nun kann man bei den Feldern, die die materiellen Teilchen darstellen, bestimmt nicht annehmen, daß die RIEMANNSCHE Krümmung klein bleibt, denn in diesen Gebieten der Raum-Zeit-Welt muß der Materietensor sehr beträchtlich werden, und es ist unmöglich, zu postulieren, daß das Linienelement immer noch nahezu die MINKOWSKISCHE Normalform hat. Und doch besteht das merkwürdige Paradox, daß für die physikalischen Eigenschaften der Elementarteilchen die Symmetrieeigenschaften der LORENTZ-Gruppe von grundlegender Bedeutung sind. Es sieht also so aus, als ob die spezielle Relativitätstheorie für den Aufbau der Materie wichtiger wäre als die allgemeine. Wie läßt sich dieser merkwürdige Widerspruch aufheben?

Betrachten wir jetzt das Problem von der hier skizzierten Theorie her. Gewiß, die materiellen Teilchen führen zu starken Krümmungen und können keineswegs mittels eines nahezu MINKOWSKISCHEN Linienelements beschrieben werden. Aber verglichen mit den ungeheuer starken sub-mikroskopischen Krümmungen des Grundgitters sind selbst diese Krümmungen noch sehr schwach. Verglichen mit dem sehr starken Gitterfeld sind sogar die atomaren Felder noch als relativ schwache Störungen aufzufassen, was zur Folge hat, daß der Einfluß des Gitters nicht wesentlich verschieden ist, gleichviel ob die makroskopische Wirkung auf das Vakuum (MAXWELLSche Gleichungen) oder auf das Innere des Teilchens berechnet wird (die HEISENBERGSche "kleinste Länge" von 10^{-13} cm ist eben sehr klein, aber immer noch sehr groß gegenüber 10^{-32} cm). Auf diese Weise löst sich das sonst unbegreifliche Paradox auf.

In der Diskussion fragte Herr MØLLER (Kopenhagen), wodurch die Geometrie des makroskopischen Feldes bestimmt wird. Darauf ist zu sagen, daß die LAGRANGESche Funktion des makroskopischen Feldes alle Konsequenzen in Bezug auf das Feld implizit enthält. Wenn man z.B. einem Mathematiker die LAGRANGESche Funktion der EINSTEINschen Gravitationsgleichungen geben würde, ohne etwas über RIEMANNSCHE Geometrie zu erwähnen, so könnte er sämtliche Konsequenzen der EINSTEINschen Theorie aus dieser Funktion entwickeln, gleichgültig, ob er nun den Tensor g_{ik} als RIEMANNSCHE Linienelement interpretiert oder nicht. Das ausschlaggebende sind die Invarianz-Eigenschaften der LAGRANGESchen Funktion. Wenn z.B. diese Funktion allen LORENTZ-Transformationen gegenüber invariant bleibt, so würde diese Beobachtung zu einer nachträglichen Einführung einer MINKOWSKISCHEN Metrik führen. Es kann also sehr wohl sein, daß die makroskopische Metrik mit der eigentlichen Metrik nichts zu tun hat, sondern lediglich als mathematische Konstruktion zur Interpretation gewisser Invarianz-Eigenschaften der LAGRANGESchen Funktion eingeführt wird.« *** Ende des Zitats ***

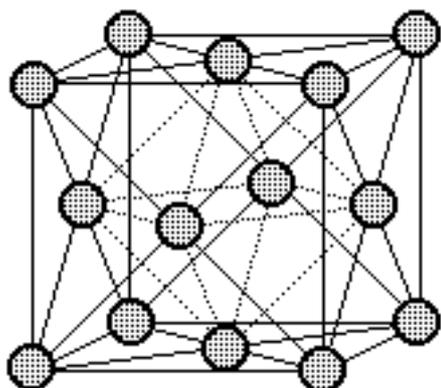


Bild 1
Kubisch-flächenzentriertes Raumgitter

3.2. Aufstellung des Modells

In diesem Vortrag wird also davon ausgegangen, daß die Metrik periodisch in allen Richtungen wie ein kubisches (reguläres) Raumgitter aus MINKOWSKI'schen Linienelementen aufgebaut ist, und wir wollen annehmen, daß es tatsächlich so wäre. Gegenstand der weiteren Betrachtungen soll dann die Frage sein, wie ein solches MINKOWSKI'sches Linienelement aufgebaut ist, wie es "funktioniert", wie die einzelnen Linienelemente angeordnet sind, wie sie miteinander wechselwirken und wie sich elektromagnetische Wellen in einer solchen Metrik ausbreiten. Dann sollen noch offene Fragen beantwortet werden, wie die nach der Expansion des Universums und ihren Ursachen, die Existenz und Herkunft der kosmischen Hintergrundstrahlung sowie ihre Isotropie auch bei Quellen, die auf Grund ihrer großen Entfernung voneinander keinen kausalen Zusammenhang haben können. Die Existenz dieser Strahlung konnte in o.g. Vortrag noch nicht berücksichtigt werden, da diese erst im selben Jahr entdeckt worden war, als er gehalten wurde. Der Aufbau der physikalischen Materie ist nicht Gegenstand dieser Arbeit, da sie nach [1] eigenständige kugelsymmetrische Lösungen der Feldgleichungen darstellt. In einem gesonderten Kapitel wird aber auf Eigenheiten und die Wechselwirkung von Materie und Metrik eingegangen. Weiterhin wollen wir die erste Hypothese aufstellen, auf der das Modell beruht:

I. Auf der Ebene des metrischen Raumgitters gelten die Gesetzmäßigkeiten der Klassischen Physik. Die relativistischen Effekte ergeben sich aus der Existenz Dieses Gitters und seiner Struktur.

Wie sich die relativistischen Effekte ergeben, wird in einem späteren Kapitel betrachtet. In der Folge werden wir also nur die Gesetzmäßigkeiten der klassischen Physik anwenden.

Als erstes nehmen wir an, daß die MINKOWSKI'schen Linienelemente (MLE), die wir hier untersuchen wollen, in einem kubisch flächenzentrierten Raumgitter (regulär) angeordnet sind (Bild 1). Ein solches System verhält sich isotrop.

Gehen wir nun von den MAXWELL'schen Gleichungen aus, die neben den bekannten Methoden auch nach [1] herzuleiten sein sollen und zwar auf Grund einer infinitesimalen Störung des Gitters. Nun wollen wir diese Gleichungen zunächst weniger mathematisch, sondern mehr nach ihrem Inhalt betrachten.

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} & \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}} \end{array} \quad (1)$$

Sowohl für die elektrische, als auch für die magnetische Feldstärke taucht hier der Operator rot für Rotation auf. Nehmen wir einmal an, hier würde tatsächlich eine Rotation stattfinden. Dazu betrachten wir ein Modell, wie es in Bild 2 dargestellt ist, das man sich jedoch dreidimensional vorstellen muß.

3.3. Kräfte im Modell

Ein Kugelkondensator (Bild 2) mit dem Radius r_c und der Ladung q_0 bewegt sich auf einer Kreisbahn mit der Kreisfrequenz ω_0 , dem Radius r_0 und der Geschwindigkeit $c = \text{const}$ (Lichtgeschwindigkeit). Die Kapazität ergibt sich zu $C_0 = 4\pi\epsilon_0 r_c$. Die in diesem Kondensator gespeicherte Energie zu

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0} = \frac{q_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_c} \quad (2)$$

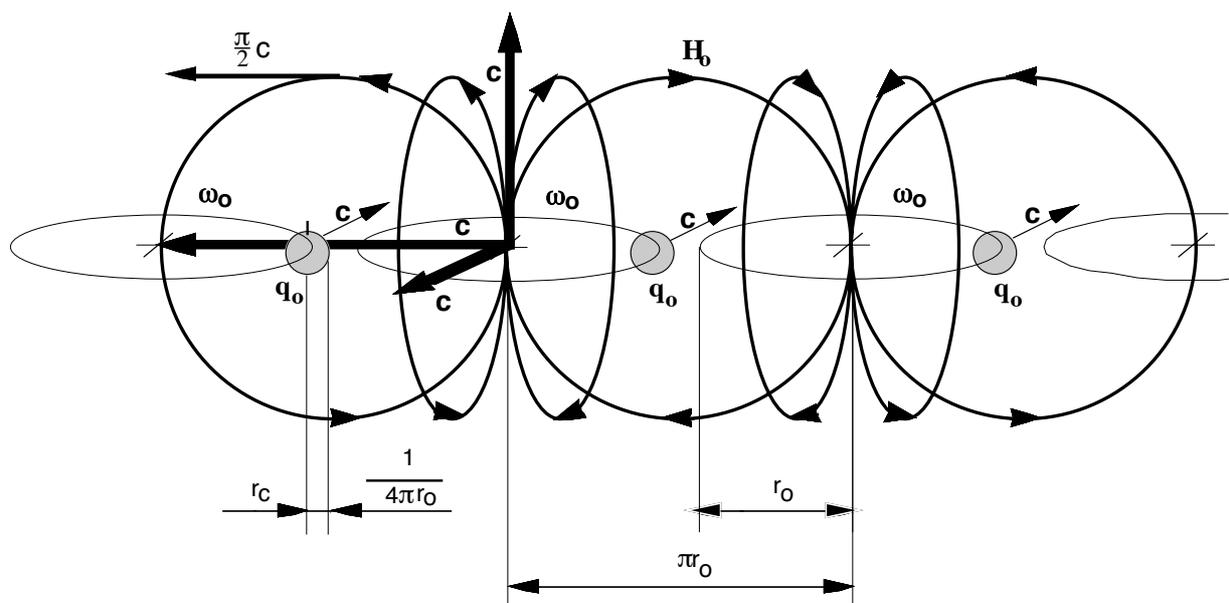


Bild 2
MINKOWSKISCHE Linienelemente
Abmessungen und Kopplung untereinander

und mit $r_0 = 4\pi r_c$ und $C_0 = \epsilon_0 r_0$

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 r_0} \quad (3)$$

Weiterhin soll diese Energie auch eine Masse m_0 haben. Da diese Masse rotiert, ergibt sich ihr Massenträgheitsmoment zu

$$J_0 = m r_0^2 \quad (\text{Punktmasse}). \quad (4)$$

Nach unserem Ansatz gilt $\omega_0 = c/r_0$ und wir erhalten für die kinetische Energie, die gleich der elektrischen sein soll

$$W_0 = \frac{1}{2} J_0 \omega_0^2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (5)$$

Da der Kondensator selbst keine Masse besitzt, ergibt sich die Masse der Ladung m_0 zu

$$m_0 = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 c^2 r_0} = \frac{\mu_0 q_0^2}{r_0} \quad (6)$$

Den 2. Ausdruck von (6) erhalten wir aus der bekannten Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad (7)$$

die auf den ersten Blick starke Ähnlichkeit hat mit der Formel für die Resonanzfrequenz eines verlustfreien Schwingkreises

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (8)$$

Für die Zentrifugalkraft (Betrag) $F_Z = m_0 r_0 \omega_0^2$ gilt dann:

$$F_Z = \frac{\omega_0^2 q_0^2}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0 \omega_0^2 q_0^2 = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0^2} \quad (9)$$

F_Z ist nach außen gerichtet. Ausdruck (9;3) stellt bis auf einen Faktor $1/4\pi$ das COULOMBSche Gesetz dar (Abstoßung), nur daß es hier keine zweite Ladung gibt, die eine abstoßende Kraft ausüben könnte. Zentrifugalkraft und COULOMB-Kraft wären also von gleicher Größenordnung. Damit m_0 nicht im Unendlichen verschwindet, benötigen wir eine Kraft, die in der Lage ist, die auftretende Zentrifugalkraft zu eliminieren. Dazu muß sie von gleicher Größe und dieser entgegengerichtet sein.

Da wir es hier mit der kreisförmigen Bewegung einer Ladung zu tun haben, können wir auch von einem Strom $i_0 = \omega_0 q_0$ sprechen. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld und es tritt auch eine Induktivität auf (1 Windung). Vereinfachend nehmen wir nun an, daß die Induktivität $L_0 = \mu_0 r_0$ sein soll. Das stimmt auch gut mit der Gleichung für eine Spule mit einer Windung überein:

$$L = \mu_0 r \left[\ln \frac{8r}{r'} - \frac{7}{4} \right], \quad (10)$$

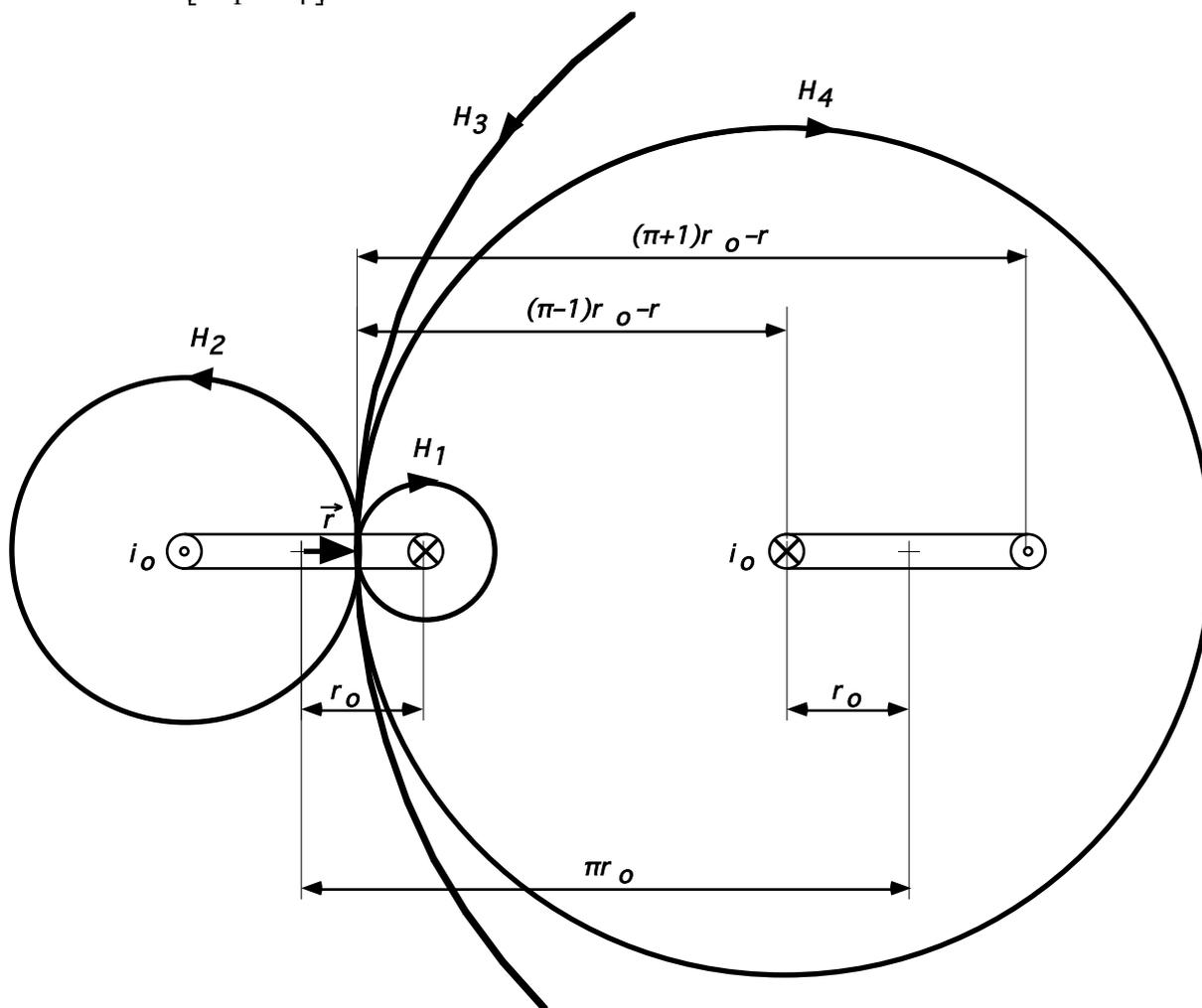


Bild 3
Magnetische Feldstärke in einer und
in mehreren Leiterschleifen

wobei r den Innenradius, r' den Drahradius einer einzigen kurzgeschlossenen Windung darstellt ($\mu_r=1$). Wenn $r'=0,5114 r$ ist, wird der Klammerausdruck $=1$ und wir erhalten obengenannten Ausdruck. Dies ist, wie gesagt, nur ein Modell, da unsere Spule ja nicht aus Draht besteht. Vielmehr sollte man sich die Ladung und den Strom eher etwas über den Raum "verschmiert" vorstellen. Nach [20] beträgt die magnetische Feldstärke \mathbf{H}_0 (in Zukunft immer als Vektor dargestellt, H ist die HUBBLE-Konstante) im Mittelpunkt der Leiterschleife (links)

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{i_0}{2r_0}\mathbf{e}_r \quad (11)$$

\mathbf{e}_r ist der Einheitsvektor. Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der Definition der Feldstärke als Differenz von Nullpotential ($r=\infty$) und Potential im Abstand r . Der Feldstärkeanteil eines Stromelements $i_0 ds$ im Abstand r vom Mittelpunkt (Bild 3) errechnet sich nach [20] folgendermaßen

$$d\mathbf{H}_0 = d\frac{q_0 c \mathbf{e}_r}{4\pi (r_0 - r^2)} = \frac{i_0 \mathbf{e}_r ds}{4\pi (r_0 - r^2)} \quad (12)$$

Hier tritt an die Stelle des Nullpotentials das Potential im Abstand r_0 . Für die Feldstärke H_0 in diesem Punkt gilt folgendes

$$\mathbf{H}_0 = \oint d\mathbf{H} = \oint \frac{i_0 \mathbf{e}_r ds}{4\pi (r_0 - r^2)} \quad (13)$$

Zur Lösung dieses Integrals teilen wir $d\mathbf{H}$ besser in die zwei Anteile \mathbf{H}_1 (rechts) und \mathbf{H}_2 (links) auf, $d\mathbf{H}$ ergibt sich dann aus der Summe beider Anteile. Die Integrationsgrenzen liegen bei 0 und π .

$$\mathbf{H}_0 = \frac{i_0 \mathbf{e}_r}{4\pi} \left(\frac{1}{r_0 - r} + \frac{1}{r_0 + r} \right) \int_0^\pi d\varphi = \frac{i_0 \mathbf{e}_r}{2} \frac{r_0}{r_0^2 - r^2} \quad (14)$$

Im Mittelpunkt herrscht dann die in (11) angegebene Feldstärke. Dieser Wert ist aber nur bezogen auf ein einzelnes, isoliertes MLE. Wenn wir die tatsächliche Feldstärke bestimmen wollen, müssen wir auch die benachbarten Linienelemente additiv berücksichtigen. Betrachten wir nun den Einfluß *eines* benachbarten MLE (Bild 3 rechts) in x-Richtung. Dazu können wir den ersten Ausdruck in (14) folgendermaßen abändern:

$$\mathbf{H}_1 = \frac{i_0 \mathbf{e}_r}{4\pi} \left[\frac{1}{(\pi - 1)r_0 - r} + \frac{1}{(\pi + 1)r_0 - r} \right] \int_0^\pi d\varphi = \frac{i_0 \mathbf{e}_r}{2} \frac{r_0}{r_0^2(\pi^2 - 1) - 2\pi r_0 r + r^2} \quad (15)$$

Da die einzelnen Linienelemente in einem kubisch-flächenzentrierten Raumgitter angeordnet sind (Bild 1), liegen an einer Feldlinie insgesamt vier Linienelemente und zwar auf die in Bild 4 dargestellte Weise. Hierbei habe ich bereits kommenden Erkenntnissen vorgegriffen und die einzelnen Bahnen nicht als Kreise, sondern als achtförmige Kurve (Achtkurve) dargestellt. Dies ist notwendig, um die Phasenverhältnisse darzustellen. Bis jetzt haben wir auch nur einen Spezialfall betrachtet, nämlich den, bei dem q und H ihren Effektivwert haben. Man muß aber davon ausgehen, daß es sich insgesamt um ein schwingfähiges System handelt (L und C) und da werden die einzelnen Werte variieren und zwar nach einer annähernd sinusförmigen Funktion. Eine Bahnkurve mit einer positiven Ladung an einem Ende und einer negativen

Ladung am anderen Ende stellt jedoch einen Dipol dar, der sich nach einem bestimmten Modus im Raum ausrichtet (Vektor E_0).

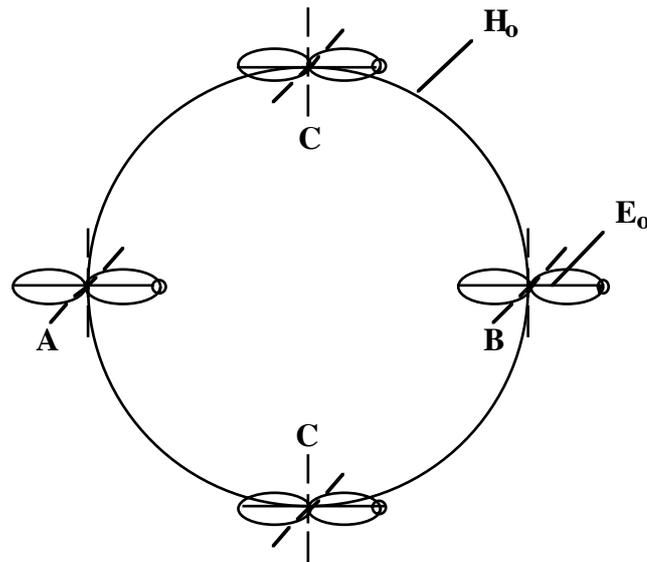


Bild 4
Anordnung der MLE an einer Feldlinie in x-Richtung
bei kubisch flächenzentriertem Gitter

Betrachten wir nun Bild 4, so sehen wir hier zuerst den Punkt A. Dies ist das MLE, das wir untersuchen. Im Punkt B befindet sich das zweite MLE, dessen Einfluß wir in (15) bestimmt haben. Die Feldlinie schneidet die beiden Elemente C in einem Winkel von 0° , also gar nicht, so daß sie in x-Richtung nicht wirksam werden. Bei einer Störung (z.B. in Richtung der z-Achse) können sie ihre Orientierung aber so ändern, daß sie ebenfalls wirksam werden oder gar die Stelle von A und B einnehmen, die Ausbreitung erfolgt dann in z-Richtung.

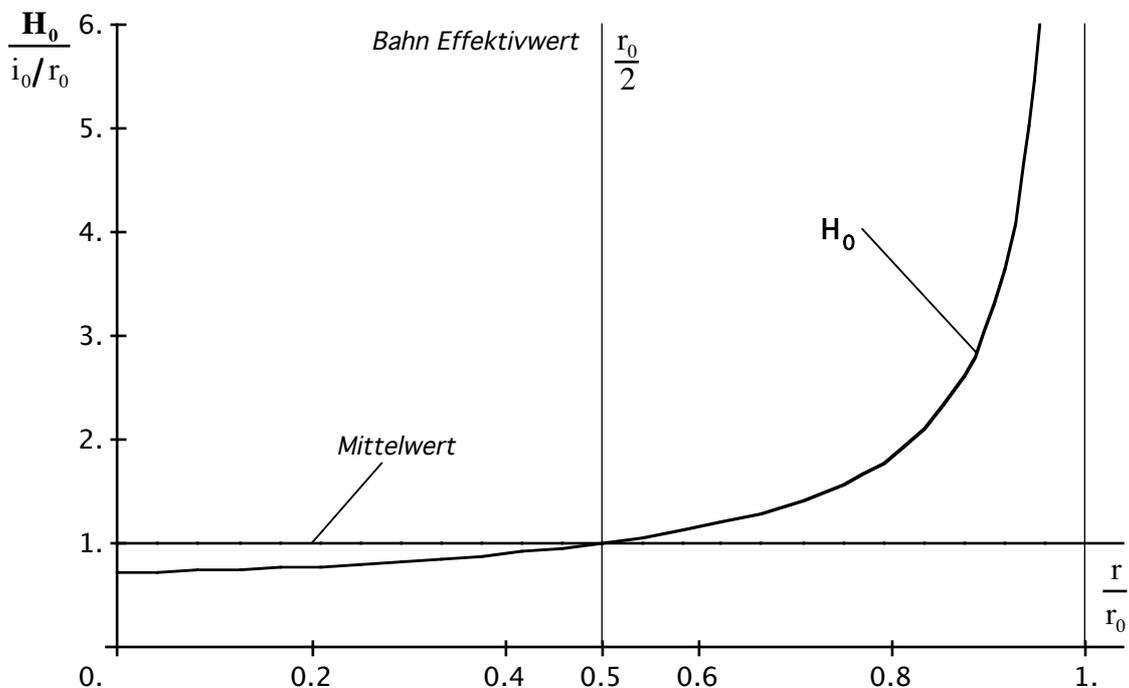


Bild 5
Verlauf der magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius r

Dann müssen wir auch die in der entgegengesetzten x-Richtung und die in y-Richtung vorn und hinten liegenden MLE berücksichtigen, so daß sich insgesamt ergibt:

$$\mathbf{H}_0 \approx \frac{i_0 r_0 \mathbf{e}_r}{2} \left[\frac{1}{r_0^2 - r^2} + \frac{4}{r_0^2 (\pi^2 - 1) - 2\pi r_0 r + r^2} \right] \quad (16)$$

Damit erhalten wir für \mathbf{H}_0 im Punkt A einen Wert von $0,7254892 i_0/r_0$. Den Verlauf von \mathbf{H}_0 in x-Richtung zeigt Bild 5. Im Abstand von $r_0/2$ beträgt der Wert von \mathbf{H}_0 genau i_0/r_0 . Wir können diesen Wert daher auch als Mittelwert betrachten. Somit können wir mit guter Näherung schreiben

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{i_0}{r_0} \mathbf{e}_r \quad (17)$$

und für die magnetische Induktion

$$\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = \frac{\mu_0 \omega_0 q_0 \mathbf{e}_r}{r_0} = \frac{\mu_0 c q_0 \mathbf{e}_r}{r_0^2} \quad (18)$$

Gleichzeitig haben wir es mit einer bewegten Ladung im Magnetfeld zu tun. Es wird also eine LORENTZ-Kraft $\mathbf{F}_{m=} = q_0(\mathbf{c} \times \mathbf{B}_0)$ auftreten. Diese ist nach innen gerichtet. Zur Vereinfachung wollen wir das System wieder nur entlang der x-Achse betrachten. Daher können wir für den Betrag der anziehenden Kraft $F_{m=} = -q_0 c B_0$ setzen. Wir erhalten mit

$$F_{m=} = -\frac{\mu_0 c^2 q_0^2}{r_0^2} = -\frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0^2} \quad (19)$$

Ausdruck (9), nur mit umgekehrten Vorzeichen. Zentrifugalkraft und LORENTZ-Kraft heben sich auf. Jetzt können wir auch die Ruhmasse des Magnetfeldes bestimmen:

$$W_0 = \frac{1}{2} i_0^2 L_0 = \frac{1}{2} \omega_0^2 q_0^2 \mu_0 r_0 = \frac{1}{2} m_0 c^2 \quad (20)$$

$$m_0 = \frac{\mu_0 q_0^2}{r_0} \quad (21)$$

Wie sich leicht nachweisen läßt, ist dieser Ausdruck identisch mit (6). Jetzt wollen wir einmal die gravitative Anziehung der magnetischen (wir denken sie uns als Punktmasse im Mittelpunkt der Kreisbahn) und der elektrischen Ruhmasse bestimmen. Auf Grund der Massengleichheit können wir schreiben

$$F_g = -G \frac{m_0^2}{r_0^2} = -G \frac{\mu_0^2 q_0^4}{r_0^4} \quad (22)$$

Wir betrachten jetzt noch einmal die in C_0 gespeicherte Energie (3). Da diese nur die Hälfte der Gesamtenergie des MLE darstellt, können wir schreiben

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 r_0} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \quad (23)$$

Dann ergibt sich für die Ladung folgender Ausdruck:

$$q_0 = \sqrt{\hbar c \epsilon_0} = \sqrt{\frac{\hbar}{Z_0}} \quad (24)$$

Hierbei steht Z_0 für den Wellenausbreitungswiderstand des Vakuums $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$. Dieser stellt wegen Gl. (7) eine ebenso unveränderliche Größe dar wie c . Hiermit haben wir übrigens bereits »die Gitterschwingungen mit der HEISENBERG'schen Unbestimmtheitsrelation in Verbindung« gebracht, wie es LANZOS in seinem Vortrag fordert. Aus (22) und (24) erhalten wir:

$$F_g = -G \frac{\hbar c \epsilon_0 \mu_0^2 q_0^2}{r_0^4} = -\frac{G \hbar}{c} \frac{q_0^2 \mu_0}{r_0^4} \quad (25)$$

und nach Erweitern mit c^2

$$F_g = -\frac{G \hbar}{c^3} \frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0^4} \quad (26)$$

Betrachten wir uns nun den ersten Bruch $G\hbar/c^3$ etwas genauer, so stellt er bis auf einen Faktor von $1/2\pi$ genau das Quadrat der PLANCK'schen Elementarlänge dar, wie wir ihn schon aus anderen Modellen kennen. Wenn wir jetzt festlegen, daß

$$r_0 = \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}} \quad (27)$$

sein soll, erhalten wir für die Gravitationskraft ebenfalls Ausdruck (19) bzw. (9)

$$F_g = -\frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0^2} \quad (28)$$

Nun lautet der Wert der PLANCK'schen Elementarlänge aber nicht $G\hbar/c^3$, sondern eigentlich $G\hbar/c^3$. Der Unterschied von $1/2\pi$ ist zum einen darauf zurückzuführen, daß für die Ausbreitung und Messung der Gravitation und der elektromagnetischen Strahlung ja nicht der Radius r_0 , auf dem sich C_0 bewegt, maßgebend ist, sondern die Gitterkonstante πc . Dann ist da aber immer noch der Faktor 2. Dieser ergibt sich meiner Meinung nach aus dem Abtasttheorem. Bei einer Gitterkonstante von πc sind Messungen erst ab einer Länge von $2\pi c$ möglich. Von nun an wollen wir aber für r_0 immer Ausdruck (27) setzen und im Stillen daran denken, daß die Gitterkonstante der Metrik πr_0 beträgt. Für die anderen PLANCK'schen Elementarausdrücke erhalten wir weiter:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c^5}{G \hbar}} \quad W_0 = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} \quad m_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \quad (29)$$

Der Wert für ω_0 liegt bei $1,8551 \cdot 10^{43} \text{s}^{-1}$. Wir haben Zentrifugal-, COULOMB-, LORENTZ- und Gravitationskraft auf einen Ausdruck zurückführen können. Interessant ist, daß es bei der elektromagnetischen Betrachtung (MAXWELL'sche Gleichungen) unerheblich ist, wie groß der Wert von r_0 ist. Wenn jedoch die Gravitationskraft mit ins Spiel kommt, kommt für den Wert von r_0 nur noch Gl. (27) in Frage. MAXWELL soll übrigens von einem ähnlichen Modell (allerdings ohne Expansion) ausgegangen sein, wie wir es hier besprechen.

Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung in unserem Modell. Wenn wir postulieren, daß die Kreisfrequenz ω_0 des elektrischen Dipols und ω_0 der magnetischen Induktion und Feldstärke gleich groß sind, so muß sich eine Störung in Phase und/oder Amplitude mit der Geschwindigkeit $\pi c/2$ entlang der Feldlinie H_0 ausbreiten. Das bedeutet, die Störung breitet sich entlang einer Geraden AB (in Bild 4 nicht dargestellt) genau mit Lichtgeschwindigkeit aus. Das gleiche gilt auch für die Ausbreitung in anderen, beliebigen Richtungen. So gibt es im Raumgitter auch Abstände von $\pi\sqrt{2} \dots \pi\sqrt{3}$. Nun müssen wir uns die Radialgeschwindigkeit auf der Feldlinie proportional dem Abstand vorstellen, so daß die Axialgeschwindigkeit immer c ist. Sehen wir das System $L_0 C_0$ als einen Parallelschwingkreis an, so erhalten wir für die Resonanzfrequenz:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}} = \frac{1}{r_0 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = \frac{c}{r_0} \quad (30)$$

und ohne r_0

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (31)$$

genau Ausdruck (7). Für die Gesamtenergie W_0 eines MLE, die sich aus der *Summe* von elektrischer und magnetischer Energie ergibt erhalten wir dann

$$W_0 = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0} = \frac{m_0}{2} c^2 + \frac{m_0}{2} c^2 = m_0 c^2 \quad (32)$$

Aus diesem Grund beträgt die Energie der Masse elektromagnetischer Strahlung $m_0 c^2$ und nicht $m_0 c^2/2$. Den selben Wert erhalten wir hier aus der Lösung folgender Gleichung (Energie im Gravitationsfeld)

$$W_0 = \int F_m dr_0 = -\frac{q_0^2}{\epsilon_0} \int \frac{dr_0}{r_0^2} = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0} \quad (33)$$

Das ist bereits die Gesamtenergie, da ja beide Massen daran beteiligt sind. Weiterhin gilt natürlich die Beziehung $W_0 = \hbar \omega_0$. Weitere wichtige Beziehungen für den magnetischen Fluß φ_0 erhalten wir, wenn wir elektrische und magnetische Energie gleichsetzen

$$W_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C_0} = \frac{1}{2} \frac{\varphi_0^2}{L_0} \quad (34)$$

$$\frac{\varphi_0}{q_0} = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = Z_0 \quad (35)$$

$$\varphi_0 = q_0 Z_0 = \sqrt{\hbar \mu_0 c} = \sqrt{\hbar Z_0} \quad (36)$$

$$\varphi_0 q_0 = \hbar \quad (37)$$

Der letzte Ausdruck wirft ein bezeichnendes Licht auf die Bedeutung des PLANCKschen Wirkungsquantums und wir haben den Vorschlag: »...die Gitterschwingungen mit der HEISENBERGschen Unbestimmtheitsrelation in Verbindung zu bringen« aus [1] realisiert. Für die Energie kann man dann auch schreiben $W_0 = \varphi_0 q_0 \omega_0$ oder $W_0 = \varphi_0 i_0$ bzw. $W_0 = q_0 u_0$ (alles Effektivwerte). Man sieht, fast alle Größen lassen sich auf einfachste Ausdrücke zurückführen.

3.4. Das MINKOWSKISCHE Linienelement als Schwingkreis

Haben wir bis jetzt nur den Fall betrachtet, daß elektrische und magnetische Masse gleich groß sind — Ladung und Fluß φ_0 hätten dann ihren Effektivwert und m_0 würde eine Kreisbahn beschreiben — verhält sich das MLE nicht ganz so einfach. Für spätere Betrachtungen reicht es aber aus, eine Kreisbahn anzunehmen. Wie bereits weiter oben angedeutet haben wir mit einem Kondensator und einer Spule ein schwingfähiges System vorliegen, das (im Augenblick) über ein verlustfreies Medium, nämlich das Vakuum, gekoppelt sein soll. So können wir auch eine Ersatzschaltung dafür aufstellen (Bild 6), die eines ungedämpften Parallelschwingkreises:

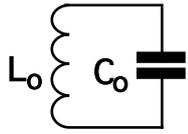


Bild 6
Ersatzschaltung eines
statischen MLE

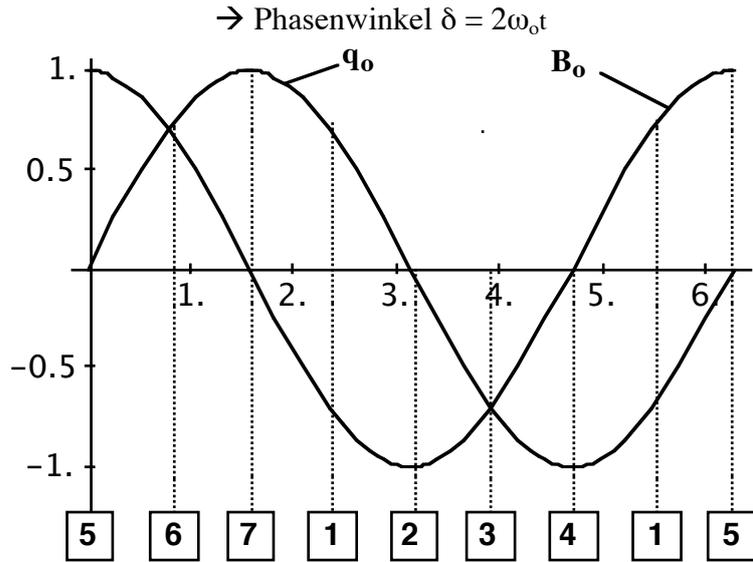


Bild 7
Verlauf von Ladung und Induktion mit
Kennzeichnung der Bahnpunkte

Die Gleichung für die Resonanzfrequenz haben wir ja bereits in (30) angegeben. Wenn sich aber L_0 und C_0 wie ein Parallelschwingkreis verhalten, müssen sich auch alle Werte, wie q_0 , φ_0 , H_0 , B_0 usw. nach harmonischen Funktionen zeitlich ändern. Das gleiche gilt auch für den Abstand r_0 . In Bild 7 ist der zeitliche Verlauf von q_0 und B_0 (H_0) mit Angabe der markierten Bahnpunkte dargestellt. Die genaue Bahnfunktion ergibt sich aus (33), (35) und (37) aus folgendem Ansatz:

$$W_0 = \hbar\omega_0 = \frac{q_0^2}{\epsilon_0 r_0} \sin^2 2\omega_0 t \tag{38}$$

Nach r_0 umgestellt unter Vernachlässigung eines festen Phasenwinkels $\pi/2$ mit $\delta = 2\omega_0 t$:

$$r(\omega_0 t) = \frac{q_0}{2 \epsilon_0 \varphi_0 \omega_0} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 4\omega_0 t \right) \right) \Rightarrow \frac{c}{2\omega_0} (1 + \cos 4\omega_0 t) \tag{39}$$

$$r(\delta) = \frac{r_0}{2} (1 + \cos 2\delta) \quad \text{oder in x und y zu} \tag{40}$$

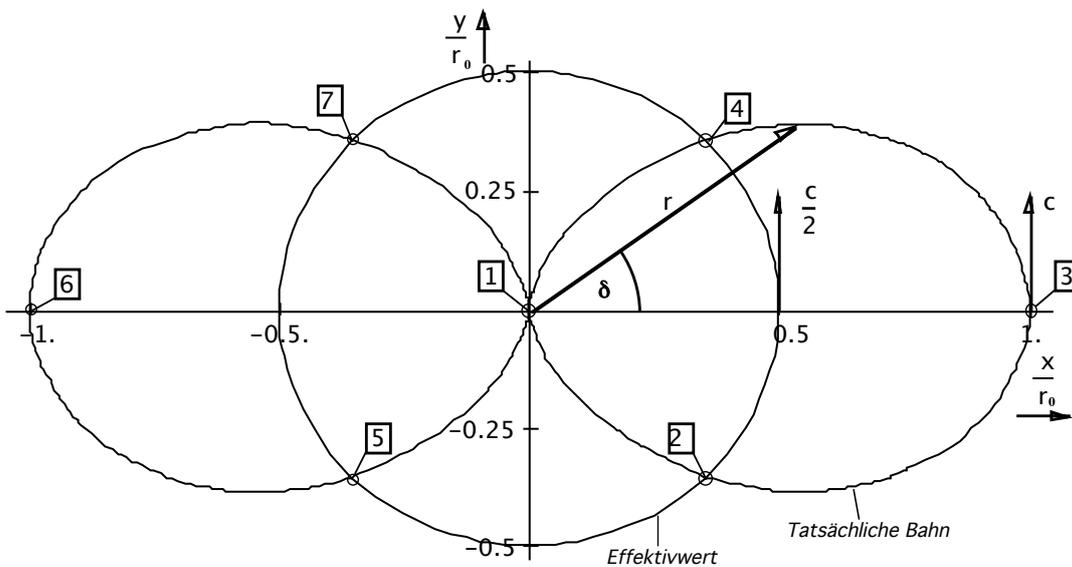


Bild 8
Bahnverlauf in der xy-Ebene

$$x(\delta) = \frac{r_0}{2} (1 + \cos 2\delta) \cos \delta \tag{41}$$

$$y(\delta) = \frac{r_0}{2}(1 + \cos 2\delta)\sin \delta \quad (42)$$

Der genaue Verlauf ist in Bild 8 dargestellt. Er entspricht in der xy -Ebene genau dem Verlauf der Hüllkurve des POINTING-Vektors \mathbf{S} (wie \mathbf{r}) bei einem HERTZschen Dipol [24].

Für die meisten weiteren Untersuchungen genügt es, wenn wir vereinfachend von einer Kreisbahn ausgehen und nur die Effektivwerte betrachten.

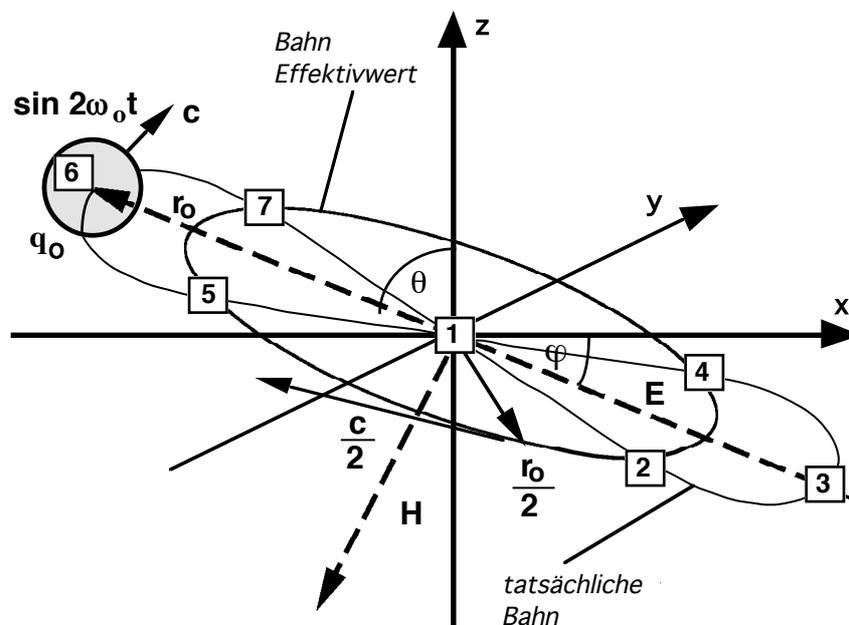


Bild 9
Idealisierte und tatsächliche Bahn
des MLE in dreidimensionaler Darstellung

Wichtig ist, daß es bei dem wahren Bahnverlauf (Bild 8 und 9) zur Bildung eines Dipols (Vektor \mathbf{E}_0) kommt, da die Ladung q_0 an den jeweiligen Extrempunkten der Bahn gleich groß aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet ist. Dieser Dipol kann beliebig in allen drei Richtungen orientiert sein

Eine eventuelle Expansion des Modells wird durch den zeitlichen Anstieg von r_0 erreicht. Das Modell ist aber nur gültig, wenn die Expansionsgeschwindigkeit r_0 kleiner $c/2$ ist. Ist sie größer, so gibt es keine Rotation mehr. Die Bewegung verläuft dann geradlinig bzw. krummlinig. Es läßt sich keine genaue Bahnfunktion mehr angeben. Das wäre auch ziemlich sinnlos, wie wir später noch sehen werden.

3.5. Nachteile des statischen Modells

Mit dem beschriebenen statischen Modell haben wir Fall (0.13) realisiert und »die Richtung der Hauptachsen bleibt unbestimmt. Die kleinste Störung kann hier eine beliebig starke Drehung der Hauptachsen zur Folge haben.« Die Ursache ist folgende: Bei L_0 und C_0 handelt es sich um ideale Bauelemente. Das bedeutet, die Kreisgüte Q_0 eines solchen Schwingkreises wäre damit unendlich, die Bandbreite Null. Bei einer unendlichen Güte ist aber die Resonanzüberhöhung ebenfalls unendlich (Spannung u_0 und Strom i_0). Daher läßt sich keine genaue Phase und Amplitude angeben. Dies ist aber gerade identisch mit der Unbestimmtheit der Lage der Hauptachsen.

Ein weiterer Nachteil ist, daß sich das Modell zeitlich nicht ändert. Das heißt, alle Mittelwerte einschließlich r_0 bleiben ständig konstant. Nun ist es aber eine bekannte Tatsache, daß der

Kosmos expandiert und das gleiche sollte auch mit der Metrik passieren. Vielleicht ist dies sogar die Ursache der Expansion? Wir nehmen diese Vermutung als Ansatz und formulieren damit unsere zweite Hypothese:

II. Die Expansion des Kosmos wird hervorgerufen durch die Expansion des metrischen Gitters/Strahlungsfeldes.

Weiterhin bleibt die Frage nach Herkunft und Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung unbeantwortet. Um diese Nachteile zu umgehen, wollen wir das Modell dynamisieren.

4. Dynamisches Modell

4.1. Weitergehende Betrachtungen

Wollen wir eine Expansion der Metrik erreichen, so müssen wir dafür sorgen, daß den MLE Energie entzogen wird. Nun wird bisher angenommen, daß das Vakuum verlustfrei ist, da die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Strahlung unabhängig von der Frequenz ist. Führen wir die Leitfähigkeit $\kappa_0=1/\rho_0$ ein, so gilt für den komplexen Wellenausbreitungswiderstand (j ist die imaginäre Einheit, wie in der Elektrotechnik üblich)

$$\underline{Z} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\kappa_0 + j\omega\varepsilon_0}} \quad (43)$$

und auf Grund (30) für \underline{c}

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{j\omega}{\mu_0(\kappa_0 + j\omega\varepsilon_0)}} \quad (44)$$

Daraus ergeben sich zwei Extremfälle. Während (44) für einen Nichtleiter in Gl. (31) übergeht, erhalten wir für einen idealen Leiter

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{j\omega}{\mu_0\kappa_0}} \quad (45)$$

Allgemein gilt daher: in einem verlustbehafteten Medium wird der Wellenausbreitungswiderstand komplex und damit \underline{c} ebenfalls. Da \underline{c} das Fortpflanzungsmaß $\gamma = \alpha + j\beta = j\omega/\underline{c}$ bestimmt, würde das Dämpfungsmaß α beim Auftreten eines imaginären Anteils von \underline{c} ungleich Null und zudem noch frequenzabhängig werden. Es gilt

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa_0}{\omega\varepsilon_0} \right)^2} - 1 \right)} = \frac{\omega}{c} \sinh \left(\frac{1}{2} \operatorname{ar sinh} \frac{\kappa_0}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad (46)$$

Das heißt, zusätzlich zur geometrisch bedingten Dämpfung würde eine zusätzliche Dämpfung $e^{-\alpha x}$ auftreten und man könnte für den Raum eine untere Grenzfrequenz definieren ($-3\text{dB}/\lambda$). Nur wenn die Leitfähigkeit Null ist, kommt es nicht dazu. Dies alles ist im Vakuum auch nicht beobachtet worden und die Wellenausbreitung geschieht bei allen Frequenzen mit Lichtgeschwindigkeit. Das Vakuum verhält sich also wie ein idealer Nichtleiter [20].

Trotzdem wollen wir versuchen eine Lösung zu finden, die alle diese Tatsachen berücksichtigt. Wir erweitern zuerst unsere Ersatzschaltung um den Verlustwiderstand R_{OR} (Bild 10), Index R steht hier für Reihenschaltung bzw. um den Parallelwiderstand R_O .

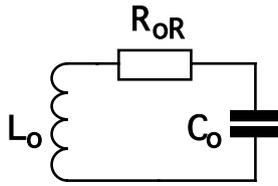


Bild 10
Ersatzschaltung mit
Reihenwiderstand

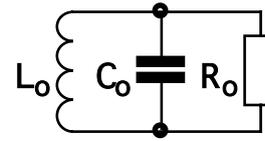


Bild 11
Ersatzschaltung mit
Parallelwiderstand

Bei unseren weiteren Betrachtungen müssen wir uns jetzt für eine von beiden Ersatzschaltungen entscheiden. Für die Umrechnung der beiden Widerstände gilt

$$R_0 = \frac{Z_0^2}{R_{0R}} \quad (47)$$

Wir entscheiden uns für das zweite Modell, da ein sehr großer Verlustwiderstand einem Nichtleiter am nächsten kommt. Ausgehend von Bild 10 definieren wir zuerst den Verlustwiderstand R_{0R} , der dann offensichtlich sehr klein sein muß bezogen auf einen Würfel mit der Kantenlänge r_0 zu

$$R_{0R} = \frac{1}{\kappa_0} \frac{r}{A} \quad A = r^2 \quad R_{0R} = \frac{1}{\kappa_0 r} \quad (48)$$

Daraus ergibt sich für R_0

$$R_0 = \kappa_0 r_0 Z_0^2 \quad (49)$$

Offensichtlich handelt es sich bei unserem MLE um ein System zweiter Ordnung. Mit der Einführung von R_0 können wir jetzt auch zwei Zeitkonstanten definieren, nämlich

$$\tau_0 = \sqrt{L_0 C_0} \quad \text{und} \quad \tau_1 = R_0 C_0 \quad (50)$$

Bei τ_0 , einer Zeitkonstante zweiter Ordnung, handelt es sich mit größter Wahrscheinlichkeit um den Kehrwert der Kreisfrequenz unseres MLE. Welchem Wert in der Natur kann denn nun aber τ_1 zugeordnet werden? Eine zusätzliche zeitliche Dämpfung elektromagnetischer Wellen tritt bekanntlich nicht auf. Da R_0 sehr groß sein muß, gilt dasselbe dann auch für τ_1 . Wir nehmen nun an, daß τ_1 mit dem Kehrwert der HUBBLE-Konstante H identifiziert werden kann. Diese Annahme wird dadurch untermauert, daß es sich bei H um eine Zeitkonstante erster Ordnung handelt, was auch für τ_1 gilt. Wir können dann schreiben

$$H = \frac{\dot{r}_0}{r_0} = \frac{1}{R_0 C_0} = \frac{1}{\kappa_0 \mu_0 r_0^2} = \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \frac{1}{L_0 C_0} = \frac{\epsilon_0 \omega_0^2}{\kappa_0} \quad (51)$$

Weiterhin gilt allgemein $H = n/t$; n ist ein konstanter Faktor und vom verwendeten Modell abhängig (Strahlungs-/Staubkosmos), t ist die Zeit und wird hier mit dem Weltalter gleichgesetzt. Als nächstes wollen wir nach [5] die Güte des Schwingkreises definieren

$$Q_0 = \frac{W_0 \omega_0}{P_0} = \frac{\hbar \omega_0^2 R_0}{u_0^2} \quad (52)$$

und wegen $u_0 = -\omega_0 \varphi_0$ bzw. (36)

$$Q_0 = \frac{\hbar R_0}{\varphi_0^2} = \kappa_0 r_0 Z_0 = \frac{R_0}{Z_0} = \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}} \quad (53)$$

Der numerische Wert liegt bei $1,041 \cdot 10^{61}$. Wenn wir vom letzten Ausdruck von (51) ausgehen, können wir für H auch schreiben

$$H = \frac{\epsilon_0 \omega_0^2}{\kappa_0} = \frac{\epsilon_0 c \omega_0}{\kappa_0 r_0} = \frac{\omega_0}{\kappa_0 r_0 Z_0} = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (54)$$

Nun könnte man meinen, bis zur Bestimmung von H ist es nicht mehr weit. Leider ist uns jedoch der Wert von κ_0 nicht bekannt. Man erhält ihn aber näherungsweise aus dem astronomisch bestimmten Wert von H

$$\kappa_0 = \frac{c^3}{\mu_0 G \hbar H} \quad (55)$$

zu $1,710 \cdot 10^{93} \text{ AV}^{-1} \text{ m}^{-1}$. Hierbei wurde für H ein Wert von $55 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, das sind $1,7824 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}$ zum Ansatz gebracht. Möglicherweise ist dieser Wert nicht mehr ganz aktuell. Man erkennt aber die Größenordnung von κ_0 . Weiterhin gilt $G \hbar H = \text{const.}$

Nun aber weiter zu unserem Modell. Aus der Beziehung $H=n/t$ und dem dritten Ausdruck von (51) können wir schon die Zeitfunktion von r_0 bestimmen

$$r_0 = \sqrt{\frac{t}{n\kappa_0\mu_0}} \quad \text{und} \quad (56)$$

$$\dot{r}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{n\kappa_0\mu_0 t}} \quad (57)$$

Damit erhalten wir für die Hubblekonstante H

$$H = \frac{\dot{r}_0}{r_0} = \frac{1}{2t} \quad \text{und} \quad q = -\frac{r_0 \ddot{r}_0}{\dot{r}_0^2} = 1 \quad (58)$$

also die Beziehung für einen Strahlungskosmos. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, sind wir doch von den MAXWELLSchen Gleichungen ausgegangen. q ist der Verzögerungsparameter (nicht mit der Ladung verwechseln). Es folgt $n=1/2$ und wir können schreiben

$$r_0 = \sqrt{\frac{2t}{\kappa_0\mu_0}} \quad \text{und} \quad \dot{r}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\kappa_0\mu_0 t}} \quad (59)$$

$$t = \frac{R_0 C_0}{2} = \frac{\kappa_0 \mu_0 r_0^2}{2} \quad (60)$$

Mit diesen Beziehungen können wir jetzt darangehen, eine Differentialgleichung für unseren Schwingkreis aufzustellen. Betrachten wir dazu Bild 12.

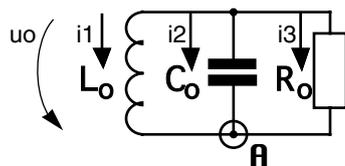


Bild 12
Spannungen und Ströme
am Schwingkreis

4.2. Differentialgleichung und Lösungen

4.2.1. Aufstellung der Differentialgleichung

Wir haben einen Parallelschwingkreis mit der Induktivität L_0 , der Kapazität C_0 und dem Verlustwiderstand R_0 vorliegen. Weiterhin liegt die Spannung u_0 über allen Bauelementen gleichzeitig an. Im Knoten **A** vereinigen sich die drei Ströme i_1 , i_2 und i_3 . Es gilt die 1. KIRCHHOFFSche Regel:

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (61)$$

Weiterhin gilt wegen $u_0 = d\varphi_0/dt$ und $\varphi_0 = i_1 L_0$

$$u_0 = \frac{d(i_1 L_0)}{dt} \quad (\text{I})$$

$$u_0 = \frac{1}{C_0} \int i_2 dt \quad (\text{II})$$

$$u_0 = i_3 R_0 \quad (\text{III})$$

Gleichung (I) läßt sich jetzt wie folgt auflösen

$$u_0 = \frac{d(i_1 L_0)}{dt} = L_0 \frac{di_1}{dt} + i_1 \frac{dL_0}{dt} \quad (62)$$

und wir erhalten folgende Differentialgleichung

$$\dot{i}_1 + \frac{\dot{L}_0}{L_0} i_1 = \frac{u_0}{L_0} \quad \text{oder} \quad (63)$$

$$y' + f(t)y = g(t) \quad (64)$$

$$M(t) = e^{\int f(t) dt} = e^{\int \frac{dL_0}{L_0} dt} = e^{\frac{dL_0}{L_0}} = L_0 \cdot \quad (65)$$

Nun können wir nach i_1 auflösen [21]

$$i_1 = \frac{1}{M(t)} \left[\int g(t) M(t) dt + C \right] \quad (66)$$

Mit $C=0$ erhalten wir dann

$$i_1 = \frac{1}{L_0} \int \frac{u_0}{L_0} dt = \frac{1}{L_0} \int u_0 dt \quad . \quad (67)$$

Jetzt stellen wir Gl. (II) nach i_2 um:

$$i_2 = \frac{d(u_0 C_0)}{dt} = C_0 \frac{du_0}{dt} + u_0 \frac{dC_0}{dt} \quad (68)$$

Den Wert von i_3 erhalten wir direkt durch Umstellen von (III) und wir können jetzt schreiben

$$i_1 = \frac{1}{L_0} \int u_0 dt \quad (I)$$

$$i_2 = C_0 \frac{du_0}{dt} + u_0 \frac{dC_0}{dt} \quad (II)$$

$$i_3 = \frac{u_0}{R_0} \quad (III)$$

In (61) eingesetzt erhalten wir dann

$$\frac{1}{L_0} \int u_0 dt + C_0 \frac{du_0}{dt} + u_0 \left(\frac{dC_0}{dt} + \frac{1}{R_0} \right) = 0 \quad . \quad (69)$$

Da $u_0 = \dot{\varphi}_0$ geht Gl.(69) über in

$$C_0 \ddot{\varphi}_0 + \left(\dot{C}_0 + \frac{1}{R_0} \right) \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{L_0} \varphi_0 = 0 \quad (70)$$

und nach Division durch C_0

$$\ddot{\varphi}_0 + \left(\frac{\dot{C}_0}{C_0} + \frac{1}{R_0 C_0} \right) \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{L_0 C_0} \varphi_0 = 0 \quad . \quad (71)$$

Dies ist die Differentialgleichung für einen parametrischen Verstärker. Auf Grund der Definition von $C_0 = \epsilon_0 r_0$ können wir aber auch schreiben

$$\ddot{\varphi}_0 + \left(\frac{\dot{r}_0}{r_0} + \frac{1}{R_0 C_0} \right) \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{L_0 C_0} \varphi_0 = 0 \quad . \quad (72)$$

Natürlich fällt es etwas schwer, sich vorzustellen, daß der Kondensator quasi mit der Metrik "mitwächst". Wenn man C_0 aber als eine grundlegende Eigenschaft des Raumes betrachtet, dessen Größe von den Abmessungen des MLE abhängig ist, ist es vielleicht etwas einfacher. Wenn wir jetzt annehmen würden, daß keine Expansion stattfindet, ginge Gl. (72) über in die normale Differentialgleichung für einen verlustbehafteten Schwingkreis mit Parallelwiderstand mit der bekannten Lösung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L_0 C_0} - \left(\frac{1}{2R_0 C_0}\right)^2} \quad (73)$$

Dann würden wir aber für die Lichtgeschwindigkeit erhalten:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} - \left(\frac{1}{2\mu_0 \kappa_0 r_0^2}\right)^2} \quad (74)$$

Das hieße auch, daß die (Maximum-)Lichtgeschwindigkeit nicht konstant ist. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist jedoch eine grundlegende Aussage, die wir nicht negieren dürfen. Zum Glück expandiert unsere Metrik und der erste Teilfaktor von φ_0 in Gleichung (72), nämlich H ist $\neq 0$. Nach (51) sind außerdem beide Summanden identisch und wir können schreiben

$$\ddot{\varphi}_0 + \frac{2}{R_0 C_0} \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{L_0 C_0} \varphi_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (75)$$

$$\ddot{\varphi}_0 + 2H\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = 0 \quad (76)$$

Gleichung (76) ist sehr interessant. Wenn wir jedoch die Zeitfunktion von φ_0 bestimmen wollen, müssen wir jetzt (53, 54) einsetzen:

$$\ddot{\varphi}_0 + \frac{1}{t} \dot{\varphi}_0 + \frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t} \varphi_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (77)$$

$$\ddot{\varphi}_0 t + \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{\varepsilon_0} \varphi_0 = 0 \quad (78)$$

Damit haben wir die Differentialgleichung für unser Modell aufgestellt. Es handelt sich um eine sehr seltene hypergeometrische Differentialgleichung, die wir im nächsten Abschnitt lösen wollen.

4.2.2. Allgemeine Lösung der Differentialgleichung

Beim Literaturstudium wurde dieser Typ einer Differentialgleichung nicht gefunden und die POOLEsche Gleichung [17] führt auch nicht zum Ziel. Zur Lösung kommt daher nur die Integration durch Potenzreihenansatz [21] in Frage. Wir betrachten dazu folgende Gleichung:

$$y''x + Ay' + By = 0 \quad (79)$$

Diese Gleichung stellen wir zuerst nach y um

$$y = -\frac{1}{B}(y''x + Ay') \quad (80)$$

Dann entwickeln wir y in eine Potenzreihe

$$y = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n \quad (81)$$

$$y' = 0a_0 x^{-1} + 1a_1 x^0 + 2a_2 x^1 + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1} \quad (82)$$

$$y'' = 0(-1)a_0 x^{-2} + 1(0)a_1 x^{-1} + 2 \cdot 1 a_2 x^0 + 3 \cdot 2 a_3 x^1 + 4 \cdot 3 a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2} \quad (83)$$

In Summenschreibweise:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (84)$$

$$Ay' = \sum_{n=1}^{\infty} A n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} A n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A(n+1) a_{n+1} x^n \quad (85)$$

$$y''x = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \quad (86)$$

Jetzt setzen wir die Ausdrücke der letzten Spalte in (80) ein und erhalten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = -\frac{1}{B} \sum_{n=0}^{\infty} (A+n)(1+n) a_{n+1} x^n \quad (87)$$

Damit können wir bereits die Rekursionsformel für die einzelnen Koeffizienten von y angeben:

$$a_{n+1} = -\frac{B}{(A+n)(1+n)} a_n \quad (88)$$

Das ergibt dann folgende Koeffizienten:

$$a_1 = -\frac{B}{(A+0)(1+0)} a_0 = -\frac{B^1}{(A+0)(1+0)} a_0 \quad (89)$$

$$a_2 = -\frac{B}{(A+1)(1+1)} a_1 = \frac{B^2}{(A+0)(A+1)(1+0)(1+1)} a_0 \quad (90)$$

$$a_3 = -\frac{B}{(A+2)(1+2)} a_2 = -\frac{B^3}{(A+0)(A+1)(A+2)(1+0)(1+1)(1+2)} a_0 \quad (91)$$

...

$$a_n = -\frac{B}{(A+n-1)(1+n-1)} a_{n-1} \quad (92)$$

$$a_n = (-1)^n \frac{B^n}{(A+0)(A+1)(A+2)\dots(A+n-1)(1+0)(1+1)(1+2)\dots(1+n-1)} a_0 \quad (93)$$

Eine andere Schreibweise wäre

$$a_n = a_0 (-1)^n B^n \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(1+k)(A+k)} \quad (94)$$

und mit $(z)_n = (z+0)(z+1)\dots(z+n-1)$

$$a_n = a_0 (-1)^n B^n \frac{1}{(1)_n (A)_n} = a_0 (-1)^n B^n \frac{1}{n! (A)_n} \quad (95)$$

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (A)_n} (-Bx)^n \quad (96)$$

Dies ist aber die allgemeine Hypergeometrische Funktion ${}_0F_1(;A;-Bx)$.

$$y = a_0 {}_0F_1\left(\cdot; A; -Bx\right) \quad (97)$$

Hiermit haben wir eine spezielle Lösung unserer Differentialgleichung gefunden. Nun müssen wir nur sehen, ob wir das Ergebnis durch eine einfachere analytische Funktion ausdrücken können. Ob das möglich ist, hängt aber vom Parameter A ab. Bevor wir uns dann wieder unserem Modell zuwenden, wollen wir noch das Verhalten der allgemeinen Lösung (91) untersuchen. Dazu betrachten wir zwei Spezialfälle.

4.2.3. Spezielle Lösungen

4.2.3.1. Die harmonische Lösung (A=1/2)

Wir gehen von Gl. (97) aus und setzen den Wert 1/2 für A ein:

$$y = a_0 {}_0F_1\left(\cdot; \frac{1}{2}; -Bx\right) \quad (98)$$

Dieser ergibt sich, wenn man den Expansionsanteil \dot{r}_0 / r_0 in (72) gleich Null setzt, als Lösung der Differentialgleichung $\ddot{\varphi}_0 t + 1/2 \cdot \dot{\varphi}_0 + \kappa_0 / 2\varepsilon_0 \cdot \varphi_0 = 0$ (Modell ohne Expansion). Nach [12] gilt:

$${}_0F_1\left(\cdot; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}z^2\right) = \cos z \quad \text{also} \quad (99)$$

$$-\frac{1}{4}z^2 = -Bx \quad \text{oder} \quad (100)$$

$$z = \sqrt{4Bx} \quad (101)$$

$$y = a_0 \cos \sqrt{4Bx} \quad \text{mit} \quad a_0 = \hat{\varphi}_0 \quad B = \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{\varepsilon_0} \quad x = t \quad (102)$$

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_0 \cos \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \quad \varphi_0 = \hat{\varphi}_0 \cos Q_0 \quad (103)$$

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_0 \cos 2\sqrt{\frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t}} t \quad (104)$$

Wenn wir den Wurzelausdruck von Gl. (104) genauer betrachten, so müßte er der Kreisfrequenz ω_0 entsprechen und wäre zeitabhängig.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t}} \quad \hat{\varphi}_0 = \sqrt{2\hbar Z_0} \quad (105)$$

$$\varphi_0 = \sqrt{2\hbar Z_0} \cos 2\omega_0 t \quad (106)$$

Da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, müßte die allgemeine Lösung dann lauten:

$$\varphi_0 = \sqrt{\hbar Z_0} (c_1 \cos 2\omega_0 t + c_2 \sin 2\omega_0 t) \quad (107)$$

Da c_2 auch imaginär oder komplex sein kann, kann man die allgemeine Lösung auch als die Summe der Exponentialfunktionen $e^{j2\omega_0 t}$ und $e^{-j2\omega_0 t}$ auffassen. Diese stellen ebenfalls zwei mögliche unabhängige Lösungen dar. Gleichung (107) lautet dann:

$$\varphi_0 = \sqrt{\hbar Z_0} (e^{j2\omega_0 t} + e^{-j2\omega_0 t}) \quad (108)$$

Wir hätten damit eine Lösung mit konstanter Amplitude gefunden. MAXWELL benutzt diese Lösung als Ansatz für die Lösung der nach ihm benannten Gleichungen. Der Faktor 2 soll hier einmal vernachlässigt werden. Die Lösung ist aber für unser Modell nicht anwendbar, da wir ein Modell mit Expansion aufstellen wollen und A immer größer als $1/2$ ist (78).

4.2.3.2. Die Besselsche Lösung ($A=1$)

Diese Lösung entspricht unserem Modell.

$$y = a_0 {}_0F_1(;1; -Bx) \quad (109)$$

Nach [17] gilt

$${}_0F_1(;b; x) = \Gamma(b)(jx)^{b-1} J_{b-1}(2jx^{\frac{1}{2}}) \quad (110)$$

J_n ist die Besselsche Funktion n -ter Ordnung, also

$${}_0F_1(;1; -Bx) = \Gamma(1)(jBx)^0 J_0(\sqrt{4Bx}) \quad (111)$$

$$y = a_0 J_0(\sqrt{4Bx}) \quad \text{mit} \quad a_0 = \hat{\varphi}_i/2 \quad B = \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{\epsilon_0} \quad x = t \quad (112)$$

$$\varphi_0 = a_0 J_0\left(\sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}}\right) = a_0 J_0(Q_0) \quad (113)$$

$$\varphi_0 = a_0 J_0\left(2\sqrt{\frac{\kappa_0}{2\epsilon_0}t}\right) \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{2\epsilon_0}t} \quad (114)$$

Da es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt und der Grad der Besselfunktion ganzzahlig ist, lautet die allgemeine Lösung:

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_i (c_1 J_0(2\omega_0 t) + c_2 Y_0(2\omega_0 t)) \quad (115)$$

Auch hier können c_1 und c_2 imaginär oder komplex sein. Nach [22] ist es oft günstig, die beiden Funktionen (Hankelfunktionen)

$$H_0^{(1)}(x) = J_0(x) + j Y_0(x) \quad \text{und} \quad (116)$$

$$H_0^{(2)}(x) = J_0(x) - j Y_0(x) \quad (117)$$

als linear unabhängige Lösungen betrachten und damit die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1 H_0^{(1)}(x) + c_2 H_0^{(2)}(x) \quad (118)$$

zu bilden. Die allgemeine Lösung (115) lautet dann:

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_i \left(H_0^{(1)}(2\omega_0 t) + H_0^{(2)}(2\omega_0 t) \right) \quad (119)$$

Es besteht eine Analogie zwischen Gleichung (108) und (119). Für unsere weiteren Untersuchungen setzen wir vorerst c_1 und c_2 in (119) gleich 1. Wir erhalten dann als spezielle Lösung:

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_i J_0(2\omega_0 t) \quad \varphi_0 = \hat{\varphi}_i J_0 \left(\sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \right) \quad (120)$$

Möglich wäre aber auch ein Ansatz mit der Bessel-Y-Funktion. Bis auf einen unendlichen Anfangswert ergeben sich dann aber keinerlei weitere Unterschiede. Später werden wir die Summe von beiden (Hankelfunktion) benutzen. Damit wird sich die Diskussion, ob ein endlicher oder unendlicher Anfangswert vorliegt, als sinnlos erweisen.

4.2.3.3. Lösungsverhalten

In Abhängigkeit vom Koeffizienten A ergibt sich speziell folgendes Lösungsverhalten:

$A < 0,5$	steigende Amplitude
$A = 0,5$	konstante Amplitude
$A > 0,5$	fallende Amplitude

4.2.3.4. Konsequenzen für das Modell

Wir haben eine Lösung mit nicht konstanter Amplitude erhalten (fallend). Dabei beginnt der magnetische Fluß aber mit einem *endlichen* Wert (vorteilhaft). Daraus ergeben sich zwei Probleme:

1. *Es läßt sich keine Frequenz im eigentlichen Sinne definieren.*
2. *Der Betrag des Planckschen Wirkungsquantums ist nicht konstant*

Das erste Problem ist relativ leicht zu lösen, wenn wir das asymptotische Verhalten unserer Funktion (120) studieren. Auch aus (76) läßt sich auf eine Frequenz ω_0 , die vom Weltalter d.h. der HUBBLE-Konstante H abhängig ist schließen. Das zweite Problem hat umfassende Auswirkungen auf fast alle physikalischen Gesetze und Vorgänge, die im Verlauf dieser Arbeit eingehend diskutiert werden sollen. Weiterhin ist die Gravitationskonstante ebenfalls eine veränderliche Größe, was aber heute fast von niemandem mehr bestritten wird.

4.2.4. Asymptotische Entwicklung

Bei Vorliegen folgender Bedingungen: $t \gg 0$, $\text{Re}(x) \gg 0$, $\text{Re}(n) > -1/2$ gilt nach [23]:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (121)$$

und für J_0 und die Ableitung, die wir später auch benötigen (Wir setzen ab sofort das Gleichheitszeichen):

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x + \sin x) \quad (122)$$

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{\pi x}} (\cos x - \sin x) \quad (123)$$

Für ω_0 können wir schreiben

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t}} \quad (124)$$

Für φ_0 gilt dann (Näherung):

$$\varphi_0 = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{2\pi\omega_0 t}} (\cos 2\omega_0 t + \sin 2\omega_0 t) \quad (125)$$

Bis auf einen Faktor und einen anderen Phasenwinkel erhalten wir dann einen Ausdruck wie bei der harmonischen Lösung (107). Wie genauere Untersuchungen zeigen, erfüllt Gl. (123) zwar die Anforderungen einer Näherungsfunktion für den Bereich $t > 2\tau_1$ (Bild 13). Eine bessere Näherung ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$\varphi_0 = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{\pi(1 + 2\omega_0 t)}} (\cos 2\omega_0 t + \sin 2\omega_0 t) \quad (126)$$

Mit dem Effektivwert

$$\varphi_{\text{oeff}} = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{2\pi(1 + 2\omega_0 t)}} \quad (127)$$

oder noch genauer

$$\varphi_{\text{oeff}} = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{2\pi(1 + 2\omega_0 t)}} \left(1 + \frac{1 - \sqrt{2/\pi}}{\sqrt{2\pi(1 + 2\omega_0 t)}}\right) \quad (128)$$

Letzterer Ausdruck ist allerdings nur von theoretischem Wert, da er für den Effektivwert steht. Dieser ist aber erst über mindestens eine Periode definiert. Innerhalb der ersten Periode ($t < 2\tau_1$) und für die Berechnung des PLANCKSCHEN Wirkungsquantums wäre es daher günstig, mit der (mit dem Faktor $1/\sqrt{2}$ multiplizierten) exakten Hüllkurvenfunktion zu operieren. Diese ergibt sich aus dem Additionstheorem für Besselfunktionen (Besselscher "Pythagoras") und gilt exakt für Besselfunktionen (J und Y) nullter Ordnung und mit sehr guter Näherung für Besselfunktionen beliebiger Ordnung (reell) und selbstverständlich auch für größere Werte von t :

$$\hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_i \sqrt{J_0^2(2\omega_0 t) + Y_0^2(2\omega_0 t)} \quad \text{Hüllkurve} \quad (129)$$

allerdings beginnt diese im Unendlichen. $\hat{\varphi}_i$ ist dann definiert für den Zeitpunkt, an dem die Hüllkurve den Wert 1 annimmt. Der genaue Verlauf von φ_0 sowie der Näherungsfunktion (127) für die Hüllkurve ist in Bild 13 dargestellt.

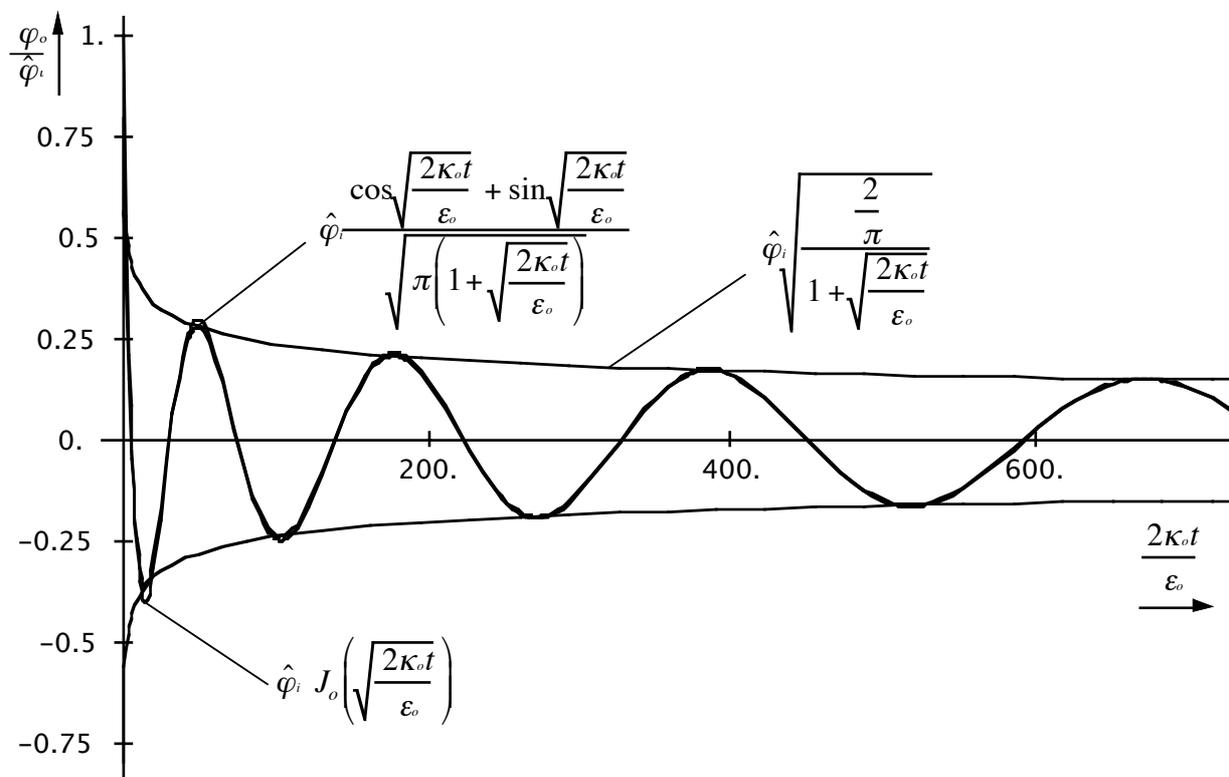


Bild 13
Verlauf von magnetischem Fluß sowie der Näherungs-
und Hüllkurvenfunktion (127) über einen längeren Zeitraum

Den genauen Verlauf von φ_0 während der ersten Periode sowie den Verlauf der exakten Hüllkurvenfunktion sowie der ersten und zweiten Näherung zeigt Bild 14. Ebenfalls dargestellt ist der Verlauf von q_0 (1. Ableitung). Die Hüllkurvenfunktionen gelten gleichermaßen für φ_0 und q_0 und sind wichtig für die Bestimmung der Effektivwerte.

Im Gegensatz zur normalen Besselfunktion, die ähnlich wie eine Cosinusfunktion beginnt, hat die Zeitfunktion des magnetischen Flusses innerhalb des ersten Teils der ersten Periode eher einen Verlauf wie bei einem RC-Glied (1. Ordnung). Mit steigender Güte $Q_0=2\omega_0 t$ geht die Funktion in eine angenähert harmonische Funktion über. Die Hüllkurvenfunktion für die Ladung q_0 stimmt während der ersten Periode nicht ganz exakt mit der tatsächlichen Funktion (1. Ableitung) überein. Die Ursache ist die Wurzel im Argument der Besselfunktionen. Im Härtefall sollte man hier die Wurzel aus der Summe der Quadrate der Besselfunktionen 1. Ordnung verwenden (129).

Eine noch bessere und auch einfachere Funktion für die Hüllkurve, die auch den unschönen „Höcker“ im negativen Teil der ersten Periode im Bild 13 vermeidet, habe ich zu einem späteren Zeitpunkt gefunden (nicht dargestellt). Sie ist gegeben durch die Funktion:

$$\hat{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{2\omega_0 t}} \quad \text{Hüllkurve} \quad (129a)$$

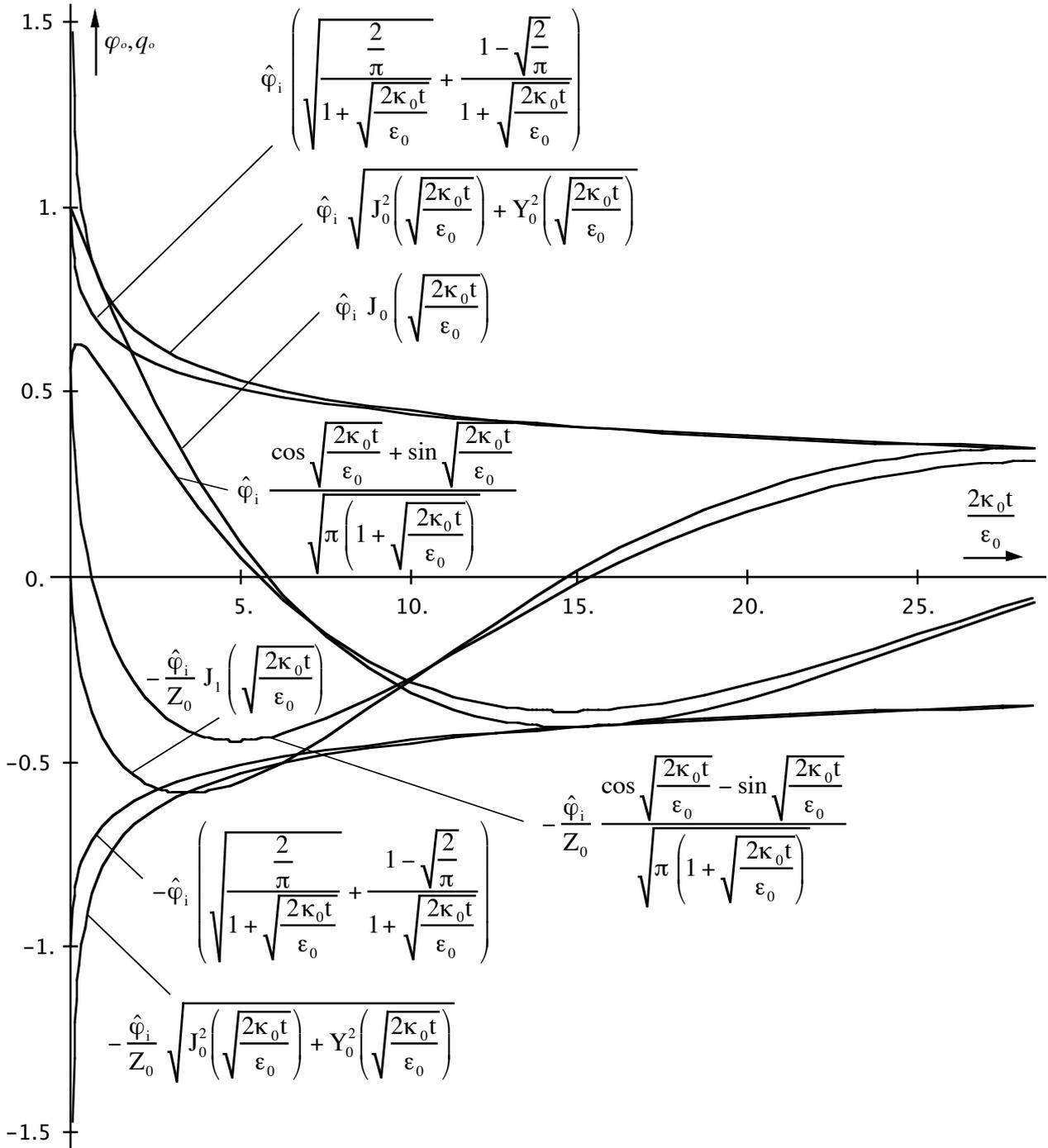


Bild 14
Verlauf von Fluß und Ladung sowie der Näherungs- und Hüllkurvenfunktion (129) in der Nähe der Singularität

4.3. Laplace-Transformierte

4.3.1. Zeitbereich

Wie sieht eigentlich das Lösungsverhalten von Gl. (115) aus? $J_0(\sqrt{x})$ ist definiert für reelle Argumente $-\infty < x < \infty$. Für positive x ergibt sich der bereits mehrfach dargestellte Verlauf. Die Mehrdeutigkeit der Wurzel wirkt sich nicht aus. Im negativen Bereich ergibt sich ebenfalls eine

reelle Lösung in Form der modifizierten Besselfunktion $I_0(\sqrt{x})$. Diese zeigt einen Verlauf ähnlich cosh und geht gegen unendlich. Im Gegensatz dazu wird $J_1(\sqrt{x})$, die Ladung $q_0 = -j I_1(\sqrt{x})$ imaginär und zeigt einen Verlauf wie $j \sinh(\sqrt{x})$.

Für $t < 0$ ergeben sich somit keine physikalisch sinnvollen Lösungen. Eine Ladung ist nicht definiert. Der Zeitpunkt $t=0$ ist also der Beginn der Entwicklung des Universums. Was davor war, läßt sich nicht sagen, wahrscheinlich »NICHTS«. In einem solchen Fall bietet sich die Anwendung der LAPLACE-Transformation an, um weitere Informationen zu erhalten.

4.3.2. Bildfunktion

LAPLACE-Transformation: Diese eignet sich auch zur Lösung der Differentialgleichung (78), vorausgesetzt, die Rücktransformation ist möglich. Wir gehen also von (78) aus:

$$\ddot{\varphi}_0 t + \dot{\varphi}_0 + \frac{1}{2} \frac{\kappa_0}{\varepsilon_0} \varphi_0 = 0 \quad \text{oder} \quad (130)$$

$$y''x + y' + a y = 0 \quad (131)$$

Nach dem Differentiationsatz [22] gilt:

$$\mathcal{L}\{y'\} = p y(p) - f_0^{(0)} \quad \text{mit} \quad f_0^{(v)} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{d^v f(t)}{dt^v} \quad (132)$$

Glücklicherweise haben wir die Differentialgleichung schon gelöst und kennen daher die Anfangswerte für $t=0$. Es gilt daher:

$$\mathcal{L}\{y'\} = p y(p) - 1 \quad (133)$$

Für die zweite Ableitung erhalten wir:

$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2 y(p) - p f_0^{(0)} - f_0^{(1)} \quad \text{mit den Anfangswerten 1 und 0} \quad (134)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = p^2 y(p) - p \quad (135)$$

Wir benötigen aber die LAPLACE-Transformierte für das Produkt aus y'' und t . Nach dem Multiplikationssatz und (133) gilt:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(p) \quad (136)$$

$$\frac{dy''(p)}{dp} = 2p y(p) + p^2 y'(p) - 2p y(p) \quad (137)$$

$$\mathcal{L}\{y'' t\} = 1 - p^2 y'(p) - 2p y(p) \quad (138)$$

Einsetzen in (131) ergibt:

$$y'(p) + \frac{a-p}{p^2} y(p) = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad (139)$$

$$y(p) = e^{-\int \frac{a-p}{p^2} dp} = C_1 p e^{\frac{a}{p}} = \frac{C}{a} p e^{\frac{a}{p}} \quad (140)$$

C_1 hat die Form einer Zeitkonstante. Bei der Ausgangsfunktion handelt es sich um eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer Zeitkonstante: $\tau_1 = 1/a = 2 \varepsilon_0/\kappa_0$. Diese tritt damit zweimal auf und wir kommen nicht in die Verlegenheit, zu untersuchen, welche Zeitkonstante an welcher Stelle einzusetzen ist. Der sich aus H (astronomisch) ergebende Wert hat eine Größenordnung von $1,035 \cdot 10^{-102}$ s. Im Bildbereich gilt dann für den magnetischen Fluß:

$$\varphi_0(p) = \hat{\varphi}_i p \tau_1 e^{\frac{1}{p\tau_1} + C} \quad (141)$$

Für Signale mit einer Dauer von $t \gg \tau_1$ handelt sich um ein ideales D-Glied (Differenzierglied). Leider ist diese etwas aus dem Rahmen fallende Bildfunktion in keinem Nachschlagewerk zu finden, so daß eine Rücktransformation in den Zeitbereich nicht möglich war. Bis jetzt ist es mir auch nicht gelungen, eine Lösung für das Integral zur Rücktransformation zu finden. Da wir aber bereits die Lösung kennen, ist dies nicht ganz so schlimm. Es wäre jedoch in der Hinsicht interessant, als sich auf diesem Weg die Art der Funktion herausfinden ließe, mit welcher das Modell zum Zeitpunkt $t=0$ angeregt wurde. Vergleichende Betrachtungen führen zu dem Schluß, daß es sich um einen DIRAC-Impuls $\sigma(t)$ mit der LAPLACE-Transformierten $\mathcal{L}\{\sigma(t)\} = 1$ gehandelt haben müßte. Dies entspricht auch am besten dem Modell des Urknalls. Die Multiplikation im Bildbereich entspricht im Zeitbereich der Faltung:

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_i \cdot \sigma(t) * J_0\left(\sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}}\right) \quad (142)$$

Am Anfang war also das »NICHTS« mit den physikalischen Eigenschaften μ_0 , ε_0 und κ_0 . Dann war plötzlich etwas da (magnetischer DIRAC-Impuls). Der DIRAC-Impuls ist ein Impuls mit unendlicher Amplitude und einer Dauer von $t \rightarrow 0$. Das Integral unterhalb dieses Impulses ist gleich 1. Dies würde für einen endlichen Anfangswert sprechen (Bessel-J). Die Antwort des Modells (Überschwingen mit Mittelwert 0) kann auch bei elektronischen Systemen zweiter Ordnung mit DIRAC-ähnlicher Anregung (Nadelimpuls) beobachtet werden, nicht jedoch bei Anregung mit Sprung- oder Rampenfunktion. Der DIRAC-Impuls ist schon seit längerem bekannt. Er ist jedoch mit technischen Mitteln derzeit, als wohl auch in Zukunft nicht zu realisieren. Bis jetzt gab es auch keine Parallelen in der Natur, nur in der Näherung des Nadelimpulses. Auf diesem Weg hätte eine weitere mathematische Funktion ihre exakte Entsprechung in der Natur gefunden. Auf jeden Fall handelt es sich um einen erzwungenen Prozeß.

Unter der Annahme, daß es tatsächlich ein DIRAC-Impuls war, erhalten wir sofort für die Übertragungsfunktion $G(p)$:

$$G(p) = p \tau_1 e^{\frac{1}{p\tau_1} + C} \quad (143)$$

Der Verlauf der Übertragungsfunktionen für den magnetischen Fluß und für die Ladung q_0 (erste Ableitung) ist in Bild 15 dargestellt, zunächst für $C=0$ gesetzt, da hierdurch nur der Maßstab der y-Achse beeinflußt wird. Beide Funktionen weisen eine Polstelle an der Stelle $p=+0$, eine Nullstelle bei $p=-0$ und ein Minimum zum Zeitpunkt τ_1 bzw. $\tau_1/2$ auf. Für längere Impulse geht die Funktion in die eines idealen D-Glieds über (Hochpaß \rightarrow Widerspruch?).

Das PN-Diagramm muß nicht extra dargestellt werden (Polstelle bei $p=+0$, Nullstelle bei $p=-0$). Die Anzahl der Pole ist gleich der Anzahl der Nullstellen (Realisierbarkeitsbedingung). Es gibt keine Pole in der linken Halbebene (Stabilitätsbedingung). Da sich der Pol im Punkt 0 befindet, ist das System verlustfrei, ist aber noch ein "passives Bauelement". Bei Polen in der linken Halbebene, könnte das System von sich aus in Schwingung geraten. Befinden sich Pole in der rechten Halbebene bei $p>0$, so treten Verluste auf, so daß die Schwingung nach einer gewissen Zeit zum Erliegen kommt – im Gegensatz zur Realität, wo die Schwingung auch heute noch nicht abgeklungen ist und dies wohl auch nicht wird. Die Nullstelle im Ursprung (-0) deutet auf eine Sperrung der tiefen Frequenzen hin. Es handelt sich physikalisch gesehen

um einen Hochpaß. Da die Nullstelle in der linken Halbebene liegt, handelt es sich weiterhin um ein Minimalphasensystem. Systeme dieser Klasse haben nach [26] die Eigenschaft, daß Dämpfung und Phase über die HILBERT-Transformation miteinander verknüpft sind.

Da keine konjugiert komplexen Pole vorhanden sind, treten auch keine Resonanzeffekte auf. Das Minimum bei τ_1 weist auf einen Phasenübergang hin.

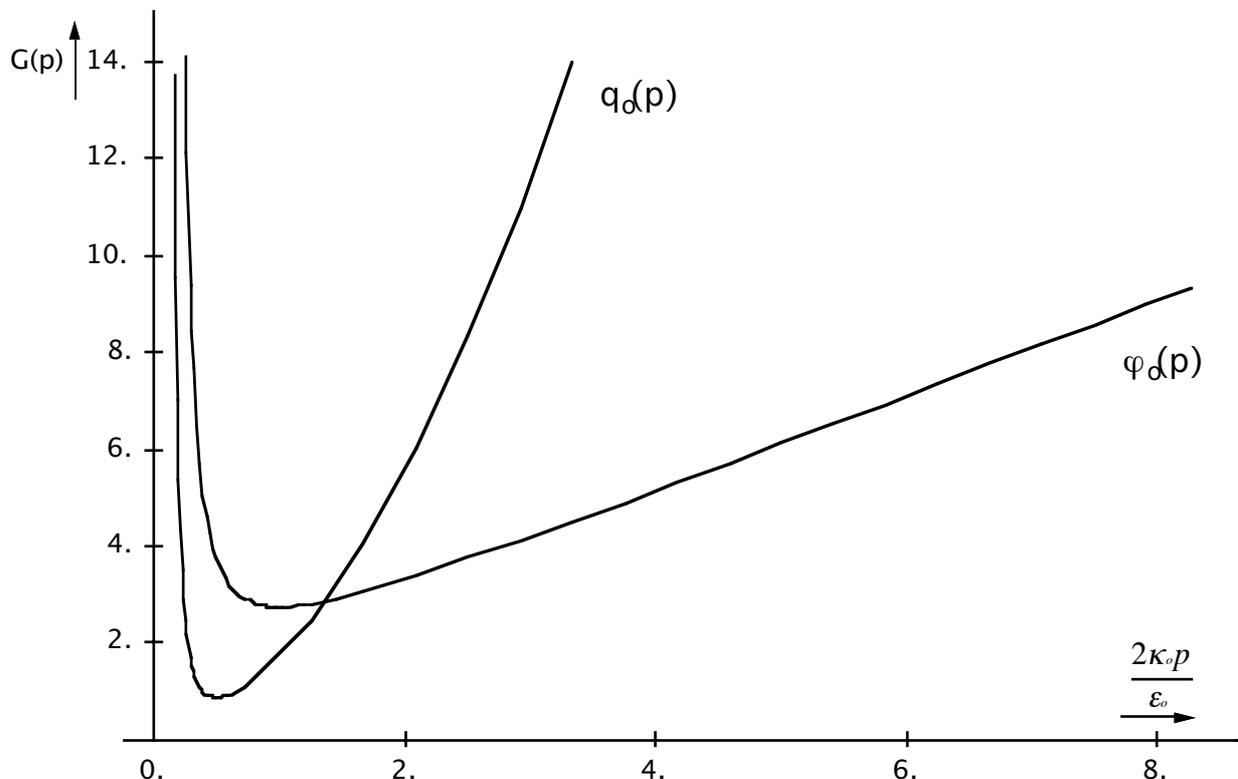


Bild 15
Übertragungsfunktionen (Zeitbereich)
für magnetischen Fluß und Ladung ($C=0$)

Aus der Bildfunktion haben wir entnommen, daß es sich um einen Hochpaß 2. Ordnung handelt. Im allgemeinen hat ein solches System eine frequenzabhängige Dämpfung. Dies steht aber im Widerspruch zu den Beobachtungen, die einen konstanten Frequenzgang über alle (technisch beobachtbaren) Frequenzen ergeben. Zur Berechnung des komplexen Frequenzganges unseres Modells gehen wir von Gleichung (143) aus, indem wir substituieren: $p = \sigma + j\omega$. Eine Substitution $p = j\omega$ ergibt kein sinnvolles Ergebnis, da das System immer noch schwingt und damit das zugehörige Fourierintegral nicht konvergiert. Mit dem Term σ wird die Konvergenz erzwungen. Der Frequenzgang des magnetischen Flusses gibt auch Auskunft über die Wellenausbreitung im Vakuum, da die einzelnen Dipole (MLE) über das Magnetfeld gekoppelt sind (Resonanzkopplung). Der Wert σ ergibt sich aus der Hälfte der inversen rechten Zeitkonstante von (77). Die Basis der elektromagnetischen Strahlung liegt damit bei $Q_0=1/2$.

$$G(\sigma + j\omega) = (\sigma + j\omega) \tau_1 e^{\frac{1}{(\sigma + j\omega)\tau_1} + C} \quad (144)$$

Mit $\sigma = 1/(2\tau_1) = \omega_1 = 1/(2t_1) = \frac{\kappa_0}{\epsilon_0}$ und $\omega=0$ ($G(j\omega)=1$) erhalten wir für $C=-1$. Dann gilt:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_1 + j\omega}{\omega_1} e^{\frac{-j\omega}{\omega_1 + j\omega}} \quad (145)$$

Mit $\Omega = \omega/\omega_1$ ergibt dies folgenden Ausdruck (komplexer Frequenzgang):

$$G(j\omega) = \left[\left(\Omega \sin \frac{\Omega}{1+\Omega^2} + \cos \frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right) - j \left(\sin \frac{\Omega}{1+\Omega^2} - \Omega \cos \frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right) \right] e^{-\frac{\Omega^2}{1+\Omega^2}} \quad (146)$$

Da die Frequenzgangsortskurve die y -Achse nicht schneidet, gibt es in diesem System keinen aperiodischen Grenzfall.

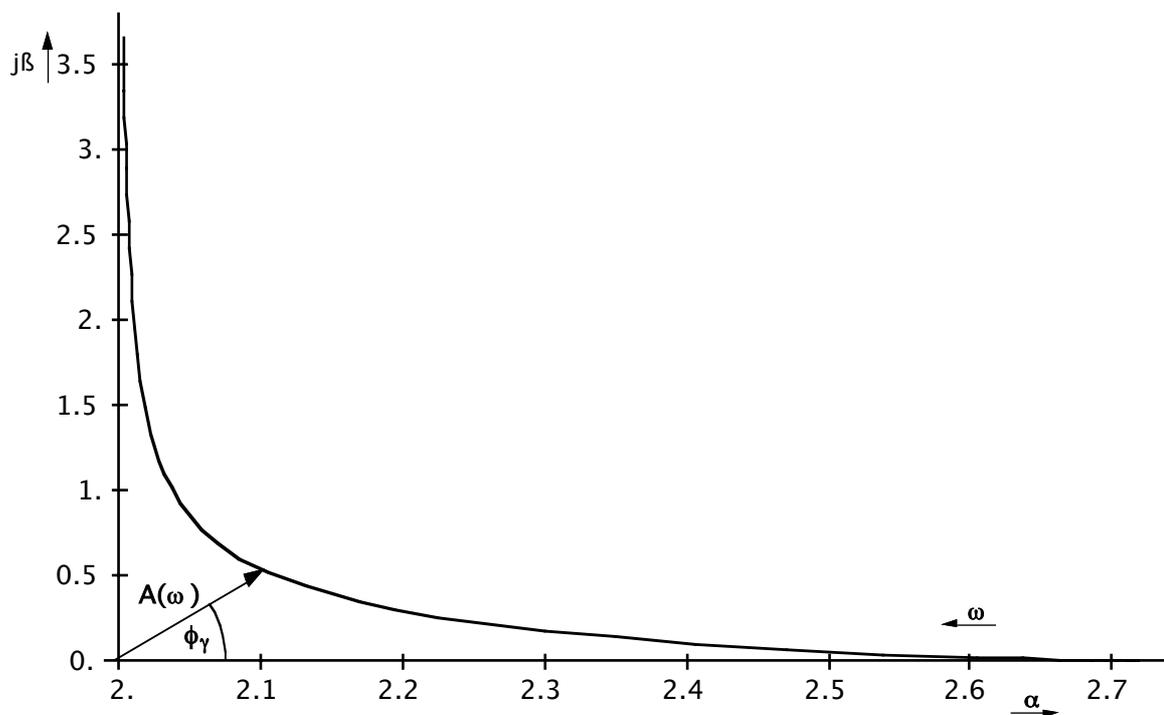


Bild 16
Frequenzgangsortskurve

Für Frequenz- und Phasengang erhalten wir weiter mit $\theta = \frac{\Omega}{1+\Omega^2}$

$$A(\omega) = \sqrt{1+\Omega^2} e^{-\frac{\Omega^2}{1+\Omega^2}} \quad (147)$$

$$B(\omega) = \arctan \frac{\Omega \cos \theta - \sin \theta}{\Omega \sin \theta + \cos \theta} = \phi_\gamma \quad (148)$$

Der Ausdruck für den Phasengang läßt sich noch vereinfachen. Beide Funktionen (BODE-Diagramm) sind in Bild 17 dargestellt. Der Dämpfungsverlauf (-6 dB/Dekade) zeigt an, daß es sich um ein System 2. Ordnung handelt.

Interessant ist auch der Cosinus des Phasenganges $\cos B(\omega) = \cos \phi_\gamma$. Dieser Wert wird z.B. in der Elektrotechnik zur Berechnung des Wirkungsgrades (Leistung) benutzt. Er stellt das Maß des Kopplungsfaktors der einzelnen MLE untereinander dar. Die Berechnung dieses Wertes unter Substitution von $\cos(\arctan x) = (1+x^2)^{-1/2}$ führt uns auch zu einem vereinfachten Ausdruck für (148):

$$\cos \phi_\gamma = \cos \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right) \quad \text{und} \quad \phi_\gamma = \arctan \Omega - \frac{\Omega}{1+\Omega^2} \quad (149)$$

Gleichung (146) vereinfacht sich dann zu

$$G(j\omega) = (\cos\phi_\gamma + j \sin\phi_\gamma) \sqrt{1 + \Omega^2} e^{-\frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2}} = e^{-\frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \Omega^2) + j\phi_\gamma} \quad (150)$$

Der Verlauf von $\cos\phi_\gamma$ ist in Bild 18 dargestellt. Eine Wertung erfolgt in 4.3.3. Weiterhin ist auch der Verlauf des zweiten Terms in ϕ_γ zu sehen. Man sieht, daß er erst bei Frequenzen in der Nähe von ω_1 zur Geltung kommt.

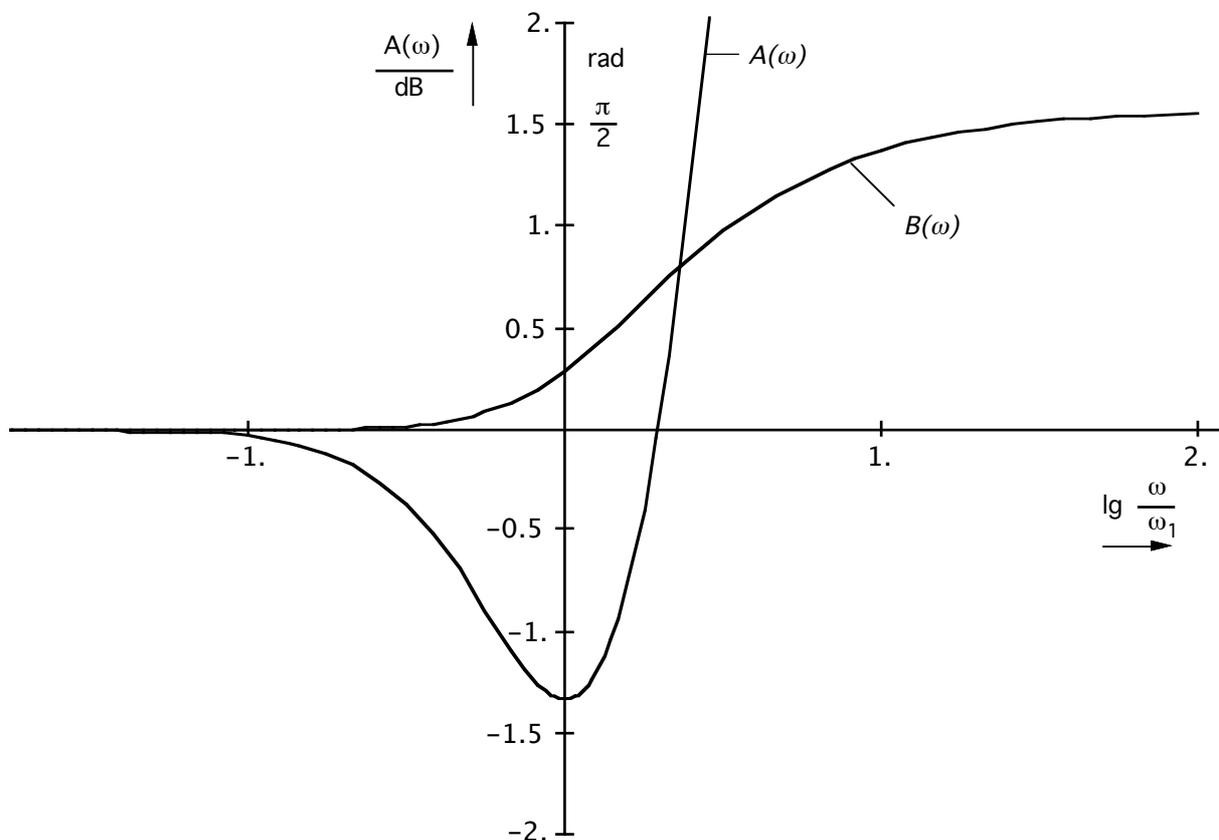


Bild 17
BODE-Diagramm: Frequenzgang $A(\omega)$
und Phasengang $B(\omega)$ des Systems

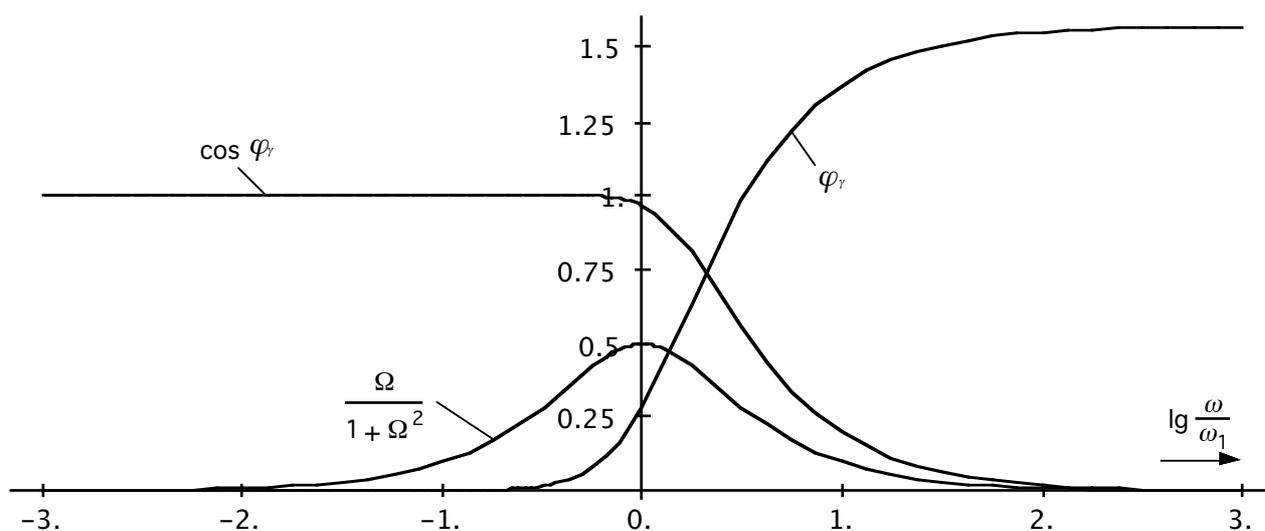


Bild 18
Verlauf von Phasenwinkel,
 $\cos\phi$ und des Ausdrucks θ

Als letztes soll die Phasen- und Gruppenlaufzeit in Abhängigkeit von der Frequenz untersucht werden. Beide Funktionen sind in Bild 19 dargestellt. Die Phasenlaufzeit ist definiert als:

$$T_{\text{Ph}} = \frac{B(\omega)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right) \quad (151)$$

Für die Gruppenlaufzeit erhalten wir:

$$T_{\text{Gr}} = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = 2 \frac{\theta^2}{\omega_1} = \frac{2}{\omega_1} \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad (152)$$

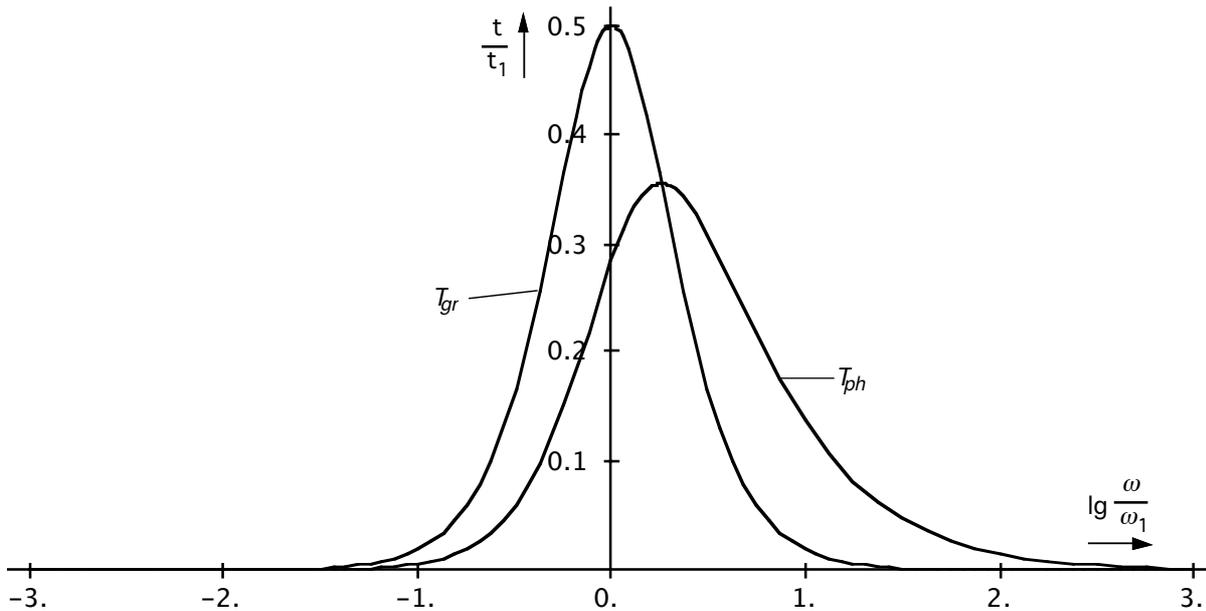


Bild 19
Gruppen- und Phasenlaufzeit

4.3.3. Eigenschaften des Modells

Die folgenden Aussagen gelten nur für ein einzelnes MLE. Genauere Aussagen für die Wellenausbreitung an sich werden später herausgearbeitet. Man sieht hier ganz deutlich, daß Frequenz- und Phasengang bis etwa zu einem Drittel der Frequenz $\omega_1 \approx 10^{104} \text{s}^{-1}$ exakt linear (0dB) verläuft und zwar phasentreu. Erst bei etwa einem Zehntel von ω_1 kommt es zu einer merklichen Dämpfung und Phasenverschiebung. Da ω_1 so hoch ist (die höchste gemessene Frequenz (kosmische Höhenstrahlung) liegt bei ca. 10^{42}s^{-1}), ist dieser Effekt allerdings bis jetzt nicht beobachtet worden.

Oberhalb ω_1 steigt die Amplitude stark an und es zeigt sich tatsächlich ein Hochpaßverhalten – die Wellenausbreitung bei $\omega < \omega_0$ geschieht also eigentlich im Dämpfungsbereich. Da der Wert $\cos \phi_\gamma$ jedoch ab $\omega_1/2$ stark abfällt und damit der Kopplungsfaktor der einzelnen MLE untereinander, ist eine Wellenausbreitung oberhalb ω_1 nicht möglich, überkritische Photonen können daher nicht viel länger als τ_1 existieren.

Der Frequenzgang über zwei MLE mit dem Kopplungsfaktor $k = \cos \phi_\gamma$ ist in Bild 20 dargestellt. Es handelt sich um einen gruppenlaufzeitkorrigierten Tiefpaß 2. Ordnung (2 MLE gleich 2 Kreise, daher das Quadrat). Der Ausdruck $1 + \Omega^2$ kommt auch in der Filtertheorie vor und entspricht dem Formfaktor bei einem normierten gleichabgestimmten zweikreisigen Filter mit identischem Dämpfungsverlauf [26].

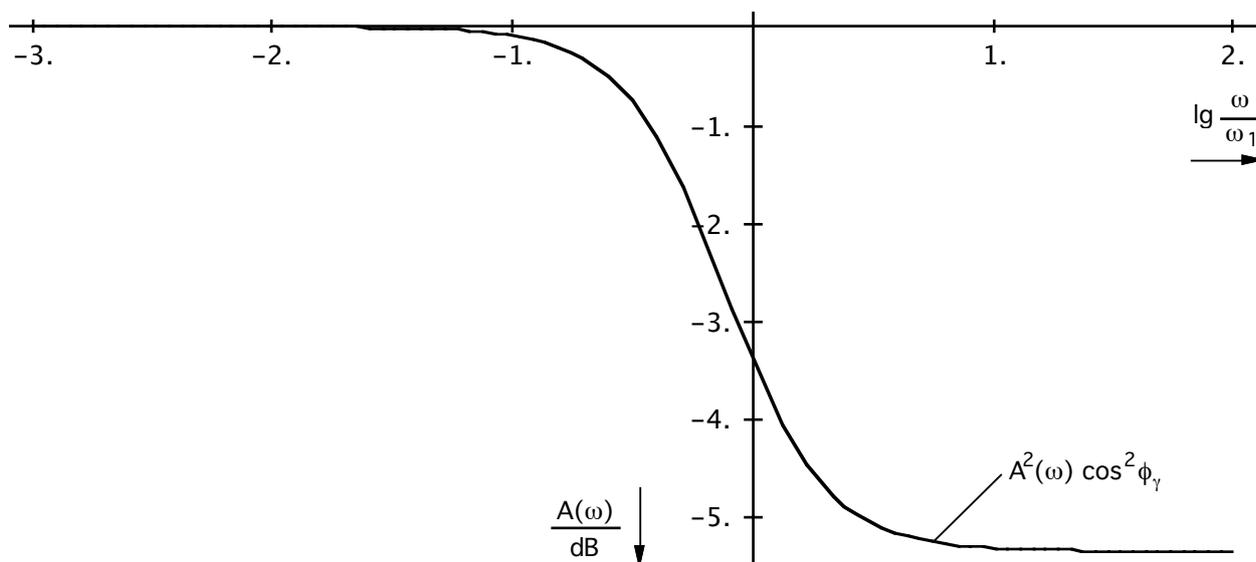


Bild 20
Frequenzgang für die Übertragung
zum benachbarten MLE

Unter Bezug auf das Abtasttheorem erwartet man, daß nur Frequenzen bis maximal $\omega_0/2$ übertragen werden. Die bisherigen Aussagen treffen genau genommen nur für das allgemeine Wellenfeld gemäß [1] zu. Die Ausbreitung von Radiowellen oder Photonen, wie wir sie verstehen geschieht als Ausbreitung von Störungen dieses Wellenfeldes. Da die MLE nichtlineare Systeme darstellen, treten mehrere Nebenfrequenzen auf. Wichtig sind nur die Summen- und Differenzfrequenz $\omega_0 \pm \omega$. Bei den anderen Frequenzen wird kein Leistungsumsatz erzielt (Eigenschaft eines nichtlinearen Gliedes). Für die Grenzfrequenz von überlagerten Signalen ist gar nur die Summenfrequenz relevant. Da die überlagerten Signale stärker rotverschoben werden, als die Frequenz des metrischen Wellenfeldes, steigt die „relative Grenzfrequenz“, das ist der Abstand von der überlagerten Frequenz ω zur Grenzfrequenz $\omega_0/2$ mit steigendem Weltalter kontinuierlich an.

Der Verlauf der Gruppenlaufzeit zeigt, daß die „Abarbeitung“ von Änderungen der magnetischen Induktion bei niedrigen Frequenzen faktisch „instantan“ erfolgt. Die Weiterleitung an das benachbarte MLE erfolgt aufgrund der Resonanzkopplung mit einer Phasenverschiebung von $\pi/2 = \omega_0 t_v$. Für die Verzögerungszeit t_v erhält man dann folgenden Ausdruck: $t_v = \pi/(2\omega_0) = \pi r_0/(2c)$. Für die Übertragungsgeschwindigkeit \underline{c} erhält man aus Bild 2 (der Radius der durch den Mittelpunkt der Bahnkurven beider MLE verlaufenden Feldlinie des Vektors \mathbf{H}_0 ist gleich der halben Gitterkonstante, also gleich $\pi r_0/2$) einen Betrag von

$$\underline{c} = \frac{\pi r_0}{2 t_v} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c \quad (153)$$

Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum ergibt sich damit direkt aus der Phasenverschiebung $\pi/2$, die bei magnetischer Resonanzkopplung zweier Schwingkreise auftritt. Dieser Effekt kann auch makroskopisch, bei diskreten Bauelementen beobachtet werden und ist in [26] ausführlich dargestellt. Bei Frequenzen in der Nähe von ω_1 addiert sich zu t_v die Phasenlaufzeit T_{ph} multipliziert mit 2π . Eine genaue Formel für \underline{c} in diesen Fall (kritische Photonen) kann allerdings an dieser Stelle nicht angegeben werden, da wir hier nur das einzelne MLE betrachten. Im Abschnitt 4.3.4.4.5. werden wir jedoch einen genauen Ausdruck für die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit herausarbeiten, der auch in der Nähe von $t=0$ gültig ist.

Weiter kann man sagen, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} bei Annäherung an ω_1 kleiner wird. Dieser Wert entspricht aber genau dem Wert, bei dem die Bahnkurve (Bild 8) nicht mehr definiert ist. Es kommt zum Phasenübergang, die Rotation endet. Es gibt nur noch die geradlinige Expansion.

Die Phasenverschiebung zum benachbarten MLE summiert sich ebenfalls und erreicht dabei einen Wert von π , es tritt Auslöschung auf — eine Wellenausbreitung ist nicht mehr möglich (Kopplungsfaktor $k = \cos(\pi/2) = 0$). Weiterhin wird \underline{c} und auch der Wellenwiderstand \underline{Z} komplex, wobei Real- und Imaginärteil gleichen Betrag erreichen. Dies entspricht dem Fall eines elektrisch leitenden Mediums.

Dies alles ergibt sich durch den mit sinkendem r_0 immer kleiner werdenden Wert von R_0 und der Güte Q . Das heißt, der Widerstand erreicht die Größenordnung der Beträge der komplexen Widerstände X_C und X_L und schließt diese mehr und mehr kurz. Oberhalb ω_0 bestimmt dann R_0 das Verhalten des Systems allein (elektrischer Leiter). Dies gilt jedoch nicht für das Wellenfeld an sich. Hier tritt umgekehrtes Verhalten auf. In der Nähe von $t=0$ bzw. $\omega=\omega_0$ verhält sich der Feldwellenwiderstand wie ein Nichtleiter. Erst mit größerem Abstand nähert sich das Verhalten dem eines idealen Leiters an, wie wir später noch sehen werden. Ausschlaggebend dafür ist allein der Kopplungsfaktor der MLE untereinander.

Nun widerspricht eine von c verschiedene Wellenausbreitungsgeschwindigkeit so lange nicht unserer ursprünglichen Annahme $c=\text{const}$ und auch nicht der SRT, solange die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit kleiner oder gleich c ist. Dies ist auch bei Frequenzen in der Nähe von ω_1 bzw. in der Zeit kurz nach dem Urknall immer gewährleistet. Die bisherigen Ergebnisse stehen also nicht im Widerspruch zu bisherigen Erkenntnissen.

4.3.4. Ausbreitungsfunktion

Zuerst wollen wir die klassische Theorie der MAXWELLSchen Gleichungen noch einmal Revue passieren lassen, um anhand von Analogien eine alternative Lösung herauszuarbeiten, die Anforderungen unseres Modells erfüllt. Das Gleichungssystem (1) ist unterbestimmt, so daß es mehr als eine Lösung gibt, die diese Gleichungen erfüllt.

4.3.4.1. Klassische Lösung für verlustfreies Medium

Gemäß den bisherigen Erkenntnissen handelt es sich beim kosmischen Vakuum um ein verlustfreies Medium. Es gilt $\rho = 0$ (Raumladungsdichte) sowie $\kappa = 0$. Zur Erinnerung noch einmal die MAXWELLSchen Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{B} = 0 & \text{div } \mathbf{D} = \rho \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} & \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \dot{\mathbf{D}} \end{array} \quad (154)$$

Weiterhin gilt:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \mathbf{i} = \kappa \mathbf{E} \quad (155)$$

In (154) eingesetzt erhalten wir (Partielle Ableitungen nach x , y und z):

$$\begin{array}{ll} \text{div } \mathbf{H} = 0 & \text{div } \mathbf{E} = 0 \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \dot{\mathbf{H}} & \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \dot{\mathbf{E}} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} & \text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad (156)$$

Wiederholte Anwendung der Rotationsoperation auf (156) und Einsetzen des Ausdrucks für $\text{rot } \mathbf{H}$ ergibt:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu \text{rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial(\text{rot } \mathbf{H})}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (157)$$

Weiterhin gilt formal mathematisch und wegen $\text{div} \mathbf{E} = 0$, (Δ ist der LAPLACE-Operator):

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} \quad (158)$$

Analog gilt für \mathbf{H} :

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \varepsilon \text{ rot } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial(\text{rot} \mathbf{E})}{\partial t} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (159)$$

Sowie wegen $\text{div } \mathbf{H} = 0$:

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \text{grad div } \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H} \quad (160)$$

Für $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ (Vakuum) gilt dann:

$$\Delta \mathbf{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \Delta \mathbf{H} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} \quad (161)$$

Der Laplace-Operator Δ ist aber nichts anderes als der Vektor der zweiten Richtungsableitungen: $\Delta = (\partial^2 / \partial x^2, \partial^2 / \partial y^2, \partial^2 / \partial z^2)$. Bei Ausbreitung nur in x-Richtung werden die partiellen Ableitungen nach y und z zu Null und man kann auch schreiben:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{dx^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \mathbf{E}}{dt^2} \quad \frac{d^2 \mathbf{H}}{dx^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d^2 \mathbf{H}}{dt^2} \quad (162)$$

Nach Division durch $d^2 \mathbf{E}$ bzw. $d^2 \mathbf{H}$, Multiplikation mit dx^2 , Division durch $\mu_0 \varepsilon_0$ und anschließendem Ziehen der Quadratwurzel erhalten wir die bekannten Ausdrücke für die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} (Phasen- und Gruppengeschwindigkeit) sowie den Feldwellenwiderstand $\underline{Z}_F = \mu_0 \underline{c}$:

$$\underline{c} = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = Z_0 \quad (163)$$

Die Unterstreichungen stehen für komplexe Werte. Da das Produkt $\mu_r \varepsilon_r$ immer größer als 1 ist, ist die maximale Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c . Es liegt Allpaßverhalten vor, es gibt keine untere Grenzfrequenz und die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist unabhängig von der Frequenz. Für das Fortpflanzungsmaß $\underline{\gamma}$ gilt:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = \pm j\omega / \underline{c} = \pm j\omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (164)$$

Hierbei ist α das Dämpfungsmaß ($\alpha = 0$) und β das Phasenmaß. Bis auf die geometrische Dämpfung ($\mathbf{S} \sim r^{-2}$) tritt in diesem Fall also keine zusätzliche Dämpfung auf. Für die Ausbreitungsfunktion (in x-Richtung) erhalten wir dann (analog für \mathbf{H}):

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{j\omega \left(t - \frac{x}{\underline{c}} \right)} = \mathbf{E} e^{j\omega t - \underline{\gamma} x} \quad (165)$$

Diese Lösung genügt für die meisten in der Natur auftretenden Fälle, versagt aber, wenn das Medium nicht verlustfrei ist. Auch läßt sich so die kosmologische Rotverschiebung nicht erklären.

4.3.4.2. Klassische Lösung für verlustbehaftetes Medium

Bei einem verlustbehafteten Medium (z.B. Wasser) gilt $\rho = 0$ sowie $\kappa > 0$. $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ werden als komplexe Zeitfunktionen aufgefaßt (unterstrichen). Gleichung (156) lautet dann:

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (166)$$

Zur Lösung der Gleichungen arbeitet MAXWELL mit folgenden Ansatz:

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{j\omega t} \quad \underline{\mathbf{H}} = \mathbf{H} e^{j\omega t} \quad (167)$$

Hierbei entspricht der Realteil einer Orientierung des Vektors in y , der Imaginärteil einer Orientierung in z -Richtung, wobei x die Ausbreitungsrichtung ist. Dieser Ansatz entspricht bis auf den Faktor 2 dem ersten Term von Gleichung (108) $e^{j\omega t}$ d.h. der harmonischen Lösung mit konstanter Amplitude (statisches Modell ohne Expansion). Allerdings behandelt Gleichung (108) nicht die magnetische (oder auch elektrische) Feldstärke, sondern Ladung bzw. Fluß. Zur Umrechnung benötigt man eine Kopplungslänge r_k , die vom verwendeten Modell abhängig ist. Bei den beiden MAXWELLSchen Lösungen ist der Wert vollkommen frei wählbar, sollte aber wesentlich kleiner als die Wellenlänge sein. Am besten verwendet man hier jedoch die PLANCKSche Elementarlänge r_0 . Die magnetische Feldstärke ergibt sich dann zu $\mathbf{H} = \varphi \mathbf{e}_r / (\mu r_k^2)$.

Nun ist es nur zu verständlich, daß MAXWELL zuerst versucht, eine harmonische Lösung zu finden, entspricht dies doch den langjährigen Erfahrungen (harmonische Wellenfunktionen) und auch dem gängigen Herangehen bei der Lösung von Gleichungssystemen. Außerdem erhielt er auch eine Lösung, die zum größten Teil mit den Beobachtungen und Experimenten übereinstimmt und auch technisch anwendbare Ergebnisse liefert. Jedoch läßt sich damit die kosmologische Rotverschiebung nicht erklären. Es gilt weiter:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = j\omega \mathbf{E} e^{j\omega t} = j\omega \underline{\mathbf{E}} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = j\omega \mathbf{H} e^{j\omega t} = j\omega \underline{\mathbf{H}} \quad (168)$$

Für die zweiten Ableitungen erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{E} e^{j\omega t} = -\omega^2 \underline{\mathbf{E}} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathbf{H} e^{j\omega t} = -\omega^2 \underline{\mathbf{H}} \quad (169)$$

Weiter gilt:

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = -\mu \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -j\omega\mu \underline{\mathbf{H}} \quad \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{E}} = (\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{E}} \quad (170)$$

Wir wenden wieder die Rotationsoperation auf beide Seiten an:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = \operatorname{rot} (-j\omega\mu \underline{\mathbf{H}}) = -j\omega\mu \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = -j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{E}} = -\Delta \underline{\mathbf{E}} \quad (171)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot}((\kappa + j\omega\varepsilon)\underline{\mathbf{E}}) = (\kappa + j\omega\varepsilon) \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = -j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{H}} = -\Delta \underline{\mathbf{H}} \quad (172)$$

weiterhin gilt:

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{E}} = -\omega^2 \left(\mu \left(\frac{\omega\varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) \underline{\mathbf{E}} = \left(\mu \left(\frac{\omega\varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) (-\omega^2 \underline{\mathbf{E}}) \quad (173)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} = j\omega\mu(\kappa + j\omega\varepsilon) \underline{\mathbf{H}} = -\omega^2 \left(\mu \left(\frac{\omega\varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) \underline{\mathbf{H}} = \left(\mu \left(\frac{\omega\varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) (-\omega^2 \underline{\mathbf{H}}) \quad (174)$$

Bei Ausbreitung nur in x-Richtung werden die partiellen Ableitungen nach y und z wieder Null und es gilt $\Delta = d^2/dx^2$. Wegen (169) kann man auch schreiben:

$$\frac{d^2 \underline{\mathbf{E}}}{dx^2} = \left(\mu \left(\frac{\omega \varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) \frac{d^2 \underline{\mathbf{E}}}{dt^2} \quad \frac{d^2 \underline{\mathbf{H}}}{dx^2} = \left(\mu \left(\frac{\omega \varepsilon - j\kappa}{\omega} \right) \right) \frac{d^2 \underline{\mathbf{H}}}{dt^2} \quad (175)$$

Für $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ erhalten wir nach Division durch $d^2 \underline{\mathbf{E}}$ bzw. $d^2 \underline{\mathbf{H}}$, Multiplikation mit dx^2 , Division durch den doppelten Klammerausdruck, Ausklammern von $-j$ und Ziehen der Wurzel die bekannten Ausdrücke für die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\underline{c} = dx/dt$ und den Feldwellenwiderstand \underline{Z}_F :

$$\underline{c} = \sqrt{\frac{j\omega}{\mu_0(\kappa + j\omega\varepsilon_0)}} \quad \underline{Z}_F = \sqrt{\frac{j\omega\mu_0}{\kappa + j\omega\varepsilon_0}} \quad (176)$$

Oder aufgelöst nach Real- und Imaginärteil:

$$\underline{c} = \frac{c}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} + 1} + j \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} - 1} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}} \quad (177)$$

$$\underline{c} = \frac{c}{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}} \left(\cos \frac{1}{2} \arctan \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} + j \sin \frac{1}{2} \arctan \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad \text{bzw.} \quad (178)$$

$$\underline{c} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}} \left(\cosh \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} + j \sinh \frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad (179)$$

Der Wurzelausdruck in (177) ist auch gleichzeitig der absolute Betrag. Für das Dämpfungsmaß α und das Phasenmaß β erhält man schließlich:

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} - 1 \right)} = \frac{\omega}{c} \sinh \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad (180)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} + 1 \right)} = \frac{\omega}{c} \cosh \left(\frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{\kappa}{\omega\varepsilon_0} \right) \quad (181)$$

Die Ausbreitungsfunktion ist dieselbe wie (164) jedoch mit den anderen Werten für α und β (180, 181). Für $\kappa = 0$ geht diese Lösung in den Fall 4.3.4.1. über. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist abhängig von κ und ω und beträgt maximal c . Es gibt eine untere Grenzfrequenz. Da $\alpha \neq 0$ tritt zur geometrischen eine zusätzliche Dämpfung der elektromagnetischen Feldstärke (POINTING-Vektor) auf. Bei hohen Werten von κ kommt es zu nichtlinearen Verzerrungen, da Gruppen- und Phasengeschwindigkeit voneinander abweichen. Diese Lösung beschreibt die Wellenausbreitung in einem Medium mit beliebigen Eigenschaften mit der Raumladungsdichte 0. Sie erklärt nicht die kosmologische Rotverschiebung.

4.3.4.3. Alternative Lösung für verlustbehaftetes Medium mit Expansion

4.3.4.3.1. Lösung

Wir machen den gleichen Ansatz wie beim vorigen Fall: $\rho = 0$ sowie $\kappa_0 > 0$ $\underline{\mathbf{E}}$ und $\underline{\mathbf{H}}$ werden wiederum als komplexe Zeitfunktionen aufgefaßt (unterstrichen). Da es sich in der Zeit kurz nach dem Urknall um einen reinen Strahlungskosmos handelt und da wir hier das MLE, also den leeren Raum betrachten, interessiert uns im folgenden nur die Lösung für das Vakuum. Gleichung (156) lautet dann:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad \text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (182)$$

Im Gegensatz zu MAXWELL, der den ersten Term von Gleichung (108) $e^{i\omega t}$ als Ansatz benutzt, wählen wir jetzt den ersten Term von Gleichung (119), den wir als eine unabhängige Lösung der Differentialgleichung (78) erhalten haben. Die Kopplungslänge r_k ist hier nicht frei wählbar. Wegen des aus dem Unendlichen kommenden Imaginärteils der Hankelfunktion ist der Startwert von φ am Punkt $2\omega_0 t = Q_0 = 1$ definiert. Die Kopplungslänge an diesem Punkt ist r_1 .

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}} H_0^{(1)}(2\omega_0 t) \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} H_0^{(1)}(2\omega_0 t) \quad (183)$$

Hierbei entspricht wieder der Realteil einer Orientierung des Vektors in y , der Imaginärteil einer Orientierung in z -Richtung, wobei x die Ausbreitungsrichtung ist. Wie bereits festgestellt, besteht eine Analogie zwischen der Exponentialfunktion $e^{j2\omega t}$ und der Hankelfunktion. Beides sind transzendente komplexe Funktionen und periodisch bzw. fast periodisch. Im folgenden wollen wir herausfinden, ob dieser Ansatz ebenfalls zu einer Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen führt. Zu beachten ist jedoch, daß in diesem Fall ω_0 zeitabhängig ist. Wir arbeiten daher zunächst mit den korrekten Zeitfunktionen:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}} H_0^{(1)} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \quad \underline{\mathbf{H}} = \underline{\mathbf{H}} H_0^{(1)} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \quad (184)$$

Gehen wir nun vor wie in 4.3.4.2. (analog für $\underline{\mathbf{H}}$):

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\frac{2\kappa_0}{2\varepsilon_0} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\kappa_0 t}} \underline{\mathbf{E}} H_1^{(1)} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} = -\sqrt{\frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t}} \underline{\mathbf{E}} H_1^{(1)} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \quad (185)$$

Das Minuszeichen kommt von der Ableitung der Hankelfunktion. Weiter gilt nach den Rechenregeln für Zylinderfunktionen [22]:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\omega_0 \underline{\mathbf{E}} H_1^{(1)}(2\omega_0 t) = -\omega_0^2 t \underline{\mathbf{E}} \left(H_0^{(1)}(2\omega_0 t) + H_2^{(1)}(2\omega_0 t) \right) \quad (186)$$

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\omega_0 \underline{\mathbf{H}} H_1^{(1)}(2\omega_0 t) = -\omega_0^2 t \underline{\mathbf{H}} \left(H_0^{(1)}(2\omega_0 t) + H_2^{(1)}(2\omega_0 t) \right) \quad (187)$$

Als nächstes klammern wir den Ausdruck für die Hankelfunktion 0. Ordnung aus und können wegen (183) für die erste Ableitung als Ausdruck der Originalfunktion schreiben:

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t} = -\omega_0^2 t \left(1 + \frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{E}} \quad \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\omega_0^2 t \left(1 + \frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{H}} \quad (188)$$

Wir benötigen auch noch die zweiten Ableitungen. Wir bestimmen diese am besten, indem wir den rechten Ausdruck von (185) noch einmal differenzieren (analog für $\underline{\mathbf{H}}$):

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{\frac{\kappa_0}{2\varepsilon_0 t}} \cdot \mathbf{H}_1^{(1)} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \right) \underline{\mathbf{E}} = -(\dot{u}v + u\dot{v}) \underline{\mathbf{E}} \quad (189)$$

Für u und v erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$u = \omega_0 \quad \dot{u} = -\frac{\omega_0}{2t} \quad (190)$$

$$v = \mathbf{H}_1^{(1)}(2\omega_0 t) = \omega_0 t \left(\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t) + \mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t) \right) \quad (191)$$

$$\dot{v} = \omega_0 \mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t) - \frac{1}{2t} \mathbf{H}_1^{(1)}(2\omega_0 t) = -\frac{\omega_0}{2} \left(\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t) - \mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t) \right) \quad (192)$$

Einsetzen in den zweiten Ausdruck von (189) ergibt:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \omega_0^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t) \underline{\mathbf{E}} = \omega_0^2 \underline{\mathbf{E}} \quad (193)$$

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = \omega_0^2 \mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t) \underline{\mathbf{H}} = \omega_0^2 \underline{\mathbf{H}} \quad (194)$$

Nun setzen wir (188) in (182) ein und erhalten:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{E}} = \left(\kappa_0 - \varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(1 + \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (195)$$

Ausdruck (195) läßt sich noch vereinfachen:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(\frac{\kappa_0}{\varepsilon_0 \omega_0^2 t} - \left(1 + \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (196)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(2 - \left(1 + \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (197)$$

$$\text{rot } \underline{\mathbf{H}} = \varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(1 - \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{E}} \quad (198)$$

Für $\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t}$ erhalten wir sofort durch Einsetzen:

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = \mu_0 \omega_0^2 t \left(1 + \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{H}} \quad (199)$$

Wir wenden wieder die Rotationsoperation auf beide Seiten an:

$$\text{rot rot } \underline{\mathbf{H}} = \text{rot} \left(\varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(1 - \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{E}} \right) = \varepsilon_0 \omega_0^2 t \left(1 - \frac{\mathbf{H}_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{\mathbf{H}_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \text{rot } \underline{\mathbf{E}} \quad (200)$$

$$\text{rot rot } \underline{\mathbf{H}} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega_0^4 t^2 \left(1 - \frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \left(1 + \frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right) \underline{\mathbf{H}} = -\Delta \underline{\mathbf{H}} \quad (201)$$

$$\text{rot rot } \underline{\mathbf{H}} = \frac{\omega_0^2}{c^2} \omega_0^2 t^2 \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) \underline{\mathbf{H}} = -\Delta \underline{\mathbf{H}} \quad (202)$$

Das Ergebnis für $\underline{\mathbf{E}}$ ist analog. Wir gehen weiter wie im Abschnitt 4.3.5.2. vor:

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) (\omega_0^2 \underline{\mathbf{E}}) = -\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (203)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} = -\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) (\omega_0^2 \underline{\mathbf{H}}) = -\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} \quad (204)$$

Bei Ausbreitung nur in x-Richtung werden wieder die partiellen Ableitungen nach y und z Null und es gilt $\Delta = d^2/dx^2$ (analog für $\underline{\mathbf{H}}$):

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial x^2} = -\frac{\omega_0^2 t^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (205)$$

Nach Umstellen erhalten wir schließlich für Wellenausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} und Feldwellenwiderstand \underline{Z}_F :

$$\underline{c} = \frac{c}{j\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \right)^2}} \quad \text{mit} \quad \Theta = \frac{H_2^{(1)}(2\omega_0 t)}{H_0^{(1)}(2\omega_0 t)} \quad (206)$$

$$\underline{c} = \frac{c}{j\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{1 - \Theta^2}} \quad \underline{Z}_F = \frac{Z_0}{j\omega_0 t} \frac{1}{\sqrt{1 - \Theta^2}} \quad (207)$$

Man sieht, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit für große t gegen Null geht. Das gleiche gilt auch für den Feldwellenwiderstand. Wir haben es mit einem quasi-stationären Wellenfeld zu tun (stehende Welle), das sehr gut die Anforderungen erfüllt, die an eine Metrik gestellt werden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist wieder komplex. Eine Aufspaltung in Real- und Imaginärteil gestaltet sich recht schwierig, ist aber mathematisch möglich. Die Lösung für \underline{c} lautet:

$$\underline{c} = -\frac{\sqrt{2}}{\rho_0} \frac{c}{2\omega_0 t} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}} - j \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}}} \right) \quad \text{Mehrdeutig!} \quad \text{mit} \quad (208)$$

$$A = \frac{J_0(2\omega_0 t) J_2(2\omega_0 t) + Y_0(2\omega_0 t) Y_2(2\omega_0 t)}{J_0^2(2\omega_0 t) + Y_0^2(2\omega_0 t)} \quad \rho_0 = \sqrt[4]{(1 - A^2 + B^2)^2 + (2AB)^2}$$

$$B = \frac{J_2(2\omega_0 t) Y_0(2\omega_0 t) - J_0(2\omega_0 t) Y_2(2\omega_0 t)}{J_0^2(2\omega_0 t) + Y_0^2(2\omega_0 t)} \quad \theta = \frac{2AB}{1 - A^2 + B^2} \quad (209)$$

Es ergibt sich ein alles in allem recht komplizierter Ausdruck, der jedoch noch etwas vereinfacht werden kann (210). A kommt von $+\infty$ und konvergiert gegen -1 . Der Verlauf ist annähernd $1/A^2-1$, was jedoch nicht gut als Näherung verwendet werden kann. B hat einen Verlauf wie $1/B^2$ und konvergiert gegen Null. Das gleiche gilt dann auch für θ . Der Klammerausdruck konvergiert damit gegen 1. $1/\rho_0$ ist die Betragsfunktion, diese konvergiert gegen $1/\sqrt{2}$.

$$\underline{c} = -\frac{2}{\rho_0} \frac{c}{2\omega_0 t} \left(\sin \frac{1}{2} \arctan \theta + j \cos \frac{1}{2} \arctan \theta \right) = \frac{2}{\rho_0} \frac{c}{2\omega_0 t} e^{-j\frac{1}{2}(\arctan \theta + \pi)} \quad (210)$$

Leider läßt sich (210) nicht in einen Ausdruck analog (179) mit Areafunktionen umwandeln, so daß die Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion zu einem teilweise falschen Ergebnis führt. Man rechnet daher besser mit folgender Substitution:

$$\arctan \theta = \arg \left((1 - A^2 + B^2) + j2AB \right) \quad \arg \underline{c} = \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \theta - \frac{\pi}{4} \quad (211)$$

Während der Realteil von \underline{c} die Geschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung ist, kann der Imaginärteil als Geschwindigkeit rechtwinklig dazu interpretiert werden. Auch bedeutet ein imaginärer Anteil an \underline{c} , daß eine Dämpfung auftritt (siehe Bild 23). Eine numerische Handhabung von (206) kann auch mit »Mathematica« erfolgen und ergibt den in Bild 21 dargestellten Verlauf. Da sich die Hankelfunktionen bei größerem Argument gut durch andere analytische Funktionen ausdrücken lassen, werden wir später versuchen, Näherungslösungen anzugeben.

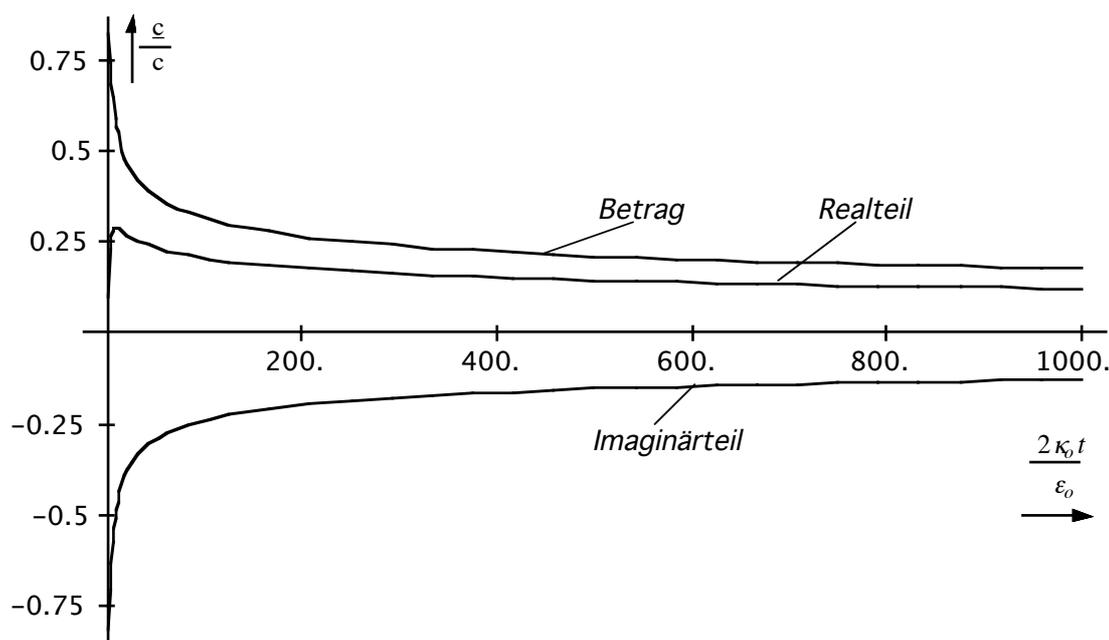


Bild 21
Ausbreitungsgeschwindigkeit
in Abhängigkeit von der Zeit (lineare Zeitskala)

Im Groben verhält sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit proportional $t^{-1/4}$, wie wir später noch sehen werden. Insgesamt erinnert Bild 21 stark an die Hüllkurve bei einem einzelnen MLE (Bild 13). In der Nähe von $t=0$ sieht es jedoch etwas anders aus. Hier hilft ein logarithmischer Maßstab weiter (Bild 22). Wie genaue Untersuchungen ergaben, haben Real- und Imaginärteil von \underline{c} ab etwa $20\kappa_0 t/\epsilon_0$ den selben Betrag. Dies müssen wir bei der Aufstellung einer Näherungsfunktion beachten.

Wir haben es hier mit einem Fall von Inversion zu tun. Dies manifestiert sich dadurch, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit zuerst von Null auf einen Betrag von $0,851661c$ (bei $0,748514t_1$), ansteigt, um dann wieder abzufallen und zwar asymptotisch auf Null.

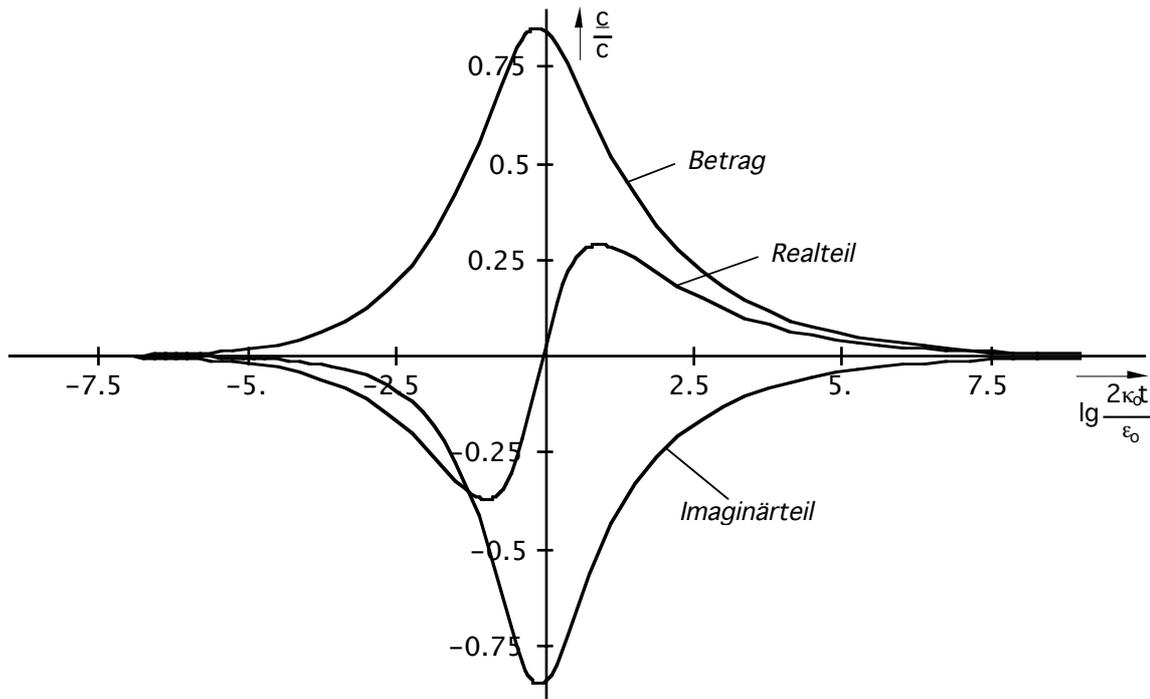


Bild 22
Ausbreitungsgeschwindigkeit
in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmische Zeitskala)

Der Weltradius (Wellenfront) dieses Modells expandiert damit nicht mit c sondern nur mit $0,851661c$, was keinen Verstoß gegen die SRT darstellt. Dabei kommt es dazu, daß später ausgestrahlte Wellenabschnitte die Wellenfront quasi überholen. Da das Verhältnis von Real- zu Imaginärteil dann jedoch anders ist, geschieht dies nicht auf derselben Bahnkurve — die Wellenfronten kreuzen sich vielmehr.

Für die Aufstellung der Ausbreitungsfunktion betrachten wir noch einmal die klassischen Lösungen (165), (212) und unsere Ausgangsfunktion (183).

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} e^{j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} = \mathbf{E} e^{j\omega t - j\gamma x} = \mathbf{E} e^{j(\omega t + j\gamma x)} \quad (212)$$

Im Gegensatz zu (165) ist das Argument beim Fall mit Expansion reell. Genaugenommen ist nämlich nicht die Hankelfunktion sondern die modifizierte Hankelfunktion $M_0^{(2)} = I_0(z) - jK_0(z)$ das Äquivalent zur Exponentialfunktion. Es gilt $I_0(z) = J_0(jz)$ allerdings nur für rein imaginäre Argumente. Bei komplexem Argument läßt sich der reelle Anteil nicht als Faktor analog $e^a e^{jb}$ vor die Hankelfunktion setzen, wie man es bei der Exponentialfunktion gewohnt ist, da die Potenzgesetze nicht für Hankelfunktionen gelten. Erst für größere Argumente z ist dies möglich. Die modifizierte Hankelfunktion wird aber im allgemeinen nicht verwendet. Daher benutzen wir für den Ansatz die "normale" Hankelfunktion und passen die Ausbreitungsfunktion dementsprechend an. Um nicht im Widerspruch zur klassischen Definition für das Fortpflanzungsmaß — Realteil als Dämpfungsmaß, Imaginärteil gleich Phasenmaß — zu stehen, müßte die Ausbreitungsfunktion dann wie folgt lauten (analog für $\underline{\mathbf{H}}$):

$$\underline{\mathbf{E}} = \mathbf{E} H_0^{(1)}\left(2\omega_0\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = \mathbf{E} H_0^{(1)}(2\omega_0 t - j\gamma x) \quad (213)$$

Dies ist nicht ganz der klassische Ausdruck für eine Ausbreitungsfunktion. Zu beachten ist der Faktor 2 der sowohl der Frequenz, als auch der Zeitkonstante zugeordnet werden kann. Bei der Definition des Fortpflanzungsmaßes $\gamma = \alpha + j\beta$ gehört er eindeutig zur Frequenz, da γ

abhängig von der Phasengeschwindigkeit dx/dt , nicht $dx/(2dt)$ ist. Durch Gleichsetzen beider Argumente von (213) erhält man dann:

$$\underline{\gamma} = -\frac{2\omega_0}{\underline{c}} = j\kappa_0 Z_0 \sqrt{1-\Theta^2} \quad (214)$$

Aus (210) läßt sich sehr leicht der Kehrwert von \underline{c} ermitteln, wir erhalten $\underline{\gamma}$ nach (164) zu:

$$\frac{1}{\underline{c}} = -\frac{\omega_0 t \rho_0}{c} \left(\cos \frac{1}{2} \arctan \theta - j \sin \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \quad (215)$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + j\beta = -2\omega_0 / \underline{c} = \frac{2\omega_0^2 t \rho_0}{c} \left(\cos \frac{1}{2} \arctan \theta - j \sin \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \quad (216)$$

$$\underline{\gamma} = \rho_0 \kappa_0 Z_0 \left(\cos \frac{1}{2} \arctan \theta - j \sin \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \quad (217)$$

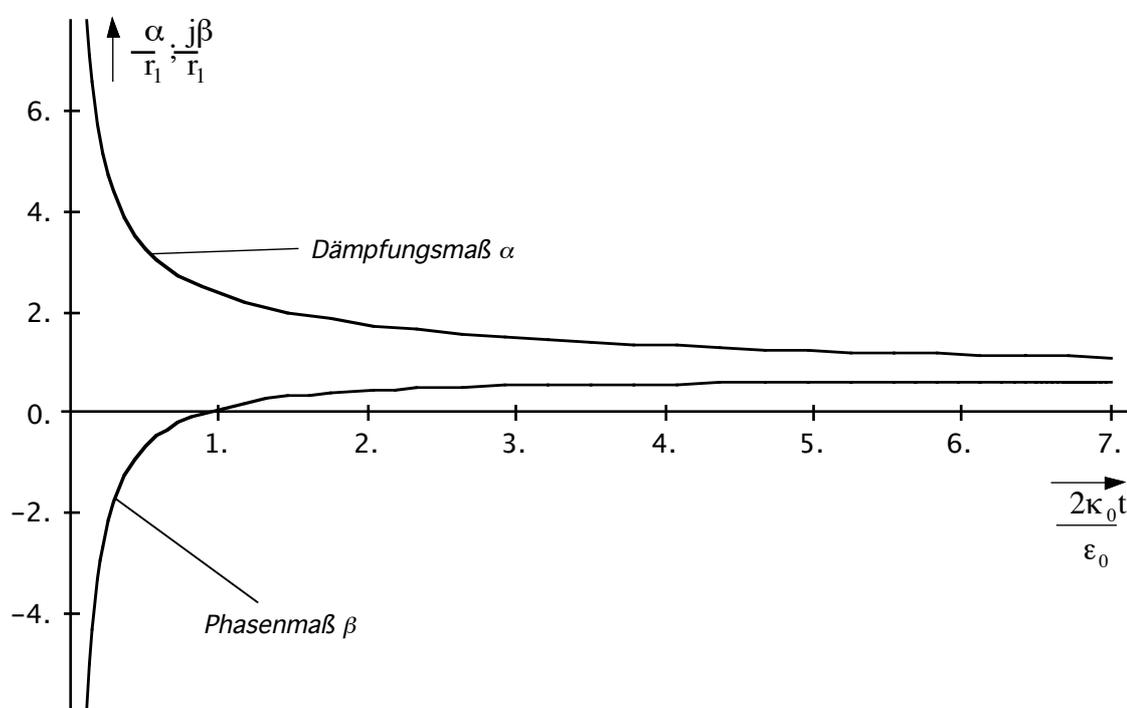


Bild 23
Phasenmaß und Dämpfungsmaß
in Abhängigkeit von der Zeit (lineare Skala)

Bei genauer Betrachtung erkennt man, daß α und β von ihrer Wirkung gesehen eigentlich vertauscht sind (α = Phasenmaß, β = Dämpfungsmaß). Dies ist dadurch bedingt, daß es bei der Ausbreitung zu einer Drehung um 90° (j) kommt (Bild 26). x wird zu y und y zu $-x$. Die Dämpfung α nimmt vom Zeitpunkt $t=0$ beginnend von unendlich exponentiell ab. Zum heutigen Zeitpunkt kann man sagen, daß es im Prinzip keine Dämpfung mehr gibt. Dies gilt aber nicht, wenn man kosmologische Zeiträume betrachtet.

Zum Zeitpunkt $0,897 t_1$ ($Q=0,947$) hat die Funktion β einen Nulldurchgang. Dies führt zu dem bei der logarithmischen Darstellung (Bild 24) etwas eigentümlichen Verlauf. Es handelt sich hierbei um einen Phasensprung um 180° . Möglicherweise ist dies auch der Punkt, an dem die zum Zeitpunkt $t=0$ ausgestrahlte Wellenfront durch die später ausgestrahlte schnellere überholt wird. Weiterhin kommt es etwa zu diesem Zeitpunkt auch zum Aufbau der kristallinen Struktur des Raumes (Umklappen von Parabel in Rotation). Bis zu diesem Zeitpunkt ist der Raum geschlossen, danach offen. Ab dem Zeitpunkt $100 t_1$ können wir aus Bild 24 folgende Näherung angeben:

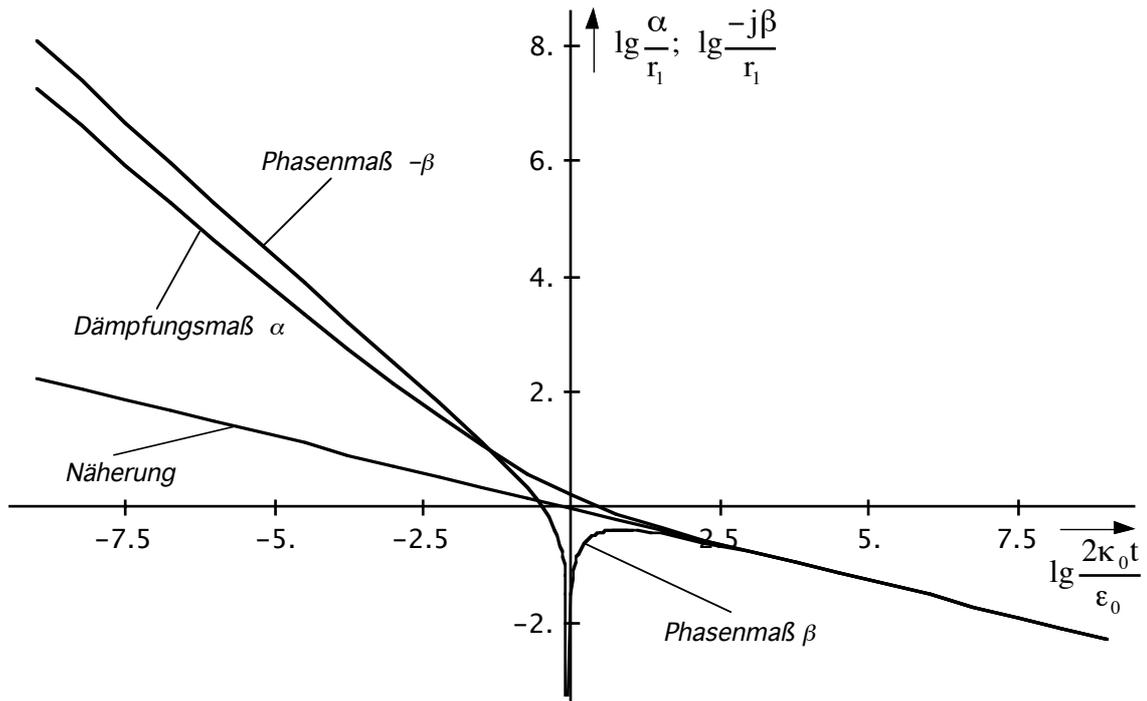


Bild 24
Phasenmaß und Dämpfungsmaß
in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmisch)

$$\underline{\gamma} \approx (1 + j) \kappa_0 Z_0 \sqrt[4]{\frac{\epsilon_0}{2\kappa_0 t}} \quad \underline{\gamma} \approx (1 + j) \frac{\kappa_0 Z_0}{\sqrt{2\omega_0 t}} \quad (218)$$

Diese Beziehungen lassen sich sowohl graphisch aus Bild 24, als auch explizit aus (214) unter Anwendung von (223) herleiten. Jedoch muß man (214) mit j multiplizieren, um der 90° Drehung (Bild 26) Rechnung zu tragen. Für die Näherung gilt dann $\underline{\gamma} = 2\omega_0/c$. Der Faktor $\kappa_0 Z_0$ ist der Kehrwert unseres r_0 bei einer Kreisgüte von 1 und wird mit $1/r_1$ bezeichnet. Phasenmaß und Dämpfungsmaß sind ab ca. $100 t_1$ identisch. Dies ist das Verhalten eines idealen Leiters. Möglicherweise basieren hierauf eine Reihe bekannter physikalischer Effekte wie z.B. die Supraleitung und die Elektronenleitfähigkeit des Vakuums.

Interessant ist auch die Ähnlichkeit des Verlaufs der absoluten Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik mit der in Abschnitt 4.3.2. bestimmten Gruppenlaufzeit beim Durchgang einer Störung durch das einzelne MLE. Während die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik in der Nähe der Singularität größer wird, sinkt gleichzeitig die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer überlagerten Welle, so daß die Gesamtgeschwindigkeit konstant $= c$ bleibt.

Am Weltradius expandiert das Universum mit der maximalen Geschwindigkeit $0,851661c$, im Innern mit immer kleiner werdender Geschwindigkeit. Da die Wellenzahl im Innern einer Kugel mit definiertem Radius $r(c,t)$ sinkt, wird das Defizit durch eine Vergrößerung der Wellenlänge ausgeglichen. Außerhalb K steigt die Wellenzahl durch Ausbreitung kontinuierlich an.

Nun treten einige Probleme auf, die wir hier auch schnell noch betrachten wollen. Zuerst einmal würde das Weltall nicht überall gleiche physikalische Eigenschaften aufweisen. Wir hätten es dann mit einem abgeschwächten Kosmologischen Prinzip zu tun:

III. Das Weltall bietet zum gleichen Zeitpunkt den gleichen Anblick.

Diese Aussage ist interpretationsbedürftig: Das Universum expandiert in einen ebenen euklidischen Raum ohne Zeitdefinition. Die Zeitrechnung beginnt erst mit dem Durchgang der Wellenfront. Daher ist das Universum an verschiedenen Stellen verschieden alt. Gemeint ist immer die örtliche Zeit. Für Gleichungen, die sich auf das Expansionszentrum beziehen, gilt die Zeit an diesem Punkt, also das Gesamtweltalter. Eine allgemeine Weltzeit gibt es nicht in diesem Modell, was sehr gut mit den Aussagen der SRT übereinstimmt. Das örtliche Weltalter ist damit eine Funktion des Abstandes zum Zentrum, welches sich zumindest theoretisch durch Messung der lokalen physikalischen Größen bestimmen läßt. Die HUBBLE-Konstante wird zu einer lokalen Größe. Damit hätten wir auch das Zeitskalenproblem gelöst, welches hier sonst aufgetreten wäre. Es gibt also sowohl Bereiche, die jünger, als auch solche, die älter sind als der Bereich, in dem wir uns befinden. Bewegt man sich im Raum, so bewegt man sich gleichzeitig in der Zeit. Somit ist der Ausdruck »Raumzeit« eindeutig definiert.

Der Raum außerhalb K wäre mit den grundlegenden physikalischen Eigenschaften ϵ_0 , μ_0 und κ_0 ausgestattet, die auch eine Wellenausbreitung gemäß der klassischen MAXWELLSchen Theorie für das Vakuum erlauben würden. Das metrische Wellenfeld ist also nicht Voraussetzung für die Wellenausbreitung. Inwieweit Materie außerhalb existieren kann, soll hier nicht weiter untersucht werden. Fraglich ist auf jeden Fall, woher diese bzw. irgendeine elektromagnetische Strahlung kommen soll. Wir gehen einmal davon aus, daß es sie nicht gibt. Sollte dies aber doch der Fall sein, besteht **keine** Möglichkeit, die Singularität am Weltradius K zu durchqueren, weder in die eine, noch in die andere Richtung.

Wir haben den Real- und Imaginärteil von \underline{c} der Ausbreitung in x - und y -Richtung zugeordnet. Betrachten wir nun die Ausbreitung der Wellenfront, die zum Zeitpunkt $t=0$ ausgestrahlt wurde und stellen wir diese zweidimensional dar, erhalten wir folgende Bahnkurve (Bild 25):

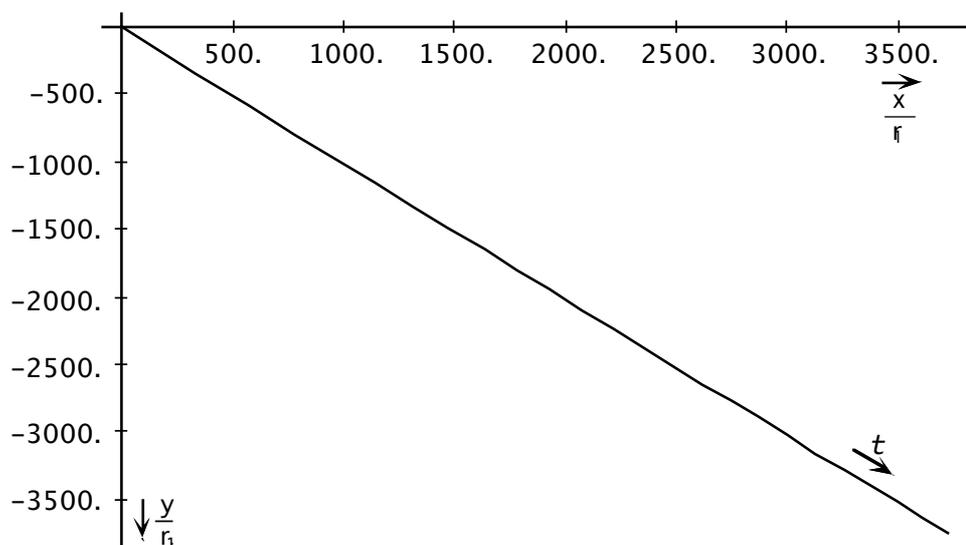


Bild 25
Bahnkurve für große Werte von t
in Abhängigkeit von der Zeit

Für größere t verläuft die Expansion der Wellenfront annähernd geradlinig. In der Nähe der Singularität sieht das Verhalten etwas anders aus. In Bild 26 ist der Verlauf der Bahnkurve eines einzelnen Abschnittes der Wellenfront in der Nähe der Singularität dargestellt. Man erkennt eine Art Parabel, bei großem t eine Hyperbel. Es tritt eine Drehung in der Ausbreitungsrichtung um einen Winkel von 90° auf. Bild 27 zeigt die Funktion des absoluten Abstandes vom Zentrum.

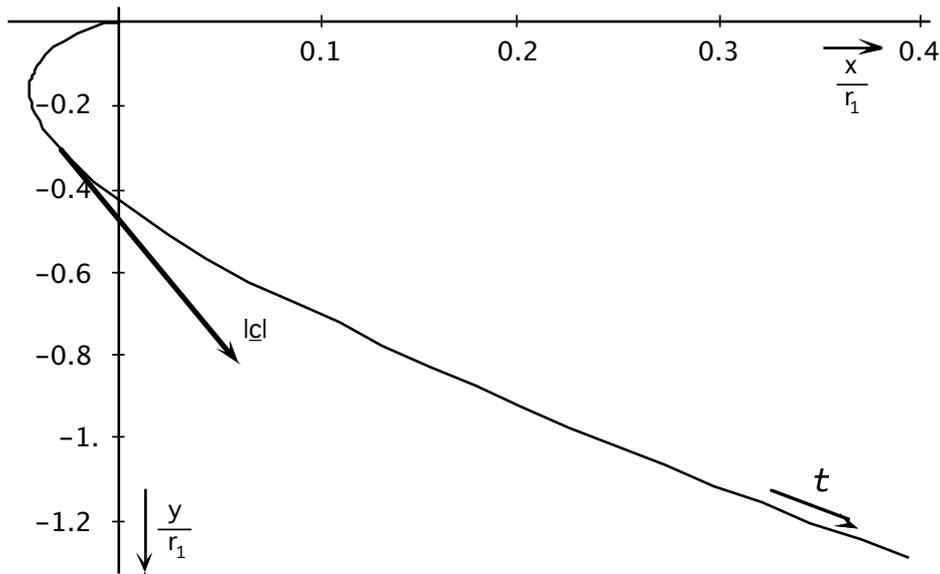


Bild 26
Bahnkurve in der Nähe der Singularität
in Abhängigkeit von der Zeit

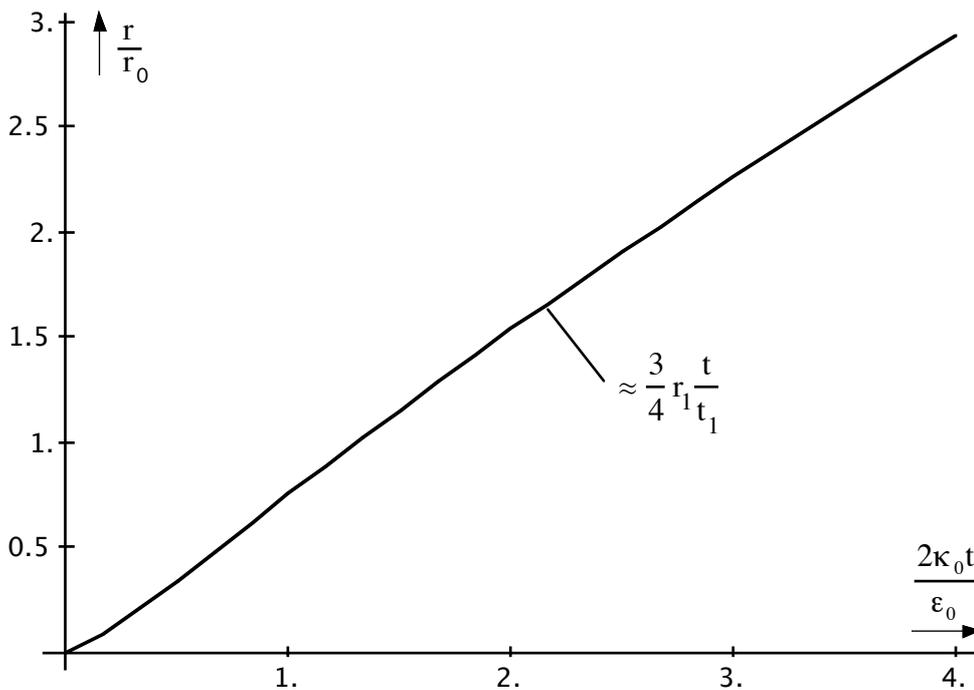


Bild 27
Radius r als absoluter Abstand vom Zentrum
in Abhängigkeit von der Zeit für kleine Werte von t

Die Funktion wurde mit Hilfe von »Mathematica« durch numerische Integration auf folgende Art und Weise berechnet und dargestellt:

```
Hankel1=Function[BesselJ[#1,#2]+I BesselY[#1,#2]];
Cd=Function[-2*I/Sqrt[#]/Sqrt[1-(Hankel1[2,Sqrt[#]]/Hankel1[0,Sqrt[#]])^2]];
CdI=Function[NIntegrate[Cd[a],{a,0,#}]];
```

```
Plot[Abs[CdI[t]],{t,0,1}, AspectRatio->1]
```

(219)

In Bild 28 ist die Ortskurve des Feldwellenwiderstandes angegeben. Uns interessiert vor allem der Wert für $t \gg 0$. Im Gegensatz zu überlagerten Störungen geringer Frequenz, für die $\underline{Z}_F = Z_0$ gilt, wird dieser für die Metrik wiederum nahezu Null. Es treten somit (nahezu) keinerlei Ausbreitungsverluste auf. Dieses "nahezu" könnte die Ursache für die kosmologische Rotverschiebung sein. Dies soll im folgenden Abschnitt untersucht werden. Zunächst wollen wir uns jedoch noch einmal mit den Näherungslösungen für größere t befassen.

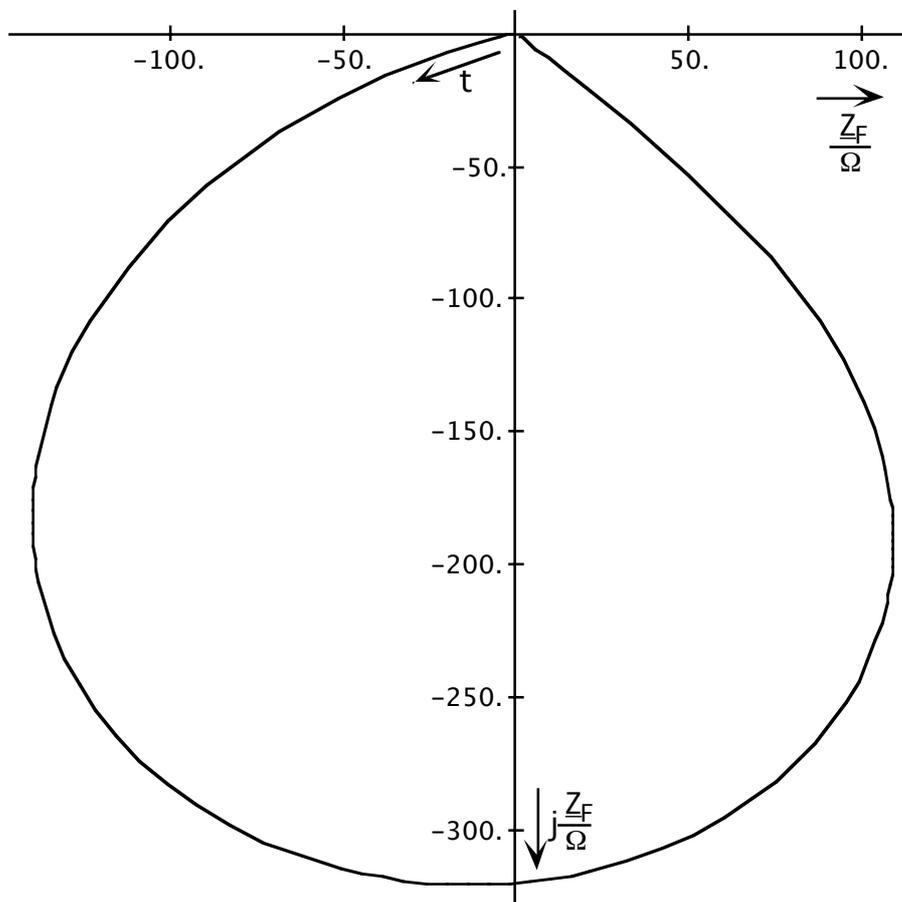


Bild 28
Ortskurve des
Feldwellenwiderstands

4.3.4.3.2. Näherungslösungen

In [23] ist eine asymptotische Formel für die Hankelfunktion angegeben. Sie lautet:

$$H_v^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{j\left(z - \frac{\pi}{2}v - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O(z^{-1})\right] \quad \text{für } 0 < z < \infty \quad (220)$$

Wenn man diese in (206) einsetzt, sieht man, daß sich beinahe alle Ausdrücke kürzen lassen. Der Wurzelausdruck konvergiert gegen einen Wert von:

$$R = \sqrt{1 - \left(\frac{\left[1 + O_2(t^{-1/2})\right]}{\left[1 + O_0(t^{-1/2})\right]}\right)^2} \quad \text{oder} \quad (221)$$

Durch Erweitern mit $[1 - O_0(z^{-1})]$ und Weglassen der quadratischen Glieder erhalten wir:

$$R = \sqrt{1 - [1 + O_2(t^{-1/2}) - O_0(t^{-1/2})]^2} \approx \sqrt{2O_2(t^{-1/2}) - 2O_0(t^{-1/2})} \quad (222)$$

Der Wurzelausdruck ist also allein von den Restgliedern abhängig und diese streben auch noch gegen Null. Daher ist dieser Ansatz für unsere Zwecke nicht geeignet.

Für $\underline{\gamma}$ haben wir schon eine Näherung gefunden, bleiben noch \underline{c} und \underline{Z}_F . In Bild 22 haben wir bereits den Verlauf von \underline{c} dargestellt. Zur graphischen Bestimmung einer Näherung benötigen wir jedoch die logarithmische Darstellung (Bild 29). Zu beachten ist, daß der Imaginärteil eigentlich negativ ist.

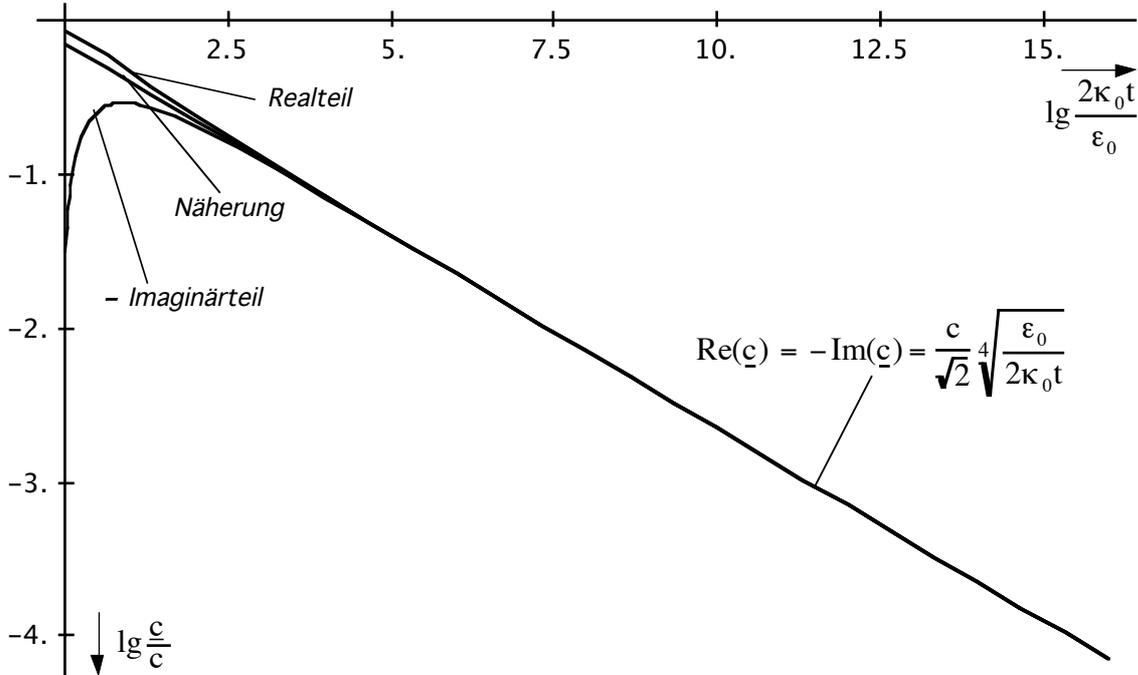


Bild 29
Ausbreitungsgeschwindigkeit
in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmisch)

$$\underline{c} = \frac{1-j}{\sqrt{2}} c \sqrt[4]{\frac{\epsilon_0}{2\kappa_0 t}} \quad \underline{c} = \frac{1-j}{2} \frac{c}{\sqrt{\omega_0 t}} \quad (223)$$

$$|\underline{c}| = c \sqrt[4]{\frac{\epsilon_0}{2\kappa_0 t}} \quad |\underline{c}| = \frac{c}{\sqrt{2\omega_0 t}} \quad (224)$$

$$\underline{Z}_F = \frac{1-j}{\sqrt{2}} Z_0 \sqrt[4]{\frac{\epsilon_0}{2\kappa_0 t}} \quad \underline{Z}_F = \frac{1-j}{2} \frac{Z_0}{\sqrt{\omega_0 t}} \quad (225)$$

4.3.4.3.3. Ausbreitungsfunktion

Wir wollen zuerst eine Näherung für die Ausbreitungsfunktion aufstellen. Dabei kann man mit sehr großer Genauigkeit mit den Näherungsformeln arbeiten. Für größere Argumente erhalten wir unter Verwendung von (220) die wesentlich einfacher handhabbaren Ausdrücke (Analog für \underline{H}):

$$\underline{E} = E \sqrt{\frac{2}{\pi |2\omega_0 t + j\underline{\gamma}x|}} e^{j(2\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) - \underline{\gamma}x} \quad (226)$$

Im Wurzelausdruck taucht hier die Betragsfunktion auf, da die Phasenlage allein durch die Exponentialfunktion bestimmt wird, wie man im Bild 13 und 14 sehr gut erkennen kann. Der Phasenwinkel $\pi/4$ ist für die Näherung von untergeordnetem Interesse und kann daher weggelassen werden:

$$\underline{E} = E \sqrt{\frac{2}{\pi |2\omega_0 t + j\underline{\gamma} x|}} e^{j2\omega_0 t - \underline{\gamma} x} \quad (227)$$

Setzen wir hier für $\underline{\gamma}$ die Näherungen nach (218) ein, müssen wir feststellen, daß sowohl ω_0 als auch $\underline{\gamma}$ Funktionen der Zeit sind. Für $2\omega_0 t$ ist dies nicht weiter kritisch, da ohnehin mit t multipliziert wird. Anders bei $\underline{\gamma}$, es sollte nur von x abhängen. Zur Substitution von t benötigen wir die Phasengeschwindigkeit v_{ph} . Es gilt dann $t = x/v_{ph}$. Aufgrund des Faktors 2 ist die Phasengeschwindigkeit folgendermaßen definiert:

$$v_{ph} = \frac{2\omega_0}{\beta} = \frac{2c}{\sqrt{2\omega_0 t}} = 2|\underline{c}| \quad \text{für } t \gg 0 \quad (228)$$

Die Phasengeschwindigkeit ist gleich dem doppelten absoluten Betrag der Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dies ist wiederum durch den Faktor 2 bedingt, da sich die Phasenlage bei doppelter Frequenz auch mit doppelter Geschwindigkeit ausbreitet. Interessehalber soll hier auch noch die Gruppengeschwindigkeit angegeben werden:

$$v_{gr} = \frac{1}{d\beta/d\omega_0} = -2|\underline{c}| \quad \text{für } t \gg 0 \quad (229)$$

Bis auf das Vorzeichen sind beide Ergebnisse gleich. Das bedeutet, die Ausbreitung erfolgt verzerrungsfrei. Durch Substitution von $t = x/v_{ph}$ in (218) erhält man mit $t^3 = \kappa_0 \epsilon_0 \mu_0^2 x^4 / 4$ für $\underline{\gamma}$ und das Produkt $\underline{\gamma} x$ folgende Ausdrücke:

$$\underline{\gamma} = \frac{1}{2} (1+j) \sqrt[3]{\frac{4\kappa_0^2 Z_0^2}{x}} = (1+j) \kappa_0 Z_0 \sqrt[3]{\frac{r_1}{2x}} \quad (230)$$

$$\underline{\gamma} x = \frac{1}{2} (1+j) \sqrt[3]{4\kappa_0^2 Z_0^2 x^2} = \frac{1}{2} (1+j) \sqrt[3]{\frac{4x^2}{r_1^2}} \quad (231)$$

Das Ergebnis ist verblüffend. $\underline{\gamma}$ ist proportional $x^{-1/3}$ und die Zeit t läßt sich vollständig eliminieren. Leider kann man $\underline{\gamma}(x)$ nur in der Näherung explizit angeben. Bei der exakten Funktion (217) ist eine Trennung, speziell von t nicht möglich. Hier müssen andere Lösungsverfahren angewandt werden. Ein einfacher Ansatz ergibt sich folgendermaßen:

In Bild 27 haben wir nachgewiesen, daß der Radius für kleine Argumente linear ansteigt. Damit gelten die in (230) und (231) dargestellten Abhängigkeiten auch für kleine Argumente, jedoch nicht in x , sondern in r . Für große Argumente ist es ohnehin nicht von Belang, ob man mit x oder r rechnet. Jedoch muß dann sowohl $\underline{\gamma}$ als auch x mit $\sqrt{2}$ multipliziert werden ($r = x\sqrt{2}$), da die Ausbreitung sowohl in x , als auch in y -Richtung stattfindet. Die Drehung θ wird durch den imaginären Anteil bestimmt. Es gilt:

$$\underline{\gamma} r \hat{=} \sqrt{(j2\omega_0 t)^3} \quad \text{oder umgestellt} \quad 2\omega_0 t \hat{=} \sqrt[3]{j(\underline{\gamma} r)^2} \quad (232)$$

Da für die Ausbreitungsfunktion nur die Phasengeschwindigkeit wichtig ist, die reell und immer die gleiche Richtung wie die Ausbreitungsrichtung hat, benötigen wir nur die Betragsfunktion:

$$|\underline{\gamma} r| \hat{=} \sqrt{(2\omega_0 t)^3} \quad \text{oder umgestellt} \quad 2\omega_0 t \hat{=} \sqrt[3]{|\underline{\gamma} r|^2} \quad (233)$$

Damit wäre eine Näherungslösung $\underline{\gamma}(r)$ bis hinab zu $t=0$ exakt gültig. Allerdings bleibt dann die Drehung um den Winkel θ unberücksichtigt. Jetzt haben wir jedoch einen Fall vorliegen, bei dem α und β sowohl Dämpfungs- als auch Phaseninformationen beinhalten. Damit können wir keine vernünftige Ausbreitungsfunktion aufstellen. Phasenmaß und Dämpfungsmaß haben im Fall $t \gg t_1$ gleiche Größe. Damit verhält sich unser Modell ähnlich wie ein Metall. Die Ausbreitung innerhalb eines Metalls erfolgt um $\pi/4$ verdreht gegenüber der Eintrittsrichtung, α steht also eigentlich nicht für eine Dämpfung, sondern für die Drehung. Da sich die Materialeigenschaften des Metalls im allgemeinen nicht ändern, summiert sich die Abweichung so lange, bis bei senkrechtem Einfall ein Wert von π erreicht wird und die Welle nach minimalem Eindringen das Metall in umgekehrter Richtung wieder verläßt. Die Eindringtiefe ist abhängig von den Materialeigenschaften, der Wellenlänge und dem Einfallswinkel. Daher werden elektromagnetische Wellen von metallischen Oberflächen im allgemeinen reflektiert. Im Fall unseres Modells sind die Materialeigenschaften nicht konstant, $\underline{\gamma}$ nimmt mit der Zeit ab. Daher reicht es hier nur zu einer Drehung um 90° und die Welle verbleibt im Medium (Vakuum). Eine Dämpfung tritt nicht auf ($t \gg t_1$).

Um dem Rechnung zu tragen, nehmen wir eine Drehung des Koordinatensystems um $\pi/4$ vor. Dies entspricht der Multiplikation von (231) mit \sqrt{j} . Hier kommt dann auch unsere $\sqrt{2}$ ins Spiel und wir erhalten eine rein imaginäre Lösung: (234) und (235) linke Seite. Damit wird $\alpha=0$ bzw. $\underline{\gamma}=j\beta$ und es tritt keine exponentiell bedingte Dämpfung auf. Dennoch nimmt die Amplitude von \mathbf{E} und \mathbf{H} kontinuierlich ab. Dies wird allein durch die Hankelfunktion verursacht, wie man in der Näherung (227) gut erkennen kann (Wurzelausdruck). Damit sind Amplitude und Phase fest miteinander verkoppelt (Minimalphasensystem). Der Drehwinkel im Raum ist jetzt gleich $\theta+\pi/4$.

Die Hankelfunktion ist am Punkt $x=0$ singular. Daher eignet sich dieser Punkt nicht als Ursprung für ein raum-zeitliches Koordinatensystem, das wir benötigen, um die gleichzeitige Abhängigkeit von Raum und Zeit darzustellen. Wir benutzen deshalb den am "nächsten" gelegenen Punkt $r_1/2$. Es ist dies der kleinste Abstand, bei dem ein raum-zeitliches Koordinatensystem überhaupt möglich ist. Auch haben wir ja die Kopplung von φ_0 und \mathbf{E} bei diesem Punkt vorgenommen. Ein weiterer Grund für die Wahl dieses Punktes ist im Abschnitt 4.6.3. dargelegt. Es ist dies die Existenz eines inneren SCHWARZSCHILD-Radius. Damit existiert auch ein größter Wert $\underline{\gamma}_1$, der nicht überschritten werden kann. Dies berücksichtigen wir durch die Substitution $r^2 \rightarrow r^2 - r_1^2/4$ (es gilt das quadratische Wirkungsprinzip). Wir erhalten schließlich:

$$\underline{\gamma} = j\sqrt{2} \kappa_0 Z_0 \sqrt[3]{\frac{r_1}{2r}} \quad \rightarrow \quad -\underline{\gamma} = \frac{j}{r} \sqrt[3]{1 - \frac{4r^2}{r_1^2}} \quad (234)$$

$$\underline{\gamma} r = j \sqrt[3]{\frac{4r^2}{r_1^2}} \quad \rightarrow \quad -\underline{\gamma} r = j \sqrt[3]{1 - \frac{4r^2}{r_1^2}} \quad (235)$$

Gleichung (234) und (235) sind faktisch bezogen auf den Expansionsmittelpunkt ($r_1/2$). Es ist aber zweckmäßig, eine Funktion zu finden, die von einem anderen Punkt als Mittelpunkt ausgeht. Am besten geeignet ist hier der Punkt, an dem wir uns befinden. Die Substitution $t \rightarrow \tilde{T} + t'$ führt wegen $r_0 = r_1 Q_0$ (die Tilde steht für den Ausgangswert am Punkt $t=0$, ist also eine Konstante) zu $r_1 \rightarrow r_0$ und:

$$2\omega_0 t = \tilde{Q}_0 \sqrt{1 + \frac{t'}{\tilde{T}}} \quad \text{und} \quad -\beta r = \sqrt[3]{\tilde{Q}_0 \left(1 - \frac{4r^2}{\tilde{r}_0^2}\right)} \quad (236)$$

Wenn wir mir dem Radius r rechnen, benutzen wir in Zukunft nur β . Damit wird auch eine Verwechslung der unterschiedlichen Werte $\underline{\gamma}(x)$ und $\underline{\gamma}(r)$ vermieden. Da $\alpha=0$, vereinfacht sich die Ausbreitungsfunktion noch einmal:

$$\underline{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_i \sqrt{\frac{2}{\pi(2\omega_0 t - \beta r)}} e^{j(2\omega_0 t - \beta r)} \quad (237)$$

Mit r_0 haben wir bereits eine Elementarlänge gefunden. LANCZOS spricht jedoch noch von einer zweiten [1]. Dies ist die Wellenlänge des metrischen Wellenfeldes $\lambda_0 = 2\pi/\beta$. Bei der Näherung von λ_0 muß durch $\sqrt{2}$ dividiert werden, um die Drehung des Koordinatensystems wieder aufzuheben. Zum Vergleich auch noch einmal der Ausdruck für r_0 . Man erhält:

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\rho_0(2\omega_0 t)\kappa_0 Z_0} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \arctan \theta(2\omega_0 t) \quad (238)$$

$$\lambda_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{\kappa_0 Z_0} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\kappa_0 Z_0} \sqrt{2\omega_0 t} \quad \text{für } \omega_0 t \gg 0 \quad (239)$$

$$r_0 = \frac{1}{\kappa_0 Z_0} \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}} = \frac{2\omega_0 t}{\kappa_0 Z_0} = \sqrt{\frac{2t}{\kappa_0 \mu_0}} \quad (240)$$

Jedoch ist λ_0 kleiner als r_0 und damit nicht identisch mit der HEISENBERG'schen Elementarlänge. λ_0 liegt derzeit in der Größenordnung von 10^{-68} m. LANCZOS irrt also in diesem Punkt. Es war aber auch nur eine Vermutung seinerseits. Es handelt sich vielmehr um die Wellenlänge der Wellenfunktion, die unser metrisches Gitter selbst bildet. (238) bis (240) stellen nur die Zeitfunktionen dar. Die Funktionen von Zeit und Ort lauten folgendermaßen.

$$\lambda_0 = \frac{2\pi}{\rho_0(2\omega_0 t - \gamma r)\kappa_0 Z_0} \operatorname{cosec} \frac{1}{2} \arctan \theta(2\omega_0 t - \gamma r) \quad (241)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{2}\pi r_1 \sqrt{\tilde{Q}_0 \sqrt{1 + \frac{t}{\tilde{T}}} + \sqrt[3]{\tilde{Q}_0 \left(1 - \frac{4r^2}{\tilde{r}_0^2}\right)}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\kappa_0 Z_0} \sqrt{2\omega_0 t - \beta r} \quad (242)$$

$$r_0 = r_1 \left(\tilde{Q}_0 \sqrt{1 + \frac{t}{\tilde{T}}} + \sqrt[3]{\tilde{Q}_0 \left(1 - \frac{4r^2}{\tilde{r}_0^2}\right)} \right) = \frac{2\omega_0 t - \beta r}{\kappa_0 Z_0} \quad (243)$$

Alle Zeit/Ort-Funktionen sind definiert für $0 < t < \infty$ und für $-r_1/2 < x < \infty$. Analog lassen sich auch Zeit/Ort-Funktionen aller anderen Größen bestimmen. Der zeitliche Verlauf von $\lambda_0(r=0)$ exakt und als Näherung, sowie von $r_0(r=0)$ ist in den Bildern 30 und 31 dargestellt.

Bild 31 ist etwas irreführend. Es sieht so aus, als sei r_0 kleiner als λ_0 . In Wirklichkeit schneidet die Kurve von r_0 die von λ_0 bei einem Argument von 450,592 bei 21,2271 r_1 . Der Phasensprung, im Bild 31 gerade noch zu erkennen, tritt bei einem Argument von 0,8968 auf.

Interessant ist auch der (Gesamt-)Weltradius K . Dieser ergibt sich aus der Beziehung $2\omega_0 A = \beta K$ (A ist das Gesamtweltalter) zu:

$$K = \frac{\sqrt{1 + (2\omega_0 A)^2}}{\kappa_0 Z_0} \approx \frac{(2\omega_0 A)^2}{\kappa_0 Z_0} = \frac{1}{\kappa_0 Z_0} \sqrt[4]{\left(\frac{2\kappa_0 A}{\epsilon_0}\right)^3} \quad (244)$$

Es ist dies der Radius, den man "mißt", wenn man sich entlang der Expansions(welt)linie bewegt. Der genaue Wert und der Abstand zum Zentrum der Expansion läßt sich jedoch nicht bestimmen, da wir das echte Weltalter nicht kennen.

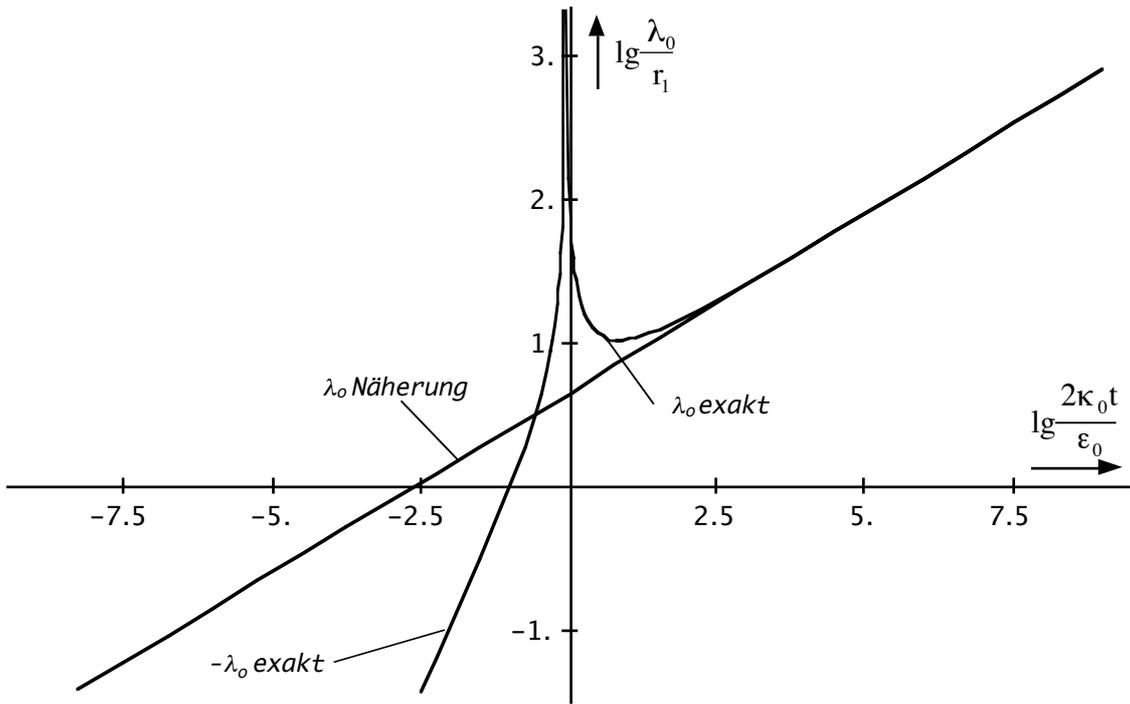


Bild 30
Verlauf von $\lambda_0 \text{ exakt}$
logarithmischer Maßstab

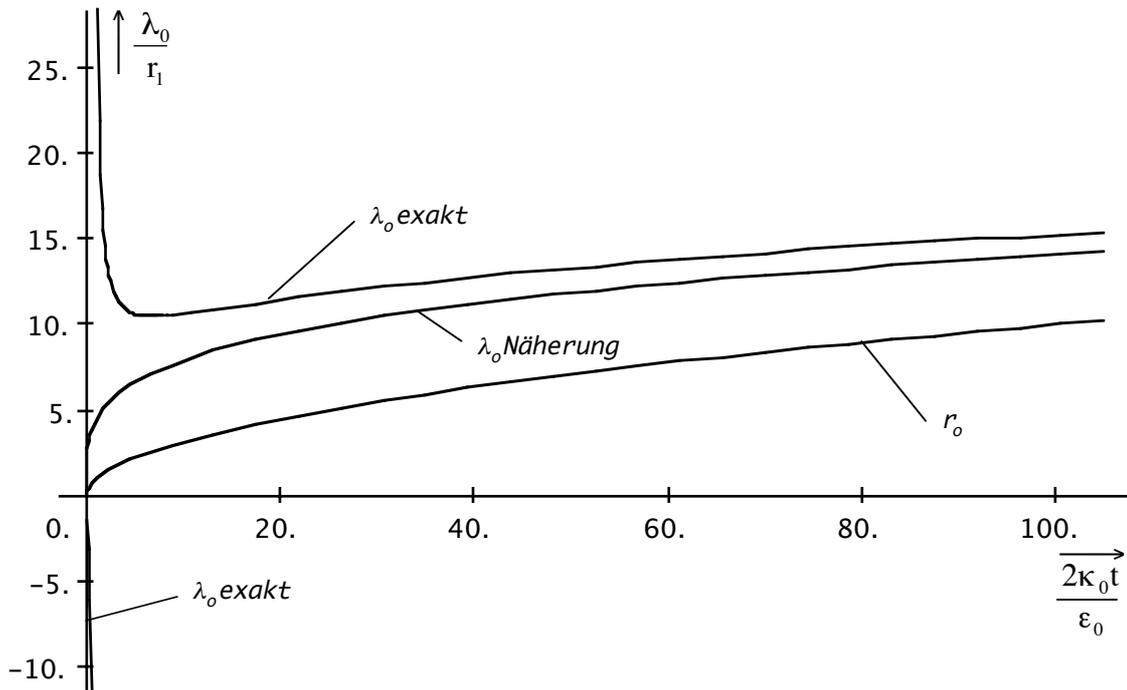


Bild 31
Verlauf von $\lambda_0 \text{ exakt}$ und Näherung
sowie r_0 linearer Maßstab

Wir kennen nur das örtliche Weltalter T , das sich aus der lokalen HUBBLE-Konstante ergibt (245). Dieses stellt quasi die zeitliche Entfernung zum Expansionszentrum dar. Man kann aber den räumlichen Abstand zum (lokalen) Weltradius R bestimmen. Dieser stellt damit eine räumliche Singularität dar. Der Wert ergibt sich aus dem Ansatz (246):

$$2\omega_0 t - \beta_0 r = \frac{\omega_0(H)}{H} \quad \text{bei } r = 0 \quad T = \frac{1}{2H} \quad (245)$$

$$2\omega_0 t - \beta_0 r = \frac{\omega_0(H)}{H} \quad \text{bei } 2\omega_0 t = 0 \quad (246)$$

$$R = -\frac{\omega_0(H)}{\beta_0 H} = -\frac{\omega_0 r_0}{H} = -2ct \quad \text{mit} \quad (247)$$

$$\beta_0 = \kappa_0 Z_0 \sqrt[4]{\frac{\epsilon_0 H}{\kappa_0}} = \sqrt{\frac{c^3}{G\hbar}} = \frac{1}{r_0} \quad (248)$$

Den Wert für β_0 haben wir aus (218) erhalten, indem wir die Zeit durch die HUBBLE-Konstante ersetzen. Das Phasenmaß ist also gleich dem Kehrwert von r_0 . Der Ausdruck für R lautet:

$$R = -\frac{c}{H} = -1,682 \cdot 10^{26} \text{m} = -1,778 \cdot 10^{10} \text{Lj} = -5,451 \text{Gpc} \quad (249)$$

Das sind etwa 17 Milliarden Lichtjahre. Das lokale Weltalter beträgt nach unserem Modell nur die Hälfte, nämlich 8,8 Milliarden Jahre. Versucht man nun, das Gesamtweltalter A bzw. den Gesamtweltradius K zu berechnen, so erkennt man, daß das nicht geht. Der Grund ist, daß die vorliegenden Daten nicht ausreichen und das sich daraus ergebende Gleichungssystem unterbestimmt ist. Es gilt jedoch:

$$\frac{R^4}{K^4} = \frac{1}{H^3 A^3} \quad \text{und} \quad HR = -c \quad (250)$$

Bis auf diese beiden haben wir nun alle Funktionen eindeutig bestimmt. Es ergibt sich kein Widerspruch zu bereits bestehenden Theorien. Die kosmologische Rotverschiebung konnten wir immer noch nicht erklären.

Das untersuchte Wellenfeld bildet jedoch die Metrik des Universums (leerer Raum), also das MLE. Dieses können wir hier schon einmal angeben, Weitere Betrachtungen sind einem gesonderten Kapitel vorbehalten. Wir gehen von (0.23) in der differentiellen Form aus und setzen anstelle der sonst üblichen Lichtgeschwindigkeit c unsere Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} des metrischen Wellenfeldes ein:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - \underline{c}^2 dt^2 \quad \text{oder} \quad (251)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \underline{c}^2 dt^2 \quad (252)$$

Hier wird sofort klar, welche physikalische Bedeutung dem MLE zukommt. Für die genaue Formel benutzen wir vorteilhaft Polarkoordinaten. Wir setzen jetzt den genauen Ausdruck für \underline{c} ein ($r=0$):

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) - \frac{c^2 dt^2}{\omega_0^2 t^2 \rho_0^2 (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r)} \left(\sin \frac{1}{2} \arctan \theta (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r) - j \cos \dots \right)^2 \quad (253)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + \frac{c^2 dt^2}{\omega_0^2 t^2 \rho_0^2 (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r)} (\cos \arctan \theta (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r) + j \sin \dots) \quad (254)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2) + \frac{c^2 dt^2}{\omega_0^2 t^2 \rho_0^2 (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r)} \frac{1 + j \theta (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r)}{\sqrt{1 + \theta^2 (2\omega_0 t - \underline{\gamma}r)}} \quad (255)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{c^2 dt^2}{\omega_0^2 t^2 (1 - A^2(\phi) + B^2(\phi)) (1 - j\theta(\phi))} \quad (256)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{4r_0^2 dt^2}{1 - (A(\phi) - jB(\phi))^2} \quad (257)$$

mit $\phi = 2\omega_0 t - \gamma r$. Interessant ist die Umkehrung des Vorzeichens. Aus dem Lichtkegel wird eine Kugel. Für überlagerte Signale, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, gilt aber weiterhin der bisherige Lichtkegel. Es addiert sich die lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit (nicht die Expansionsgeschwindigkeit!). $A(\phi)$ und $B(\phi)$ bestimmen die Drehung in der Nähe der Singularität. Der Kehrwert des Ausdrucks im Nenner zeigt dem Betrag nach ein Verhalten wie $t^{1/2}$. Nun noch die Näherung (Gleichung (260) ist eine Vorwegnahme späterer Ergebnisse):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{c^2 dt^2}{2\omega_0 t - \gamma \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (258)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \frac{c^2 dt^2}{2\omega_0 t - \beta_0 r} \quad (259)$$

$$ds^2 = dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) + \tilde{c}^2 dt^2 \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} \quad (260)$$

Bewegt man sich nur in der Zeit und nicht im Raum, so tritt keine räumliche Krümmung auf. Diese Bewegungsart wird als zeitartige Weltlinie bezeichnet (z.B. Photonen). Eine Krümmung ist damit der Bewegung einer Masse gleichzusetzen. Diese muß zu diesem Zweck zuerst beschleunigt werden. Diese Bewegungsart nennt man dann raumartige Weltlinie. Benutzt man den Expansionsmittelpunkt als Ursprung des Koordinatensystems, so gibt es nur die zeitliche Abhängigkeit. Direkt im Punkt $r=0$ gibt es keine raumartigen Weltlinien, jedoch dicht daneben. Diese sind dann von der Singularität weg, die zeitartigen Weltlinien hinein gerichtet. Ein Körper würde von der Singularität abgestoßen. Es handelt sich daher um einen Partikelhorizont. Ein anderes Beispiel für diese Art Singularität sind weiße Löcher (falls diese existieren) und der lokale Weltradius R . Letzterer kann daher z.B. von Photonen durchdrungen werden.

Die Nichtexistenz raumartiger Weltlinien an diesem Punkt ist mit ein Grund dafür, daß es kein universelles räumliches Koordinatensystem gibt. Dieses müßte an *jedem* Punkt gültig sein. Existiert nur ein einziger Punkt, an dem dies nicht gilt, so gibt es kein universelles räumliches Koordinatensystem. Im Gegensatz dazu existieren am Gesamtweltradius K nur raumartige Weltlinien. Es handelt sich daher um eine zeitliche Singularität (Ereignishorizont), die von Photonen nicht durchdrungen werden kann. Es gibt damit auch keine universelle Zeit, genau wie in der SRT. Die zeitartigen Weltlinien in der Nähe sind von der Singularität weg, die raumartigen hinein gerichtet. Ein Körper würde von der Singularität angezogen und könnte diesen auch durchdringen. Beispiele hier sind z.B. schwarze Löcher.

Denkbar wäre ein Universum, bei dem sich der Beobachter immer im Mittelpunkt befindet, beide Singularitäten gleich weit entfernt und außerhalb des Raumes quasi miteinander "verbunden" sind. Dies wird dadurch bestärkt, daß das Produkt HR genau der Lichtgeschwindigkeit entspricht, an beiden Enden also eine unendliche Krümmung auftritt, auch durch die Symmetrie der Funktion der Ausbreitungsgeschwindigkeit (Bild 22) in der Zeit. Beim Überschreiten des Punktes, an dem der Phasensprung auftritt, kommt man am "anderen Ende der Welt" wieder heraus. Ein solches Modell würde expandieren und für einen Urknall sprechen.

Betrachtet man nun den zweiten Ausdruck von (236), dann erkennt man, daß dieser genau das soeben vorgeschlagene Modell beschreibt. Für einen Beobachter gibt es nur sein lokales

Bezugssystem. Daß eine Bewegung im Raum auch einer Bewegung in der Zeit bedeutet, haben wir ja schon festgestellt. Ausdruck (236) zeigt aber eindeutig, daß es egal ist, in welche Richtung man sich bewegt, die zeitliche Richtung ist immer dieselbe und der natürlichen Zeitrichtung entgegengesetzt (wegen r^2). Dies bedeutet aber noch etwas anderes: Jeder Beobachter hat den Eindruck, daß er sich im Zentrum des Universums befindet. Da der natürliche Zeitvektor immer größer ist als der durch die Bewegung verursachte, bewegt sich der Beobachter jedoch immer in der natürlichen Zeitrichtung (es sei denn, man fliegt schneller als c). Allerdings tritt bei einer Relativbewegung ($\beta r = \text{const}$) bzw. Beschleunigung ($\beta r \neq \text{const}$) eine Zeitverkürzung auf. Dies stimmt wieder sehr gut mit den Aussagen der SRT überein.

4.3.4.4. Lösung für verlustbehaftetes Medium mit Expansion und überlagerter Welle

4.3.4.4.1. Modell

Wir haben angenommen, daß das Vakuum nicht verlustfrei ist und einen spezifischen Leitwert κ_0 eingeführt. Damit konnten wir eine maximal rationelle Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen finden, die Anforderungen an eine Metrik erfüllt und auch nicht im Widerspruch zur SRT steht. Nach [1] geschieht die Ausbreitung von Photonen als Störung dieses Wellenfeldes. Weiterhin hatten wir festgestellt, daß diese genau mit Lichtgeschwindigkeit vonstattengeht. Dies stimmt sehr gut mit den Beobachtungen und Experimenten überein. Lösung 4.3.4.1. (Klassische Lösung für verlustfreies Medium) beschreibt sehr gut das Ausbreitungsverhalten von Photonen *ohne* Metrik, kann aber nicht die kosmologische Rotverschiebung erklären. Wollen wir dies tun, müssen wir eine andere Lösung favorisieren. Dazu kommt zunächst Lösung 4.3.4.2. (Klassische Lösung für verlustbehaftetes Medium) infrage.

Setzen wir hier nun einfach $\kappa = \kappa_0$, so erhalten wir ein Ergebnis, bei dem die Wellenausbreitung mit einer Geschwindigkeit nahe Null stattfindet und das ganz offensichtlich nicht mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Allerdings beschreibt auch Lösung 4.3.4.2. nur die Wellenausbreitung *ohne* Metrik.

Bei einer Ausbreitung als Störung des metrischen Wellenfeldes nach 4.3.4.3. liegen ganz andere Verhältnisse vor. Lösung 4.3.4.2. läßt sich ja bekanntlich auch als Lösung von Gleichung (72) ohne Expansion darstellen, die auf der Ersatzschaltung Bild 11 basiert, wenn $R_0 \rightarrow \infty$ strebt. Bei Lösung 4.3.4.3. ist R_0 abhängig vom Ort und von der Zeit und liegt ebenfalls nahe bei Unendlich. Rechnen wir mit dem Ansatz $\kappa = \kappa_0$ zurück, so erhalten wir einen Wert, der nahe bei Null liegt. Um wieder mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu kommen, müssen wir daher ein anderes Modell verwenden.

Im Abschnitt 4.3.2. hatten wir festgestellt, daß sich das MLE nach Bild 11 für überlagerte Signale wie ein Tiefpaß 2. Ordnung verhält. Daher wollen wir die Ersatzschaltung des MLE in einen Tiefpaß umwandeln. Die genaue Vorgehensweise ist in Bild 32 dargestellt. Wir trennen zunächst die Schaltung an der gekennzeichneten Stelle auf und klappen die Spule L_0 nach oben. Damit ist der eigentliche Tiefpaß (Mitte rechts) schon fertig. Allerdings beschreibt der darin enthaltene Verlustwiderstand R_0 nur die Verluste innerhalb des MLE. Wenn wir jetzt die Wellenausbreitung modellieren wollen, müssen wir viele solcher Elemente hintereinanderschalten (Bild 33).

Wir betrachten die Kopplung zweier Linienelemente im Abstand πr_0 , wobei der Kopplungsfaktor gleich 1 sein soll. Die Kopplung selbst geschieht über das Magnetfeld (Bild 2). Und genau bei dieser Kopplung kommt es zu weiteren Verlusten, die nicht durch den Widerstand R_0 beschrieben werden. Diesen kann man auch als alleinige Verluste der Kapazität C_0 auffassen. Für die Kopplungsverluste führen wir jetzt einen weiteren Widerstand R_{0R} ein, den wir bereits vom Bild 10 her kennen, und schlagen ihn der Induktivität L_0 zu, schließlich handelt es sich ja um die Verluste bei der induktiven Übertragung. Die Größe von R_{0R} errechnet sich allgemein nach (48). Ob wir jedoch dasselbe Ergebnis erhalten werden, müssen wir noch nachweisen. Für R_{0R} hatten wir den Widerstand eines Würfels mit der Kantenlänge r_0 angenommen und den Wert κ_0 dementsprechend definiert. Dieser Wert steht damit fest. Jetzt haben wir es aber mit einer Kantenlänge πr_0 zu tun und da kommt man dann normalerweise auf einen kleineren Wert $R_{0R} = 1/(\pi \kappa_0 r_0)$. Daß dies hier nicht so ist, liegt daran, daß wir nur die Wech-

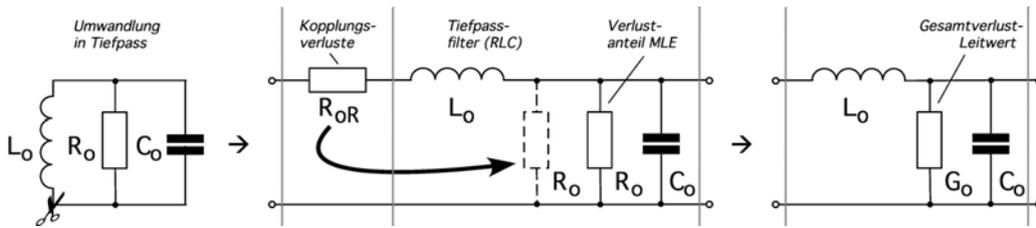


Bild 32
Umwandlung der Ersatzschaltung des MLE in einen Tiefpaß unter Berücksichtigung der zusätzlichen Kopplungsverluste

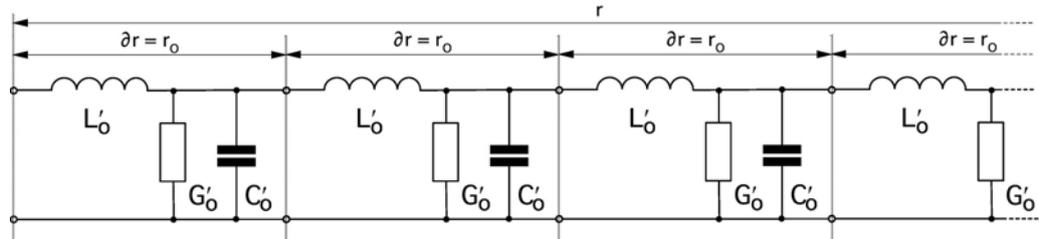


Bild 33
Leitungsersatzschaltung mit Parallelleitwert

selwirkung zweier einzelner MLEs betrachten wollen. Innerhalb einer Kugel mit dem Durchmesser πr_o , die Welle breitet sich ja kugelförmig aus, befinden sich aber im Durchschnitt π Linienelemente, wie man durch Abzählen leicht feststellen kann. Der Wirkungsquerschnitt muß daher auch auf π Linienelemente aufgeteilt, der Querschnitt A zusätzlich durch π dividiert werden. Mit $A = \pi r_o^2$ kommt man dann wieder genau auf (48) rechts.

Den Widerstand R_{oR} wandeln wir nun noch mit Hilfe von (47) in einen weiteren parallelen Verlustwiderstand R_o um und fassen beide zum Gesamtverlustleitwert G_o zusammen, wobei $G_o = 2/R_o$ gilt. Bild 32 Mitte und rechts sind äquivalent.

4.3.4.4.2. Näherungslösung

Zuerst wollen wir überprüfen, ob man nicht Lösung 4.3.4.2. verwenden kann, wenn man κ_o substituiert. Dies ist in der Tat der Fall. Allerdings erhalten wir hier keine Konstante, da R_o nicht konstant ist. Dazu führen wir einen Ersatzwert κ_{oR} ein. Mit Hilfe von (53), (59), (218) und (247) erhalten wir:

$$R_{oR} = \frac{1}{\kappa_o r_o} \quad r_1 = \frac{1}{\kappa_o Z_o} \quad r_o = r_1 Q_o = \sqrt{\frac{2t}{\kappa_o \mu_o}} \quad R_{oR} = \sqrt{\frac{\mu_o}{2\kappa_o t}} \quad (261)$$

$$R_o = \frac{Z_o^2}{R_{oR}} = Z_o Q_o \quad G_o = \frac{2}{R_o} = \frac{2}{Z_o Q_o} = \kappa_{oR} \frac{r_o^2}{r_o} = \kappa_{oR} r_o \quad (262)$$

$$\kappa_{oR} = \frac{2}{Z_o Q_o r_o} = \frac{2}{Z_o R} = \frac{2}{Z_o 2ct} = \frac{\epsilon_o}{t} \quad \kappa_{oR} = 2\epsilon_o H = \frac{2\kappa_o}{Q_o^2} \quad (263)$$

R ist der Wellradius $2ct$. Setzen wir jetzt (263) in (176) ein, so erhalten wir für die komplexe Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} und den Feldwellenwiderstand \underline{Z}_F :

$$\underline{c} = c \sqrt{\frac{j\omega t}{1 + j\omega t}} \quad \underline{Z}_F = Z_o \sqrt{\frac{j\omega t}{1 + j\omega t}} \quad (264)$$

Die Lichtgeschwindigkeit wird jetzt erst in unendlicher Zeit erreicht. Dennoch liegt die Ausbreitungsgeschwindigkeit *nahe* bei c . Der Restbetrag wird durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c}_M der Metrik aufgefüllt, so daß die Gesamtgeschwindigkeit wieder gleich c ist, was ja

eine Grundannahme dieser Arbeit war. Dasselbe Ergebnis erhält man auch aus der Lösung der Telegraphengleichung [5] (265) für den eingeschwungenen Zustand ($c_1=0$) unter Einsetzen der Werte für C_0 , L_0 , G_0 sowie $R_0=0$. Bild 33 zeigt die zugehörige Ersatzschaltung. Zusätzlich leiten wir jetzt noch nach ∂r ab, d.h. jedes Tiefpaßglied repräsentiert jetzt die Eigenschaften eines Leitungsabschnitts der Länge ∂r . Aus den diskreten Bauelementen werden die Kapazitäts-, Induktivitäts- und Leitwertbeläge C'_0 , L'_0 und G'_0 . Da das Vakuum in diesem Modell eine finite Struktur mit der kleinsten Länge r_0 hat, gilt $\partial r \rightarrow r_0$. Glücklicherweise ist r_0 klein genug, so daß wir mit dem Differenzenquotienten arbeiten können. Für die Beläge erhalten wir dann $C'_0=C_0/r_0=\epsilon_0$, $L'_0=L_0/r_0=\mu_0$ und $G'_0=\epsilon_0/t=\kappa_{OR}$. Die Naturkonstanten ϵ_0 , μ_0 und der Ersatzwert κ_{OR} sind damit identisch mit dem Kapazitäts-, Induktivitäts- und Leitwertbelag unserer „Leitung“, d.h. des Vakuums.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + c_1 \frac{\partial u}{\partial r} + c_2 \frac{\partial u}{\partial t} + c_3 u \quad \text{mit} \quad (265)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{L'_0 C'_0}} \quad c_1 = 0 \quad c_2 = -\frac{R'_0}{L'_0} - \frac{G'_0}{C'_0} \quad c_3 = -\frac{G'_0 R'_0}{L'_0 C'_0} \quad R'_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - L'_0 C'_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (C'_0 R'_0 + G'_0 L'_0) \frac{\partial u}{\partial t} - G'_0 R'_0 u = 0 \quad \text{analog für } i \quad (266)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = R'_0 i + L'_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad -\frac{\partial i}{\partial r} = G'_0 u + C'_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (267)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial i}{\partial t} \quad -\frac{\partial i}{\partial r} = \frac{\epsilon_0}{t} u + \epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial t} \quad (268)$$

Dies entspricht im allgemeinen einer verlustbehafteten Leitung. Wegen $\mathbf{E}=-\mathbf{u}/r_0$ bzw. $\mathbf{H}=-\mathbf{i}/r_0$ erhält man nach Division durch r_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \hat{=} \quad \text{rot } \mathbf{E} \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} = \left(\kappa_{OR} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{E} \quad \hat{=} \quad \text{rot } \mathbf{H} \quad (269)$$

Auf diese Art lassen sich direkt die MAXWELLSchen Gleichungen ableiten. Im Unterschied zu 4.3.4.2. wird hier der Parameter κ_{OR} aber stetig kleiner. Die Lösung selbst ist nicht verlustfrei. Es tritt ein von Null verschiedener Dämpfungsfaktor auf, der auf den variablen Parameter κ_{OR} zurückzuführen ist. Deshalb spricht man auch von einer parametrischen Dämpfung. Für den Leitungs-/Feldwellenwiderstand ($\underline{Z}_L = \underline{Z}_F$) erhalten wir ausgehend von (266):

$$\underline{Z}_L = \sqrt{\frac{R'_0 + j\omega L'_0}{G'_0 + j\omega C'_0}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu_0}{\epsilon_0/t + j\omega \epsilon_0}} = Z_0 \sqrt{\frac{j\omega t}{1 + j\omega t}} \quad (270)$$

Dies ist dieselbe Lösung wie (264). Wegen $Z_0 = \mu_0 c$ gilt auch der Ausdruck für \underline{c} . Insgesamt handelt es sich um eine eigenständige Lösung mit anderen Eigenschaften als die bisher vorgestellten. Da keine diskreten Bauelemente involviert sind, geht die Dämpfung vollkommen rauschfrei vonstatten. Die Lösung ist verzerrungsfrei. Damit kommt es auch zu keiner Streuung. Aufgrund des aktuell niedrigen Wertes von κ_{OR} ($2,1779 \cdot 10^{-29} \text{ Sm}^{-1}$), ist die Dämpfung heute nicht nachweisbar. Dies erweckt den Anschein, die Wellenausbreitung würde nach der klassisch verlustfreien Lösung ablaufen. Diese gilt genaugenommen aber nur in einem Universum ohne Expansion ($\kappa_0 = \kappa_{OR} = 0$) und stellt einen Spezialfall der hier vorgestellten Lösung dar. Als nächstes wollen wir die Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} eingehender betrachten.

IV. *Das metrische Wellenfeld verhält sich für überlagerte elektromagnetische Strahlungsfelder wie eine Leitung mit variablen Koeffizienten. Die Lösung verhält sich in erster Näherung wie die verlustfreie klassische Vakuumlösung der MAXWELLSchen Gleichungen.*

$$\underline{c} = \underline{c}_M + \underline{c}_\lambda \qquad \underline{c} = c \left(\sqrt{\frac{1}{j2\omega_0 t}} + \sqrt{\frac{j\omega t}{1+j\omega t}} \right) \quad (271)$$

Wir betrachten nun die Betragsfunktion:

$$c^2 = c_M^2 + c_\lambda^2 \qquad c^2 = c^2 \left(\frac{1}{2\omega_0 t} + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega t}\right)^2}} \right) \quad (272)$$

Diesen Ausdruck erhält man auch aus dem MLE (259) nach Division durch dt^2 mit $c^2 = ds^2/dt^2$. c_M ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik. Die überlagerte Welle bewegt sich damit immer rechtwinklig zur Metrik mit exakt c (Bild 34). Nach Umstellen von (271) erhalten wir:

$$\omega t = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2\omega_0 t}} \right)^2 - 1}} \qquad \omega = \frac{2H}{\sqrt{\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2\omega_0 t}} \right)^2 - 1}} \quad (273)$$

Da es sich bei Ausdruck (273) um eine Näherungslösung handelt, wollen wir versuchen, ob er sich noch vereinfachen läßt. Mit $y = 1/(2\omega_0 t)$ erhalten wir für $2\omega_0 t \gg 1$:

$$\omega = \frac{2H}{\sqrt{\frac{2y - y^2}{1 - 2y + y^2}}} \approx 2H \sqrt{\frac{1 - 2y}{2y}} = 2H \sqrt{\frac{1}{2y} - 1} \quad (274)$$

Nach Substitution erhalten wir schließlich:

$$\omega = 2H \sqrt{\omega_0 t - 1} \approx \sqrt{2}H \sqrt{2\omega_0 t} \quad (275)$$

Wegen $H = 1/2t$ nimmt die Frequenz gemäß $\omega \sim t^{-3/4}$ ab. Uns interessiert vor allem die Wellenlänge $\lambda = \sqrt{2} \pi / \beta = \sqrt{2} \pi c / \omega$. Das Vorzeichen von (250) wurde vernachlässigt. Der Faktor $\sqrt{2}$ steht hier an-stelle von 2, wie auch schon bei λ_0 , um die bei der Definition der Näherungsformel von $\gamma(r)$ vorgenommene Drehung des Koordinatensystems um $\pi/4$ wieder aufzuheben. Wir erhalten dann:

$$\lambda = \pi \frac{c}{H} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0 t}} = \frac{\pi R}{\sqrt{2\omega_0 t}} \qquad \lambda \sim t^{3/4} \quad (276)$$

Hierzu müssen wir anmerken, daß wir für die bisherige Betrachtung den Expansionsmittelpunkt als Basis des Koordinatensystems angenommen haben, an dem eigentlich keine Länge definiert ist. Daraus ergeben sich für die beiden singulären Punkte weitere wesentliche Eigenschaften.

Für die räumliche Singularität (Expansionsmittelpunkt) gilt: Jede Länge, die man von diesem Punkt aus mißt, hat immer die Größe $r_1/2$. Jede Zeit, die man an diesem Punkt mißt, hat immer den Betrag T , jede Frequenz $2H$. Es handelt sich um einen Ereignishorizont. Er ist eine Senke des elektromagnetischen Feldes. Für die Näherung gilt $r=0$, $t=\infty$.

Für die zeitliche Singularität (Wellenfront) gilt: Jede Länge, die man von diesem Punkt aus mißt, hat immer die Größe $R/2$. Jede Zeit, die man an diesem Punkt mißt, hat immer den Betrag t_1 , jede Frequenz $2\omega_1$. Es handelt sich um einen Partikelhorizont. Er ist eine Quelle des elektromagnetischen Feldes. Für die Näherung gilt $r=\infty$, $t=0$.

Die räumliche Singularität eignet sich nur als Basis eines raumunabhängigen zeitlichen, die zeitliche Singularität als Basis eines zeitunabhängigen räumlichen Koordinatensystems. Als Basis eines vierdimensionalen raumzeitlichen Koordinatensystems sind beide Singularitäten gleichermaßen ungeeignet. Von der räumlichen Singularität aus gesehen, haben alle zeitartigen Vektoren die gleiche Frequenz und Wellenlänge. Dies müssen wir bei einer Koordinatentransformation auf unsere lokalen Koordinaten beachten. Es gilt $t=T+t'$ und für die Wellenlänge λ :

$$\lambda = \frac{2\pi Cc}{\sqrt{\tilde{Q}_0}} \frac{(\tilde{T} + t')}{\sqrt[4]{1 + \frac{t'}{\tilde{T}}}} = \frac{\pi \tilde{R} C}{\sqrt{\tilde{Q}_0}} \left(1 + \frac{t'}{\tilde{T}}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (277)$$

$$\lambda = \tilde{\lambda} \left(1 + \frac{t'}{\tilde{T}}\right)^{\frac{3}{4}} = \tilde{\lambda} \left(\sqrt{1 + \frac{t'}{\tilde{T}}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (278)$$

C ist eine beliebige Konstante, sie verschwindet bei einer Rücktransformation. Ausdruck (278) repräsentiert die zeitliche Abhängigkeit. Zur Bestimmung der räumlichen Abhängigkeit, müssen wir uns vergegenwärtigen, daß sich dieser Fall von den vorhergehenden λ_0 und r_0 unterscheidet.

Haben wir es bisher mit einem Wellenfeld zu tun gehabt, das sich an unterschiedlichen Orten in unterschiedlichen Zuständen (Größe von r_0 , Ausbreitungsgeschwindigkeit usw. — daher unterschiedliche Abhängigkeiten von Raum und Zeit) befindet, liegen hier die Verhältnisse anders. Es handelt sich um einen rein zeitartigen Vektor der sich überall mit derselben Geschwindigkeit, nämlich c ausbreitet. Damit ist die Abhängigkeit von Raum und Zeit identisch und folgt der selben Funktion. Auch $R/2$ expandiert zeitartig mit konstanter Geschwindigkeit c . Wir müssen also nur t durch r substituieren. Wir erweitern den Bruch in (278) mit $2c$ und erhalten:

$$\lambda = \tilde{\lambda} \left(1 + \frac{2ct'}{2c\tilde{T}}\right)^{\frac{3}{4}} = \tilde{\lambda} \left(1 + \frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (279)$$

Die überlagerte Welle verhält sich damit in Bezug auf Wellenlänge und Frequenz nicht wie die Metrik r_0 bzw. λ_0 . Aber auch zwischen r_0 und λ_0 bestehen ja Unterschiede. Es gibt aber noch weitere Differenzen. So ist der Abstand, den das Licht von der Quelle zum Beobachter zurücklegt, nicht identisch mit dem Abstand, den ein materieller Körper zurücklegen müßte. Letzterer beträgt maximal $R/2$, während im ersten Fall theoretisch beliebig große Entfernungen möglich sind. Dies ist eindeutig das Verhalten eines Partikelhorizonts. Wir bezeichnen die erste als zeitartige, die zweite als raumartige Entfernung (siehe auch Abschnitt 7.5.2.). Die Umrechnung geschieht folgendermaßen:

$$r_T = -\frac{r_R}{\sqrt{1 - \frac{4r_R^2}{R^2}}} \quad r_R = -\frac{r_T}{\sqrt{1 + \frac{4r_T^2}{R^2}}} \quad (280)$$

Beide Ausdrücke haben wir erhalten, indem wir eine Anleihe bei der SRT vorgenommen haben mit $c=R/(2t)$ und $v=r/t$. Mit Hilfe von (279) können wir auch eine Substitution für den Ausdruck β finden, der für Signale gilt, die der Metrik überlagert sind. Im Gegensatz zu (236),

das für die Metrik selbst gilt, erhalten wir wegen $\lambda=2\pi c/\omega=2\pi/\beta$ für das Phasenmaß β der überlagerten Welle (nicht identisch mit Phasenmaß der Metrik β_0):

$$\beta = \frac{\tilde{\omega}}{c} \left(1 + \frac{2r}{R}\right)^{-\frac{3}{4}} = \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi(r) \quad \text{mit} \quad \Xi(r) = \left(1 + \frac{2r}{R}\right)^{-\frac{3}{4}} \quad \Xi(t) = \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-\frac{3}{4}} \quad (281)$$

Die beiden rechten Funktionen führen wir zur besseren Darstellung ein. Bei der Ausbreitung überlagelter Wellen ist offensichtlich β nicht identisch mit α . Wir erhalten α und β aus (180, 181), indem man κ_0 durch κ_{0R} ersetzt

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega t}\right)^2} - 1 \right)} = \frac{\omega}{c} \sinh\left(\frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\omega t}\right) \quad (282)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega t}\right)^2} + 1 \right)} = \frac{\omega}{c} \cosh\left(\frac{1}{2} \operatorname{arsinh} \frac{1}{\omega t}\right) \quad (283)$$

Für $\omega t \gg 1$ außerhalb des Nahfeldes eines strahlenden Dipols (innerhalb gelten ohnehin andere Beziehungen) gilt mit Hilfe der Näherungen $\operatorname{arsinh} \varepsilon \approx \varepsilon$, $\sinh \varepsilon \approx \varepsilon$, $\cosh \varepsilon \approx 1 + \varepsilon^2/2$:

$$\alpha = \frac{1}{R} \quad \beta = \frac{\omega}{c} = \pm \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (284)$$

Hier erhalten wir für das Phasenmaß β ein abweichendes Ergebnis, nämlich dasselbe, wie bei der klassischen Lösung für ein verlustfreies Medium. Die kosmologische Rotverschiebung wird also nicht durch die elektrischen Eigenschaften der Leitung bzw. des Raumes, sondern durch die Leitung selbst verursacht. Man muß sich nur einmal folgendes vorstellen: Eine Leitung wird von einem Wechselstrom durchflossen. Es tritt eine bestimmte Wellenlänge auf. Ist nun diese Leitung aus einem ideal elastischen Material gefertigt und zieht man an einem Ende, so wird die Leitung gedehnt. Gleichzeitig kommt es auch zu einer Vergrößerung der Wellenlänge bei gleichzeitiger Verringerung der Leitungsgeschwindigkeit (insgesamt c).

Da $\alpha \neq 0$, tritt auch eine Dämpfung der Amplitude auf. Diese ist jedoch so gering, daß sie nur in kosmologischen Zeiträumen wirksam wird. Für die elektrische und magnetische Feldstärke gilt (Amplitudengang):

$$A = 20 \lg e^{-\frac{r}{R}} = -8,686 \frac{r}{R} \text{ dB} \quad (285)$$

$$A = 20 \lg e^{-\frac{t}{2T}} = -4,343 \frac{t}{T} \text{ dB} \quad (286)$$

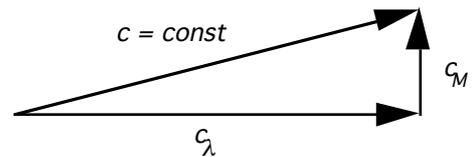


Bild 34
Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik und einer überlagerten elektromagnetischen Welle

bzw. $A' = -1Np/R$. Wegen $c = \text{const}$ sind beide Ausdrücke gleichwertig. Die Halbwertszeit (-6dB) liegt damit bei $1,382T$, die Halbwertsbreite bei $0,691R$. Die Dämpfung ist also so gering, daß sie größtenteils vernachlässigt werden kann, liegt sie doch weit unter der geometrischen Dämpfung. Sie tritt offensichtlich auch auf, wenn man die Metrik mit einbezieht. Dabei ist sie allerdings unabhängig von dieser, wie man aus (270) leicht erkennen kann. Der Einfluß der Metrik ist gegeben durch r_0 und, wie man sieht, kürzen sich alle r_0 heraus. Damit emuliert unsere Lösung zwar vollständig die Wellenausbreitung und $-$ dämpfung, nicht jedoch die kosmologische Rotverschiebung. Wir dividieren daher den Anteil β (das Dämpfungsmaß α ist nicht betroffen) durch den Klammerausdruck von (279) und erhalten damit unser Ersatz- γ , \underline{c} und \underline{Z}_L , es gilt $R = r_0 Q_0$:

$$\underline{\gamma} = \frac{\tilde{H}}{c} + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi(r) \quad \underline{c} = c \quad \underline{Z}_L = Z_0 \quad (287)$$

Ausdruck (287) ist das Fortpflanzungsmaß für Signale, die der Metrik überlagert sind ($\underline{\gamma} = \alpha + j\beta$). Es tritt natürlich noch die geometrische Dämpfung auf. Diese kann nicht vernachlässigt werden, ist hier aber nicht dargestellt. Die Lösung gilt für den gesamten Bereich $r \gg r_0$, jedoch nicht in der Nähe der (einer) zeitlichen Singularität und bei sehr starken Gravitationsfeldern (schwarze Löcher). Dazu benötigen wir die vollständige Lösung 4.3.4.4.4.

4.3.4.4.3. Ausbreitungsfunktion

Wir gehen von der Lösung der Telegrafengleichung für den eingeschwungenen Zustand aus [5]. Das Gleichungssystem wird auch als Leitungsgleichungen bezeichnet.

$$\begin{aligned} \underline{u}_2 \cosh \underline{\gamma} r + \underline{i}_2 \underline{Z}_L \sinh \underline{\gamma} r &= \underline{u}_1 \\ \frac{\underline{u}_2}{\underline{Z}_L} \sinh \underline{\gamma} r + \underline{i}_2 \cosh \underline{\gamma} r &= \underline{i}_1 \end{aligned} \quad (288)$$

Hierbei bedeutet der Index 1 das Eingangssignal, der Index 2 das Ausgangssignal. Wir substituieren nun folgendermaßen:

$$\underline{E}_1 = -\frac{\hat{u}_1}{r_0} \mathbf{e}_r e^{j\omega t} = \mathbf{E}_1 e^{j\omega t} \quad \underline{H}_1 = -\frac{\hat{i}_1}{r_0} \mathbf{e}_r e^{j\omega t} = \mathbf{H}_1 e^{j\omega t} \quad (289)$$

\mathbf{e}_r ist der Einheitsvektor. Weiterhin gilt $\underline{Z}_L \approx Z_0$ (eingeschwungener Zustand) und $\underline{u} = jZ_0 \underline{i}$. Dann erhalten wir als Lösung von (288):

$$\underline{E}_2 = \mathbf{E}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \underline{H}_2 = \mathbf{H}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \omega = \tilde{\omega} \Xi(t) \quad (290)$$

Diese Lösung ist identisch mit (165), berücksichtigt die kosmologische Rotverschiebung jedoch nur für $\underline{\gamma}$ (287). Wir müssen auch die zeitliche Abhängigkeit des Ausdrucks $j\omega t$, d.h. an der Signalquelle, beachten. Dazu dient der rechte Ausdruck von (290). Damit haben wir eine Lösung gefunden, die sowohl die Wellenausbreitung als auch die kosmologische Rotverschiebung erklärt.

4.3.4.4.4. Vollständige Lösung

Wollen wir eine Lösung finden, die auch in der Nähe sehr starker Gravitationsfelder und/oder der zeitlichen Singularität gilt, müssen wir mit der vollständigen Formel rechnen. Im Abschnitt 4.3.2. hatten wir festgestellt, daß der Raum auch über eine obere Grenzfrequenz verfügt. Lösung (290) zeigt Allpaßverhalten und spiegelt nicht die tatsächlichen Verhältnisse wider, ist aber für mehr als 99% aller Fälle ausreichend. Eine Lösung mit Berücksichtigung der Grenzfrequenz (nach unten ist die Frequenz tatsächlich nur durch das Weltalter begrenzt) muß eine vollständige Lösung sein. Versuchen wir daher, zunächst einen Ansatz für eine vollständige Lösung mit und ohne Berücksichtigung der Grenzfrequenz zu finden. Wir gehen von (271) aus, setzen jedoch den korrekten Ausdruck für die Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c}_M der Metrik ein (210):

$$\underline{c} = \underline{c}_M + \underline{c}_\lambda = c \quad \underline{c} = c \left(\frac{e^{-j\frac{1}{2} \arctan \theta}}{j\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{j\omega t}{1 + j\omega t}} \right) \quad (291)$$

Wir betrachten wieder die Betragsfunktion, wobei allerdings zu beachten ist, daß der Winkel α , der ja auch von θ abhängt, ungleich $\pi/2$ sein kann (Bild 96). Daher gilt der Cosinussatz:

$$c^2 = c_M^2 + c_\lambda^2 - 2c_M c_\lambda \cos \alpha \quad \frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} = \frac{c_M}{c} \quad (292)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega t}\right)^2}} - 2 \frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega t}\right)^2}} + \left(\frac{1}{\rho_0^2 \omega_0^2 t^2} - 1\right) = 0 \quad (293)$$

analog für $Z_0 = \mu_0 c$. Nach mehrmaliger Substitution erhalten wir folgende Lösungen:

$$\omega = 2H \sqrt{\frac{y^4}{1 - y^4}} \quad \text{mit}^1 \quad y = \beta_x^{-1} = \frac{c_M}{c} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \quad (294)$$

Die zweite Lösung gilt für raumartige Photonen. Es bestehen offenbar Ähnlichkeiten mit dem Kehrwert von (274). Der Wert von y strebt gegen 1 für $Q_0 \gg 1$. Da die eigentliche Übertragungsfunktion unabhängig von der Metrik ist, gilt (284) auch für die vollständige Lösung im Fernfeld $\omega t \gg 1$. Wir gehen weiter wie in 4.3.5.4.2. Dazu formen wir zunächst um:

$$\omega = \frac{2H}{\sqrt{\frac{1}{y^4} - 1}} = \frac{2H}{\sqrt{\left(\frac{c_M \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha}}{c}\right)^{-4} - 1}} \quad (295)$$

Der Übergang der exakten Lösung in die Näherungslösung wird im Abschnitt 5.3.1. genauer beschrieben. Der Faktor 2 ergibt sich dabei von selbst, d.h. bei der exakten Lösung geschieht die Drehung des Koordinatensystems automatisch durch die Funktion. Uns interessiert wieder die Wellenlänge $\lambda = 2\pi/\beta = 2\pi c/\omega$:

$$\lambda = \pi R \sqrt{\left(\frac{c_M \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha}}{c}\right)^{-4} - 1} \quad (296)$$

$$\lambda = C R(Q) \sqrt{\beta_x^4 - 1} \quad Q = \tilde{Q}_0 \left(1 + \frac{r}{c\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (297)$$

C ist wieder unsere beliebige Konstante zur Umrechnung auf das R^4 -Koordinatensystem. Die Funktion (671c) d.h. $R(Q)$ beschreibt die *genaue* Abhängigkeit von R in Bezug auf die Güte Q . Die Definition für A und B kann (209) entnommen werden. In der Näherung konnten wir noch $R(t) = 1 + t/\tilde{T}$ setzen. Bei der vollständigen, exakten Lösung ist dies nicht mehr möglich, da R sich gleichzeitig ausbreitet und expandiert (siehe Abschnitt 6.2.2.1.). Die Beziehung $R = r_1 Q_0^2$ gilt nur für $Q_0 \gg 1$ exakt. Die räumliche und zeitliche Abhängigkeit von R für Nullvektoren ist gegeben durch den rechten Ausdruck von (297). Weiterhin gilt $\tilde{Q} = \tilde{Q}_0$ und $R(\tilde{Q}) = \tilde{R}$. Wir erhalten schließlich für die Wellenlänge und die Frequenz:

$$\lambda = \tilde{\lambda} \frac{R(Q)}{R(\tilde{Q})} \sqrt{\frac{\beta_x^4 - 1}{\tilde{\beta}_x^4 - 1}} \quad \omega = \tilde{\omega} \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_x^4 - 1}{\beta_x^4 - 1}} \quad (298)$$

Alle Werte außer c und ω bzw. λ sind eine Funktion des Phasenwinkels/Güte $Q_0 = 2\omega_0 t$. Für je zwei Photonen- und Neutrinoarten definieren wir die acht Funktionen² $\Xi_x(r)$ und $\Xi_x(t)$:

$$\begin{aligned} \Xi_\gamma(r) = \Xi_\gamma(t) &= \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_\gamma^4 - 1}{\beta_\gamma^4 - 1}} & \Xi_{\tilde{\gamma}}(r) = \Xi_{\tilde{\gamma}}(t) &= \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_{\tilde{\gamma}}^4 - 1}{\beta_{\tilde{\gamma}}^4 - 1}} \\ \Xi_\nu(r) = \Xi_\nu(t) &= \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_\nu^4 - 1}{\beta_\nu^4 - 1}} & \Xi_{\tilde{\nu}}(r) = \Xi_{\tilde{\nu}}(t) &= \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_{\tilde{\nu}}^4 - 1}{\beta_{\tilde{\nu}}^4 - 1}} \end{aligned} \quad (299)$$

¹ Siehe (621) Relativistischer Dehnungsfaktor β mit $v=c_M$, siehe auch Abschnitt 5.3.

² Siehe Abschnitt 5.3.1.

Für das Einsetzen der richtigen Beziehungen (Substitution $r=ct$) ist der Leser selbst verantwortlich. Die Funktion ist aber explizit berechenbar. Es gelten (287) und (290). Dies ist die vollständige Übertragungsfunktion ohne Berücksichtigung der Grenzfrequenz. Sie gilt auch in starken Gravitationsfeldern und am „Rand“ des Universums.

4.3.4.4.5. Grenzfrequenz

Im Abschnitt 4.3.2. haben wir die Übertragungsfunktion eines einzelnen MLE der Größe r_0 herausgearbeitet. Die Lösung galt für das metrische Wellenfeld selbst, kann aber auch für überlagerte Wellen angewandt werden, wenn man die überlagerte Welle als Störung der Differentialgleichung (76) auffaßt. Dann müssen wir für σ in (144) aber nicht $2\omega_1$, sondern $2\omega_0$ einsetzen, es gilt $\Omega=0,5\omega/\omega_0$. Betrachten wir zuerst den durch ω_g bedingten Anteil am Gesamtdämpfungsfaktor α , der sich aus dem Amplitudengang $A(\omega)$ berechnen läßt. Übertragen wird nur der Realteil. In Verbindung mit dem Phasenwinkel ϕ_γ gilt bezogen auf die Länge $r_0=c/\omega_0$:

$$\Psi(\omega) = \ln \operatorname{Re}(A(j\omega)) = \ln(A(\omega) \cos \phi_\gamma) \quad (300)$$

$$\Psi(\omega) = \ln \left(\sqrt{1 + \Omega^2} e^{-\frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2}} \cos \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right) \right) \quad \text{mit} \quad \Omega = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_0} \left(1 + \frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{1}{2}} \Xi(r) \quad (301)$$

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2} \ln(1 + \Omega^2) - \frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} + \ln \cos \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right) \quad (302)$$

$$\alpha = \frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \quad \Psi(\omega) = 0 \quad \text{für} \quad \omega \ll \omega_0 \quad (303)$$

Der Anteil $\Psi(\omega)$ ist hier allerdings abhängig von Raum und Zeit, da er von Ω , dem Verhältnis zweier Frequenzen, abhängt, die sich beide nach unterschiedlichen Funktionen ändern ($\omega \sim t^{-3/4}$, $\omega_0 \sim t^{-1/2}$). Die Änderung kürzt sich damit nicht heraus. In der Näherung gilt $\Omega \sim t^{-1/4}$.

Die Grenzfrequenz hat aber auch Auswirkungen auf das Phasenmaß β . Je mehr man sich der Grenzfrequenz nähert, umso mehr macht sich die Phasenverschiebung ϕ_γ (149) bemerkbar, die durch die ansteigende Phasenlaufzeit T_{ph} (151) bei der Übertragung von einem MLE auf das nächste verursacht wird ($t_1 \rightarrow t_0$). Da sich die Phasenfehler summieren, kommt es zu einer Verzögerung der Phase insgesamt (Phasenverschiebung $\Phi(\omega)$). Diese verursacht ein Absinken der Ausbreitungsgeschwindigkeit auf Werte kleiner c (erlaubt), so daß ω unverändert bleibt, λ dagegen absinkt. Der kleinere Wert von $|c|$ wirkt sich auf α und β gleichermaßen aus. Bei den derzeit handhabbaren Frequenzen ist der Phasenfehler allerdings praktisch gleich Null. Bevor wir weiterrechnen können, müssen wir die Phasenverschiebung $\Phi(\omega)$ jedoch noch in Einheiten der Wellenlänge umrechnen. Es gilt $\Phi(\omega) = 1 + T_{ph}/T_\omega$, hierbei ist T_ω die Periodendauer von ω :

$$\Phi(\omega) = \left(1 + \frac{1}{2\pi} \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right) \right) \quad \Phi(\omega) = 1 \quad \text{für} \quad \omega \ll \omega_0 \quad (304)$$

Damit können wir folgende allgemeine Ausbreitungsfunktion für das Vakuum angeben:

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \underline{\mathbf{E}}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \underline{\mathbf{H}}_2 = \underline{\mathbf{H}}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \omega = \tilde{\omega} \Xi(t) \quad (305)$$

$$\underline{\gamma} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi(r) \right) \Phi(\omega) \quad |c| \leq c \quad |\underline{Z}_L| \leq Z_0 \quad (306)$$

Die vollständige Lösung mit Frequenzgang wird in den meisten Fällen nicht benötigt. Bei späteren Betrachtungen werden wir aber weiter mit (306) arbeiten. In den Fällen, in denen die Grenzfrequenz keine Rolle spielt, gilt $\Phi(\omega) = 1$.

Eine Eigenschaft der allgemeinen Ausbreitungsfunktion ist, daß elektromagnetische Wellen mit kritischer Frequenz, d.h. mit einer Frequenz in der Nähe von ω_0 , nur eine begrenzte Reichweite haben, da bei Annäherung an ω_0 sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeit absinkt, wobei beide dann differieren. Dies ist aber gleichbedeutend mit dem Auftreten von nichtlinearen Verzerrungen, so daß es schließlich zur völligen Auslöschung der Welle kommt. Das Verhalten ähnelt dem der Wellenausbreitung in einem ionisierten Plasma. Das Signal löst sich faktisch im Rauschen auf, ein Effekt, wie ihn jeder kennt, der schon mal Funkverkehr auf Kurzwelle beobachtet oder durchgeführt hat.

Theoretisch wären auch noch Wellen mit überkritischer Frequenz denkbar. Für diese gilt das im vorhergehenden Absatz gesagte. Auch eine Ausbreitung ohne Zuhilfenahme der Metrik funktioniert aufgrund der hohen Leitfähigkeit κ_0 nur über kurze Strecken. Wen es interessiert, der lese dazu bitte im Abschnitt 4.6.5. nach.

4.3.4.4.6. Die kosmologische Rotverschiebung

Aus (279) läßt sich direkt ein Ausdruck für die kosmologische Rotverschiebung ableiten:

$$\lambda = \tilde{\lambda} \left(1 + \frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{3}{4}} \quad z = \frac{\lambda - \tilde{\lambda}}{\tilde{\lambda}} = \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} - 1 \quad (307)$$

$$\left(1 + \frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{3}{4}} = z + 1 \quad \frac{2r}{\tilde{R}} = (z + 1)^{\frac{4}{3}} - 1 \quad (308)$$

$$r = \frac{\tilde{R}^\uparrow}{2} \left((z + 1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad v^\uparrow = c \left((z + 1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad (309a)$$

v ist die Fluchtgeschwindigkeit. In der Literatur wird nun häufig behauptet, daß diese auch größer als c sein könne. Dies ist aber nicht der Fall. Grund für die falsche Behauptung ist ein Kardinalfehler, der auch von Experten immer wieder gerne gemacht wird und, ich will mich hier nicht ausschließen, in der ersten Ausgabe auch von mir. Man setzt für \tilde{R} einfach den aktuellen Wert beim Beobachter ein, und erhält dann Fluchtgeschwindigkeiten größer c .

Als weiterer Fehlschluß ergibt sich dann, daß Signale mit $z > 1,28$ aus Gebieten hinter dem Ereignishorizont $\tilde{R} = 2c\tilde{T}$ kommen müßten, oder besser, sie müßten eine Strecke zurückgelegt haben, die länger als \tilde{R} ist. Dies steht allerdings im Widerspruch zu den Beobachtungen.

Solange die Beobachtungsmöglichkeiten auf kleinere z -Werte eingeschränkt waren, ist dies nicht so aufgefallen. Es sind aber inzwischen bereits Objekte mit einer Rotverschiebung $z = 6$ gefunden worden und die Rotverschiebung der kosmischen Hintergrundstrahlung hat sogar einen Wert von $z = (2Q_0)^{3/2} \approx 10^{90}$, wie im Abschnitt 4.6.4.2.3. beschrieben. Der Grund für die hohen Werte von z liegt nun aber nicht darin, daß das Universum in Wirklichkeit viel größer als angenommen ist — selbst wenn dies so wäre, könnte es keine Nullvektoren mit einer Länge größer $\tilde{R} = 2c\tilde{T}$ geben, da diese nach dieser Strecke an ihren Ausgangspunkt zurückkehren, d.h. in sich geschlossen sind.

Der eigentliche Fehler liegt in der Interpretation von (309a). Die Ausdrücke basieren nämlich auf der Ausbreitungsfunktion (290) und diese ist immer bezogen auf den Ausgangspunkt der Welle, die Signalquelle. Sie gilt damit immer nur für ausgehende Vektoren. Daher müssen wir für \tilde{R} immer den Wert an der Quelle, zum Zeitpunkt der Ausstrahlung, einsetzen und alle Abstände und die Geschwindigkeit v^\uparrow sind dann immer bezogen auf die Quelle. Die Expansion des Universums seit dem Zeitpunkt der Ausstrahlung ist nämlich schon in dem Exponenten $4/3$ enthalten, wie man aus (277) leicht erkennen kann. Dies gilt übrigens auch für Berechnungen nach dem klassischen Modell der Kosmologie, auch wenn der Exponent hier von $4/3$ abweichen kann. Aus diesem Grund habe ich beide Werte mit dem Aufwärtspfeil \uparrow für ausgehende Vektoren gekennzeichnet. Dieser erinnert etwas an das Schaltzeichen für eine Sendeantenne, was als Eselsbrücke dienen kann.

Nun kennen wir allerdings den genauen Wert von \tilde{R}^\uparrow nicht, ist er doch verknüpft mit der Entfernung der Quelle vom Beobachter, die wir eigentlich bestimmen wollen. Was wir aber kennen, ist der Wert \tilde{R}^\downarrow . Da die Abstände r^\uparrow und r^\downarrow sowie die Geschwindigkeiten c^\uparrow und c^\downarrow gleich groß sind, läßt sich eine einfache Beziehung finden, die mit dem Wert \tilde{R}^\downarrow beim Beobachter arbeitet. Wir machen folgenden Ansatz:

$$r = \frac{\tilde{R}^\uparrow}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = c (\tilde{T}^\downarrow - t) \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = c \left(\tilde{T}^\downarrow - \frac{r}{c} \right) \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad (309b)$$

$$r = \left(\frac{\tilde{R}^\downarrow}{2} - r \right) \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = \frac{\tilde{R}^\downarrow}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) - r \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad (309c)$$

Nach Auflösen nach r erhalten wir folgende Ausdrücke für r und v:

$$r = \frac{\tilde{R}^\downarrow}{2} \left(1 - (z+1)^{-\frac{4}{3}} \right) \quad v^\downarrow = c \left(1 - (z+1)^{-\frac{4}{3}} \right) \quad (309d)$$

Die Ausdrücke (309a) und (309d) ergeben das selbe Ergebnis wenn man die richtigen Werte einsetzt. Der Widerspruch ist damit gelöst. Dies ist jedoch noch nicht alles. Was auf den Wert r zutrifft, trifft auch auf \tilde{R} , \tilde{r}_0 , \tilde{H} , $\tilde{\omega}_0$ und $\tilde{\omega}$ in der Ausbreitungsfunktion zu, d.h. wenn man mit \tilde{R}^\downarrow arbeitet, müssen auch diese Werte korrigiert werden. Man arbeitet immer nur entweder mit den Werten an der Quelle oder mit denen beim Beobachter. In letzterem Fall müssen die Ausdrücke $\underline{\gamma}$ und ω mit einem Korrekturfaktor multipliziert werden. Für den Weltradius R gilt:

$$\tilde{R}^\uparrow = 2c(\tilde{T}^\downarrow - t) = 2c \left(\tilde{T}^\downarrow - \frac{r}{c} \right) = \tilde{R}^\downarrow - 2r = \tilde{R}^\downarrow - \tilde{R}^\downarrow \left(1 - (z+1)^{-\frac{4}{3}} \right) \quad (309e)$$

$$\tilde{R}^\uparrow = \tilde{R}^\downarrow \frac{1}{(z+1)^{\frac{4}{3}}} \quad \tilde{R}^\downarrow = \tilde{R}^\uparrow (z+1)^{\frac{4}{3}} \quad \tilde{H}^\uparrow = \tilde{H}^\downarrow (z+1)^{\frac{4}{3}} \quad \tilde{H}^\downarrow = \tilde{H}^\uparrow \frac{1}{(z+1)^{\frac{4}{3}}} \quad (309f)$$

Mit Hilfe von (308) läßt sich zeigen, daß der Ausdruck $(z+1)$ dem relativistischen Dehnungsfaktor β entspricht. Dann gilt weiter $(z+1)^{2/3} \sim \beta^{2/3} \sim Q_0^{-1}$ und aufgrund Tabelle 5:

$$\tilde{r}_0^\uparrow = \tilde{r}_0^\downarrow \frac{1}{(z+1)^{\frac{2}{3}}} \quad \tilde{r}_0^\downarrow = \tilde{r}_0^\uparrow (z+1)^{\frac{2}{3}} \quad \tilde{\omega}_0^\uparrow = \tilde{\omega}_0^\downarrow (z+1)^{\frac{2}{3}} \quad \tilde{\omega}_0^\downarrow = \tilde{\omega}_0^\uparrow \frac{1}{(z+1)^{\frac{2}{3}}} \quad (309g)$$

$$r_1^\uparrow = r_1^\downarrow = \frac{1}{\kappa_0 Z_0} \sim (z+1)^{\frac{0}{3}} = \text{const} \quad \omega_1^\uparrow = \omega_1^\downarrow = \frac{\kappa_0}{\epsilon_0} \sim (z+1)^{\frac{0}{3}} = \text{const} \quad (309h)$$

Eine Ausnahme bildet die Frequenz ω . Im Gegensatz zu $H \sim Q_0^{-2}$ bzw. $\omega_0 \sim Q_0^{-1}$ gilt $\omega \sim Q_0^{-3/2}$:

$$\tilde{\lambda}^\uparrow = \tilde{\lambda}^\downarrow \frac{1}{(z+1)} \quad \tilde{\lambda}^\downarrow = \tilde{\lambda}^\uparrow (z+1) \quad \tilde{\omega}^\uparrow = \tilde{\omega}^\downarrow (z+1) \quad \tilde{\omega}^\downarrow = \tilde{\omega}^\uparrow \frac{1}{(z+1)} \quad (309i)$$

Zur Korrektur von $\underline{\gamma}$ und ω betrachten wir als nächstes das Produkt αr :

$$\frac{\tilde{H}}{c} r = \frac{1}{\tilde{R}^\uparrow} \frac{\tilde{R}^\uparrow}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = \frac{1}{\tilde{R}^\downarrow} \frac{1}{(z+1)^{-\frac{4}{3}}} \frac{\tilde{R}^\downarrow}{2} \left(1 - (z+1)^{-\frac{4}{3}} \right) = \frac{1}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad (309j)$$

$$\frac{\tilde{\omega}_0}{c} r = \frac{1}{\tilde{r}_0^\uparrow} \frac{\tilde{R}^\uparrow}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) = \frac{1}{\tilde{r}_0^\downarrow} \frac{1}{(z+1)^{-\frac{2}{3}}} \frac{\tilde{r}_0^\downarrow \tilde{Q}_0^\uparrow}{2} \frac{\left(1 - (z+1)^{-\frac{4}{3}} \right)}{(z+1)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\tilde{Q}_0^\uparrow}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad (309k)$$

Die parametrische Dämpfung ist damit tatsächlich unabhängig vom Bezugssystem, genau, wie wir es bei der Lösung der Telegraphengleichung festgestellt hatten. Die übrigen Größen dagegen hängen vom jeweiligen Bezugssystem ab. Damit können wir unsere allgemeine Ausbreitungsfunktion für die Werte beim Beobachter definieren. Zuerst aber noch einmal korrekt mit Pfeilen für die Werte bei der Quelle:

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \underline{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{H}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \omega = \tilde{\omega}^\uparrow \Xi(t) \tag{309l}$$

$$\underline{\gamma} = \left(\left(\frac{\tilde{\mathbf{H}}^\uparrow}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0^\uparrow}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}^\uparrow}{c} \Xi(r) \right) \Phi(\omega) \quad |\underline{c}| \leq c \quad |\underline{Z}_L| \leq Z_0 \tag{309m}$$

Diese Ausdrücke gelten auch für durchgehende Signale, die in die Zukunft weiterverfolgt werden. In diesem Fall setzt man anstelle der Werte an der Quelle die des Beobachters ein, tut also so, als wäre der Beobachter die Quelle. Der Abstand r ist jetzt allerdings definiert gegenüber dem Beobachter. Das gleiche gilt dann auch für z. Am Ort des Beobachters gilt z=0, was nicht gerade günstig ist, da z im allgemeinen absolut definiert ist, und zwar anhand der Rotverschiebung der Absorptionslinien von Sternen. Daher ist eine Ausbreitungsfunktion, bei der die Werte des Beobachters eingesetzt werden, r und z dagegen gegenüber der Quelle definiert sind, besser geeignet. Diese ergibt sich zu:

$$\underline{\mathbf{E}}_2 = \mathbf{E}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \underline{\mathbf{H}}_2 = \mathbf{H}_1 e^{j\omega t - \underline{\gamma} r} \quad \omega = \tilde{\omega}^\downarrow (z+1) \Xi(t) \tag{309n}$$

$$\underline{\gamma} = \left(\left(\frac{\tilde{\mathbf{H}}^\downarrow}{c} (z+1)^{\frac{4}{3}} + \frac{\tilde{\omega}_0^\downarrow}{c} (z+1)^{\frac{2}{3}} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}^\downarrow}{c} (z+1) \Xi(r) \right) \Phi(\omega) \quad \dots \tag{309o}$$

Nachdem wir die tatsächlichen Verhältnisse noch einmal ausführlich dargestellt haben, dies war einfach notwendig, kommen wir nun zum eigentlichen Thema. In Tabelle 1, die aus [27] auszugsweise entnommen wurde, sind einige quasistellare Radioquellen mit Entfernungsangaben dargestellt. Die mit einem * markierten Werte wurden original übernommen, der Rest berechnet.

* Quelle	* z	Fluchtgeschwindigkeit [v/c] [↑]	Fluchtgeschwindigkeit [v/c] [↓]	* Distanz photo- metrisch [Gpc] [↑]	Distanz [Gpc] Gl. (309a) [H=76] [↑]	Distanz [Gpc] Gl. (309a) [H=55] [↑]	* Distanz geo- metrisch [Gpc] [↓]	Distanz [Gpc] Gl. (309d) [H=76] [↓]
3C 273B	0,158	0,108	0,089	0,470	0,427	0,588	0,420	0,484
3C 48	0,367	0,259	0,170	1,100	1,023	1,408	0,800	0,928
3C 47	0,425	0,302	0,188	1,270	1,194	1,644	0,900	1,025
3C 279	0,536	0,386	0,218	1,610	1,528	2,103	1,070	1,187
3C 147	0,545	0,393	0,220	1,630	1,555	2,141	1,090	1,198
3C 254	0,734	0,542	0,260	2,200	2,143	2,950	1,310	1,416
3C 138	0,759	0,567	0,265	2,280	2,222	3,050	1,340	1,441
3C 196	0,871	0,553	0,283	2,610	2,583	3,555	1,450	1,542
3C 245	1,028	0,783	0,305	3,080	3,100	4,267	1,590	1,662
CTA 102	1,037	0,771	0,306	3,110	3,130	4,298	1,600	1,668
3C 287	1,055	0,806	0,309	3,160	3,190	4,391	1,620	1,681
3C 208	1,109	0,852	0,315	3,320	3,372	4,642	1,660	1,716
3C 446	1,404	1,110	0,345	4,200	4,392	6,046	1,870	1,877
3C 298	1,436	1,139	0,347	4,300	4,506	6,202	1,890	1,892
3C 270,1	1,519	1,214	0,354	4,550	4,802	6,610	1,940	1,929
3C 191	1,946	1,612	0,382	5,830	6,376	8,777	2,160	2,078
3C 9	2,012	1,675	0,385	6,030	6,627	9,122	2,190	2,097

Tabelle 1: Einige quasistellare Radioquellen

Für die Interpretation der Meßergebnisse hat der Autor, wie sollte es auch anders sein, das klassische Modell der Kosmologie mit verschiedenen Parametern (parabolisch und elliptisch) verwendet. Da das elliptische Modell mit q=1 noch am ehesten dem von mir verwendeten ähnelt, wurden die elliptischen Werte übernommen. Daher darf man auch keine genaue

Übereinstimmung mit den von mir berechneten Werten erwarten. Um den Fehler in der ersten Ausgabe genauer zu dokumentieren, wurden in Spalte 3 auch die mit dem falschen Wert R berechneten Fluchtgeschwindigkeiten $>c$ dargestellt. Spalte 4 enthält die richtigen Werte.

In Spalte 7 sind die falsch berechneten Entfernungen nach (309a) für $H=55 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ dargestellt und man erkennt, daß die Zahlenwerte zu hoch sind, H ist zu niedrig angesetzt. Man sieht weiterhin, der Autor von [27] hat offensichtlich den selben Kardinalfehler begangen. Allerdings sind die Werte gegenüber der photometrischen Entfernung in der logarithmischen Darstellung nur verschoben (Bild 35), was einer Multiplikation entspricht. Der entsprechende Faktor wurde mit statistischen Methoden ermittelt. Er beträgt $1,38 \pm 0,08$. Das ergibt einen wahrscheinlichen Wert des HUBBLE-Parameters von $75,9 \pm 4,4 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ (Spalte 6). Der Korrelationskoeffizient zu den photometrischen Werten liegt bei 0,792. Der Wert liegt innerhalb der mit modernen Methoden bestimmten Grenzen für H . Offensichtlich kann man auch mit falschen Daten richtige Resultate erzielen wenn man zwei falsche Ergebnisse vergleicht...

Alle Ergebnisse von Tabelle 1 sind in Bild 35 dargestellt. Man sieht, daß die korrekt nach Ausdruck (309d) berechneten Werte bei $H=75,9 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ ebenfalls gut mit der vom Autor von [27] berechneten geometrischen Entfernung (Lichtweg) übereinstimmen. Der Korrelationskoeffizient zwischen diesen beiden Datenreihen beträgt 0,795. Dies entspricht in etwa dem der falsch berechneten Werte. Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir daher mit einem Wert des HUBBLE-Parameters von $75,9 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ arbeiten. Dieser wird jedoch im Abschnitt 7.5. noch einmal präzisiert.

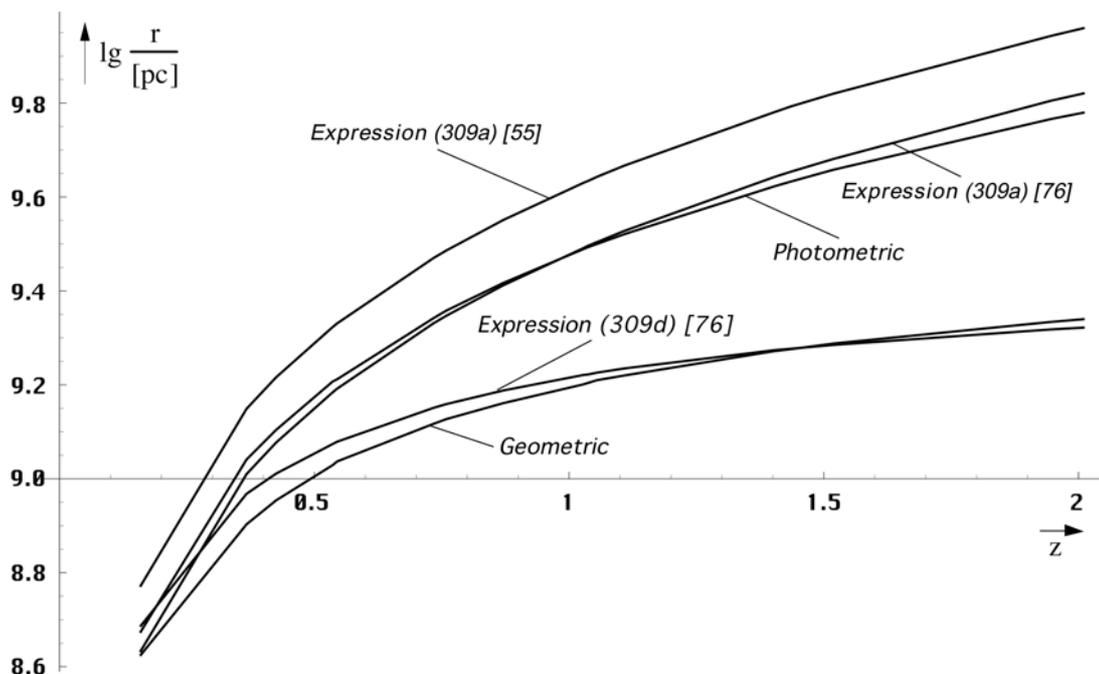


Bild 35
Entfernung in Abhängigkeit von der
Rotverschiebung für elliptische Modelle ($q=1$)

Der Unterschied im Anstieg beider Kurvenpaare ist auf die Verwendung des klassischen Modells der Kosmologie zurückzuführen.

4.3.4.4.7. Der HERTZsche Dipol

Im Abschnitt 4.3.4.4.2. haben wir einen Ausdruck für den Leitungswellenwiderstand des Vakuums herausgearbeitet (264). Weiterhin haben wir festgestellt, daß sich die räumliche Singularität wie ein HERTZscher Dipol verhält. Der HERTZsche Dipol ist die Schnittstelle zwischen einem elektronischen System und dem Vakuum. Beide können auch als Vierpol dargestellt werden. Wir erwarten also Verhältnisse ähnlich wie bei einem Spannungsteiler. Aus [20] entnehmen wir die Gesetzmäßigkeiten im Nahfeld eines strahlenden HERTZschen Dipols. Das Koordinatensystem ist in Bild 36 dargestellt.

HERTZsche Feldgleichungen (komplex) → Strahlungsfeld im Punkt P:

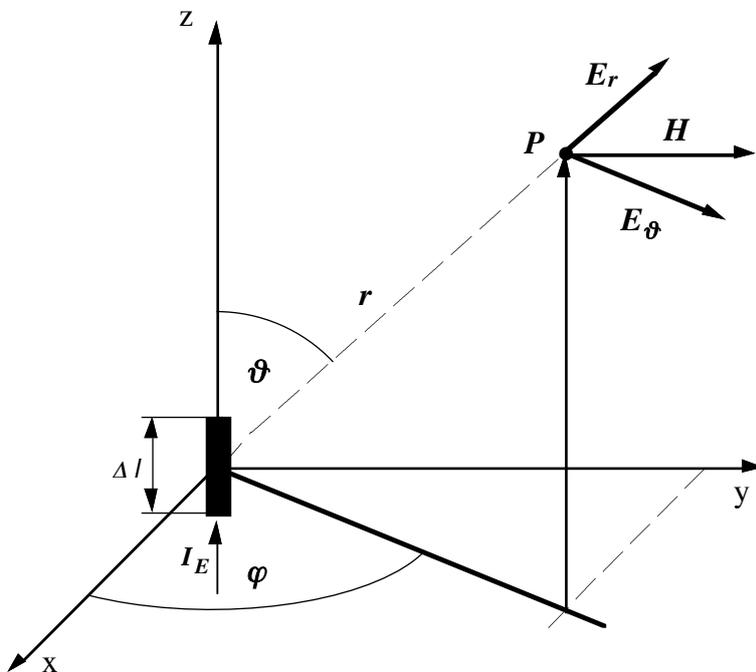
$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{I_E \Delta l}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j\omega \frac{r}{c}} \mathbf{e}_\varphi \quad (310)$$

[EBENE] [RAUM] [AUSBREITUNGSRICHTUNG] [EINHEITSVEKTOR]

Für die beiden elektrischen Feldstärkevektoren gilt:

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \frac{I_E \Delta l}{4\pi} \frac{2 \cos \vartheta}{j\omega \epsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} \right) e^{-j\omega \frac{r}{c}} \mathbf{e}_r \quad (311)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\vartheta = \frac{I_E \Delta l}{4\pi} \frac{\sin \vartheta}{j\omega \epsilon_0 r^3} \left(1 + j \frac{\omega r}{c} - \left(\frac{\omega r}{c} \right)^2 \right) e^{-j\omega \frac{r}{c}} \mathbf{e}_\vartheta \quad (312)$$



$\Delta l \ll \lambda$

Bild 36
Der HERTZsche Dipol

Betrachtet man nun diese Gleichungen genauer, so erkennt man, daß sie den von uns gefundenen Ausdruck für den Feldwellenwiderstand \underline{Z}_F des Vakuums (264) implizit enthalten und zwar im räumlichen Anteil. Wir versuchen daher, diese Gleichungen als Funktion von \underline{Z}_F darzustellen, ohne den physikalischen Inhalt zu verändern. Es gilt $\omega r/c = \omega t$ sowie $I = U/Z_0$:

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{1}{4\pi} \frac{I_E}{r} \frac{\Delta l}{r} \frac{Z_0^2}{Z_0^2 - \underline{Z}_F^2} \sin \vartheta e^{-j\omega t} \mathbf{e}_\varphi \quad (313)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \frac{1}{2\pi} \frac{U_E}{r} \frac{\Delta l}{r} \frac{Z_0^2}{\underline{Z}_F^2} \cos \vartheta e^{-j\omega t} \mathbf{e}_r \quad (314)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_\vartheta = \frac{1}{4\pi} \frac{U_E}{r} \frac{\Delta l}{r} \left(\frac{Z_0^2}{\underline{Z}_F^2} + \frac{Z_0^2}{Z_0^2 - \underline{Z}_F^2} \right) \sin \vartheta e^{-j\omega t} \mathbf{e}_\vartheta \quad (315)$$

Dies sind die Beziehungen für einen HERTZschen Dipol der Länge Δl im Anpassungsfall (Z_0). Es bestehen tatsächlich gewisse Ähnlichkeiten mit der Spannungsteilerregel bei komplexen Widerständen. Setzt man jetzt anstelle von Z_F den Wert Z_0 ein (klassisch verlustfreie Lösung), würden wir ein Ergebnis erhalten, bei dem die Welle nahtlos in den Raum übertritt. Da dies aber in der Wirklichkeit nicht beobachtet wird, ist dies ein Hinweis darauf, daß die Wellenausbreitung eher nach dem hier vorgestellten Modell abläuft. Im Fall der räumlichen Singularität wird aufgrund der besonderen Eigenschaften $\Delta l=R/2$ bzw. $K/2$. Dadurch kommt es dazu, daß der Dipol gleiche Abmessungen in alle Richtungen aufweist, er mutiert zum Kugelstrahler. Daher ist das metrische Wellenfeld nicht polarisiert.

4.4. Aktuelle Werte der universellen Naturkonstanten

Nachdem wir den Wert der HUBBLE-Konstanten aktualisiert haben, ist es angebracht, eine Übersicht aller davon abhängigen und unabhängigen universellen Naturkonstanten anzugeben (Tabelle 2). Unveränderliche sind mit den Symbolen (\bullet°) gekennzeichnet. Man sieht, daß es eigentlich nur fünf fundamentale (\bullet) universelle Naturkonstanten gibt (μ_0 , ε_0 , κ_0 , \hbar und k).

Die Lichtgeschwindigkeit ist zwar auch eine echte Konstante, jedoch nicht fundamental, da sie sich aus μ_0 und ε_0 kombinieren läßt, ebenso r_1 , ω_1 und t_1 . Der Initialwert des PLANCKschen Wirkungsquantums \hbar_i sowie einige andere Werte werden später erstmalig beschrieben. Diese und alle anderen sind keine echten Konstanten und lassen sich durch Kombination der fünf fundamentalen Werte sowie der entsprechenden Raum-Zeitkoordinaten darstellen.

Konstante	Symbol	C	Wert	Maßeinheit
Lichtgeschwindigkeit	c	°	$2,99792458 \cdot 10^8$	$m s^{-1}$
Induktionskonstante	μ_0	•	$4\pi \cdot 10^{-7}$	$Vs A^{-1}m^{-1}$
Influenzkonstante	ε_0	•	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$	$As V^{-1}m^{-1}$
Leitfähigkeitskonstante	κ_0	•	$1,23879 \cdot 10^{93}$	$A V^{-1}m^{-1}$
Boltzmannkonstante	k	•	$1,380658 \cdot 10^{-23}$	$J K^{-1}$
Plancksches Init.quantum	\hbar_i	•	$7,95297 \cdot 10^{26}$	$J s$
Plancksches Wirk.quantum	\hbar	•	$1,05457266 \cdot 10^{-34}$	$J s$
Gravitationskonstante (Init.)	G_1	•	$1,55558 \cdot 10^{-193}$	$m^3kg^{-1}s^{-2}$
Gravitationskonstante (Nwt.)	G	•	$6,67259 \cdot 10^{-11}$	$m^3kg^{-1}s^{-2}$
Poynting-Vektor Metrik (Init.)	S_1	•	$3,3907 \cdot 10^{426}$	$W m^{-2}$
Poynting-Vektor Metrik	S_0	•	$1,38959 \cdot 10^{122}$	$W m^{-2}$
Feinstrukturkonstante	α	•	$7,2973530 \cdot 10^{-3}$	1
Güte/Phase Metrik (g_{00}^{-1})	Q_0	•	$7,5419 \cdot 10^{60}$	1
Plancksche Masse	m_0	•	$2,17661 \cdot 10^{-8}$	kg
Plancksche Energie	W_0	•	$1,95624 \cdot 10^9$	J
Plancksche Länge	r_0	•	$1,61612 \cdot 10^{-35}$	m
Plancksche Zeiteinheit	t_0	•	$2,6954 \cdot 10^{-44}$	s
Kreisfrequenz Metrik	ω_0	•	$1,85501 \cdot 10^{43}$	s^{-1}
Wellenwiderstand Vakuum	Z_0	°	$376,73 \approx 2\pi \cdot 60$	Ω
Grenzfrequenz Vakuum	ω_1	°	$1,3991 \cdot 10^{104}$	s^{-1}
Kleinste Zeiteinheit Vakuum	t_1	°	$3,57372 \cdot 10^{-105}$	s
Kleinste Länge Vakuum	r_1	°	$2,14127 \cdot 10^{-96}$	m
Hubblekonstante	H	•	$75,9 \pm 4,4$	$km s^{-1}Mpc^{-1}$
Hubblekonstante	(ω_{-1})	•	$2,45972 \cdot 10^{-18}$	s^{-1}
Gesamtweltalter	2T	•	$1,291818 \cdot 10^{10}$	a
Lokales Weltalter	T	•	$6,45909 \cdot 10^9$	a
Lokales Weltalter	(t_{-1})	•	$2,03275 \cdot 10^{17}$	s
Lokaler Weltradius	R	•	3,9500	Gpc
Lokaler Weltradius	(r_{-1})	•	$1,21881 \cdot 10^{26}$	m

Tabelle 2: Universelle Naturkonstanten

4.5. Ergänzende Betrachtungen zur Metrik

Im Abschnitt 4.3.4.3. haben wir mit (243) einen Ausdruck für die zeitliche und räumliche Abhängigkeit der PLANCKschen Elementarlänge gefunden, die zumindest lokal einen Maßstab für die Größenverhältnisse (Abstand) darstellt. Hierbei sei noch einmal darauf verwiesen, daß dies nicht für die Größe materieller Körper gilt, die sich nicht verändert, da es sich laut unserer Annahme [1] um eigenständige kugelsymmetrische Lösungen der Feldgleichungen handelt, die nach dem BIRKHOFF-Theorem immer stationär sind.

Es geht uns also vor allem um die Abstände materieller Körper untereinander. Diese folgen einer Funktion, die wiederum vom betrachteten Abstand abhängig ist, da sich Größe und Expansionsgeschwindigkeit der PLANCKschen Elementarlänge mit steigendem Abstand vom Koordinatenursprung ändern. Hier sollen nur Abstände betrachtet werden, deren Anfangspunkt im Ursprung liegt. Von großer Bedeutung für weitergehende Betrachtungen ist auch die Anzahl der MLE entlang einer gedachten Linie mit der Länge r (Wellenzahlvektor Λ). Hierbei unterscheiden wir zwei Fälle: Wellenzahlvektor bei konstantem r und r bei konstantem Wellenzahlvektor. Letzterer Fall entspricht am ehesten den bestehenden Verhältnissen, da man davon ausgehen kann, daß kein Punkt gegenüber anderen Punkten im Weltall ausgezeichnet ist. Die durchschnittliche Relativgeschwindigkeit gegenüber der Metrik am Koordinatenursprung ist gleich Null. Dies sollte dann überall so sein. Die Expansion des Universums ist damit nur zurückzuführen auf die Expansion der Metrik. Dies entspricht dem Fall konstanter Wellenzahlvektor.

4.5.1. Konstanter Abstand

Für kleine Abstände r ist der Wellenzahlvektor aufgrund der Gitterkonstante πr_0 folgendermaßen definiert:

$$\Lambda = \frac{1}{\pi r_0} r \mathbf{e}_r \quad (316)$$

\mathbf{e}_r ist der Einheitsvektor. Im folgenden betrachten wir jedoch nur den Betrag Λ . Für größere Abstände müssen wir Λ durch $d\Lambda$, r durch dr ersetzen und für r_0 den entsprechenden Ausdruck (243) einsetzen:

$$d\Lambda = \frac{1}{\pi \tilde{r}_0} \frac{dr}{(1+t')^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad \text{mit } t' = \frac{t}{\tilde{T}} \quad (317)$$

Zur Lösung substituieren wir folgendermaßen (es gilt $\tilde{R}/\tilde{r}_0 = \tilde{Q}_0$):

$$d\Lambda = \frac{3}{2\pi} \frac{\tilde{R}}{\tilde{r}_0} \frac{r'^2}{a^2 - r'^2} dr' \quad \text{mit } r' = \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } a^2 = (1+t')^{\frac{1}{2}} \quad (318)$$

$$\Lambda = \frac{3}{2} \frac{\tilde{Q}_0}{\pi} \int \frac{r'^2}{a^2 - r'^2} dr' = \frac{3}{2} \frac{\tilde{Q}_0}{\pi} \left(a \operatorname{artanh}^* \frac{r'}{a} - r' \right) \quad \text{*) } \operatorname{arcoth} \quad (319)$$

$$\Lambda = \frac{3}{2} \frac{\tilde{Q}_0}{\pi} \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{artanh} \frac{\left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{4}}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{1}{3}} \right) \quad \Lambda_0 = \tilde{Q}_0 \quad (320)$$

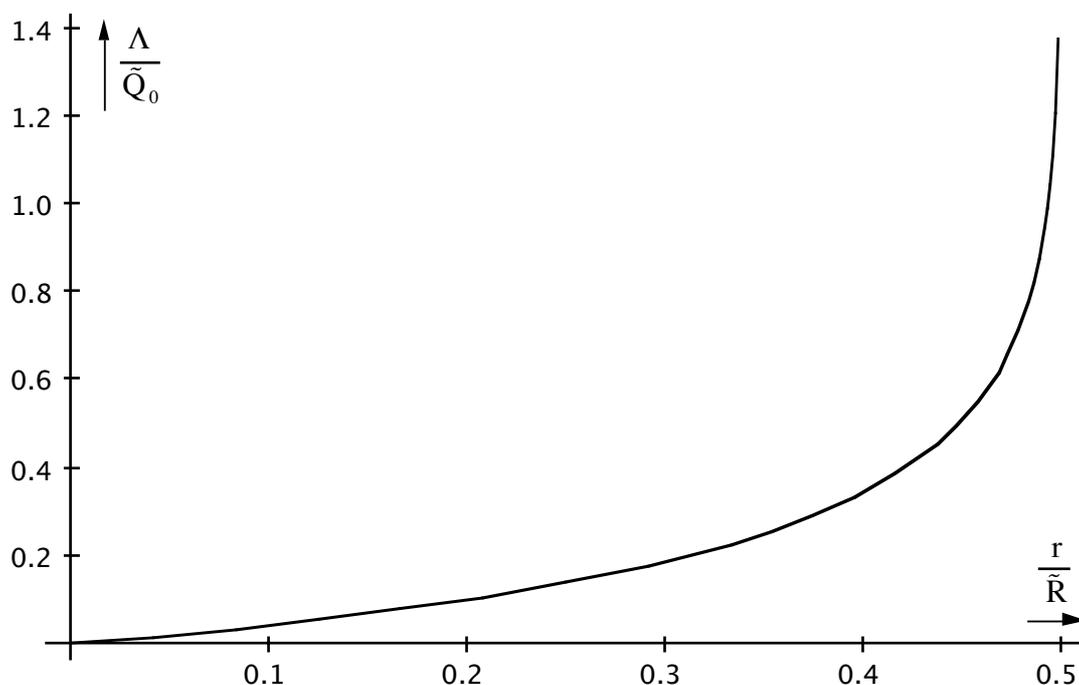


Bild 37
Wellenzahlvektor als Funktion
des Abstands für $t=0$

Die Wellenzahl folgt der im Bild 37 dargestellten Funktion. Nähert man sich dem halben Weltradius (cT), so geht der Wellenzahlvektor gegen unendlich. Dennoch ist die Wellenzahl auch eine Funktion der lokalen Güte. Will man also eine Wellenzahl Λ_0 definieren, die nicht unendlich ist, nimmt man nur einen bestimmten Teil des Weltradius und berechnet dafür die Wellenzahl. Diese ist dann auch eine Funktion der Zeit. Praktischerweise nimmt man den Radius, an dem die Funktion (320) gleich der lokalen Güte ist. Der Wert liegt bei $0,49383R$, das sind $98,7661\%$ des Abstands zur Zeitlichen Singularität (cT).

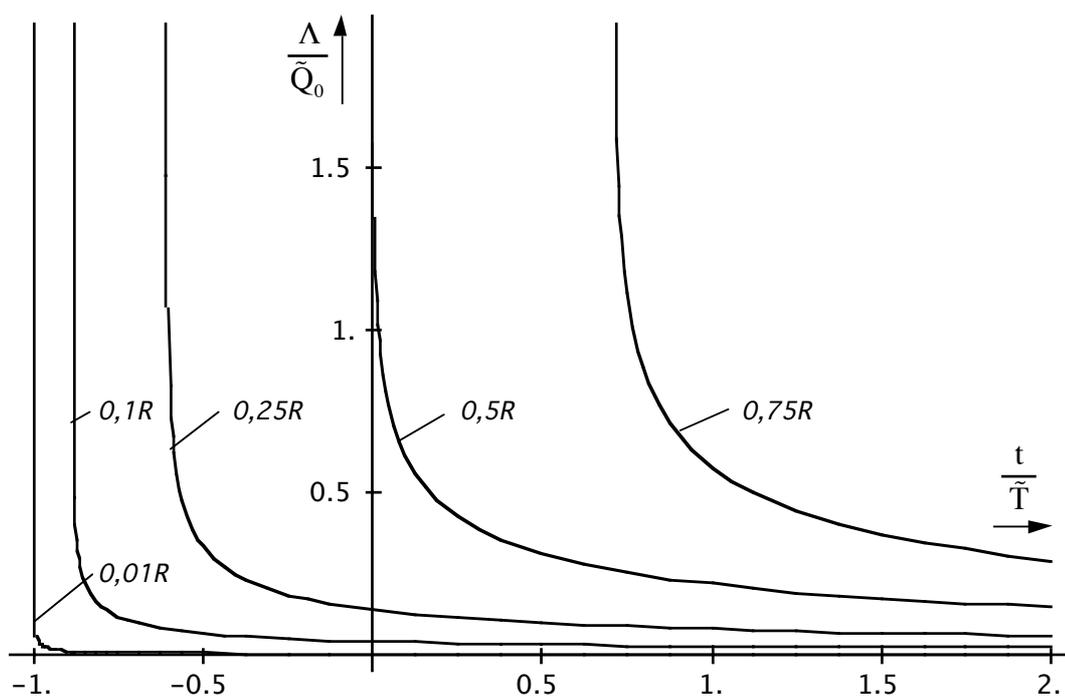


Bild 38
Zeitliche Abhängigkeit des Wellenzahlvektors
für verschiedene Abstände r

Die zeitliche Abhängigkeit für verschiedene r ist im Bild 38 dargestellt. Je größer die betrachtete Länge, umso später der Zeitpunkt, ab dem der Wellenzahlvektor definiert ist. Dies ist leicht zu verstehen, kann ich doch eine Länge erst dann als existent ansehen, wenn der Weltradius größer oder gleich dieser Länge ist. Ist der Weltradius kleiner, so existiert eine solche Länge nicht. Daher sind Längen größer als $0,5R$ derzeit nicht definiert und die Funktion (320) hat erst ab einem Wert von z.B. $t=0,75T$ eine reelle Lösung, $t=0$ ist der jetzige Zeitpunkt. Insgesamt nimmt die Wellenzahl ab. Dies resultiert daraus, daß wir eine konstante Länge betrachten bei expandierendem r_0 . So kommt es dazu, das am Ende ständig MLE's "herausgerollt" werden, was zur Erniedrigung des Wellenzahlvektors führt.

4.5.2. Konstanter Wellenzahlvektor

4.5.2.1. Lösung

Wir gehen zunächst vom rechten Ausdruck von (320) für $t=0$ ($a=1$) aus. Dieser gibt die Größe des Wellenzahlvektors zum jetzigen Zeitpunkt an und zu jedem Zeitpunkt, wenn wir ihn als konstant annehmen wollen. Wir suchen also nach der Funktion $F(a, \tilde{r}')$, die nichts anderes ist, als die zeitliche Abhängigkeit einer gegebenen Länge \tilde{r}' .

$$\Lambda = \frac{3 \tilde{Q}_0}{2 \pi} (\operatorname{artanh} \tilde{r}' - \tilde{r}') = \frac{3 \tilde{Q}_0}{2 \pi} \left(a \operatorname{artanh} \frac{\tilde{r}' F}{a} - \tilde{r}' F \right) = \text{const} \quad (321)$$

Explizites Auflösen durch Differenzieren und Nullsetzen (hierbei wird der linke Ausdruck Null) führt zur trivialen Lösung $F=0$. Ansonsten kann nur eine implizite Lösung gefunden werden als Lösung der Gleichung:

$$a \operatorname{artanh} \frac{\tilde{r}' F}{a} - \operatorname{artanh} \tilde{r}' - \tilde{r}' (F - 1) = 0 \quad r(t) = \tilde{r}' F^3(t) \quad (322)$$

oder in »Mathematica«-Notation $F1[t,r]$:

```
Fa1=Function[a=FindRoot[
#1*ArcTanh[#2/#1*x]-ArcTanh[#2]-#2*(x-1)==0,{x,1},
MaxIterations->30]; (Round[(x/.a)*10^7]/10^7)^3];
F1=Function[Fa1[(1+#1)^.25,(2*#2)^(1/3)]]; (323)
```

Hierbei ist besonderer Wert auf das Verfahren (Tangentenverfahren) und den Startwert zu legen. Gleichung (322) hat nämlich noch eine zweite Lösung. Diese, $F2[t,r]$, erhält man folgendermaßen (Sekantenverfahren):

```
Fa2=Function[a=FindRoot[
#1*ArcTanh[#2/#1*x]-ArcTanh[#2]-#2*(x-1)==0,{x,{-30,30}},
MaxIterations->30]; (Round[(x/.a)*10^7]/10^7)^3];
F2=Function[Fa2[(1+#1)^.25,(2*#2)^(1/3)]]; (324)
```

Der zeitliche Verlauf der ersten Lösung ist in Bild 39 dargestellt, sie ist positiv. Für die erste Lösung gibt es nur einen beschränkten Definitionsbereich. Dieser ist einerseits begrenzt durch die räumliche Singularität (Weltradius kleiner als betrachtete Länge), andererseits durch die zeitliche Singularität (Das Ende befindet sich nun hinter dem SCHWARZSCHILD-Radius). Außerhalb dieser Grenzen erhält man mit (323) die zweite Lösung. Je größer die betrachtete Länge um so kleiner der Definitionsbereich.

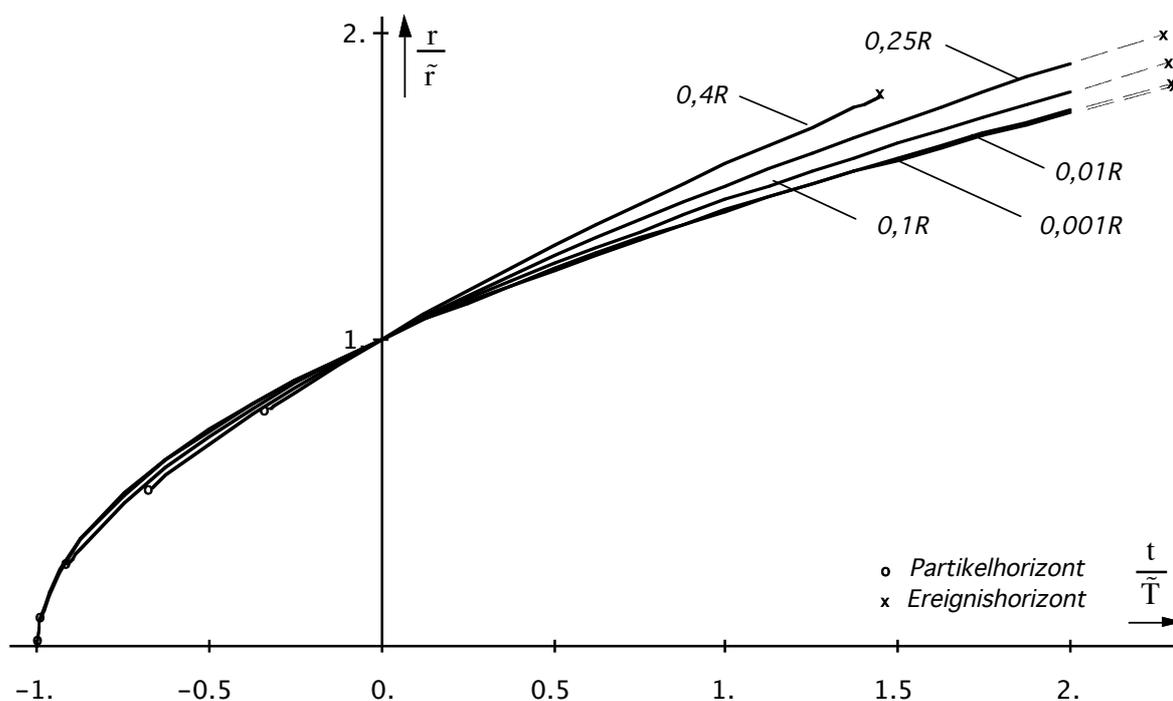


Bild 39
Zeitliche Abhängigkeit eines
gegebenen Abstands r (erste Lösung)

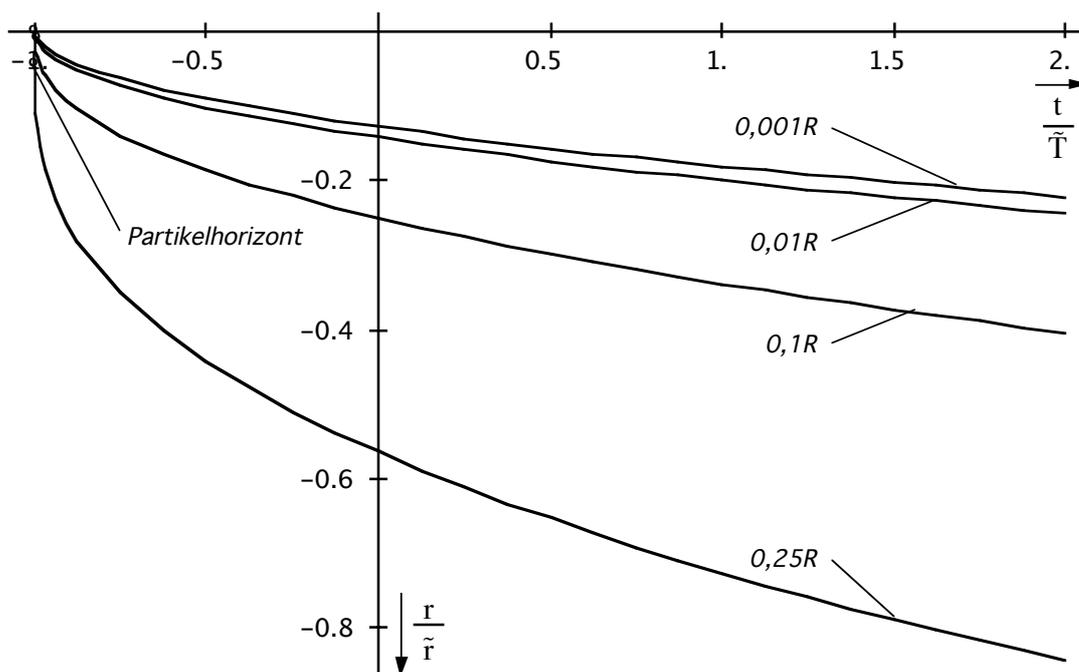


Bild 40
Zeitliche Abhängigkeit eines
gegebenen Abstands r (zweite Lösung)

Die zweite Lösung¹ (Bild 40), eigentlich eine Doppellösung, ist negativ. Welche physikalische Bedeutung diese hat, kann hier nicht genauer gesagt werden. Aufgrund der mit Annäherung an den lokalen Weltradius zunehmenden Krümmung ist unser Modell geschlossen für raumartige Vektoren. Damit müßte man einen bestimmten Punkt auch erreichen können, wenn man sich in die entgegengesetzte Richtung bewegt. Aufgrund dessen, daß der Punkt an dem wir uns befinden, der Koordinatenursprung ist, würde sich aber die Frage stellen, was denn eine negative

¹ Anmerkung: Die Zweitlösung erhält man nur unter Verwendung von Mathematica 1.0. Alle höheren Versionen geben bei der Berechnung eine mathematische Fehlermeldung aus (Verzweigungspunkt), Iterationsverfahren konvergieren zuerst, um dann doch zu divergieren. Somit kann die Existenz einer Zweitlösung nicht als gesichert gelten.

Entfernung eigentlich bedeutet. Möglich wäre z.B. auch eine Interpretation als Entfernung bei Bewegung entgegen der natürlichen Zeitrichtung. Dazu müßte man sich dann aber schneller als das Licht bewegen. Ergibt sich hier die Antwort auf die Frage, wo und ob man denn wieder herauskommt, wenn man in eine zeitliche Singularität (schwarzes Loch) stürzt — sollte man dann noch leben? Vielleicht weiß jemand anderes eine gültige Interpretation. Als Hilfestellung ist im Bild 41 noch das Verhältnis von zweiter und erster Lösung $-r_2/r_1$ zum Zeitpunkt $t=0$ ($r_1=r$), also heute angegeben. Man erkennt, daß es sich bei der Zweitlösung eindeutig um einen raumartigen Vektor handelt, da er bei $R/2$ gegen unendlich geht.

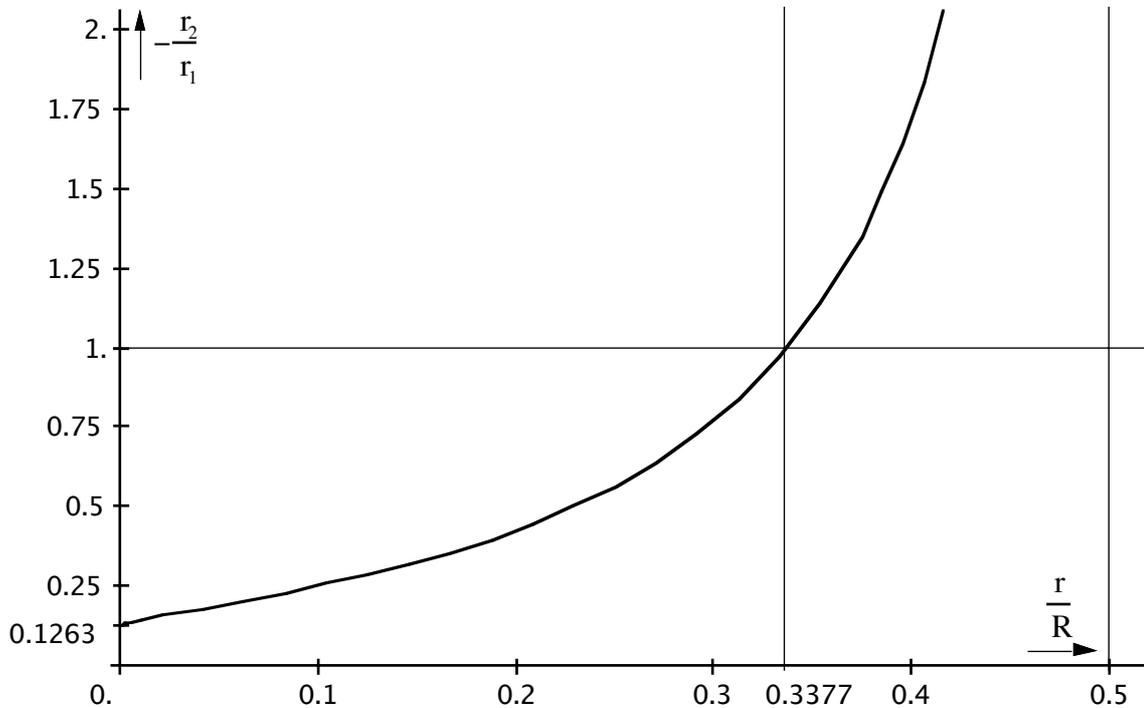


Bild 41
Verhältnis von zweiter und
erster Lösung bei $t=0$

4.5.2.2. Näherungslösungen

Eine einfache Lösung für kleine r ergibt sich explizit aus (322) unter Anwendung der zwei ersten Glieder der TAYLOR-Reihe für die Funktion artanh :

$$r \approx \tilde{r} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\omega_0 t \frac{\tilde{r}}{\tilde{Q}_0} \quad \text{für } \tilde{r} \leq 0,01 \tilde{R} \quad (325)$$

Diese entspricht genau dem Verhalten der PLANCKschen Elementarlänge (MLE) und ist gültig bis ca. $0,01R$. Für größere Abstände ist der Anstieg größer. Wir untersuchen zunächst den Verlauf in der Umgebung von $t=0$ (Bild 42) sowie den Anstieg $\Delta r/\Delta t$ mit $\Delta t=2 \cdot 10^{-3}$. Bei Wurzelfunktionen ist der Anstieg (dr/dt) in diesem Punkt gleich dem Exponenten m in:

$$r = \tilde{r} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^m \quad (326)$$

Dieser ist im Bild 43 dargestellt für beide Lösungen. Für die erste Lösung liegt er im Bereich von $1/2 \dots 3/4$. Mit der Funktion `Fit[]` lassen sich Näherungsformeln verschiedener Genauigkeit für den Exponenten m finden (erste Lösung):

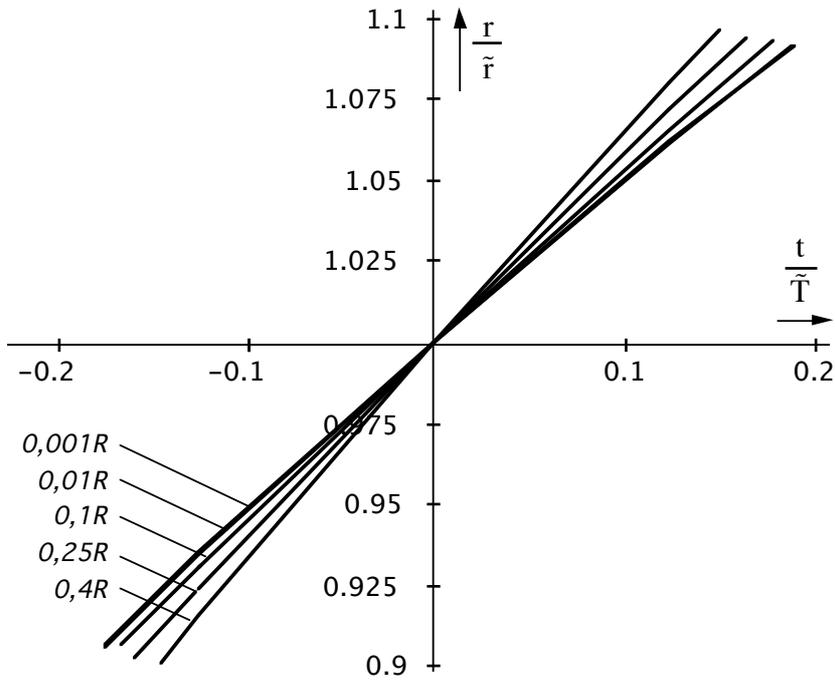


Bild 42
Zeitlicher Verlauf der ersten
Lösung in der Nähe von $t=0$ für
verschiedene Abstände r

$$m \approx 0,510614 + 0,180781 \frac{r}{\tilde{R}} + 0,52561 \frac{r^2}{\tilde{R}^2} \quad (327)$$

$$m \approx 0,5 + 0,545339 \frac{r}{\tilde{R}} - 1,39032 \frac{r^2}{\tilde{R}^2} + 2,55941 \frac{r^3}{\tilde{R}^3} \quad (328)$$

$$m \approx 0,5 + 0,61738 \frac{r}{\tilde{R}} - 3,55318 \frac{r^2}{\tilde{R}^2} + 18,4405 \frac{r^3}{\tilde{R}^3} - 42,6787 \frac{r^4}{\tilde{R}^4} + 38,0884 \frac{r^5}{\tilde{R}^5} \quad (329)$$

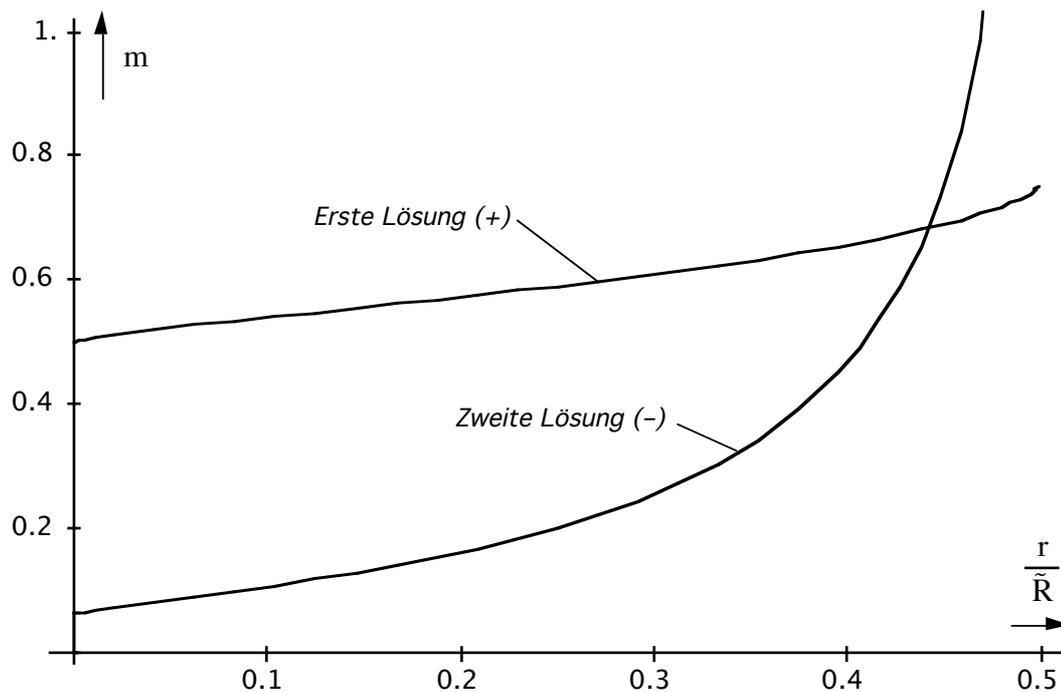


Bild 43
Anstieg beider Lösungen in der Nähe
von $t=0$ als Funktion des Abstands r

Gleichung (329) ist sehr genau und eignet sich auch für Berechnungen mit höheren Ansprüchen. Allerdings muß man hierbei den eingeschränkten Definitionsbereich beachten, der von der Näherungslösung nicht automatisch mit emuliert wird. Es sei hier noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich bei den in diesem Abschnitt betrachteten Entfernungen und Geschwindigkeiten um raumartige Vektoren handelt, die nichts mit den zeitartigen Vektoren zu tun haben, wie wir sie im Abschnitt 4.3.4.4.6. Kosmologische Rotverschiebung betrachtet haben.

4.5.2.3. Der HUBBLE-Parameter

Haben wir den HUBBLE-Parameter bisher nur für kleine Längen und die PLANCKsche Elementarlänge (r_0) definiert, die den Beziehungen für einen Strahlungskosmos ($m=1/2$) folgen, müssen wir unsere Aussagen für größere Abstände korrigieren. Mit $m=m(r)$ wird die HUBBLE-Konstante $H=\dot{r}/r$ damit auch eine Funktion des Abstands:

$$H = \frac{m}{\tilde{T} + t} \qquad H_0 = \frac{m}{\tilde{T}} \qquad (330)$$

Den Verlauf zeigt Bild 44. Die von diesem Modell untersuchte Metrik ist eine nichtlineare Metrik. Damit hat sich die Frage erübrigt, ob es sich bei unserem Universum um einen Strahlungs- oder Staubkosmos handelt. Die Antwort lautet — sowohl, als auch. Es ist eine Frage der Größe des betrachteten Gebiets. Für kleine Längen verhält sich der Abstand wie ein Strahlungskosmos, zwischen Null und $0,5R$ wie ein Staubkosmos, bei $0,5R$, wie der Metrik überlagerte Photonen.

Letzterer Abstand ist jedoch kein Gebiet unendlicher Rotverschiebung, wie in anderen Modellen. Dies sieht man sehr gut am Verzögerungsfaktor q . Der Verlauf ist in Bild 45 dargestellt.

$$q = -\frac{r\ddot{r}}{\dot{r}^2} = \frac{1}{m} - 1 \qquad (331)$$

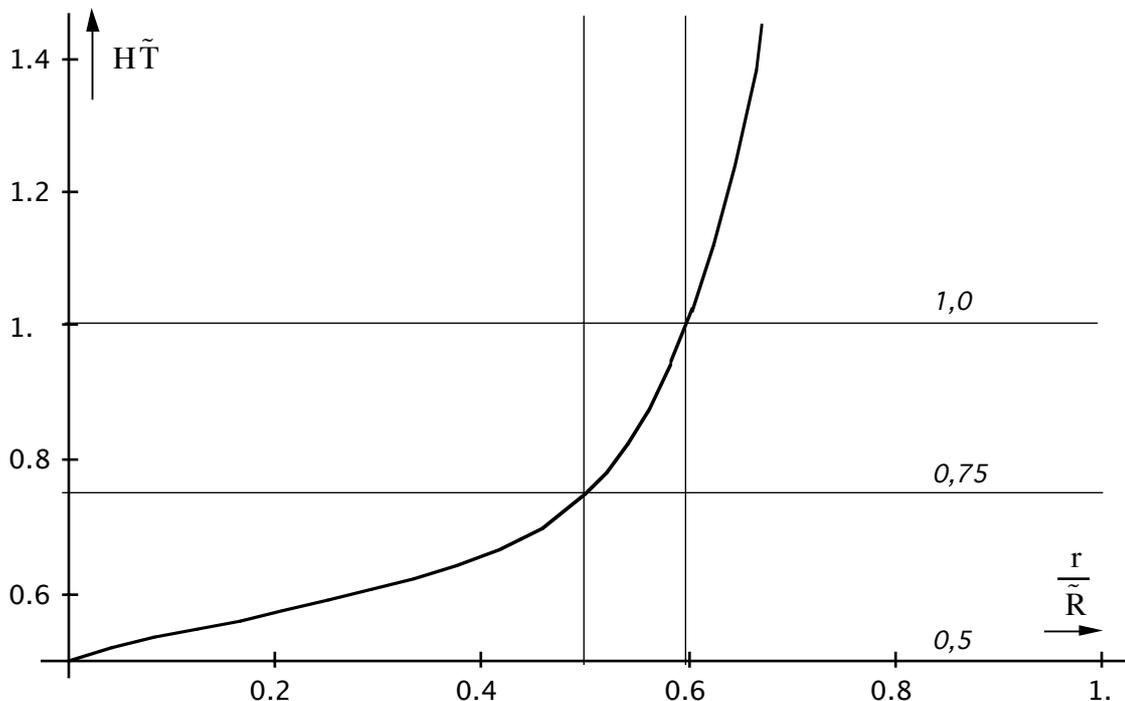


Bild 44
HUBBLE-Parameter als Funktion des
Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.

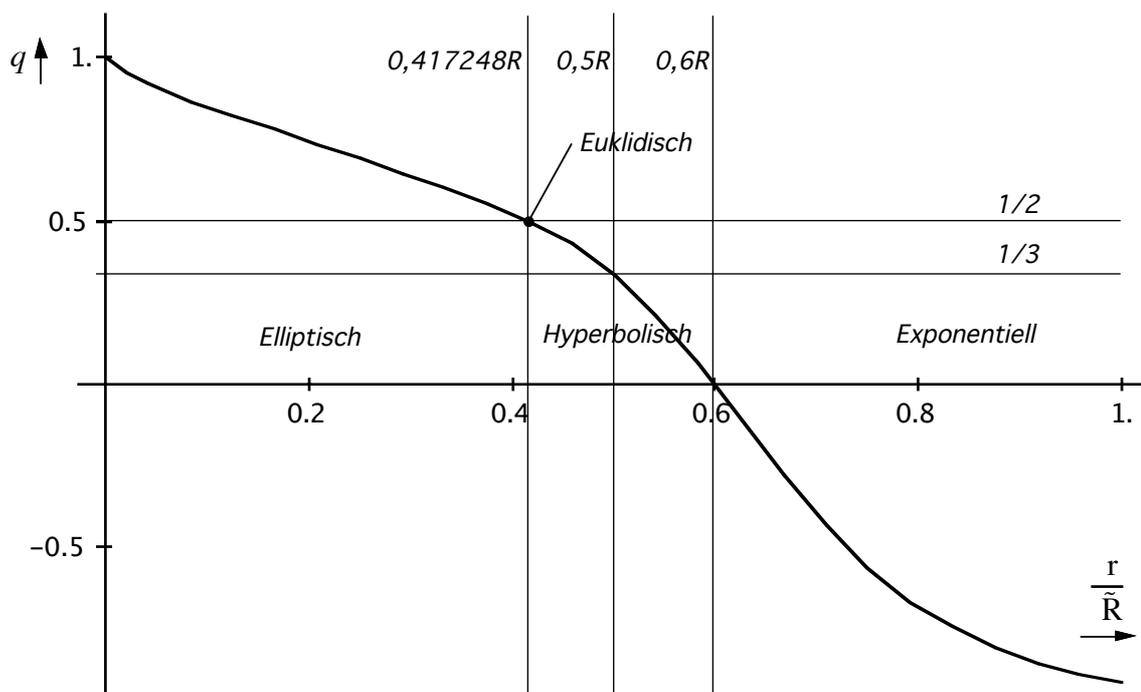


Bild 45
Verzögerungsfaktor als Funktion des
Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.

Die Expansionsgeschwindigkeit $H_0 r$ als Funktion des Abstands zeigt Bild 46. Die Lichtgeschwindigkeit wird schon in einem wesentlich geringeren Abstand als bei den Standardmodellen erreicht. Während die Größe von r_0 bei $0,5R$ gegen Null geht, ist die Expansionsgeschwindigkeit an diesem Punkt nicht unendlich und kleiner als c . Dies läßt vermuten, daß das gesamte Universum wesentlich größer als cT ist, zumal Gleichung (319) für $r>R$ mit arcoth anstelle artanh eine Fortschreibung von Λ gestattet. Eine Expansionsgeschwindigkeit von c entspricht einer Rotverschiebung von $z=0,763301$.

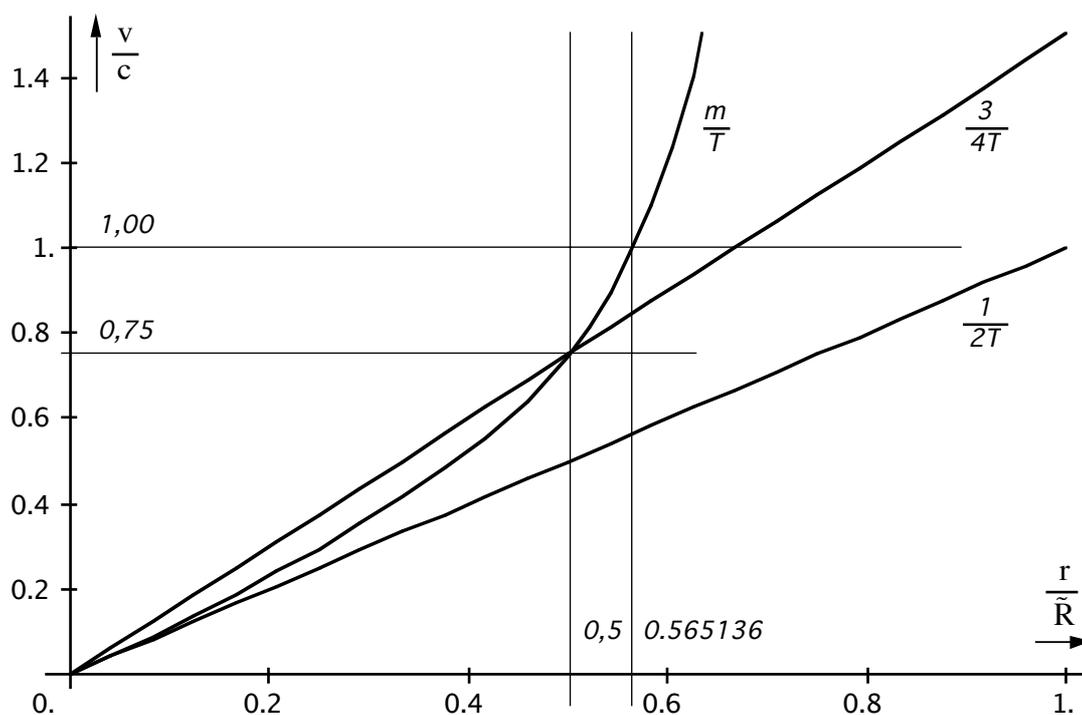


Bild 46
Expansionsgeschwindigkeit als Funktion des
Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.

Die cT-Grenze für raumartige Vektoren ist nur eine Konsequenz der Koordinatentransformation (236) von der räumlichen Singularität (Expansionsmittelpunkt), der außerhalb unseres Koordinatensystems liegt, auf unsere lokalen Koordinaten. Dies gilt auch für den Widerspruch zwischen unserer Annahme, daß das Gesamtuniversum an der Wellenfront mit $0,851661c$ expandiert und den im Bild 46 dargestellten Werten, die oberhalb $R/2$ stark ansteigen. Ein Beobachter in der Nähe von $<0,5R$ mißt lokal ganz andere Werte für r_0 und T . Die Werte bei uns, von diesem Beobachter aus gesehen, ähneln wiederum denen, die wir bei ebendiesem Beobachter von uns aus gesehen messen. Für $r>0,5R$ ist keine Koordinatentransformation mehr möglich, jedoch können zeitartige Signale sehr wohl zu uns gelangen. Insgesamt ist das Universum offen, kleinere Gebiete verhalten sich so, als wären sie geschlossen. Dies hat auch Bedeutung für die Entropie des metrischen Feldes.

4.6. Energie und Entropie

4.6.1. Entropie

Wir möchten nun das einzelne MLE und unser Modell vom energetischen Standpunkt aus betrachten. Da für den Thermodynamiker die Entropie weit wichtiger ist als die Energie, wollen wir dies berücksichtigen und zuerst die Entropie untersuchen. Die Entropie wollen wir künftig mit S bezeichnen. Um Verwechslungen mit dem POINTING-Vektor zu vermeiden, werden wir diesen daher immer fett, als Vektor (\mathbf{S}) dargestellt. Wenn wir S schreiben, meinen wir immer die Entropie und mit \mathbf{S} immer den POINTING-Vektor.

Rein statistisch gesehen ist die Entropie eines Systems definiert durch (332), wobei k die BOLTZMANN-Konstante und N die Zahl der möglichen inneren Konfigurationen ist.

$$S = k \ln N \quad (332)$$

Bei einem einzelnen MLE ($N=1$) wäre die Entropie theoretisch Null, wenn wir (332) anwenden. Dies ist natürlich falsch, da die Statistik eine minimale Anzahl von N erfordert, um überhaupt angewandt werden zu können. Bei $N=1$ kann das Ergebnis mathematisch gesehen jeden beliebigen Wert annehmen, ohne gegen die "Statistik" zu verstoßen. Wir wollen daher versuchen, ob es nicht möglich ist, eine andere Möglichkeit zu finden, die Entropie dieses einzelnen MLE zu bestimmen.

Genau betrachtet handelt es sich bei dem MLE um unseren Kugelkondensator, der sich in seinem eigenen Magnetfeld bewegt. Dieser hat die Masse m_0 (29). Was sich im Innern dieses Kondensators abspielt, wissen wir nicht. Er verhält sich im Prinzip wie ein (primordiales) schwarzes Loch. Laut [5] ist der SCHWARZSCHILD-Radius definiert als:

$$r_s = \frac{2mG}{c^2} \quad (333)$$

Setzen wir hier nun m_0 (29) für m ein, so erhalten wir $r_s=2r_0$, was unsere obige Annahme untermauert. Die Oberfläche dieses schwarzen Lochs ergibt sich damit zu $A=4\pi r_0^2$. Interessant ist, daß sich der Ausdruck für den SCHWARZSCHILD-Radius auch ohne Zuhilfenahme der SRT bzw. ART herleiten läßt. Da die SRT/ART nach diesem Modell durch das metrische Grundgitter nur emuliert wird, müssen solcherlei Beziehungen grundlegende Eigenschaften des Gitters selbst sein. Sie gelten dann sowohl mikroskopisch als auch makroskopisch.

In [4] wird eine Methode dargestellt, die Entropie eines schwarzen Loches zu bestimmen. Sie beruht auf quantenphysikalischen Überlegungen, was gut zu unserem MLE paßt. Der Autor geht von der KERR-NEWMAN-Lösung der EINSTEINSchen Vakuumgleichungen $R_{ik}=0$ mit stationär rotierender, elektrisch geladener Quelle und äußerem elektromagnetischen Feld aus (334) mit $R=r^2-2mr+a^2$ und $\rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta$, $M=mGc^{-2}$ und $a=Lm^{-1}c^{-1}$; m ist die Masse und L der Drehimpuls.

$$ds^2 = -\frac{R}{\rho^2} \left[c dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi \right]^2 + \frac{\rho^2}{R} dr^2 + \rho^2 d\vartheta^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\rho^2} \left[(r^2 + a^2) d\varphi - a dt \right]^2 \quad (334)$$

Dies wollen wir hier nicht weiter diskutieren. Der Autor kommt schließlich zu folgenden Aussagen für den Radius r_{\pm} des schwarzen Loches und dessen Oberfläche A :

$$r_{\pm} = \left(M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \right) \quad A = 8\pi \left(M^2 \pm M\sqrt{M^2 - a^2} \right) \quad (335)$$

Setzen wir hier nun $m = m_0$, $L = 0$ ein, so erhalten wir mit $r_+ = 2r_0$ sowie $A = 4\pi r_0^2$ exakt dasselbe Ergebnis wie in (333). Der innere Radius fällt in diesem Fall mit dem Mittelpunkt zusammen. Für $L = \hbar$ erhalten wir eine Lösung für einen inneren SCHWARZSCHILD-Radius $r_- = r_0$ sowie $A = \pi r_0^2$. Das Ergebnis ist also davon abhängig, ob das MLE über einen Drehimpuls verfügt oder nicht.

Weiterhin bezieht sich der Autor dann auf eine Arbeit von BEKENSTEIN (1973) derzufolge die Entropie eines schwarzen Loches proportional zu seiner Oberfläche ist. Der genaue Proportionalitätsfaktor wurde von HAWKING (1974) quantenphysikalisch bestimmt zu:

$$S_b = \frac{kc^3}{4G\hbar} A = k \frac{A}{4r_0^2} = k \frac{A}{(4)r_s^2} \quad (336)$$

k ist die BOLTZMANN-Konstante, die Klammer gilt für $L = \hbar$. Interessanterweise enthält dieser Ausdruck die PLANCKsche Elementarlänge und sogar mit \hbar nach unserer Definition anstelle von h . Setzen wir jetzt wieder die Werte ein, so erhalten wir:

$$S_b = 4\pi k \quad \text{für } L=0 \quad \text{bzw.} \quad S_b = \pi k \quad \text{für } L=\hbar \quad (337)$$

Hierbei entspricht der Faktor π genau unserer Gitterkonstante! Wir wollen jetzt untersuchen, ob das MLE tatsächlich über einen Drehimpuls verfügt. Wir gehen von unserem im Abschnitt 3.3. erarbeiteten Modell (Effektivwert) aus. Allgemein gilt für den Drehimpuls \mathbf{L} :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \quad (338)$$

Mit $m = m_0$, $r = r_0$, $v = c$, $c \perp r$ erhalten wir nach Einsetzen von (27) und (29) für den Betrag L :

$$L = m_0 c r_0 = \hbar \quad \text{und wegen} \quad c = \omega_0 r_0 \quad (339)$$

$$W_0 = m_0 c^2 = \hbar \omega_0 \quad (340)$$

Ausdruck (340) ist offenbar richtig. Damit haben wir eindeutig nachgewiesen, daß das MLE über einen Drehimpuls verfügt. Dieser ist gleich dem PLANCKschen Wirkungsquantum oder umgekehrt:

Das PLANCKsche Wirkungsquantum ist definiert durch den Effektivwert des Drehimpulses des MINKOWSKischen Linienelementes. Der Eigendrehimpuls (Spin) ist identisch mit dem Bahndrehimpuls.

Die letzte Aussage ist dadurch begründet, daß es sich hier um Effektivwert handelt. In Wirklichkeit sind r_0 , m_0 und der Bahn- und Eigendrehimpuls zeitlich veränderliche fastperiodische Funktionen. Das PLANCKsche Wirkungsquantum ist dann die Summe aus Bahn- und Eigendrehimpuls. Diese ist gleich \hbar , wobei einmal der Bahn-, das andere mal der Eigendrehimpuls gleich Null ist. Ein solcher Zusammenhang wird auch als Dualismus bezeichnet. Natürlich läßt sich das PLANCKsche Wirkungsquantum nicht nur als Drehimpuls definieren. Eine andere Möglichkeit ist z.B. $q_0 \varphi_0$.

Zurück zur Entropie. Man sieht, daß die BOLTZMANN-Konstante eine grundlegende Eigenschaft unseres metrischen Grundgitters darstellt, so grundlegend wie ϵ_0 , μ_0 und κ_0 . Hier werden einige sagen, dies könne nicht sein, da k eine rein statistische Konstante ist. Auf diesen Einwurf kann man nur antworten: »Die BOLTZMANN-Konstante ist deswegen so grundlegend, weil sie statistisch ist«. Auch π läßt sich statistisch definieren.

Wir haben die Entropie eines einzelnen MLE bestimmt. Wie sieht es aber mit einem größeren Abschnitt aus? Da die Einzelentropie ein Vielfaches der BOLTZMANN-Konstante ist, können wir mit den bereits bekannten statistischen Beziehungen (332) weiterrechnen. Hierbei ist die (absolut) maximale Anzahl der möglichen inneren Konfigurationen innerhalb eines Volumens mit dem Radius r gegeben durch die Anzahl der in diesem Volumen enthaltenen MLE's. Bei einem kubisch-flächenzentrierten Kristallgitter ist die Anzahl der MLE's innerhalb eines Würfels mit der Kantenlänge d folgendermaßen definiert:

$$N = 6 \left(\frac{d}{\rho} \right)^3 = \frac{6}{\pi^3} \left(\frac{d}{r_0} \right)^3 \quad (341)$$

Hierbei ist ρ die Gitterkonstante. Die flächenzentrierten MLE's gehen mit derselben Anzahl ein, wie die an den Ecken befindlichen. Innerhalb einer Kugel mit dem Durchmesser d und dem Volumen $\pi/6 d^3$ befinden sich dann

$$N = \pi \left(\frac{d}{\rho} \right)^3 = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^3 = 8\pi \Lambda^3 \quad (342)$$

einzelne MLE's. Solange r nicht allzu groß ist, können wir für Λ (316), ansonsten (320) einsetzen:

$$N = \frac{27}{\pi^2} \tilde{Q}_0^3 \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{4}} \operatorname{artanh} \frac{\left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{1}{3}}}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{4}}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \quad (343)$$

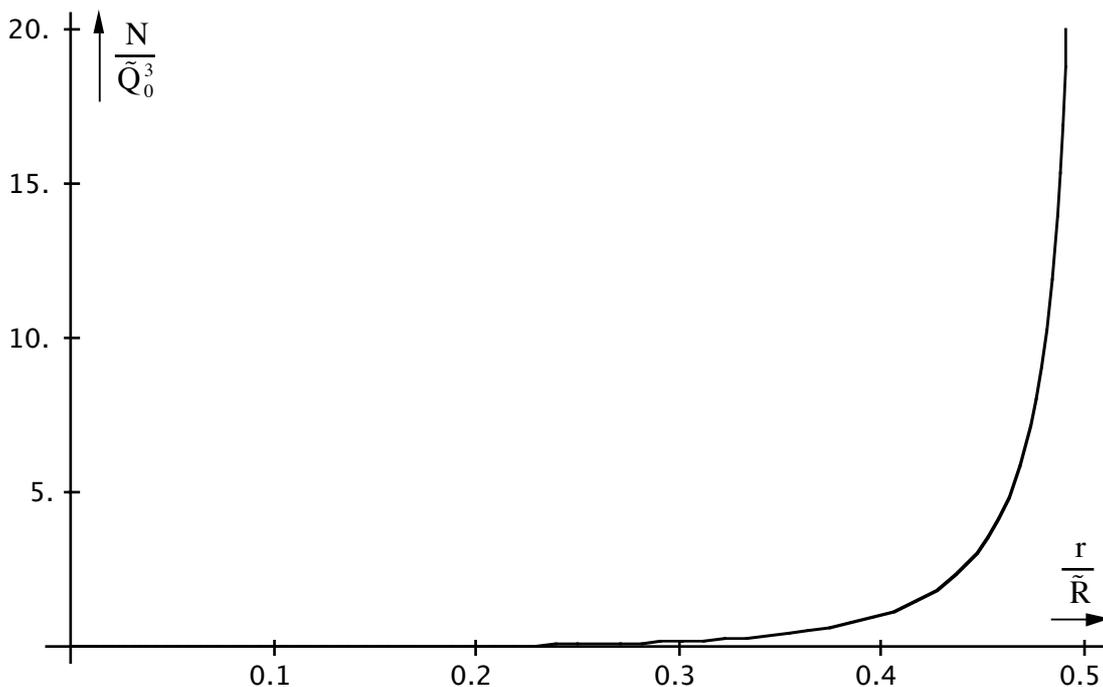


Bild 47
Anzahl MLE's in Abhängigkeit vom Radius

$$S = \pi k \ln(8\pi \Lambda^3) \quad (344)$$

Der Verlauf von N als Funktion des Radius r am Punkt $t=0$ ist im Bild 47 dargestellt. Es können keine Besonderheiten beobachtet werden. Den Verlauf der Entropie in Abhängigkeit vom Radius zeigt Bild 48.

Betrachtet man ein bestimmtes Gebiet mit dem Radius r von einem dazu bewegten Bezugssystem, so wird durch die Längenkontraktion kein geringerer Entropiewert gemessen, da r und der Weltradius, sowie auch t und das Weltalter gleichermaßen verkürzt gemessen werden, so daß sich der jeweilige Quotient und damit S nicht ändert.

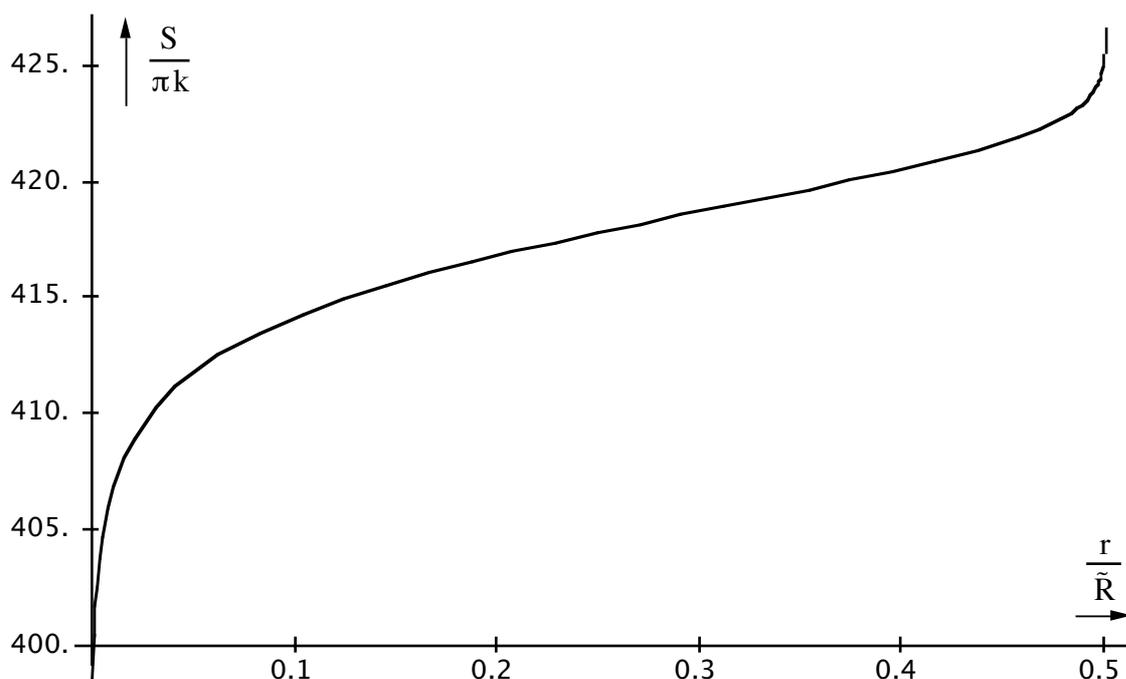


Bild 48
Entropie in Abhängigkeit vom Radius

Die Entropie steigt mit größer werdendem r stetig an, durchläuft eine Phase geringeren Anstiegs und geht mit $r \rightarrow cT$ steil gegen unendlich. Analog Λ_0 können wir jetzt auch eine Entropie S_0 definieren:

$$S_0 = \pi k \ln(8\pi \tilde{Q}_0^3) = 1,83755 \cdot 10^{-20} \text{ J K}^{-1} \quad (98,7661\%) \quad (345)$$

Uns interessiert auch die zeitliche Abhängigkeit. Für den Fall $r=\text{const}$ ist diese im Bild 49 dargestellt und gilt dann auch für S_0 (Verlauf etwa wie $0,5R$). Interessant ist, daß die Entropie für Bereiche mit konstanten Abmessungen sinkt. Dies könnte der "Motor" für die Entwicklung vom niederen zum höheren sein.

Beim zweiten Fall (konstanter Wellenzahlvektor) bleibt die Entropie S und S_0 über den gesamten Definitionsbereich konstant. Sie berechnet sich folgendermaßen:

$$S = \pi k \ln \left(\frac{27}{\pi^2} \tilde{Q}_0^3 \left(\operatorname{artanh} \left(\frac{2\tilde{r}}{\tilde{R}} \right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{2\tilde{r}}{\tilde{R}} \right)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \right) \quad (346)$$

Die zweite Lösung hat für die Entropie keine Bedeutung. Für S_0 gilt (345) innerhalb des Definitionsbereiches.

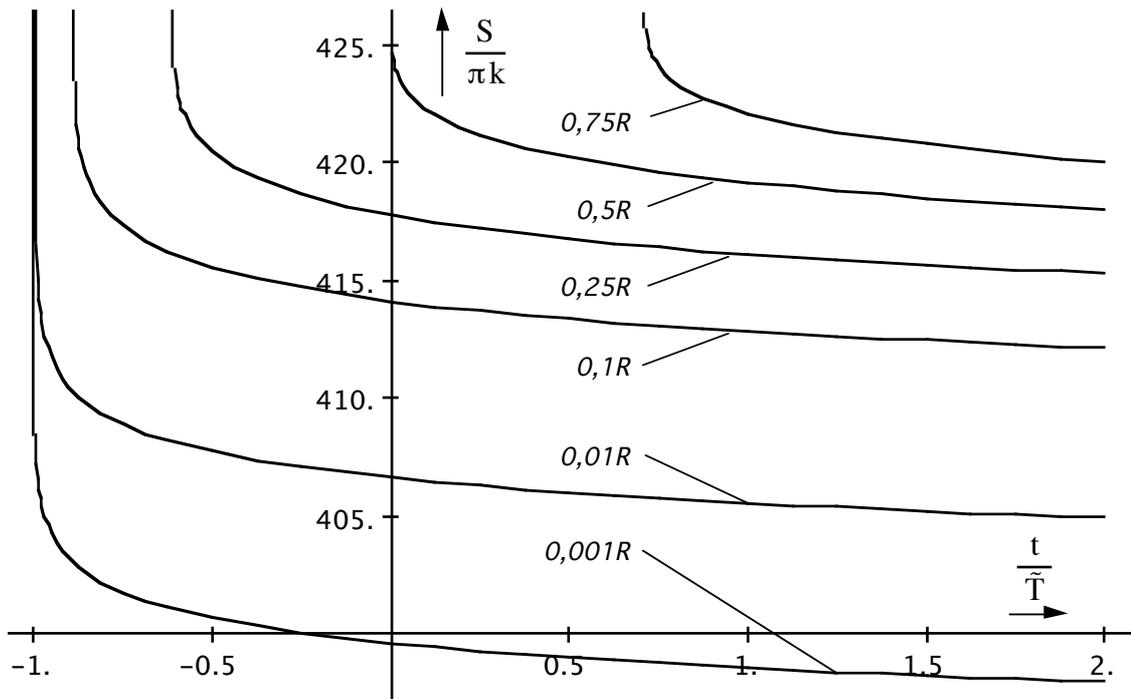


Bild 49
Zeitliche Abhängigkeit der Entropie
für $r=\text{const}$ (linearer Maßstab)

Der eingeschränkte Definitionsbereich bedeutet nichts anderes als daß sich keine universelle Entropie des Universums als ganzes definieren läßt, es sei denn man akzeptiert unendlich als gültigen Wert. Es gibt also keine universelle Zeit, kein universelles räumliches Koordinatensystem, keine universelle Entropie und *vielleicht* auch keine universelle Energie...

4.6.2. Partikelhorizont

Wir haben festgestellt, daß es in unserem Modell eine Singularität im Abstand cT gibt. Diese hat die Eigenschaften eines Partikelhorizonts. Damit haben wir zwar eine gute Übereinstimmung mit anderen Modellen gefunden, die mit dem gleichen Abstand rechnen — resultierend aus der Annahme, daß die maximale Geschwindigkeit c ist. Bei einem "reinen" Strahlungskosmos müßte dieser jedoch bei $2cT$ liegen. Wir haben es bei unserem Modell mit einem Phänomen zu tun, das ich als das » $2T$ -Problem« bezeichnen möchte. In allen möglichen Beziehungen tritt immer wieder der Faktor 2 auf, der mit der Zeit assoziiert ist und aus der Definition des HUBBLE-Parameters $H=1/(2T)$ resultiert. Dennoch verhält sich das Modell, als ob es diesen Faktor nicht geben würde.

Die Lösung haben wir bereits im vorangehenden Abschnitt gefunden. Es ist dies das Auftreten eines inneren SCHWARZSCHILD-Radius, begründet dadurch, daß das einzelne MLE über einen Drehimpuls (Spin) von der Größe des PLANCKschen Wirkungsquantums \hbar verfügt. Aufgrund der Beziehung $R=r_0Q_0$ gibt es diesen Partikelhorizont auch im makroskopischen Maßstab für den lokalen Kosmos als ganzes, genauso wie im sub-mikroskopischen Maßstab bei der Länge r_1 wegen der Beziehung $r_1=r_0/Q_0$. Dieser liegt dann bei $r_1/2$. Das ist auch der Grund, warum wir die Kopplung von φ_0 und E_0 bei $r_1/2$ und nicht bei r_1 vorgenommen haben. Eine andere widerspruchsfreie Möglichkeit gibt es nicht. Dies entspricht genau der "Vermutung" EINSTEINS, er glaube nicht, daß Gott, als er die Welt schuf, eine Wahl gehabt hätte. Die Existenz eines Drehimpulses vermeidet auch ein Überlappungsproblem, das sonst aufgetreten wäre, da die Gitterkonstante nur πr_0 beträgt.

4.6.3. Temperatur

Wir wollen nun dem einzelnen MLE eine Temperatur zuweisen. Nach [4] ergibt sich diese aus der GIBBSSchen Fundamentalgleichung sowie (23) und (32) zu:

$$T_b dS_b = d(mc^2) - \omega dL \quad (347)$$

$$T_b dS_b = d(m_0 c^2) - d(\hbar \omega_0) = 0 \quad T_b \equiv 0 \text{ K} \quad (348)$$

wegen $\omega_0 \neq \text{const.}$ Dies stimmt sehr gut mit den Beobachtungen überein. Der berühmte Ausdruck $mc^2 = \hbar \omega$ ist also nichts anderes als ein Spezialfall der GIBBSSchen Fundamentalgleichung für $T_b = 0$ auf der Ebene des metrischen Wellenfelds. Dieses tritt thermisch gesehen nicht in Erscheinung — ansonsten wären wir schon vaporisiert. Für den Fall $L=0$ ergäbe sich nämlich für die Temperatur folgender Ausdruck:

$$T_b = \frac{\hbar c^3}{8\pi m_0 G k} = \frac{W_0}{8\pi k} \quad T_b = 5,638 \cdot 10^{30} \text{ K} \quad (349)$$

Das Ergebnis (349) weicht von dem ab, das man mit dem WIENSchen Verschiebungsgesetz erhält, jedoch stimmt die Größenordnung. Allerdings gilt dieses auch nur für schwarze Strahlung, während es sich in unserem Fall um eine einzelne, sehr schmale Spektrallinie handelt. Die Temperatur wäre dann proportional $T_b \sim t^{-1}$. Da dies nicht der Fall ist, gilt:

1. *Die Temperatur des metrischen Wellenfeldes ist gleich Null.*
2. *Das einzelne MLE verfügt über den Drehimpuls \hbar .*
3. *Der innere SCHWARZSCHILD-Radius des MLE ist gleich $r_o/2$.*
4. *Der innere SCHWARZSCHILD-Radius des lokalen Universums ist gleich cT .*

Damit ist das PLANCKsche Wirkungsquantum ebenfalls eine fundamentale Eigenschaft des metrischen Wellenfelds. Allerdings ist es keine Konstante, so daß wir ihm ein eigenes Kapitel (4.6.4.1.) widmen werden.

Aufgrund des ganzzahligen Spins unterliegt das MLE formal der BOSE-EINSTEIN-Statistik. Inwieweit dies von Bedeutung ist, kann hier nicht gesagt werden. *Möglich* ist jedoch, daß z.B. Effekte wie die Supraleitung auf der Existenz des metrischen Wellenfeldes beruhen. Hat doch das MLE eine Ladung, deren Effektivwert in der Nähe der Elektronenladung liegt:

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{Z_0}} = 5,288807 \cdot 10^{-19} \text{ As} = 3,301378 e \quad (350)$$

Bei der Supraleitung kommt es zur Bildung von COOPER-Paaren, die aus zwei Elektronen mit entgegengesetzt gerichtetem Spin und FERMI-Geschwindigkeit bestehen, also eine Ladung von $2e$ und einen ganzzahligen Spin der Größe Null haben. Sie sind damit ebenfalls Bosonen. So wäre es *möglich*, daß ein solches COOPER-Paar die Stelle des Kugelkondensators in unserem Modell einnimmt. Hierbei würde der Ladungsunterschied nur etwa 39% der Gesamtladung des MLE ausmachen, so daß die Elektronen ins Leitungsband tunneln können, wie es z.B. bei Halbleitern der Fall ist. Die Breite des Leitungsbandes ergibt sich direkt aus der HEISENBERGschen Unschärferelation für Energie und Zeit sowie aus (23) und (24) zu:

$$\Delta W \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{bzw.} \quad \Delta W_0 \Delta \tau_0 \geq \frac{\hbar}{2} \quad (351)$$

$$\Delta q_0 \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2Z_0}} = \frac{q_0}{\sqrt{2}} = 2,334427 e \quad (352)$$

Die Untergrenze des Leitungsbands liegt dann bei $2,134e$ und die Ladung des COOPER-Paares mit $2e$ nur 4% (q_0) unterhalb des Leitungsbands. Auch gilt das Gleichheitszeichen in (352) nur unter der Voraussetzung, daß eine GAUSSsche Normalverteilung der Ladung vorliegt, was für $N=1$ nicht gegeben ist, so daß man zur Not auch ohne einen Tunneleffekt auskommt. So könnte eine Leitung direkt auf der Ebene des metrischen Wellenfelds stattfinden, wobei der spezifische Widerstand $1/\kappa_0 = 8,07239 \cdot 10^{-94} \Omega\text{m}^2/\text{m}$ so klein ausfällt, daß er faktisch gleich Null ist. Eine meßtechnische Bestimmung von κ_0 auf diesem Weg läge jedoch weit außerhalb der technischen Möglichkeiten.

4.6.4. Energie

Bevor wir weitergehende Betrachtungen in dieser Richtung anstellen, wenden wir uns zunächst dem PLANCKschen Wirkungsquantum zu, da dieses eng mit der elektromagnetischen Energie verknüpft ist.

4.6.4.1. Das PLANCKsche Wirkungsquantum

4.6.4.1.1. Zeitliche Abhängigkeit

Wir haben gesehen, daß das PLANCKsche Wirkungsquantum gleich dem Produkt von elektrischer Ladung und magnetischem Fluß ist. Zuerst wollen wir die Zeitfunktion für den Wert von \hbar aufstellen, die für $t \gg 0$ gilt (Näherungslösung). Für φ_0 können wir wegen (122) gleich hinschreiben:

$$\varphi_0 = \frac{\hat{\varphi}_i}{\sqrt{2\pi\omega_0 t}} (\cos 2\omega_0 t + \sin 2\omega_0 t) \quad (353)$$

Weiterhin gilt: $u_0 = \varphi_0$ (Selbstinduktion). Wir gehen besser von der exakten Formel aus. Bei der Differentiation müssen wir wieder beachten, daß ω_0 von der Zeit abhängt. Man arbeitet also zweckmäßig mit Gl.(114)

$$\varphi_0 = \hat{\varphi}_i J_0(2\omega_0 t) \quad \varphi_0 = \hat{\varphi}_i J_0\left(\sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}}\right) \quad (354)$$

$$\dot{\varphi}_0 = -\frac{\hat{\varphi}_i}{2} \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\epsilon_0 t}} J_1 \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}} \quad (355)$$

$$u_0 = -\hat{\varphi}_i \omega_0 J_1(2\omega_0 t) \quad (356)$$

Für q_0 erhalten wir wegen (123):

$$q_0 = C_0 u_0 = \epsilon_0 r_0 u_0 \quad (357)$$

$$q_0 = -\epsilon_0 \omega_0 r_0 \hat{\varphi}_i J_1(2\omega_0 t) = -\epsilon_0 c \hat{\varphi}_i J_1(2\omega_0 t) \quad (358)$$

$$q_0 = -\hat{q}_i J_1(2\omega_0 t) \quad (359)$$

$$q_0 = \frac{\hat{q}_i}{\sqrt{2\pi\omega_0 t}} (\cos 2\omega_0 t - \sin 2\omega_0 t) \quad (360)$$

Jetzt erhalten wir für das PLANCKsche Wirkungsquantum:

$$\hbar(t) = \frac{\hat{\hbar}_i}{2\pi\omega_0 t} (\cos^2 2\omega_0 t - \sin^2 2\omega_0 t) = \frac{\hat{\hbar}_i}{2\pi\omega_0 t} \cos 4\omega_0 t \quad (361)$$

$\hbar_i = \hat{q}_i \hat{\varphi}_i$ ist die Amplitude (Spitzenwert) von \hbar an dem Punkt, an dem die Zeitfunktion von \hbar den Wert 1 hat. Nun ist das PLANCKsche Wirkungsquantum selbst eigentlich keine (fast)periodische Zeitfunktion, sondern deren Effektivwert, wengleich dieser wiederum auch eine Funktion der Zeit ist. Der Effektivwert ist definiert als der quadratische Mittelwert über eine Periode:

$$\text{QM} = \sqrt{\frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} F^2(t) dt} \quad (362)$$

Für periodische Funktionen ist die untere Grenze im allgemeinen Null, die obere Grenze ein Vielfaches von π , meistens 2π . Das führt z.B. zu einem Effektivwert von $1/\sqrt{2}$ für die Sinus- und Cosinusfunktion. Der Effektivwert des Produkts zweier Funktionen ist gleich dem quadratischen Mittelwert dieses Produkts oder gleich dem Produkt der Effektivwerte beider Funktionen.

Leider haben wir es hier nicht mit periodischen Funktionen zu tun. Durch die Wurzel im Argument ändert sich die Frequenz ständig und damit die Periode. Gleichung (362) ist zwar in unserem Fall analytisch lösbar, sogar für die Besselsche (exakte) Lösung, jedoch können wir mit dem Ergebnis nicht viel anfangen, besonders für t nahe Null, da sich die Frequenz hier schneller ändert, als der Geltungsbereich des Mittelwertes. Das bedeutet, in der Zeit unmittelbar nach dem Urknall, über die ersten zwei, drei Perioden, ist das PLANCKsche Wirkungsquantum als solches nicht definiert. Hier gelten nur die exakten Zeitfunktionen. Nun ist es aber angebracht, eine Funktion zu haben, die bis zum Zeitpunkt $t=0$ zurück gilt, allein schon, um \hbar_i zu bestimmen.

Wir setzen daher den Effektivwert der Ladung und des magnetischen Flusses gleich $1/\sqrt{2}$ der Amplitude. Dies ist zwar nicht ganz exakt, zumindest bei kleinen Argumenten, es handelt sich aber ohnehin um eine Näherungslösung. Für $t \gg 0$ erhalten wir dann:

$$\hbar = \frac{\hat{\hbar}_i}{4\pi\omega_0 t} = \frac{\hat{\hbar}_i}{2\pi} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2\kappa_0 t}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\hat{\hbar}_i}{Q_0} \quad (363)$$

Daraus läßt sich leicht die Größe von \hbar_i (Spitzen- und Effektivwert) bestimmen:

$$\hat{\hbar}_i = 2\pi \tilde{Q}_0 \tilde{\hbar} = 4,99697 \cdot 10^{27} \text{ Js} \quad \hbar_i = \frac{\hat{\hbar}_i}{2} \quad t_i = \frac{t_1}{4\pi^2} \quad (364)$$

Dieser Wert ist sehr viel größer als der jetzige. Das hat enorme Auswirkungen auf die Verhältnisse in der Zeit kurz nach dem Urknall. Wir werden in diesem Kapitel noch näher darauf eingehen. Für Fluß und Ladung gilt analog (24) und (36):

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{\hat{\hbar}_1 Z_0}{2\omega_0 t}} = \sqrt{\frac{\hat{\hbar}_1 Z_0}{Q_0}} \quad \hbar_1 = \frac{\hat{\hbar}_1}{2\pi} = 7,95297 \cdot 10^{26} \text{ Js} \quad (365)$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hat{\hbar}_1}{2\omega_0 t Z_0}} = \sqrt{\frac{\hat{\hbar}_1}{Q_0 Z_0}} \quad q_1 = \sqrt{\frac{\hat{\hbar}_1}{Z_0}} = 1,45244 \cdot 10^{12} \text{ As} \quad (366)$$

Wir benutzen in Zukunft den Wert \hbar_1 anstelle von $\hat{\hbar}_i$, da sich besser damit rechnen läßt. Aufgrund des ohnehin ungenauen Wertes des HUBBLE-Parameter und damit von Q_0 ist die Näherungslösung (363) ausreichend für den Großteil aller Fälle.

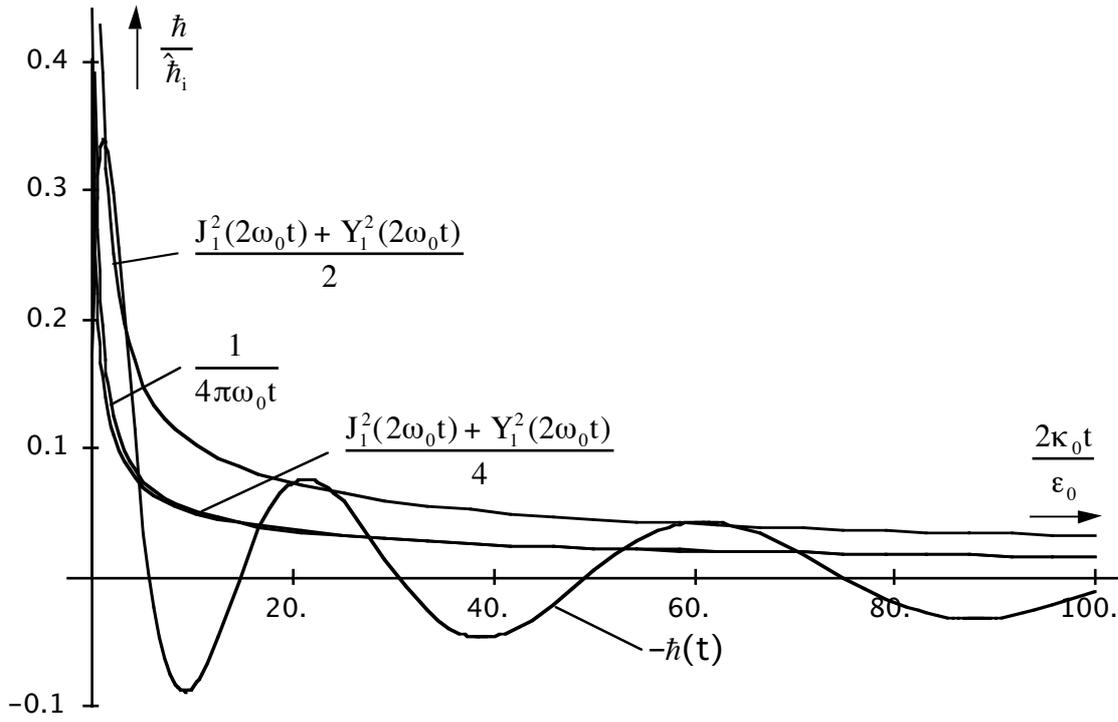


Bild 50
 Verschiedene Näherungslösungen für
 das PLANCKsche Wirkungsquantum größerer Maßstab

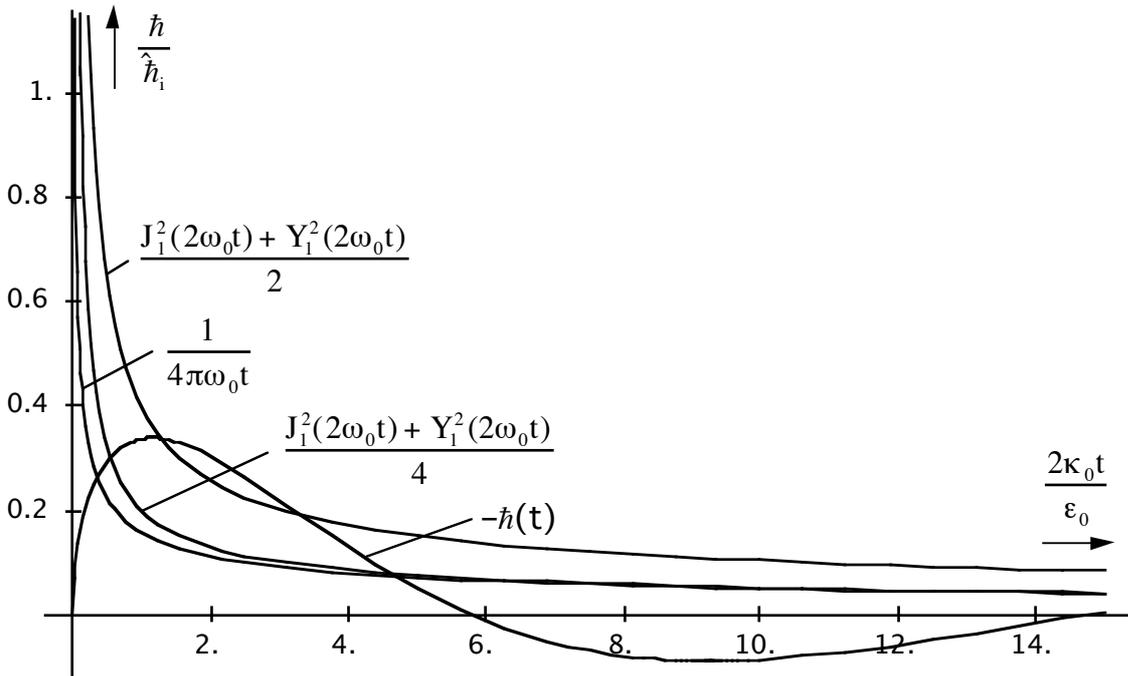


Bild 51
 Verschiedene Näherungslösungen für
 das PLANCKsche Wirkungsquantum kleinerer Maßstab

Für Untersuchungen der Zeit unmittelbar nach dem Urknall ist es jedoch angebracht, mit der Zeitfunktion zu arbeiten. Diese lautet folgendermaßen:

$$\hbar = -\hat{\hbar}_i J_0(2\omega_0 t) J_1(2\omega_0 t) \tag{367}$$

Damit läßt sich ein weiterer Ausdruck für den Effektivwert \hbar finden. Ob dieser besser ist als (364), kann man in den Bildern 50 und 51 sehen — die Näherung (363) ist gut fast bis zu $t=0$. Es sind auch die dazugehörigen Funktionen angegeben. Man sieht, die Verwendung von Besselfunktionen bringt keine Erhöhung der Genauigkeit gegenüber (363), eher das Gegenteil. Die Besselfunktionen 0. und eine Mischung von 0. und 1. Ordnung ergeben noch ungenauere Lösungen. Wir benutzen in Zukunft daher nur noch Ausdruck (363), der noch den zusätzlichen Vorteil hat, besser integrierbar zu sein. Interessant ist auch die Abhängigkeit von den derzeitigen Werten. Wir nehmen wieder die bekannte Transformation $2\omega_0 t \rightarrow t/T$ vor und erhalten:

$$\hbar = \frac{\hbar_1}{\tilde{Q}_0} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \tilde{\hbar} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

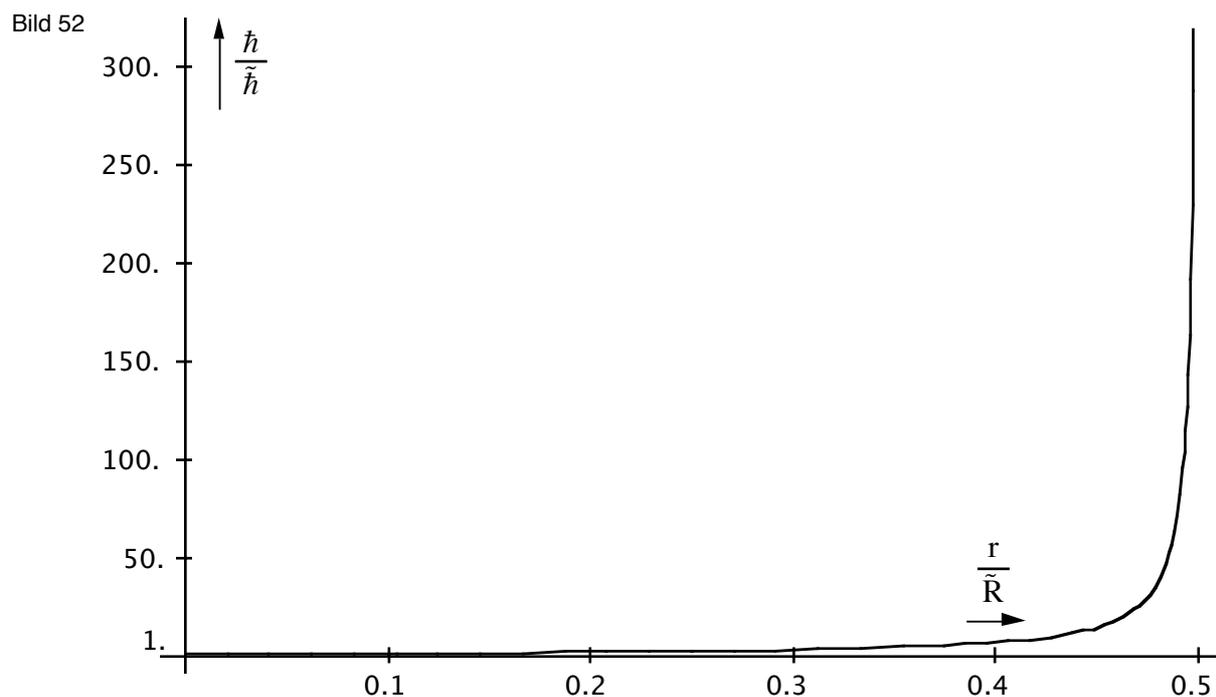
Die zeitliche Abhängigkeit des PLANCKschen Wirkungsquantums hat auch Auswirkungen auf den Wert der elektromagnetischen Energie. Das heißt, neben der kosmologischen Rotverschiebung ergibt sich eine zusätzliche Entwertung durch Abnahme von \hbar , so daß gilt $W_\gamma \sim t^{-5/4}$.

4.6.4.1.2. Räumliche Abhängigkeit

Ist das PLANCKsche Wirkungsquantum eine Funktion der Zeit, so ist es auch eine Funktion des Ortes. Dies gilt für jedes lokale raum-zeitliche Koordinatensystem. Die Funktion erhält man wie in den vorhergehenden Abschnitten schon mehrmals gehandhabt durch Erweiterung von (368) zu:

$$\hbar = \frac{\hbar_1}{\tilde{Q}_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\tilde{\hbar}}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad (369)$$

\hbar kann nach dieser Definition auch negative Werte annehmen, was dem Auftreten negativer Energie entspricht. Am Ort des Vorzeichenwechsels befindet sich mit ziemlicher Sicherheit eine räumliche Singularität. Man erhält den im Bild 52 dargestellten Verlauf als Funktion des Abstands.



PLANCKsches Wirkungsquantum
als Funktion des Abstands für $t=0$

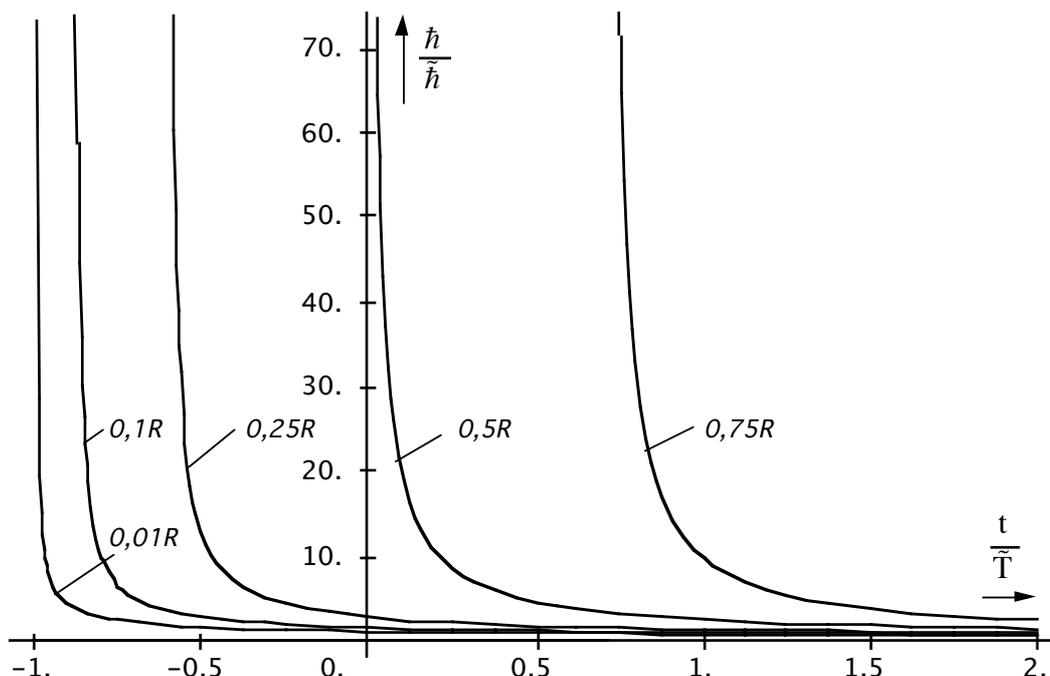


Bild 53
PLANCKsches Wirkungsquantum
als Funktion der Zeit für $r=\text{const}$

In der Nähe des halben Weltradius (cT) kommt es zu einem extremen Anstieg gegen unendlich. Zu beachten ist, daß der Maximalwert durch die Definition als Mittelwert auf \hbar_i begrenzt ist.

Bei der zeitlichen Abhängigkeit sind wieder die beiden Fälle konstanter Abstand und konstanter Wellenzahlvektor zu unterscheiden. Den Verlauf für verschiedene Abstände im Fall $r=\text{const}$ zeigt Bild 53. Im Fall konstanter Wellenzahlvektor bleibt die Größe des PLANCKschen Wirkungs-quantums jedoch nicht unverändert, es nimmt ebenfalls ab. Der Verlauf ist im Bild 54 dargestellt.

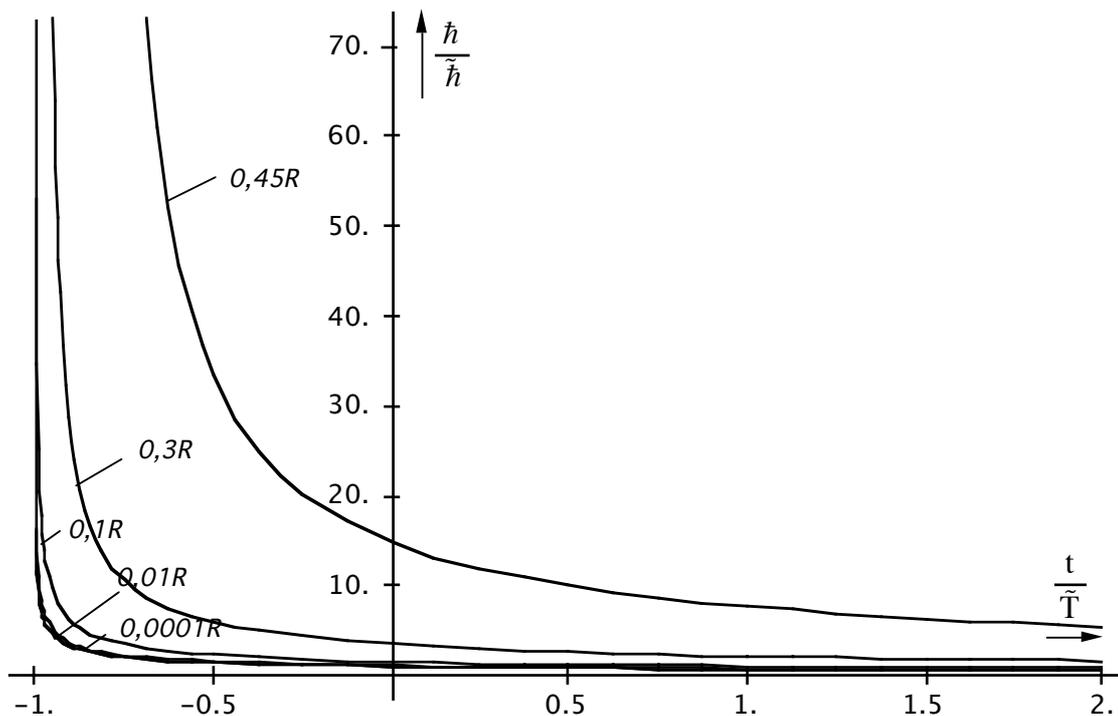


Bild 54
PLANCKsches Wirkungsquantum als Funktion
der Zeit bei konstantem Wellenzahlvektor

Man erhält ihn unter Anwendung von (326) und (329) ohne Berücksichtigung des eingeschränkten Definitionsbereichs durch Ersetzen von r (370). Jedoch bleibt der Wert von \hbar über einen langen Zeitraum (etwa ein Weltalter) nahezu konstant (Bild 55). Bei kleinen Entfernungen gilt (368) als Näherung, das bedeutet, \hbar hängt nur von der Zeit ab. Für größere Abstände ist der Zeitraum $\hbar \approx \text{const}$ zwar kürzer, jedoch liegt das Ende bald schon hinter dem Partikelhorizont, so daß \hbar hier sogar über den gesamten Definitionsbereich als konstant angesehen werden kann.

$$\hbar = \frac{\hbar_1}{\tilde{Q}_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{2m}{3}}} = \frac{\tilde{\hbar}}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{2m}{3}}} \quad (370)$$

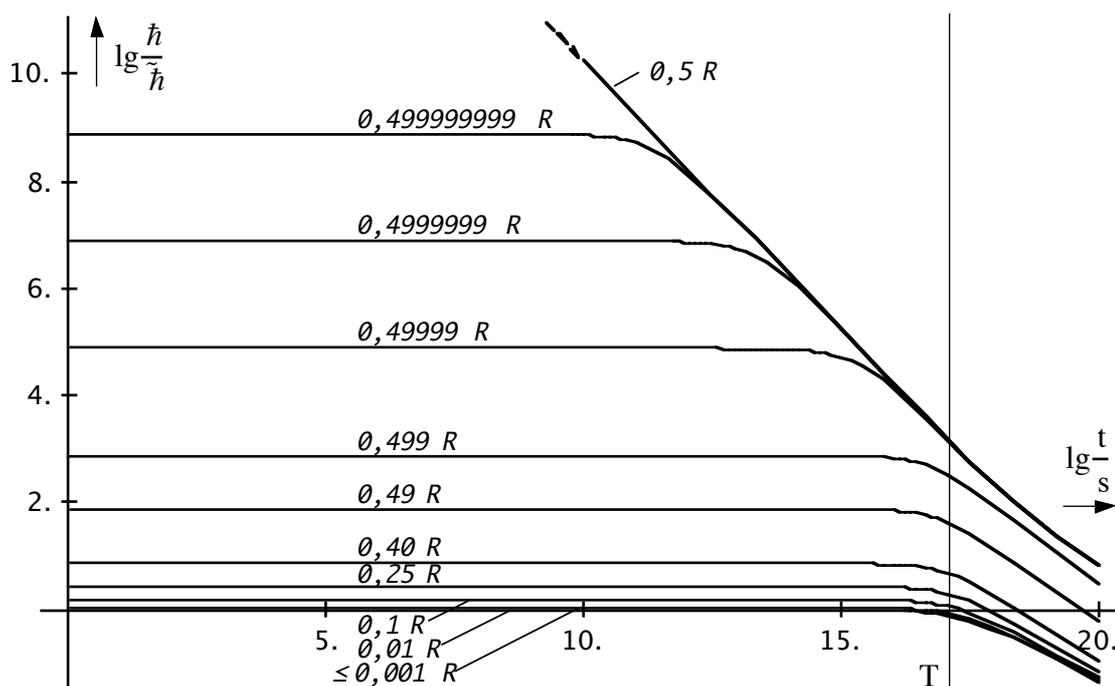


Bild 55
PLANCKsches Wirkungsquantum bei konstantem Wellenzahlvektor
für verschiedene Anfangsentfernungen (Zeit gerechnet von heute)

Offensichtlich läßt sich damit auch eine Abhängigkeit zwischen Entropie und PLANCKschem Wirkungsquantum konstruieren. Dies kann mit Hilfe von Gleichung (344) und (369) unter Substitution von r geschehen. Analytisch läßt sich das Problem jedoch nur in einer Richtung als Funktion $S(\hbar)$ lösen. Diese Abhängigkeit stellt keinen Widerspruch dar. Informations theoretisch gesehen ist die Entropie ein Maß für die Ungeordnetheit eines Systems. Je größer die Entropie, um so größer die Unbestimmtheit der inneren Zustände, bedingt dadurch, daß eine vorher bestehende Ordnung durch eine zufällige Anordnung ersetzt wird.

Die Größe des PLANCKschen Wirkungsquantums wiederum bestimmt die Grenze zwischen Mikro- und Makrokosmos auf Grund der HEISENBERG'schen Unschärferelation für Impuls und Ort:

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta(mv) \cdot \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (371)$$

Als Testteilchen benutzen wir das leichteste Elementarteilchen mit von Null verschiedener Ruhmasse, das Elektron. Unter der Annahme, daß die maximale Geschwindigkeit c ist, erhalten wir als obere Grenze für den Mikrokosmos Δx :

$$\Delta x = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{1}{4} \frac{\hbar_1}{m_e \omega_0 c t} = \frac{1}{2} \frac{\hbar_1}{m_e c \tilde{Q}_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad (372)$$

Da sich die Ruhmasse des Elektrons nach dem BIRKHOFF-Theorem nicht ändert, bedeutet ein größerer Wert von \hbar nichts anderes, als eine Verschiebung dieser Grenze nach oben. In der Zeit kurz nach dem Urknall lag diese Grenze in der Größenordnung des gesamten Universums (Quantenuniversum). Aber auch in der Nähe des inneren SCHWARZSCHILD-Radius unseres lokalen Universums und in der Nähe von zeitartigen Singularitäten, wie schwarzen Löchern ist dieser Effekt zu beobachten oder müßte zu beobachten sein.

Wie können wir dies interpretieren? Nach der SRT ist eine Koordinatentransformation zwischen Bezugssystemen, deren Relativgeschwindigkeit zueinander c überschreitet nicht möglich. Auch bei starken Gravitationsfeldern (ART) ist dies der Fall. Nach der klassischen Theorie ist der Übergang *Transformation möglich* \rightarrow *Transformation unmöglich* abrupt. Nach der vorliegenden Theorie ist dieser Übergang jedoch gleitend. Je näher wir dem SCHWARZSCHILD-Radius mit der Fluchtgeschwindigkeit c kommen, um so größer wird die räumliche Krümmung, die Entropie und der Wert des PLANCKSchen Wirkungsquantums. Damit verschiebt sich die Grenze des Mikrokosmos nach oben und es kommt zum Auftreten von Quanteneffekten auch bei makroskopischen Körpern (nicht bei zeitartigen Vektoren!). Dann ist eine gleichzeitige genaue Bestimmung von Impuls und Ort auch für makroskopische Körper nicht möglich. Diese können nur durch die von ihnen ausgesandte elektromagnetische Strahlung lokalisiert werden. Da sich zeitartige Vektoren aber auf einer anderen Weltlinie ausbreiten, die eine völlig andere "Länge" hat, fallen zeitartige und raumartige Koordinaten der Quelle nicht zusammen und die Unbestimmtheit bleibt uns erhalten.

In der Nähe des Punkts cT schließlich überschreitet die Unbestimmtheit die Größenordnung des Abstands. Dadurch wird jedwede Transformation, auch wenn sie mathematisch möglich sein sollte, sinnlos. Durch den Grenzwert von \hbar gibt es auch einen Maximalwert der Unbestimmtheit Δx . Für das Elektron beträgt dieser:

$$\Delta x_i = \frac{1}{2} \frac{\hbar_i}{m_e c} = 4,57445 \cdot 10^{48} \text{ m} \gg \tilde{R} (1,21881 \cdot 10^{26} \text{ m}) \quad (373)$$

Dieser Wert ist aber für unser derzeitiges Bezugssystem nur von theoretischem Interesse. In einer Entfernung, die exakt $R/2$, eigentlich $(R-r_1)/2$, beträgt, ist die Unbestimmtheit tatsächlich so hoch. Aber nur um den klassischen BOHRschen Wasserstoffradius ($5,28 \cdot 10^{-11} \text{ m}$) daneben — die Körper, die wir betrachten, haben ja nicht den Durchmesser Null — beträgt die örtliche Unbestimmtheit für ebendieses Atom nur noch $3,64 \cdot 10^{20} \text{ m}$, wie man unter Anwendung von (369) und (372) leicht nachprüfen kann. Auch der Wert von \hbar ist dort wesentlich niedriger. Im Abstand $R/2-1\text{m}$ erhalten wir für das Wasserstoffatom noch einen Wert von $\Delta x = 1,936 \cdot 10^{10} \text{ m}$, für einen Körper mit der Masse 1t (z.B. 1m^3 Wasser \rightarrow Würfel mit der Kantenlänge 1m) jedoch nur $3,2 \cdot 10^{-20} \text{ m}$.

Für makroskopische Körper handelt es sich also um einen ziemlich abrupten Übergang, nicht so für mikroskopische Körper. So beträgt die Unbestimmtheit in 1000 km Entfernung für das Wasserstoffatom immer noch $1,936 \cdot 10^4 \text{ m}$, für das Elektron gar $3,529 \cdot 10^7 \text{ m}$. Die Unbestimmtheit bezieht sich jedoch immer nur auf unser lokales Bezugssystem, also auf eine sehr große Entfernung. Für einen Beobachter, der sich am Ort befindet, würden ganz andere, niedrigere Werte gelten.

In der Zeit kurz nach dem Urknall, d.h. von der räumlichen Singularität aus gesehen bzw. in deren Nähe, spielt die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des PLANCKSchen Wirkungsquantums eine viel wesentlichere Rolle. Hierzu ist zu bemerken, daß sich die räumliche Singularität, der Expansionsmittelpunkt, außerhalb des durch unsere Raum-Zeit-Koordinaten bestimmten Weltradius befindet. Genau gesehen befindet sich dieser Punkt außerhalb jedes möglichen raum-zeitlichen Koordinatensystems, da er für raumartige Vektoren unerreichbar ist.

Dies gilt jedoch nicht für “gedankliche Vektoren”. Betrachten wir die Expansion von der räumlichen Singularität aus, so ergibt sich der im Bild 57 angegebene zeitliche Verlauf der Expansion des Universums als Ganzem. Der Verlauf der Expansionsgeschwindigkeit (Bild 56) der Wellenfront entspricht bis zum Maximum bei $0,851661c$ dem von Bild 21 und 22. Bis zu einem Radius von $1,978m$ bei $7,747ns$ handelt es sich um ein Quantenuniversum, danach um ein Gravitationsuniversum. Als Grenzkriterium wurde die Gleichheit von Weltradius und Unbestimmtheit Δx für das Elektron angenommen (372;2).

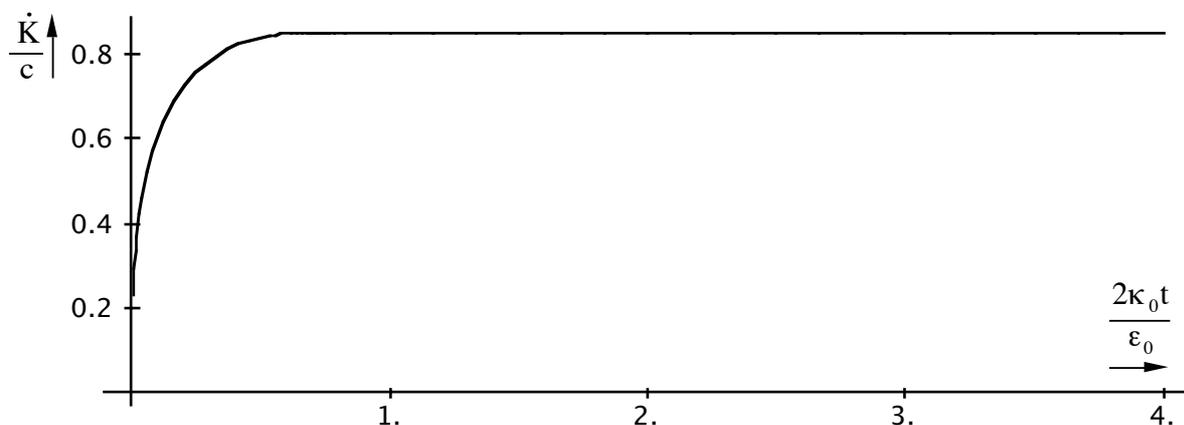


Bild 56
Geschwindigkeit der Wellenfront am Gesamtweltradius K

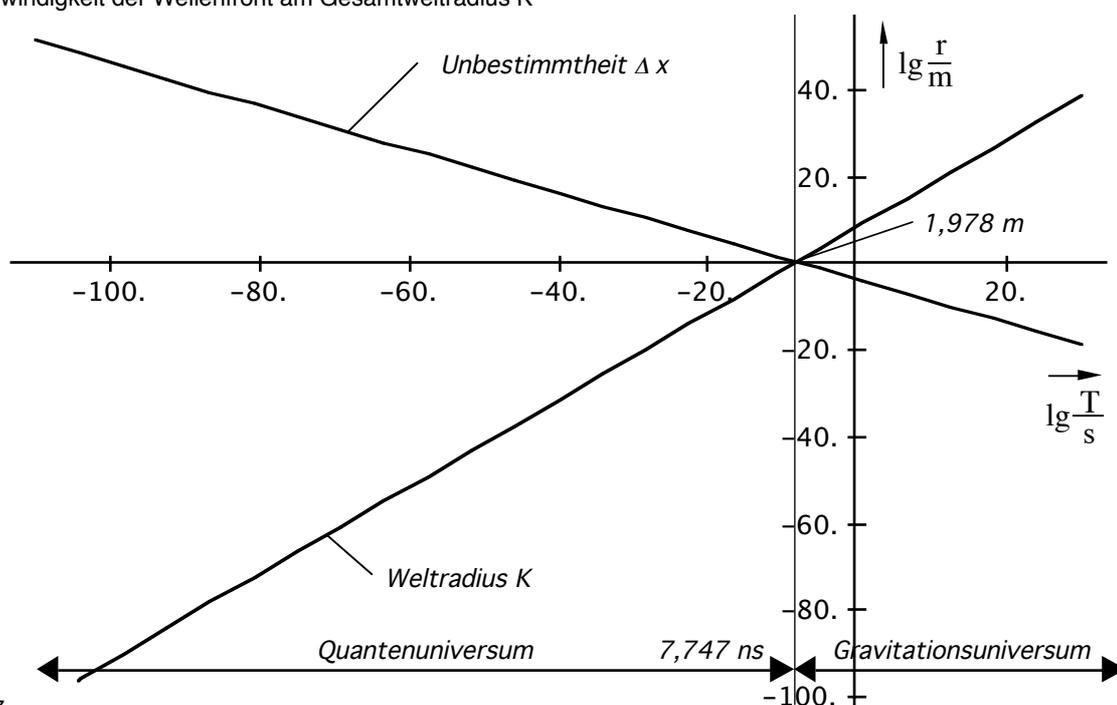


Bild 57
Quantenuniversum und Gravitationsuniversum

4.6.4.2. Energie des metrischen Wellenfelds

Was passiert denn nun aber mit der in R_0 “verbrauchten” Energie? Im Abschnitt 4.3.2. haben wir nachgewiesen, daß das MLE nichtadiabatisches Verhalten zeigt. Es ist dies ein irreversibler Prozeß, der unter Aufnahme oder Abgabe von Energie vonstatten geht. Den ersten Fall, Energieaufnahme, können wir aus offensichtlichen Gründen schon einmal ausklammern. Bleibt der zweite Fall, ein Prozeß, der unter Energieabgabe verläuft. Eine Möglichkeit wäre die Umwandlung in mechanische Arbeit, eine andere, die Umwandlung in elektromagnetische Strahlung (Wärme). Der erste Fall, Umwandlung in mechanische Arbeit, kommt nicht infrage,

da sich weder die Temperatur, noch die Entropie ändert. Auch gibt es keine materiellen Körper, an denen besagte Arbeit verrichtet werden könnte, haben wir bisher doch nur den leeren Raum betrachtet. Wir gehen jetzt einmal davon aus daß die Energie nicht irgendwo verschwindet, sondern als kosmische Hintergrundstrahlung in den Raum abgegeben wird:

V. *Die bei der Expansion der Metrik freiwerdende Energie wird als kosmische Hintergrundstrahlung in den Raum abgestrahlt.*

Diese breitet sich gemäß den im Abschnitt 4.3.4.4. abgeleiteten Gesetzmäßigkeiten mit Lichtgeschwindigkeit als überlagerte Störung des metrischen Wellenfelds aus. Ein Teil dieser Strahlungsenergie wird im Verlauf der Entwicklung in Teilchen bzw. materielle Körper verwandelt, die unseren Raum nach und nach füllen, so daß er nicht mehr leer ist. Einzelheiten sind einem späteren Abschnitt vorbehalten. Eine merkliche Auswirkung auf die Metrik als ganzes hat diese Materie jedoch nicht, da deren Masse weit unterhalb der Masse des metrischen Wellenfelds liegt. Die durch die materiellen Körper verursachten Störungen besagten Feldes breiten sich ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit aus und sind Ursache der gravitativen Wechselwirkung. Nach [24] wird Aussage VI. durch den Energieerhaltungssatz der MAXWELLSchen Gleichungen

$$\dot{w}_0 + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{i} \mathbf{E} \quad (374)$$

beschrieben. Hierbei ist \dot{w}_0 die Änderung der Energiedichte, \mathbf{S} der POYNTING-Vektor, \mathbf{i} die Stromdichte und \mathbf{E} die elektrische Feldstärke. Dieser Vorgang müßte dann auch noch heute stattfinden. Auf Grund der hohen Kreisgüte wäre jedoch der Betrag der abgestrahlten Energie dann so gering, daß er faktisch nicht nachweisbar ist.

4.6.4.2.1. Energie des MINKOWSKI'schen Linienelements (MLE)

Betrachten wir zunächst das einzelne MLE. Die Energie elektromagnetischer Strahlung ist definiert als $W_0 = \hbar \omega_0$. Sowohl \hbar als auch ω_0 sind Funktionen der Zeit und des Ortes. Zuerst wollen wir die zeitliche Abhängigkeit darstellen. Unter Anwendung von (363) erhalten wir:

$$W_0 = \frac{\hat{h}_i}{4\pi t} = \hbar_1 H = \hbar Q_0 H = \hbar \omega_0 \quad (375)$$

Alles in allem ein sehr einfacher Ausdruck, der sich nicht weiter vereinfachen läßt. Dies gilt, wenn wir den Expansionsmittelpunkt als Nullpunkt eines rein zeitlichen Koordinatensystems annehmen. Im zweiten Ausdruck tritt interessanterweise unsere Gitterkonstante π auf. Der Verlauf ist im Bild 58 dargestellt. Es gibt auch eine Maximalenergie ($Q=1/2$):

$$W_i = \frac{\hat{h}_i}{4\pi t_i} = \frac{\hbar_1 \omega_i}{\pi} = 4 \hbar_1 \omega_1 = 4,4508 \cdot 10^{131} \text{ Js} \quad (376)$$

Zu einem früheren Zeitpunkt gibt es noch keine MLEs. Wenn wir die räumliche Abhängigkeit (Bild 59) darstellen wollen, müssen wir (375) etwas umstellen. Wir substituieren $\omega_0 = c/r_0$:

$$W_0 = \frac{\hbar_1 \omega_0}{2\omega_0 t} \Rightarrow \frac{\hbar_1 c}{r_0} \frac{1}{2\omega_0 t - \beta r} = \frac{\frac{\hbar c}{\tilde{r}_0}}{\left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^2} = \frac{\tilde{W}_0}{\left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^2} \quad (377)$$

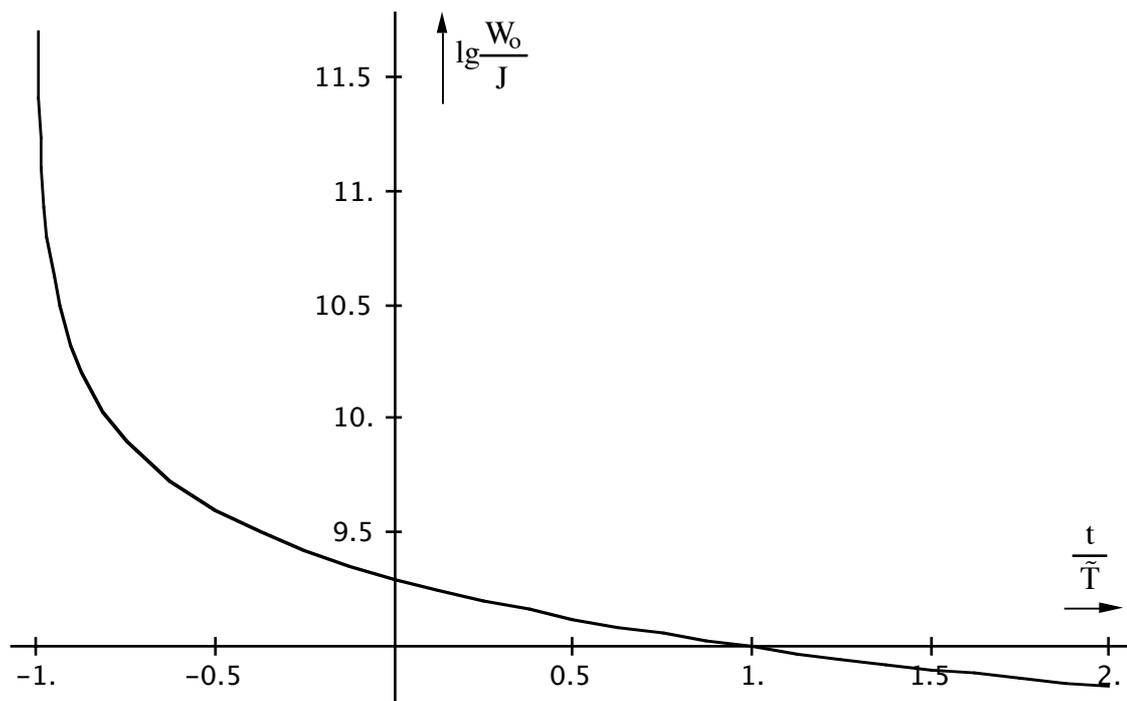


Bild 58
Energie des MINKOWSKIschen
Linielements zeitliche Abhängigkeit

Der dritte in (377) Ausdruck zeigt deutlich daß es sich bei \hbar auch um einen Drehimpuls handelt sowie die Einheit von mechanischer und elektromagnetischer Energie. Aufgrund des quadratischen Ausdrucks im Nenner ist die Energie des MLE immer positiv definiert, auch hinter der räumlichen Singularität. Der Verlauf unmittelbar hinter dem Partikelhorizont sowie bis zum Ereignishorizont ist in den Bildern 60 und 61 dargestellt.

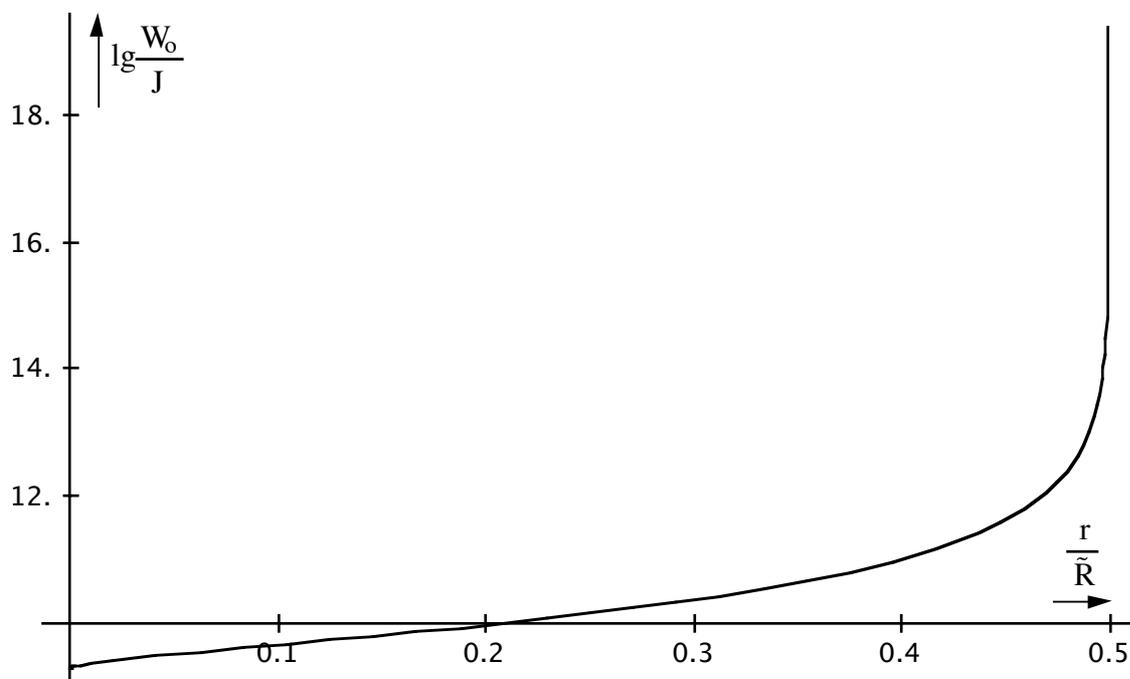


Bild 59
Energie des MINKOWSKIschen Linielements
räumliche Abhängigkeit bis zum Partikelhorizont

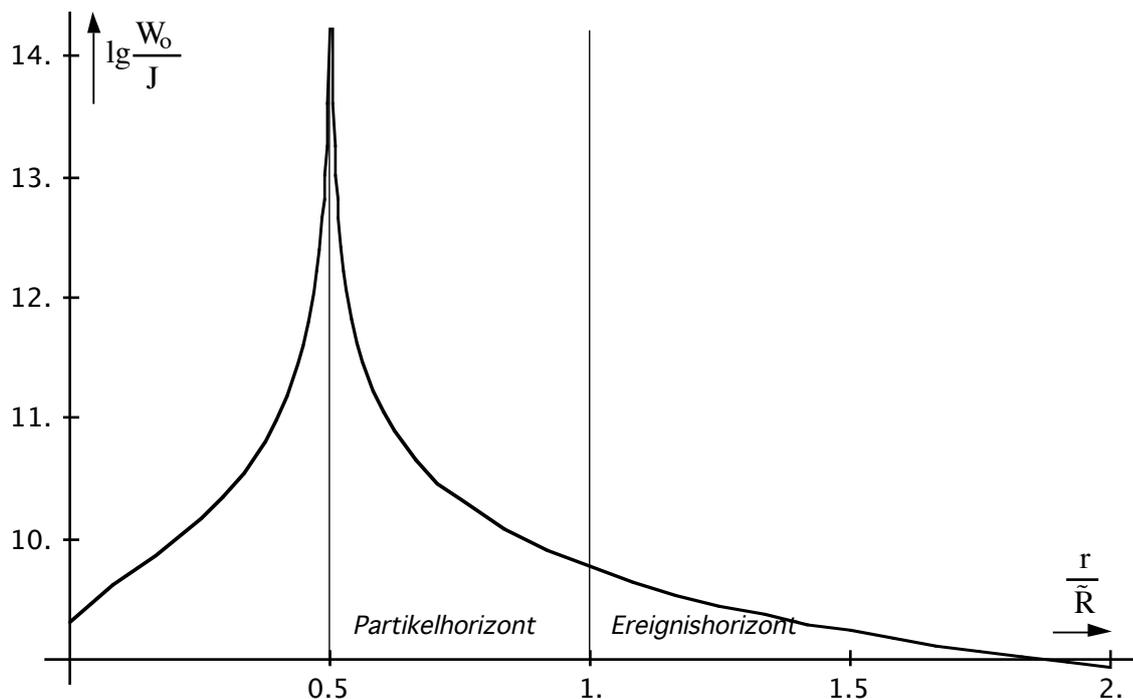


Bild 60
Energie des MINKOWSKISCHEN Linienelements
räumliche Abhängigkeit am Partikelhorizont

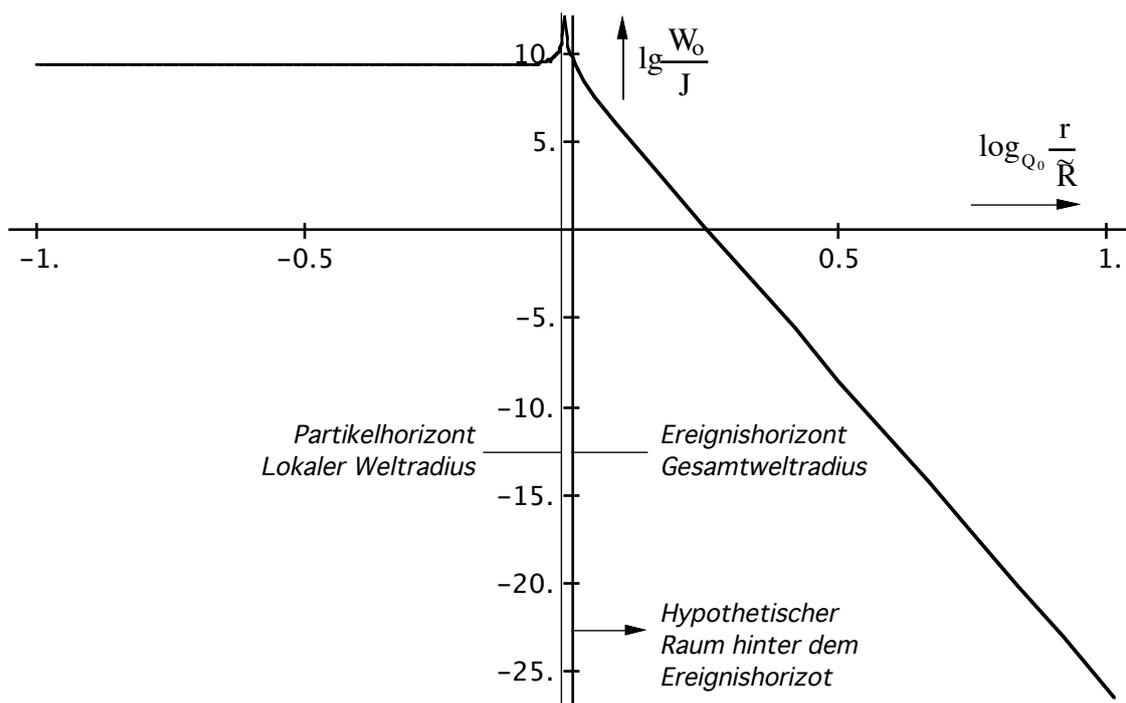


Bild 61
Energie des MINKOWSKISCHEN Linienelements
räumliche Abhängigkeit bis zum Ereignishorizont

4.6.4.2.2. Verlustleistung

Gemäß unserem Modell (Bild 12) tritt am Widerstand R_0 eine Verlustleistung P_v auf. Diese ist wiederum eine Funktion der Zeit und soll nach Annahme VI. Ursache für die kosmische Hintergrundstrahlung sein. Da wir nicht genau wissen, wie sich P_v verhält, ob es genügt wie bisher nur den Mittelwert zu betrachten, wollen wir zunächst die genaue Zeitfunktion aufstellen. Es gilt:

$$P_v = \frac{u_0^2}{R_0} \quad u_0 = \frac{q_0}{\epsilon_0 r_0} = -\frac{c\hat{\varphi}_i}{r_0} J_1(2\omega_0 t) \quad R_0 = \kappa_0 r_0 Z_0^2 \quad (378)$$

$$P_v = \frac{\hbar_i \omega_0}{t} J_1^2(2\omega_0 t) = \frac{\hbar_i}{t} \sqrt{\frac{\kappa_0}{2\epsilon_0 t}} J_1^2\left(\sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\epsilon_0}}\right) \quad (379)$$

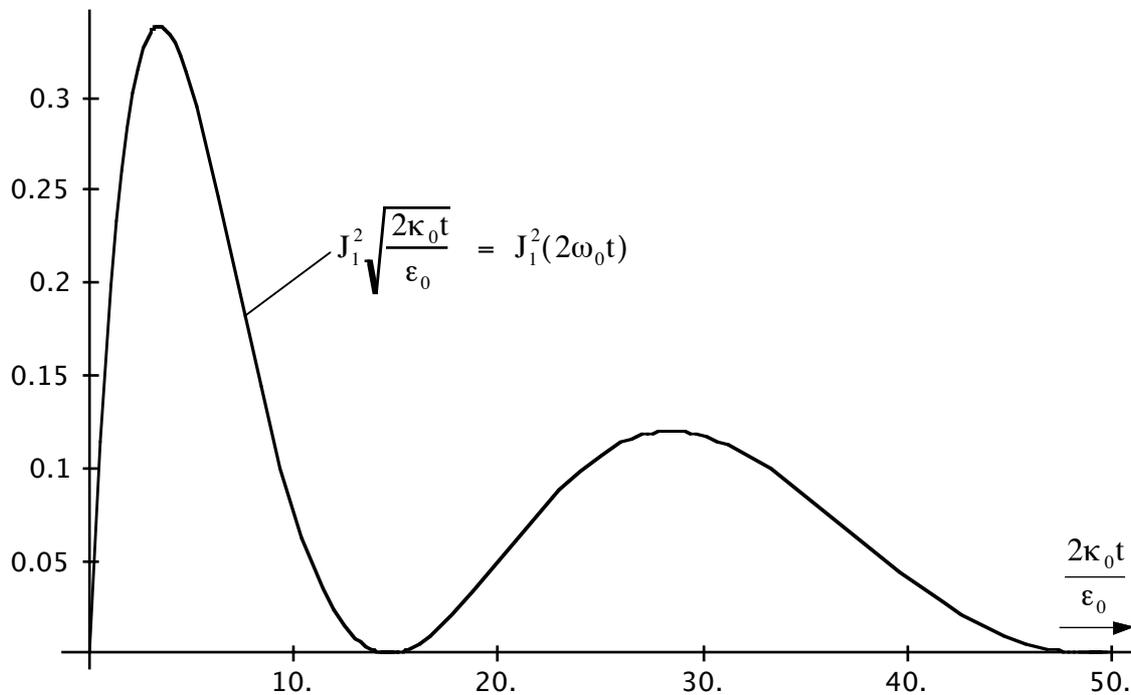


Bild 62
 Quadrat der Besselfunktion 1. Ordnung
 während der ersten Periode

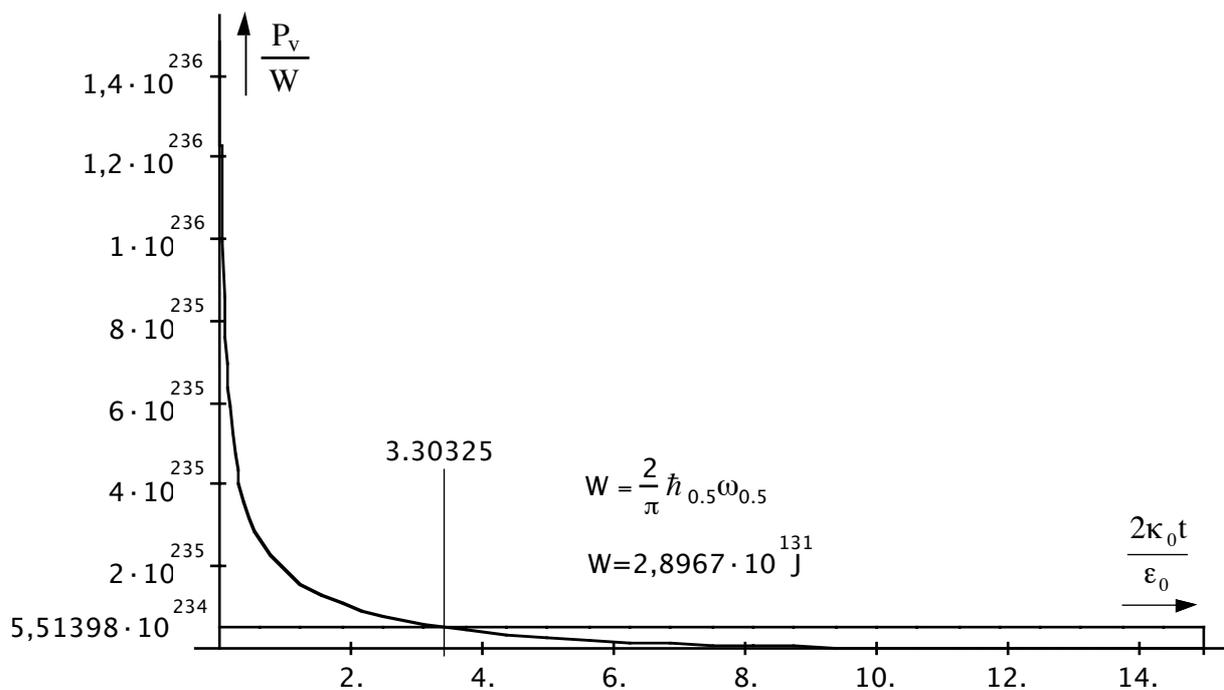


Bild 63
 Verlustleistung des MINKOWSKISCHEN
 Linienelements während des ersten Maximums

Minima und Maxima werden nur durch die Besselfunktion festgelegt. Interessant sind vor allem die ersten zwei Perioden. Im Bild 62 ist daher zunächst der Verlauf der Besselfunktion allein dargestellt, da man die Nullstellen in der Darstellung der gesamten Funktion (Bild 63) aufgrund des raschen Abfalls der Amplitude nicht mehr erkennen kann. Die Abschätzung ergibt $15t_1$ für die erste und $50t_1$ für die zweite Nullstelle.

Genau gesehen handelt es sich bei beiden Maxima nur um die erste Periode, da es durch das Quadrat zu einer Frequenzverdopplung kommt. Wir haben es hier mit einem Fall zu tun, bei dem man mit der exakten Zeitfunktion rechnen muß, wie schon im vorigen Abschnitt angedeutet. Der Verlauf der Verlustleistung während des ersten Maximums wird überwiegend durch den Quotienten vor der Besselfunktion bestimmt. Es bestehen keinerlei Ähnlichkeiten mit Bild 62. Der Mittelwert und der Energiebetrag wurde durch numerische Integration mittels der »Mathematica«-Funktion NIntegrate ermittelt. Ein Problem besteht darin, daß die Verlustleistung im Punkt Null gegen Unendlich geht. Wie Versuche mit der unteren Integrationsgrenze ergaben, konvergiert das Integral glücklicherweise gegen den im Bild 63 angegebenen Wert.

Bevor wir das erste Maximum weiter untersuchen, betrachten wir noch schnell das zweite (Bild 64). Man erkennt, daß sowohl die Leistung als auch die Energie dieses Maximums weit unterhalb des ersten liegt ($-21,6\text{dB} = 1/143$). Das bedeutet: Ist die kosmische Hintergrundstrahlung tatsächlich Wirkung der in R_0 anfallenden Verlustleistung, so ist es (fast) ausschließlich das erste Maximum, durch welches die Eigenschaften dieser Strahlung bestimmt werden. Unter Umständen läßt sich noch eine Wirkung des zweiten Maximums mit den heutigen technischen Mitteln nachweisen.

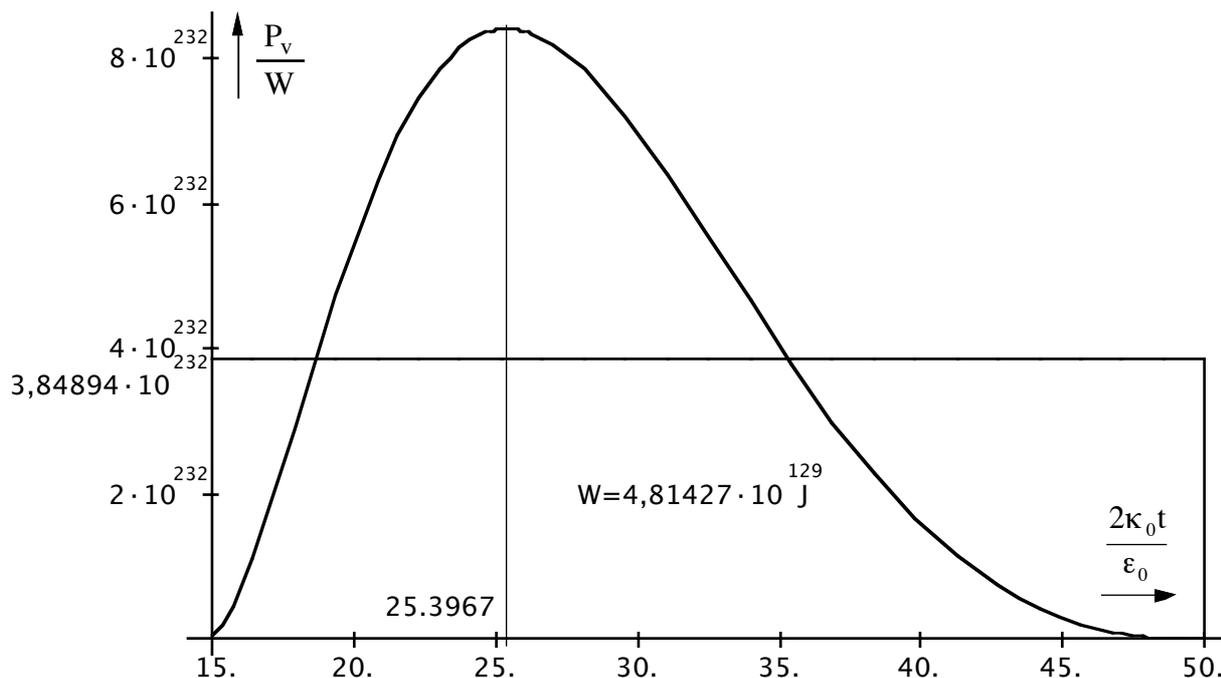


Bild 64
Verlustleistung des MINKOWSKISCHEN
Linienelements während des zweiten Maximums

Wir wollen jetzt das erste Maximum weiter untersuchen. Es handelt sich um einen einzelnen Impuls mit einer definierten Länge T beginnend im Punkt $t=0$. Am besten geeignet dazu ist die LAPLACE-Transformation. Damit ermittelt man zuerst die Bildfunktion $G(p)$ wie bereits im Abschnitt 4.3.2. vorgenommen. Durch den Übergang $p \rightarrow \sigma + j\omega$ können wir dann das Spektrum unseres Impulses bestimmen. Bei einem Einzelimpuls erhalten wir ein kontinuierliches Spektrum. Da wir die Bildfunktion von (379) nicht kennen und zur Transformation erst das Faltungsintegral mit (143) berechnen müßten, was sich recht schwierig gestaltet, wählen wir einen anderen Weg: Wir zerlegen die Funktion in 64 diskrete Werte und berechnen die Bildfunktion mit Hilfe der FOURIER-Transformation. Geeignet sind dazu die gängigen FFT-Algorithmen, wie z.B. die »Mathematica«-Funktion `Fourier[{\Liste}]`. Dabei müssen wir jedoch entweder das Ergebnis oder die Ausgangswerte mit Wurzel aus 2π multiplizieren, da es

sich um eine LAPLACE-Transformation handelt. Als Ergebnis erhalten wir wiederum eine Liste 64 komplexer Werte, wobei die letzten 32 negativen Frequenzen entsprechen. Der erste Wert entspricht dem Gleichanteil und nach dem Übergang σ . Wir wollen eine Bandbreiten-/Güteabschätzung vornehmen und setzen daher $\sigma=1$ (Normierung). Zunächst berechnen wir jedoch die Beträge der Bildfunktionen. Diese sind in den Bildern 65 und 66 dargestellt (nur positive Frequenzen $\omega_k=2\pi/T$).

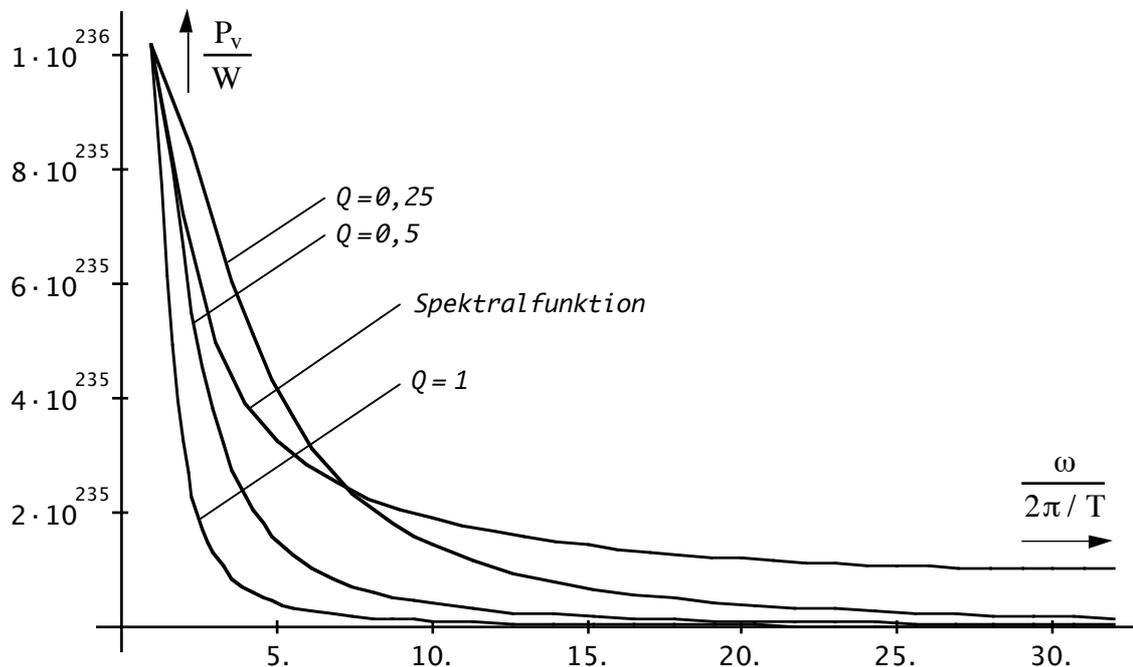


Bild 65
Kontinuierliches Spektrum (erstes Maximum)

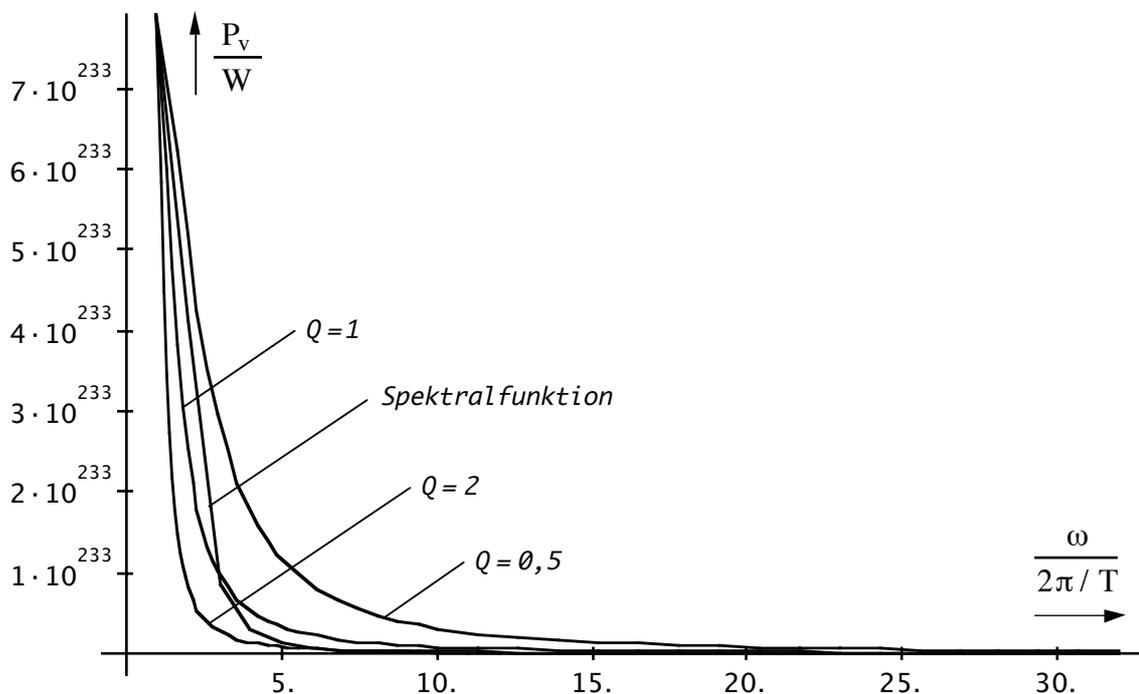


Bild 66
Kontinuierliches Spektrum (zweites Maximum)

Gleichzeitig sind die Übertragungsfunktionen eines verlustbehafteten Schwingkreises 1. Ordnung bei verschiedenen Gütewerten dargestellt. Damit können wir eine Abschätzung der Bandbreite der kosmischen Hintergrundstrahlung vornehmen. Für die Übertragungsfunktion gilt:

$$P_v = \frac{P_{\max}}{1 + v^2 Q^2} \quad v = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \quad \omega_0 = 1 \quad (380)$$

v ist die Verstimmung, Q die Güte des Schwingkreises. Für das erste Maximum liegt die Güte bei $1/2$, beim zweiten Maximum bei 1 . Die Kurven decken sich nicht ganz. Die Ursache liegt einerseits in der geringen Auflösung (64 Werte), andererseits handelt es sich bei der kosmischen Hintergrundstrahlung nicht mehr um ein Minimalphasensystem. In diesem Fall muß die Phaseninformation mit berücksichtigt werden, was wir in diesem Fall nicht getan haben. Nach [26] S. 341 läßt sich jedes Nicht-Minimalphasensystem in einen Minimalphasen- und einen Nicht-Minimalphasenanteil aufspalten. Für letzteren erhält man mit Hilfe der Bewertungsfunktion $\ln \coth(|\ln \omega / \omega_x|/2)$ eine korrigierte Übertragungsfunktion, wobei niedrigere Frequenzen höher, höhere Frequenzen niedriger bewertet werden. Dies wollen wir hier jedoch nicht weiter verfolgen, da die Ergebnisse für eine Abschätzung ausreichen.

Der Gütewert $0,5$ entspricht genau den Verhältnissen zum Zeitpunkt $t_1/4$ bzw. $r_1/2$, also bei unserer Kopplungslänge. Dies wollen wir uns zunächst merken. Beim zweiten Maximum haben wir es mit einer größeren Kreisgüte zu tun. Das bedeutet, sollte die Emission der kosmischen Hintergrundstrahlung "kontinuierlich" nach quantenmechanischem Verständnis erfolgen, hätten wir es zum heutigen Zeitpunkt mit einer sehr schmalen Spektrallinie zu tun, die sich im Bereich des Maximums der kosmischen Hintergrundstrahlung überlagert. Leider befinden sich in diesem Bereich bei 178 GHz viele andere Spektrallinien, die durch organische Radikale wie z.B. CN^- , CH_3^- verursacht werden, so daß ein Nachweis schwerfällt. Unter Anwendung von (220) wollen wir jetzt eine Näherung für den heutigen Zeitpunkt angeben. Die abgegebene Leistung folgt dann in etwa der Zeitfunktion $\sin^2 x$ mit dem Effektivwert P_v , dieser läßt sich auf mehrere Arten herleiten:

$$P_v = -\dot{W}_0 = \frac{\hat{h}_i}{4\pi t^2} = 2\hbar_1 H^2 = 2\hbar Q_0 H^2 = 2\hbar \omega_0 H \quad (381)$$

Das entspricht einem heutigen Wert von $9,6437 \cdot 10^{-9} \text{W}$. Bei obengenannter Frequenz entspräche dies einer Emissionsrate von $7,53 \cdot 10^{13}$ Photonen bzw. der "Erschaffung" von 64 Wasserstoffatomen pro Sekunde nur durch ein einzelnes MLE. Die kosmische Hintergrundstrahlung macht aber nur ca. 500 Photonen pro cm^3 aus. Dies ist offenbar ein Widerspruch. Bevor wir versuchen, diesen Widerspruch zu lösen, wollen wir uns erst einmal mit den bisher bekannten Eigenschaften der kosmischen Hintergrundstrahlung befassen.

4.6.4.2.3. Eigenschaften der kosmischen Hintergrundstrahlung

Fragt man jemanden, was die kosmische Hintergrundstrahlung denn eigentlich sei, so haben die meisten schon einmal davon gehört. Wenn man dann weiter nachforscht, erfährt man vielleicht noch, daß die Strahlungstemperatur, was immer das auch sei, etwa bei $2,7\text{K}$ oder bei 3K liegt oder irgendwo dazwischen und daß diese Strahlung irgendwie mit dem Urknall zu tun hat. Dies sind alles in allem sehr ungenaue Angaben. Will man mehr darüber erfahren, so hat man im allgemeinen Pech. Als Techniker interessiert man sich besonders für Details wie z.B. die Frequenz und vor allem die Feldstärke. Auf dem Empfänger kann man ja schlecht eine Frequenz von 3K einstellen. Das macht aber nichts. Mit diesen wenigen Angaben kann man nämlich schon alles selbst ausrechnen. Dies wollen wir jetzt tun.

Die kosmische Hintergrundstrahlung verfügt über drei weitere wesentliche Eigenschaften: Erstens ist sie *isotrop*, zweitens ist sie *nicht polarisiert* und drittens ist sie *schwarz*, wie bei ausführlichen Untersuchungen eindeutig festgestellt wurde. Besonders wichtig ist die dritte Eigenschaft. Die kosmische Hintergrundstrahlung verhält sich so als wäre sie von einem idealem schwarzen Körper emittiert. Aufgrund dieser Eigenschaft kann man die PLANCKschen Strahlungsgesetze anwenden. Als Techniker interessiert man sich vor allem für die Feldstärke und die Frequenz. Bei thermischer Strahlung hat man es jedoch nicht mit einer einzelnen Spektrallinie zu tun sondern mit einer stetigen Spektralfunktion. Die Intensität des

Strahlungsfeldes ist eine Funktion der Frequenz und wird durch die PLANCKSche Strahlungsformel eindeutig beschrieben:

$$dS_k = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar\omega^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \mathbf{e}_s d\omega \quad \text{PLANCKSche Strahlungsformel} \quad (382)$$

T ist hier die Temperatur und \mathbf{e}_s der Einheitsvektor. Für den Fall sehr niedriger Temperaturen ($\hbar\omega \gg kT$) geht (382) in das WIENSche Strahlungsgesetz (Näherung) über. Es ist aber kein Fehler, wenn man immer mit (382) rechnet. Dies wollen wir auch tun. Nur zur Information:

$$dS_k \approx \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar\omega^3}{c^2} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \mathbf{e}_s d\omega \quad \text{WIENSches Strahlungsgesetz} \quad (383)$$

Der Verlauf der Intensität für eine Strahlungstemperatur von $3,0256K^1$ ist im Bild 67 dargestellt (Kurve 6). Man erkennt, daß es ein definitives Maximum gibt. Dieses wiederum kann man mit Hilfe des WIENSchen Verschiebungsgesetzes bestimmen:

$$\hbar\omega_{\max} = 2,821439372 kT \quad \text{WIENSches Verschiebungsgesetz} \quad (384)$$

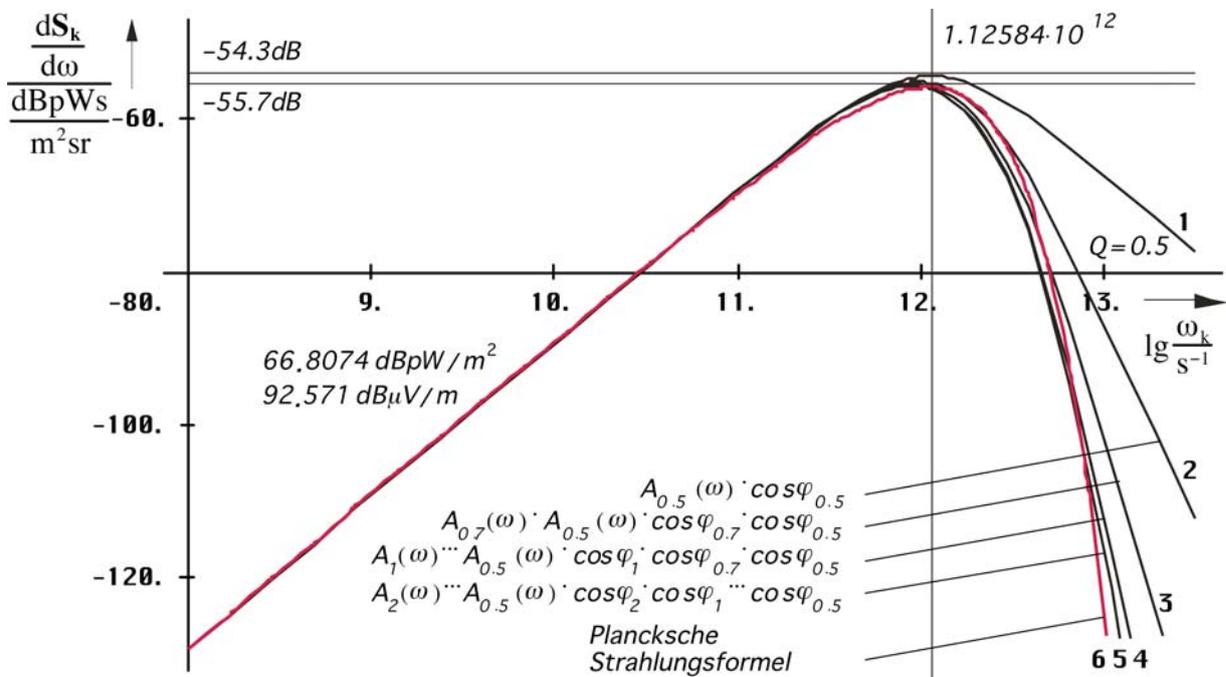


Bild 67
Intensität der kosmischen Hintergrundstrahlung mit Approximation

Weiterhin interessiert noch das Integral der Intensität über den gesamten Frequenzbereich, der POYNTING-Vektor. Dies ist das STEFAN-BOLTZMANNsche Strahlungsgesetz:

$$\bar{S}_k = \int W_\omega d\omega = \sigma T^4 \mathbf{e}_s = \frac{\pi^2 k^4 T^4}{60 c^2 \hbar^3} \mathbf{e}_s \quad \text{STEFAN-BOLTZMANNsches Strahlungsgesetz} \quad (385)$$

mit $\sigma = 5,669 \cdot 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$. Weiterhin haben wir in Bild 67 die Übertragungsfunktion eines Schwingkreises der Güte 0,5 überlagert (Kurve 1). Aufgrund der logarithmischen Darstellung

¹ Wie neueste Beobachtungen durch Satelliten (COBE) bestätigen, liegt die tatsächliche Temperatur des Maximums der CMBR etwas niedriger bei 2,7250K. Eine Korrektur des damit verknüpften Wertes von H mit Hilfe von (405) führt jedoch auf einen Wert, der außerhalb des durch astronomische Beobachtungen belegten Wertebereichs liegt ($61 \text{ Kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$). Dies, und die Tatsache, daß innerhalb der CMBR eine gewisse Fluktuation der Temperaturwerte festgestellt wurde, führt zu der Vermutung, daß für die zusätzliche Abkühlung von 0,3K ein weiterer, zusätzlicher Prozeß verantwortlich ist. Hierzu würde sich die „Multiple Scattering-Theorie“ von S. Roy und S. Datta in [31] anbieten. Siehe auch Abschnitt 7.5.3.

entspricht die Multiplikation der Übertragungsfunktion mit dem Maximalwert bzw. eine Dämpfung nur einer Verschiebung in y-Richtung, so daß wir schon einen Vergleich vornehmen können, ohne diesen Wert zu kennen. Kurve 1 entspricht also dem Spektrum der Emission bei Einkopplung in das metrische Transportgitter. Der Maximalwert wurde so gewählt, daß beide Kurven zur Deckung kommen.

Man erkennt, im unteren Bereich läßt sich eine genaue Deckung beider Kurven erzielen. Jedoch kommt es beim Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung zu einem Abfall bei den hohen Frequenzen, der nicht dem Verhalten dieses Schwingkreises entspricht. Dies könnte unter Umständen Resultat der Grenzfrequenz der Metrik sein. Um dies zu überprüfen, benötigen wir jedoch die genaue Frequenz, mit der die kosmische Hintergrundstrahlung emittiert wurde, um den Betrag z der Rotverschiebung zu ermitteln. Die Frequenz muß irgendwo im Bereich von ω_1 liegen. Dies ergibt sich aus der Länge T des ersten Maximums. In diesem Fall käme die Grenzfrequenz tatsächlich zum Tragen (siehe auch [46]).

Betrachten wir nun einmal das Problem als Puzzle. Die Bandbreite der LAPLACE-Transformierten des ersten Maximums läßt auf eine Güte von 0,5 schließen. Dies würde den Verhältnissen zum Zeitpunkt $t_1/4$ bei $r_1/2$, also unserer Kopplungslänge entsprechen. Die Frequenz beträgt zu diesem Zeitpunkt:

$$\omega_{0,5} = \frac{1}{t_1} = \frac{2\kappa_0}{\varepsilon_0} = \frac{\omega_1}{Q_{0,5}} = 2\omega_1 = 2,7982 \cdot 10^{104} \text{ s}^{-1} \quad (386)$$

Dies entspricht nicht ganz dem Wert, der sich aus der Impulslänge des ersten Maximums ergibt, liegt aber in der Größenordnung. Nun sind die Verhältnisse in dieser Zeit auch durch eine sehr große Unbestimmtheit geprägt und aufgrund der großen Bandbreite liegt ohnehin ein Teil der emittierten Frequenzen oberhalb, der andere unterhalb von (386), so daß es durchaus denkbar ist, daß die Einkopplung der kosmischen Hintergrundstrahlung genau zu diesem Zeitpunkt mit exakt dieser Mittenfrequenz erfolgt.

Bis zum Augenblick der Einkopplung existiert die bereits emittierte Energie als freie Welle. Jetzt kommt es zum Aufbau des metrischen Gitters und das Signal wird eingekoppelt. Bei der Einkopplung kommt es aber zu einer Stauchung der Wellenlänge d.h. einer Frequenzerhöhung um den Faktor $\sqrt{2}$ aufgrund der Drehung des Koordinatensystems um 45° , die wir im Abschnitt 4.3.4.3.3. vorgenommen haben (die Metrische Welle bewegt sich in r-Richtung, die überlagerten Signale in x-Richtung). Nun wäre allerdings die zu übertragende Frequenz höher als die Eigenfrequenz des metrischen Gitters, so daß nach dem Abtasttheorem keine sichere Übertragung möglich ist.

Es kommt aber noch zu einem zusätzlichen Effekt: Im Abschnitt 4.6.1. haben wir festgestellt, daß ein Würfel der Kantenlänge πr_0 nicht nur ein, sondern sechs MLE's enthält. Damit muß die Energie auch auf diese sechs MLE's aufgeteilt werden. Da \hbar unteilbar ist, verringert sich die Einkopplungsfrequenz wieder. Sie ergibt sich jetzt zu $\omega_s = \sqrt{2} \omega_1 / 3 = 0,47 \omega_1 = 6,59542 \cdot 10^{103} \text{ s}^{-1}$ und liegt damit soweit unterhalb der Eigenfrequenz des metrischen Gitters, daß die Forderungen des Abtasttheorems erfüllt sind.

Nun zur Übertragung selbst. Nach (278) verhält sich die Frequenz zeitartiger Vektoren proportional $\omega \sim t^{-3/4}$. Das entspricht $\omega \sim Q^{-3/2}$ für die Güte. Wir machen folgenden Ansatz:

$$\omega_s = \frac{\sqrt{2}}{6} \omega_{0,5} \left(\frac{Q_{0,5}}{Q_0} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\omega_1}{2^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{Q_1}{Q_{0,5}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_1 \left(\frac{1}{2Q_{0,5}} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_1 \quad (387)$$

$$\omega_k = \frac{\sqrt{2}}{6} \omega_{0,5} \left(\frac{Q_{0,5}}{Q_0} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_1 \left(\frac{1}{2Q_0} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_1 (2Q_0)^{-\frac{3}{2}} \quad (388)$$

$$z = \frac{\lambda_k - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{\omega_s}{\omega_k} - 1 \approx \frac{\omega_s}{\omega_k} = (2Q_0)^{3/2} = 2\sqrt{2} Q_0^{3/2} \quad (389)$$

Der Faktor $2\sqrt{2}$ liegt in der gleichen Größenordnung wie der Faktor 2,8214 aus dem WIENSchen Verschiebungsgesetz. Für ω_k erhalten wir einen Wert von $1,12584 \cdot 10^{12} \text{s}^{-1}$. Kurve 1 im Bild 67 entspricht dem um $(2Q_0)^{3/2}$ rotverschobenen Signal ω_s mit dem Frequenzgang eines Filters 1. Ordnung (Schwingkreis) bei Einkopplung. Dieses ist bis auf den Abfall bei den hohen Frequenzen identisch mit ω_k . Kurve 6 stellt den Verlauf eines thermischen Strahlers der Temperatur $3,03256 \text{K}$ dar¹. Dies ist exakt die Temperatur eines schwarzen Strahlers mit der Frequenz ω_k .

Wir wollen jetzt davon ausgehen, daß der Abfall bei den hohen Frequenzen tatsächlich durch die Existenz einer Grenzfrequenz verursacht wird. Dann müßte auch die Intensität der kosmischen Hintergrundstrahlung genau der PLANCKSchen Strahlungsformel folgen. Die Grundlagen für die Lösung wurden im Abschnitt 4.3.4.4.5. erarbeitet. Der exakte Nachweis ist aber etwas komplizierter, vor allem wegen der Integrale. Man muß zunächst die Zeitfunktion der Frequenz (302) beginnend bei $t_1/4$ bis zum Ereignishorizont $2T$ bestimmen und in den Ausdruck für den Amplitudengang einsetzen (150). Die genaue Berechnung möchte ich auf einen späteren Zeitpunkt verschieben, zumal sich durch eine Näherungslösung eine sehr gute Approximation erreichen läßt.

Wir haben ja bereits festgestellt, daß auch das einzelne MLE über eine feste Grenzfrequenz verfügt (147). Bei der Ausbreitung wird nur der Wirkanteil $A(\omega) \cdot \cos\varphi_\gamma$ mit $\varphi_\gamma = B(\omega)$ übertragen (Realteil). Damit erhalten wir als Grenzfrequenz genau den Wert $\omega_g = 2\omega_1$, es gilt $\Omega = \omega / (2\omega_1)$. Bei genauerer Betrachtung sieht man, daß die Grenzfrequenz eigentlich nur in den ersten Augenblicken der Ausbreitung wirksam werden kann. Betrachten wir jetzt den Augenblick der Einkopplung: Das Signal (Kurve 1) wird in das MLE eingespeist und mit dem Frequenzgang beauftragt. Als Ergebnis erhalten wir Kurve 2, die der PLANCKSchen Kurve schon recht nahe kommt. Jetzt wird das Signal auf ein zweites MLE übertragen, wobei sich die Frequenz innerhalb dieser Zeitspanne auf den Wert $\omega_s / \sqrt{2}$ verringert hat. Wir beauftragen das Signal nun erneut mit dem Frequenzgang und erhalten Kurve 3 (Bei der Darstellung haben wir die Frequenz als konstant angesehen und dafür die Grenzfrequenz dementsprechend heraufgesetzt). Kurve 3 kommt dem angestrebten Ergebnis noch näher.

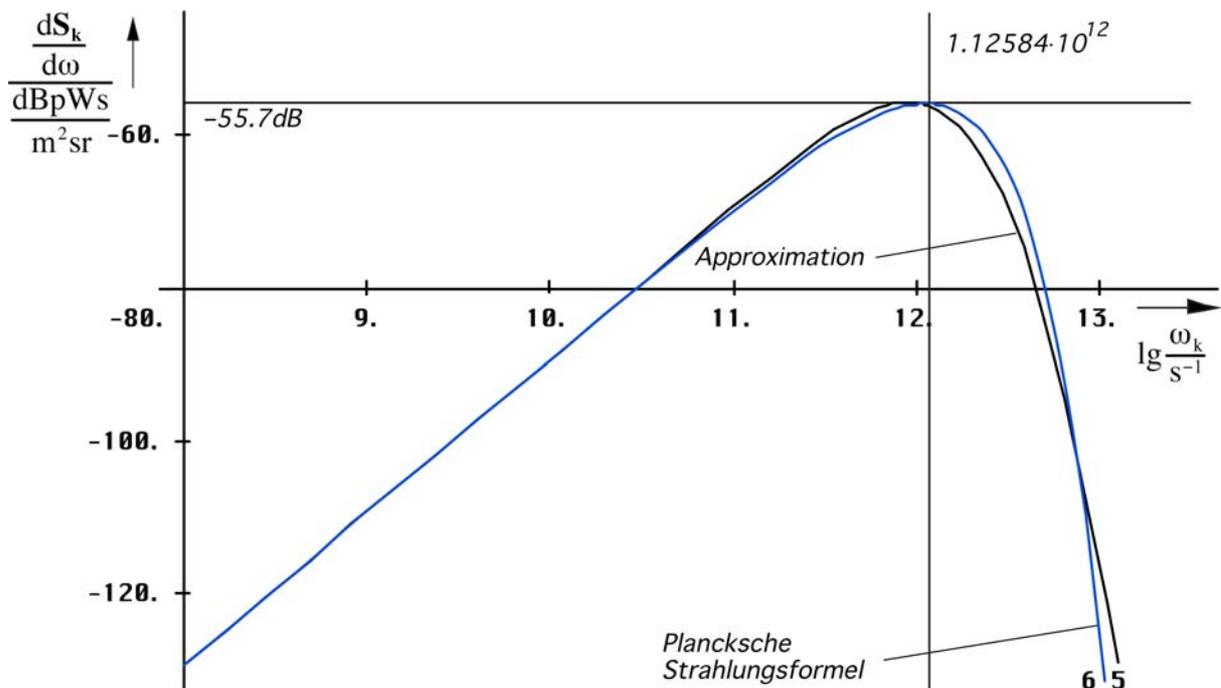


Bild 68
PLANCKSche Strahlungsformel und Approximation

¹ Basiert auf einem Wert des HUBBLE-Parameters von $75,9 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Die aktuell vom COBE-Satelliten gemessene Temperatur von $2,725 \pm 0,002 \text{K}$ (Wikipedia) läßt eher auf $H_0 = 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ schließen. Siehe auch Abschnitt 7.5.3.

Wir wiederholen den gesamten Vorgang noch zweimal und erhalten Kurve 4 ($\omega_s/1$) und schließlich Kurve 5 ($\omega_s/2$), die eine sehr gute Approximation der PLANCKschen Kurve darstellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit haben wir Kurve 5 und die Vergleichskurve (schwarzer Strahler) noch einmal einzeln dargestellt (Bild 68).

Es könnte also durchaus so sein, daß die PLANCKschen Strahlungsgesetze tatsächlich das Ergebnis der Existenz einer oberen Grenzfrequenz des Vakuums sind. Hierbei ist zu beachten, daß das, was für zeitartige Vektoren, die direkt nach dem Urknall emittiert wurden, dann auch für zeitartige Vektoren, die zu einem späteren Zeitpunkt (z.B. heute) emittiert werden, gelten muß. Bei zeitartigen Vektoren läßt sich ja gerade nicht feststellen, wann und wo sie emittiert wurden. Da kein Vektor gegenüber dem anderen ausgezeichnet ist, muß dann jede thermische Emission nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten (PLANCKsche Strahlungsformel) ablaufen. Bleibt nur noch festzustellen, welchen Weg die kosmische Hintergrundstrahlung bis zum heutigen Zeitpunkt zurückgelegt hat. Durch Einsetzen von (389) in (309) erhalten wir für den Abstand r:

$$r = \frac{\tilde{R}}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \approx \frac{\tilde{R}}{2} z^{\frac{4}{3}} = 2\tilde{R}Q_0^2 \tag{390}$$

$$r = r_1 Q_0^2 = R = 2cT \quad \text{mit } \tilde{R} = \frac{r_1}{2} \tag{391}$$

Die kosmische Hintergrundstrahlung hat exakt die Entfernung des lokalen Weltradius zurückgelegt, kommt also vom Rand unseres lokalen Universums. Zeitlich gesehen kommt sie aus der Zeit unmittelbar nach dem Urknall. Damit haben wir den Abstand zum Ereignishorizont exakt definiert. Dieser ist gleich R bzw. 2T. Also gibt es innerhalb unseres lokalen Universums (und auch r_0 und r_1) genau zwei Singularitäten/Horizonte. Im Abstand $R/2=cT$ befindet sich der Partikelhorizont. Dieser ist identisch mit dem inneren SCHWARZSCHILD-Radius. Im Abstand $R=2cT$ befindet sich der Ereignishorizont. Dieser ist identisch mit dem äußeren SCHWARZSCHILD-Radius.

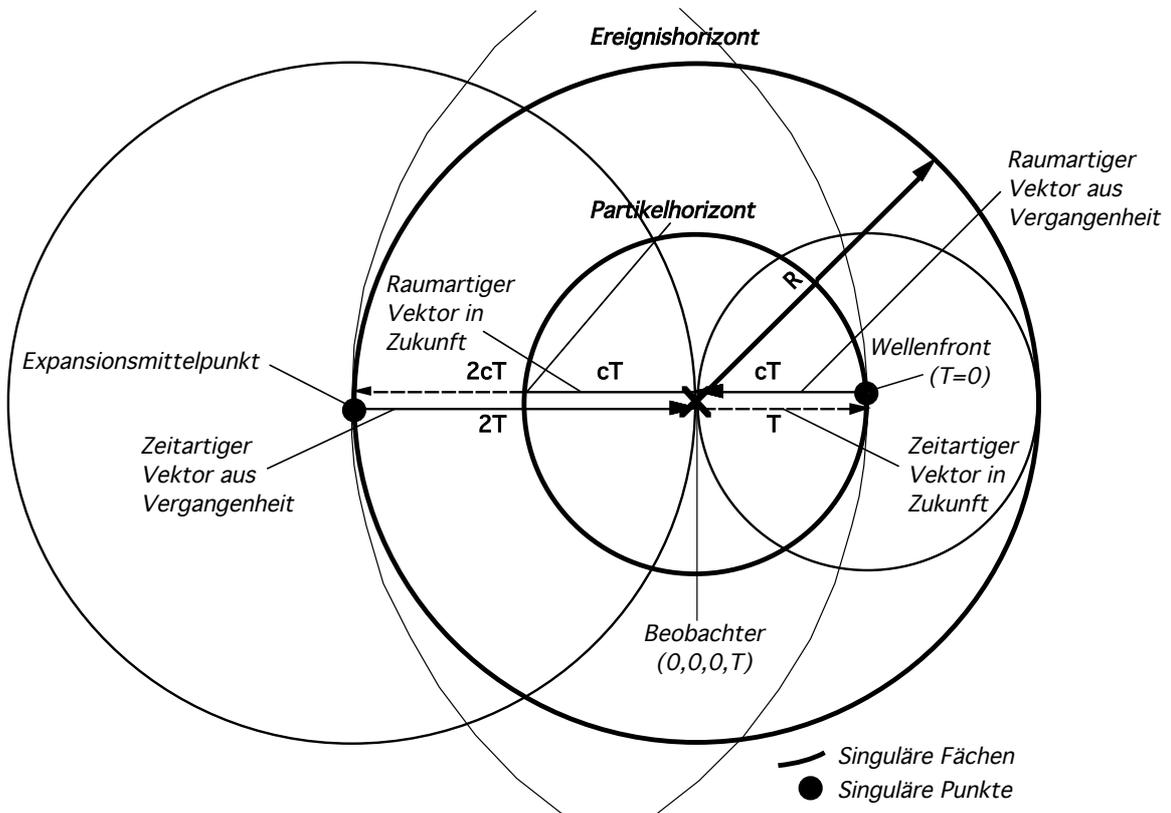


Bild 69
Weltmodell mit Verlauf raumartiger
und zeitartiger Vektoren

Zeitartige Vektoren verlaufen auf Weltlinien, die aus dem Partikelhorizont kommen. Nach dem Durchgang durch den Punkt Null verlaufen sie asymptotisch in Richtung Ereignishorizont. Dies stimmt auch gut mit der Energie W_0 des einzelnen MLE überein, die im Partikelhorizont ein Maximum erreicht (maximale Abstrahlung). Der Partikelhorizont stellt somit einen singulären Punkt für zeitartige Vektoren dar während der Ereignishorizont eine singuläre Fläche bildet.

Raumartige Vektoren hingegen verlaufen entgegen der Richtung zeitartiger Vektoren auf Weltlinien, die aus dem Ereignishorizont (Expansionsmittelpunkt) kommen und nach Durchgang durch den Punkt Null in Richtung Partikelhorizont verlaufen. Der Ereignishorizont bildet einen singulären Punkt, der Partikelhorizont eine singuläre Fläche für raumartige Vektoren (Bild 69). Das metrische Wellenfeld selbst ist ein raumartiger Vektor, wie der Name schon sagt. Hier liegt auch die Erklärung der entgegengesetzten Vorzeichen von Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. Nun noch einmal die Zusammenfassung:

VI. *Jeder zeitartige Vektor verhält sich so, als käme er aus dem Partikelhorizont und bewege sich in Richtung Ereignishorizont . Das gilt auch in den Fällen, in denen der Vektor unvollständig oder unterbrochen ist.*

Jeder raumartige Vektor verhält sich so, als käme er aus dem Ereignishorizont und bewege sich in Richtung Partikelhorizont . Das gilt auch in den Fällen, in denen der Vektor unvollständig oder unterbrochen ist.

Diese Feststellungen würde auch die in jüngster Zeit erhaltenen Ergebnisse der Untersuchung kohärenter Photonen (“Gedächtnis”, Durchtunneln mit “Überlichtgeschwindigkeit”) erklären. Die Photonen bewegen sich auf der gleichen zeitartigen Weltlinie und sind über das Vakuum, nicht über die Metrik gekoppelt. Die Grenzfrequenz des Vakuums wäre auch eine Erklärung dafür, warum unser Universum größtenteils nur “normale” Materie und kaum Antimaterie enthält. Antimaterie als eigenständige Lösung der Feldgleichungen hat eine Eigenfrequenz, die oberhalb der Frequenz des metrischen Gitters liegt, während die Frequenz “normaler” Materie darunter liegt. Damit hat dann die Entstehung von Antimaterie durch die Existenz der Grenzfrequenz eine geringere Wahrscheinlichkeit (Symmetrie-brechung), was zu den heute bestehenden Verhältnissen führt.

Auch später soll nun die Emission nach unserem Modell exakt mit der Frequenz der kosmischen Hintergrundstrahlung erfolgen. Die Frequenz des MLE’s folgt aber nur der Funktion $\omega_n = \omega_1/Q_n \sim Q^{-1}$. Würde die Emission aber mit der Frequenz ω_n (heute ω_0) erfolgen, käme die Grenzfrequenz nicht zum Tragen und das Spektrum würde eher wie Kurve 1 aussehen. Außerdem wäre dann die Bandbreite extrem schmal. Möglich wäre jetzt, daß jede thermische Emission, die direkt aus dem Vakuum kommt, also ohne Einwirkung des metrischen Gitters, mit der Frequenz ω_s erfolgt. Bei der Einkopplung in das metrische Gitter kommt es dann zu einer sofortigen Rotverschiebung mit Frequenzgangsangleichung (Emissionsrotverschiebung) zur Anpassung an bereits existierende Vektoren.

Beispiele wären einerseits direkte Teilchenreaktionen (starke Wechselwirkung) aber auch thermische Emissionen, die durch Stoßprozesse von Teilchen erzeugt werden (Wärmestrahlung). Dazu müßte dann aber die Energie (Masse) der Teilchen wesentlich größer als die bisher angenommenen $\hbar\omega_e/c^2$ sein. Nehmen wir obengenanntes Modell an, welches normalen Teilchen eine Eigenfrequenz unterhalb ω_0 , also $\omega_0 - \omega_e$, den Antiteilchen aber eine Eigenfrequenz oberhalb ($\omega_0 + \omega_e$) zuweist, hätten wir dann auch die höhere Energie.

Bei Wechselwirkungsprozessen mit oder über die Metrik wird dann durch diese Rotverschiebung nur die Differenzfrequenz wirksam (und nur \hbar , siehe weiter unten), so daß es zur Neubildung von Teilchen nur der Energie $\hbar\omega_e$ bedarf. Den Rest gibt die Metrik dazu. Umgekehrt wird dann auch nur diese Energie wieder frei. Die Frequenzgangskurve bei $2\omega_1$ wäre dann die nichtlineare Kurve, die zur Bildung von Summen- und Differenzfrequenz notwendig

ist. Da Summen- und Differenzfrequenz gemäß $\cos \alpha \cos \beta = [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]/2$ immer gemeinsam auftreten, kommt es auch immer zur Paarerzeugung.

Wodurch kann eine solche augenblickliche Rotverschiebung verursacht werden? Gehen wir davon aus, daß die Metrik auch heute noch über die Länge $r_1/2$ mit dem Vakuum gekoppelt ist, so haben wir es mit den selben Verhältnissen zu tun, wie bei der Bestimmung der zeitlichen Abhängigkeit der Wellenlänge im Abschnitt 4.3.4.4.1. (277) und (278). Dort haben wir eine Transformation von einem singulären rein zeitlichen auf ein raum-zeitliches Koordinatensystem durchgeführt, wobei wir zu dem Ausdruck $\lambda \sim Q_0^{3/2}$ gelangt waren. Dies entspricht aber genau der Rotverschiebung der kosmischen Hintergrundstrahlung aus den ersten Augenblicken der Entwicklung. Hierbei entspricht der leere Raum unserem zeitlichen, die Metrik dem raum-zeitlichen Koordinatensystem (ohne Metrik kein Raum). Bei der Einkopplung in die Metrik findet also auch heute noch dieselbe Transformation statt, wie wir sie im Abschnitt 4.3.4.4.1. durchgeführt haben. Die augenblickliche Rotverschiebung von zeitartigen Vektoren kann auch als Einführung einer zusätzlichen vierten Dimension, der Zeit, betrachtet werden. Beobachtet man einen Vorgang aus der Metrik heraus, müssen immer alle vier Dimensionen transformiert werden.

Damit ergibt sich $\omega \sim Q^{-3/2}$ auch für die im Raum angekommene Frequenz (CMBR-Frequenz). Bei dieser Transformation bleiben aber alle Frequenzverhältnisse erhalten, so daß sich dieselben Bedingungen (Bandbreite wie bei $Q=0,5$) zu jedem Zeitpunkt ergeben. Damit ist unser Modell bestätigt und wir haben nebenbei das Wirkprinzip des WIENSchen Verschiebungsgesetzes und der PLANCKSchen Strahlungsformel anhand dieses Modells erklärt. Zur besseren Übersicht sind die einzelnen Frequenzen noch einmal in Tabelle 3 dargestellt:

Emissionsfrequenz	ω_e	$2,79820 \cdot 10^{104} \text{s}^{-1}$	f_e	$4,4535 \cdot 10^{103} \text{Hz}$
Immissionsfrequenz	ω_s	$6,59542 \cdot 10^{103} \text{s}^{-1}$	f_s	$1,0496 \cdot 10^{103} \text{Hz}$
CMBR-Frequenz	ω_k	$1,12584 \cdot 10^{12} \text{s}^{-1}$	f_k	179,183 GHz

Tabelle 3
Frequenzen der kosmologischen
Hintergrundstrahlung

4.6.4.2.4. Emissionsrate, Energie

Wir haben die Frequenzverhältnisse der kosmischen Hintergrundstrahlung bestimmt. Dabei haben wir festgestellt, daß die Rotverschiebung z nach Einkopplung einen Wert von $(2Q_0)^{3/2}$ erreicht. In Zahlen sind das $5,858 \cdot 10^{91}$. Von der Ausgangsfrequenz $2\omega_1$ aus gerechnet beträgt die Rotverschiebung sogar $12Q_0^{3/2}$. Damit entspricht auch die im Raum angekommene Leistung (CMBR-Leistung) P_k nicht mehr der Verlustleistung des MLE und wir müssen (381) dementsprechend abändern:

$$P_k = \frac{?}{48\pi Q_0^{3/2} t^2} = \frac{1}{6} \hbar_1 H^2 Q_0^{-3/2} = \frac{1}{6} \frac{\hbar H^2}{\sqrt{Q_0}} \quad P_T = 0,5503 P_k \quad (392)$$

Die tatsächliche Leistung P_T ergibt sich aus dem Flächenverhältnis der PLANCKSchen Kurve (6) und der Ausgangskurve (1). Dieses habe ich durch numerische Integration bestimmt. Die CMBR-Leistung (Neuemission) entspricht dann einem heutigen Wert von $P_T = 2,1307 \cdot 10^{-101} \text{W}$. Bei obengenannten Frequenzen ω_k und ω_T errechnet sich die Emissionsrate n dann folgendermaßen:

$$n_k = \frac{?}{\omega_0} \quad n_T = 0,5503 \frac{?}{\omega_0} = 1,795 \cdot 10^{-79} \text{s}^{-1} \quad (393)$$

Das entspricht etwa $1,43 \cdot 10^{-91}$ Wasserstoffatomen pro Sekunde durch ein einzelnes MLE. Dieser Wert ist auf jeden Fall glaubhafter als der vorhergehende. Wie genauere Untersuchungen ergaben ist aber auch dieser Wert noch zu hoch. Innerhalb einer Kugel mit dem Radius von 1m befinden sich nämlich gemäß (342) etwa $2 \cdot 10^{104}$ Linienelemente. So käme

es dort auch heute noch zur Emission von etwa $3,6 \cdot 10^{25}$ Photonen bzw. $2,86 \cdot 10^{13}$ Wasserstoffatomen pro Sekunde (ohne Berücksichtigung des Fermionen-/Bosonen-Verhältnisses). Dies ist offenbar falsch. Ausdruck (395) ist also noch nicht vollständig. Wir haben nämlich bisher nur die frequenzmäßige Rotverschiebung betrachtet. Es gibt aber auch noch eine zusätzliche energetische Rotverschiebung, verursacht durch die Abnahme des Wertes des PLANCKSchen Wirkungsquantums.

Die Emission mit der Frequenz $2\omega_1$ innerhalb des Vakuums auf dem Niveau $r_1/2$ ist nicht die einzige Besonderheit. Gleichzeitig gilt hier der für den Zeitpunkt $t_1/4$ gültige Wert des PLANCKSchen Wirkungsquantums $2\hat{h}_1$ anstelle des "normalen" \hat{h} . Bei der Transformation geht dieser jedoch wieder verloren. Die daraus resultierende zusätzliche Rotverschiebung wirkt sich damit nicht auf die Frequenz, sondern nur auf die Emissionsrate aus. Die energetische Gesamtrötschiebung beträgt also insgesamt $12 \cdot Q_0^{5/2}$. Ausdruck (391) lautet richtig:

$$P_k = \frac{\hat{h}_1}{48\pi Q_0^{5/2} t^2} = \frac{1}{6} \hat{h}_1 H^2 Q_0^{-5/2} = \frac{1}{6} \hat{h} H^2 Q_0^{-3/2} \quad (394)$$

$$n_k = \frac{H^2}{\omega_1} \quad n_T = 0,5503 \frac{H^2}{\omega_1} = 2,38 \cdot 10^{-140} s^{-1} \quad (395)$$

Damit erhalten wir die endgültigen Werte für die derzeitige Emission. Diese hat jetzt nur noch einen Wert von $P_T = 2,825 \cdot 10^{-162} W$. Die Emissionsrate liegt bei $2,38 \cdot 10^{-140}$ Photonen pro Sekunde durch ein einzelnes MLE. Das ist ein einzelnes Photon pro Jahr innerhalb einer Kugel mit einem Radius von 1,884 Millionen km (1,26AE). Für die Bildung von Wasserstoffatomen ist die Frequenz ohnehin zu niedrig. Diese Werte stimmen am besten mit den Beobachtungen überein bzw. sind am glaubhaftesten. Der Unterschied zwischen den Werten (392) und (394) entspricht wieder der Einführung der vierten Dimension, der Zeit.

Im Abschnitt 4.6.4.2.5. werden wir feststellen, daß die Metrik neben der Emission gemäß (394) auch Energie aufnimmt (dielektrische Verluste), wobei die Größenordnung wesentlich über der Emission liegt. Das bedeutet, die Emission kosmischer Hintergrundstrahlung zum heutigen Zeitpunkt ist gleich Null.

Daß bei der Emissionsrotverschiebung Energie quasi "verlorengeht" ist kein Widerspruch. Auch bei der normalen kosmologischen Rotverschiebung geht ja Energie "verloren". Tatsächlich verloren geht die Energie allerdings nicht, sie wird nur nicht wirksam, ist doch die Energie von zeitartigen Vektoren vom verwendeten Bezugssystem abhängig. Zusammenfassend können wir noch einmal schreiben:

1. Die Emission erfolgt nicht mit der Frequenz ω_0 , sondern immer mit $2\omega_1$
2. Der Emissionswert des PLANCKSchen Wirkungsquantums ist $2\hat{h}_1$
3. Die Metrik ist auch heute noch über die Länge $r_1/2$ mit dem Raum gekoppelt
4. Bei der Emission wird die volle Verlustleistung wirksam
5. Das Ausgangssignal ist mit dem Frequenzgang (382) und einer Rotverschiebung beauflagt, so daß nur ein Bruchteil der Energie durch die Metrik weitergeleitet wird
6. Ursache der Rotverschiebung ist eine Koordinatentransformation

Die Bedingungen, die bei der Emission der kosmischen Hintergrundstrahlung vorliegen ($2\omega_1$, $2\hat{h}_1$, $r_1/2$, $Q=1/2$), gelten nicht nur in diesem Fall, sondern bei allen Vorgängen, die ohne Mitwirkung der Metrik vonstatten gehen wie z.B. Stöße von Teilchen untereinander und auch die starke Wechselwirkung. Kommt es hierbei zur Emission von Photonen, so werden diese genauso rotverschoben, wie die kosmologische Hintergrundstrahlung (Makroskopisch beobachten wir immer nur die rotverschobenen Werte).

4.6.4.2.5. Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung

Haben wir die Energie- und Leistungsverhältnisse bei einem einzelnen MLE geklärt, interessiert uns auch die elektromagnetische Feldstärke. Betrachten wir zuerst die Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung. Wir wollen davon ausgehen, daß die derzeitigen Verhältnisse Ergebnis des 1. Maximums mit der Energie $W_e = 2,8967 \cdot 10^{131} \text{J}$ sind, die durch ein einzelnes MLE zum Zeitpunkt $t_1/4$ in das gerade erst aufgebaute metrische Gitter eingekoppelt wurden. Die Kopplungslänge ist $r_1/2$.

Obwohl es bei dieser Einkopplung zu einer Aufteilung auf sechs MLE's kommt, wobei sich die Frequenz um den Faktor 6 erniedrigt, bleibt die Energiedichte konstant, da die anderen fünf MLE's ebenfalls Photonen erzeugen, die in die anderen MLE's eingekoppelt werden. Es kommt nur zu einer Photonenvervielfachung bei konstanter Energiedichte. Dies ergibt sich direkt aus dem Energieerhaltungssatz. Betrachten wir zunächst das einzelne MLE. Die Näherung von W_e ergibt:

$$W_e \approx \frac{8}{\pi} \hbar_1 \omega_1 = \frac{2}{\pi} (2\hbar_1)(2\omega_1) = \frac{2}{\pi} \hbar_{0,5} \omega_{0,5} \quad (396)$$

Der Bruch ergibt sich aus den Eigenschaften der Besselfunktionen. Die Energie ist kleiner als die Energie des MLE zu diesem Zeitpunkt. Die Energiedichte beträgt dann:

$$w_o = \frac{8}{\pi} \left(\frac{2}{r_1} \right)^3 \hbar_1 \omega_1 = 2,309 \cdot 10^{419} \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3} \quad (397)$$

Um einen Vergleich mit der Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung (Kugelkoordinaten) vornehmen zu können, müssen wir diesen Betrag dementsprechend umrechnen. Der Volumenunterschied zwischen einem Würfel mit der Kantenlänge πr_0 und einer Kugel mit dem gleichen Durchmesser beträgt $\pi/6$. Der Würfel enthält 6, die Kugel daher durchschnittlich π MLE's. Dieses Ergebnis erhält man auch aus (342). Wir müssen also (397) mit π multiplizieren, um auf die tatsächliche Energiedichte zu kommen. Die elektromagnetische Feldstärke erhalten wir dann durch Multiplikation mit c :

$$w_e = \frac{64 \hbar_1 \omega_1}{r_1^3} = \frac{2 \hbar_{0,5} \omega_{0,5}}{r_{0,5}^3} = 7,25 \cdot 10^{419} \frac{\text{Ws}}{\text{m}^3} \quad (398)$$

$$|\mathbf{S}_e| = \frac{64 \hbar_1 \omega_1 c}{r_1^3} = \frac{64 \hbar_1 \mu_0 k_0^4}{\epsilon_0^3} = 2,17 \cdot 10^{428} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (399)$$

Dieser Wert entspricht einem Pegel von $4403,36 \text{dBpWm}^{-2}$. Jetzt wollen wir den aktuellen Pegel berechnen. Zuerst tritt eine geometrische Dämpfung $A_g \sim r^{-2}$ auf. Wegen $r \sim Q_0$ gilt $A_g \sim Q_0^{-2}$. Weiterhin tritt eine Dämpfung durch Rotverschiebung auf sowie eine energetische Dämpfung durch Abnahme von \hbar . Rotverschiebung und energetische Dämpfung machen zusammen $A_\omega \sim Q_0^{-5/2}$ aus. Da diese Dämpfung sowohl in x - als auch in y -Richtung auftritt (bei Ausbreitung in z -Richtung), macht das zusammen $A_\omega \sim Q_0^{-5}$. Die Gesamtdämpfung liegt damit bei $A \sim Q_0^{-7}$. Gehen wir nun davon aus, daß die Rotverschiebung der Feldstärke gleich der Rotverschiebung der Wellenlänge ($144Q_0^5$) ist. Dies gilt jedoch nicht für den geometrischen Anteil. Hier hat die Rotverschiebung nur einen Wert von $(4Q_0^2)$. Die aktuelle elektromagnetische Feldstärke, also der POYNTING-Vektor müßte dann folgenden Wert haben:

$$|\mathbf{S}_e| = \frac{\hbar_1 \omega_1 c}{9 r_1^3 Q_0^7} = \frac{\hbar_1 \mu_0 k_0^4}{9 \epsilon_0^3 Q_0^7} = 0,2714 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (400)$$

Dieser Wert entspricht einem Pegel von $114,336 \text{dBpWm}^{-2}$. Jetzt müssen wir noch die Dämpfung durch dielektrische Verluste abziehen, wie wir sie im Abschnitt 4.3.5.4. beschrieben haben. Diese beträgt $8,686 \text{dB/R} = 1 \text{Np/R}$ für die elektrische Feldstärke und ist eine zusätzliche

geometrische Dämpfung. Aufgrund der Definition des Dezibel gilt derselbe Betrag für Spannung und Leistung. Da wir es mit zwei Richtungen zu tun haben (x und y), rechnen wir mit dem Quadrat des Wertes, so daß wir nach den Logarithmengesetzen auf einen Wert von 2·8,686dB/R kommen. Wir erhalten schließlich einen Sollwert in Höhe von 96,96dBpWm⁻², das sind 4,971mWm⁻² bzw. 1,369Vm⁻¹. Tatsächlich beträgt die Feldstärke aber nur 66,8074dBpWm⁻². Die Differenz von 30dB ist darauf zurückzuführen, daß ein Teil der kosmischen Hintergrundstrahlung im Verlauf der Entwicklung in Materie umgewandelt wurde, ein geringerer Teil auch bei Wechselwirkungen mit ebendieser Materie in Wärme, mechanische oder elektromagnetische Energie mit einer anderen Wellenlänge.

Wir wollen nun untersuchen, ob es uns gelingt, aus dieser Differenz eine Abschätzung des derzeitigen Bosonen-/Fermionenverhältnisses abzuleiten. Auch müßte eine Berechnung der mittleren Materiedichte möglich sein.

Wert	Poyntingvektor	dB	Energiedichte	Symb.	Definition	Anzahl/m ³
Beginn	$7,253 \cdot 10^{419} \text{Wm}^{-2}$	4403,36	$2,1700 \cdot 10^{428} \text{J m}^{-3}$	w_e	Emission	—
Soll heute	$4,971 \cdot 10^{-3} \text{Wm}^{-2}$	96,96	$1,6584 \cdot 10^{-11} \text{J m}^{-3}$	w_k	Gesamt	—
Ist heute	$4,797 \cdot 10^{-6} \text{Wm}^{-2}$	66,81	$1,5990 \cdot 10^{-14} \text{J m}^{-3}$	w_γ	Bosonen	$1,350 \cdot 10^8$
Differenz	—	—	$1,6567 \cdot 10^{-11} \text{J m}^{-3}$	w_M	Fermionen	0,2220
Dichte	—	—	$1,845 \cdot 10^{-31} \text{g cm}^{-3}$	n_γ/n_M	Verhältnis	$6,080 \cdot 10^8$

Tabelle 4
Feldstärke und Energiedichte
der kosmischen Hintergrundstrahlung

Bei der Berechnung der Anzahl der Fermionen wurde davon ausgegangen, daß das häufigste Element im Kosmos der Wasserstoff ist. Die Tabelle wurde folgendermaßen berechnet:

$$w = \frac{|S|}{c} \quad n_\gamma = \frac{w_\gamma}{\hbar\omega_\gamma} \quad n_M = 2 \frac{w_k - w_\gamma}{m_a c^2} \quad (401)$$

m_a ist die atomare Masseneinheit. Der erhaltene Wert von $6,080 \cdot 10^8$ für das Bosonen-/Fermionenverhältnis liegt sehr nahe bei dem mit anderen Methoden bestimmten. In [4] ist ein Wert von $6,486 \cdot 10^8$ angegeben, der nur 1,06 mal größer ist. Nun haben wir zur Bestimmung der Bosonenzahl auch nur die Photonen der kosmischen Hintergrundstrahlung herangezogen. In Wirklichkeit gibt es natürlich auch Photonen, die nichts damit zu tun haben, die aus Wechselwirkungsprozessen stammen oder bei der Zerstrahlung von Materie und Antimaterie entstanden sind. Ein großer Teil des kosmischen Strahlungsspektrums stammt z.B. aus Supernovaausbrüchen. Daher müssen wir die Bosonenzahl leicht nach oben korrigieren, die Fermionenzahl nach unten, so daß wir uns dem Wert aus [4] weiter annähern. Die erhaltenen Ergebnisse sind ein weiteres Indiz dafür, daß wir mit unserem Modell nahe an der Wirklichkeit liegen.

Als letztes wollen wir noch eine Abschätzung der mittleren Materiedichte innerhalb unserer "näheren" Umgebung, d.h. etwa 0,01R angeben. Unter der Annahme, daß alle Materie und Strahlung innerhalb des Universums ausschließlich aus der kosmischen Hintergrundstrahlung stammt (mit Ausnahme virtueller Teilchen), ergibt die Berechnung folgenden Wert (einschließlich Masse der Strahlung):

$$\rho_G \approx \frac{w_k}{c^2} = 1,845 \cdot 10^{-28} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \left(1,845 \cdot 10^{-31} \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3} \right) \quad (402)$$

In [4] ist ein Wert von $\approx 10^{-30} \text{kg} \cdot \text{dm}^{-3}$ angegeben, der auch sehr gut mit unserem Wert übereinstimmt. In unserem Modell hat aber die Materiedichte nicht den Einfluß darauf, ob das Universum geschlossen oder offen ist, wie bei anderen Modellen, da hier auch die Dichte eine

Funktion sowohl der Zeit als auch des Raumes ist. Die zeitliche und räumliche Abhängigkeit ist in den Bildern 70 bis 72 dargestellt. Die Dichte ist folgendermaßen definiert:

$$\rho_G = \frac{1}{9e^4} \frac{\hbar_1 \kappa_0^4 Z_0^4}{c Q_0^7} = \frac{1}{9e^4} \frac{\hbar \omega_0^2}{c^3 R^2} \quad (403)$$

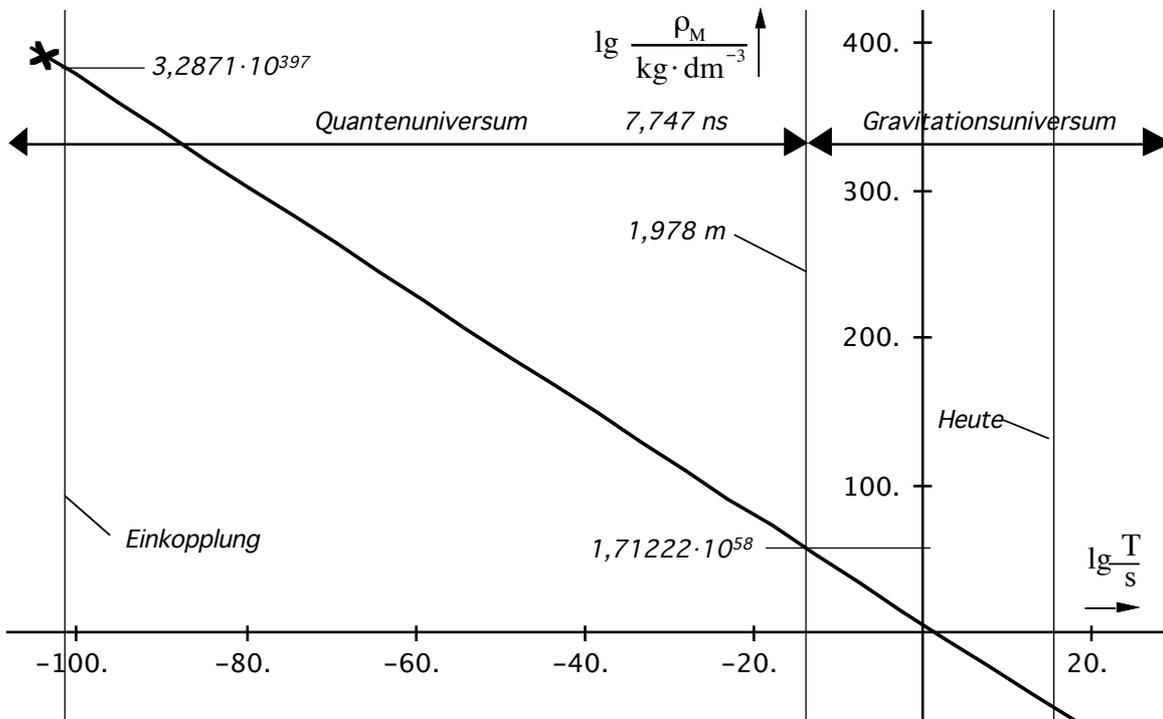


Bild 70
Zeitliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte vom Zeitpunkt der Einkopplung an betrachtet

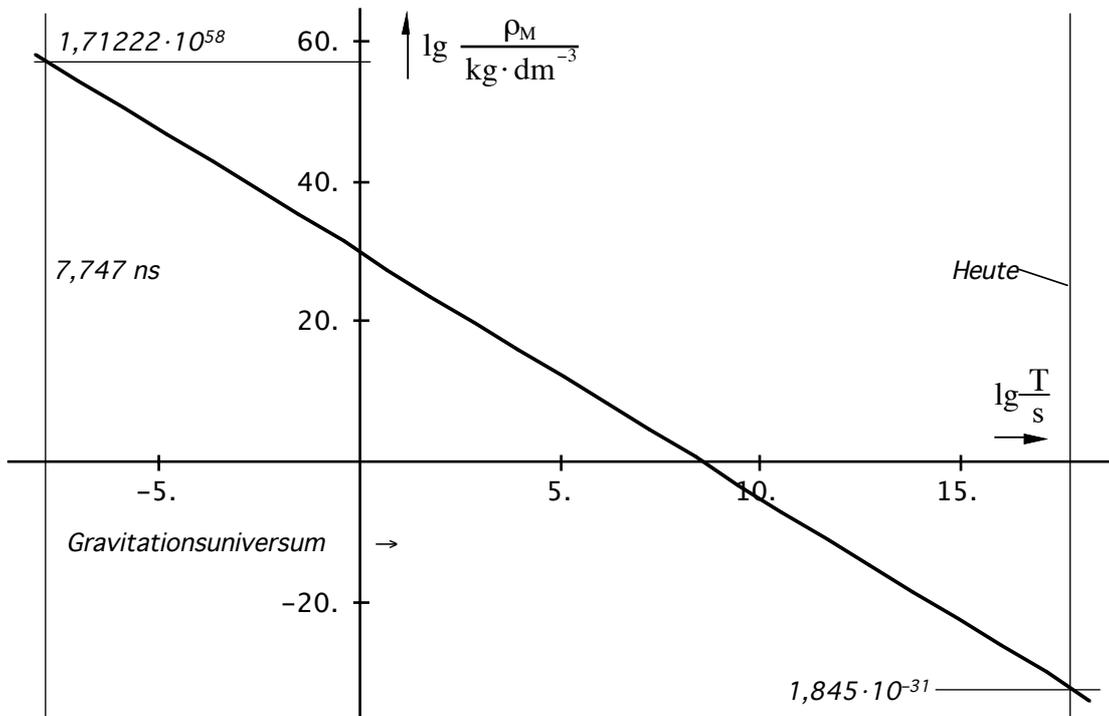


Bild 71
Zeitliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte vom Beginn des Gravitationsuniversums an betrachtet

Der Faktor e^{-4} kommt von der dielektrischen Dämpfung, e ist hier die EULERSche Konstante. Für Q_0 müssen wir jetzt nur wie bisher einsetzen:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \left(\sqrt{1 + \frac{t}{\tilde{T}}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (404)$$

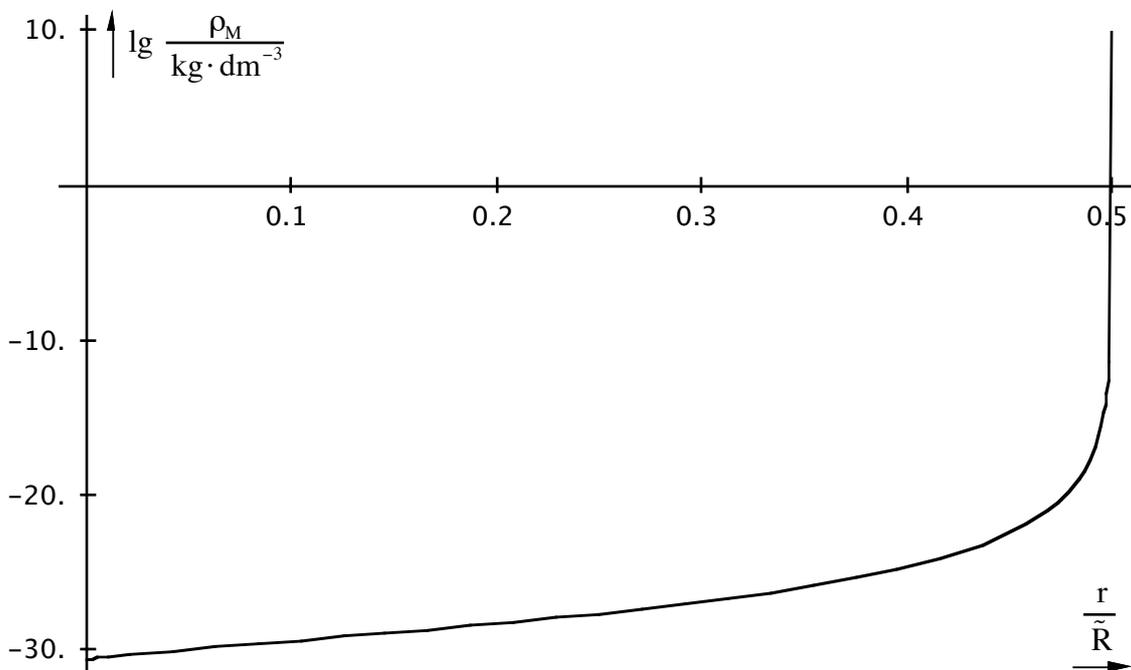


Bild 72
Räumliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte zum Zeitpunkt T (heute)

Zum Zeitpunkt der Einkopplung gibt es auch eine maximale Materiedichte, die einen Wert von ca. $3,2871 \cdot 10^{397} \text{kg dm}^{-3}$ erreicht, wieder inklusive Strahlung. Vor diesem Zeitpunkt gibt es keine Metrik, d.h. keinen Raum und daher auch keine Dichte. Bei Dichten oberhalb $1,71222 \cdot 10^{58} \text{kg dm}^{-3}$ werden Quanteneffekte innerhalb der Größenordnung des gesamten Kosmos bzw. des gesamten Gebiets mit dieser Dichte wirksam. Dieses ist dann nach außen hin geschlossen.

Weiterhin interessiert noch, ob das Bosonen-/Fermionen-Verhältnis über die ganze Zeit konstant ist. Darüber können wir aber zum jetzigen Zeitpunkt noch keine Aussage treffen. Wahrscheinlich ist es zumindest während der letzten Zeit unverändert geblieben, was dann zu der Aussage führt, daß auch die Masse einer bestimmten Rotverschiebung unterliegen müßte

Daraus ergeben sich jedoch zwei Widersprüche. Erstens müßte die Bildung der Fermionen sofort nach der Einkopplung erfolgt sein. Aufgrund der zu diesem Zeitpunkt herrschenden hohen Temperatur wären diese nach klassischem Verständnis jedoch nicht existenzfähig, d.h. sie würden sofort wieder in Strahlung umgewandelt werden. Einen Ansatz zur Lösung dieses Problems werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen. Aufgrund der Zeitabhängigkeit des PLANCKschen Wirkungsquantums ändert sich nämlich auch die Feinstrukturkonstante, durch die der Wirkungsquerschnitt der Wechselwirkung von Materie und Strahlung bestimmt wird. Zum Zeitpunkt der Einkopplung wäre dieser so gering, daß faktische keine Wechselwirkung stattfindet, d.h. die Photonen verhielten sich so wie Neutrinos zur heutigen Zeit.

Der zweite Widerspruch besteht mit unserer Grundannahme, daß sich die Teilchen als kugelsymmetrische Lösungen der Feldgleichungen nicht verändern. Bei konstantem Bosonen-/Fermionen-Verhältnis würde nämlich auch die Masse der Fermionen derselben Rotverschiebung unterliegen wie die kosmische Hintergrundstrahlung. Wenn man die Beziehung $\hbar\omega = mc^2$ betrachtet, wobei ω der DE-BROGLIE-Frequenz entspricht, ist dies

einleuchtend. Auch nach dem speziellen und allgemeinen Relativitätsprinzip ist die Masse keineswegs konstant sondern abhängig von den Raum-Zeit-Koordinaten und vom Gravitationspotential am Ort des Beobachters.

Hier soll noch einmal auf unser Modell aus dem vorigen Abschnitt verwiesen werden, wonach sich die Teilchen *ohne Metrik* immer im Zustand wie zum Zeitpunkt $t_1/4$ befinden. Hierbei haben Antiteilchen eine Masse und Eigenfrequenz oberhalb, „normale“ Teilchen unterhalb der Grenzfrequenz des Vakuums. Hieraus resultiert dann auch die Symmetriebrechung, die dazu führt, daß das Universum überwiegend aus „normaler“ Materie besteht. In diesem Zustand verharren alle Teilchen solange, bis es zu irgendeiner Wechselwirkung kommt. Die dabei eventuell entstandenen neuen Teilchen werden ebenfalls mit den Eigenschaften, wie sie zum Zeitpunkt $t_1/4$ herrschen ($2\hbar_1, 2\omega_1, r_0/2, \alpha_1/2$ usw.), gebildet. Der wesentliche Punkt besteht nun darin, daß der Beobachter selbst ein Gefangener der Metrik ist und daher nur die „Schatten“ der tatsächlichen Verhältnisse, also die rotverschobene relative Masse wie z.B. m_p beobachten kann (PLATO's Höhlengleichnis). Diese und nicht die absolute Masse ist dann eine Funktion von Raum und Zeit.

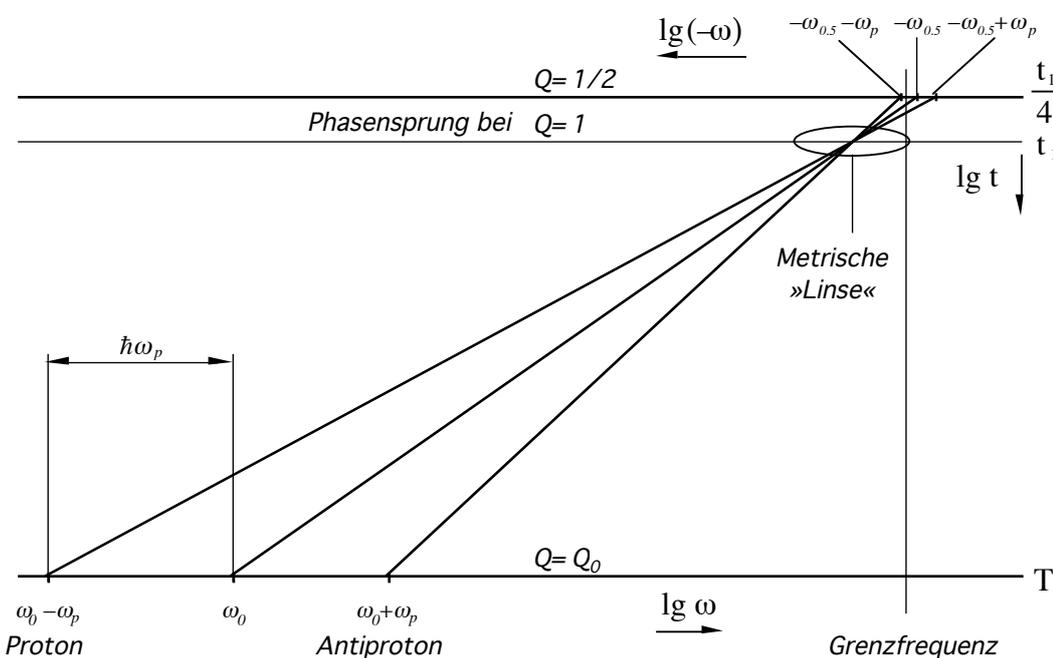


Bild 73
Masse-Rotverschiebung am
Beispiel des Protons

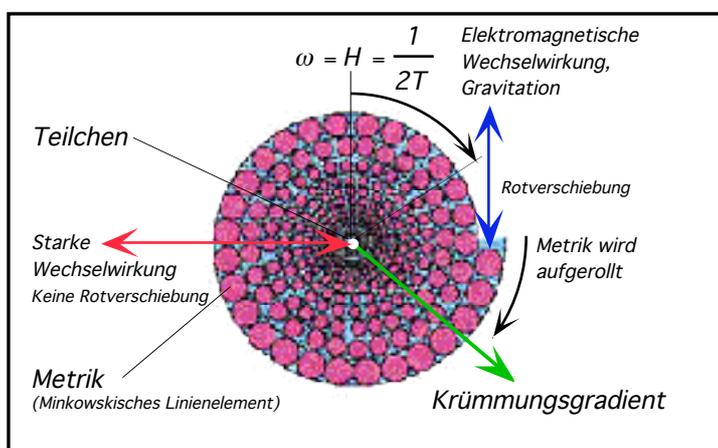
Dazu ist es aber notwendig, daß die Frequenz des metrischen Wellenfeldes die gleiche Rotverschiebung aufweist, wie die Frequenz der kosmischen Hintergrundstrahlung (für \hbar ist dies ohnehin gewährleistet), damit auch die Frequenzverhältnisse konstant bleiben. Für die Frequenz gilt $\omega_0 \sim Q_0^{-1}$. Hinzu kommt aber noch ein Unterschied bei der Ausbreitungsgeschwindigkeit, der in der Näherung einen Wert von $Q_0^{-1/2}$ ausmacht. Dies macht zusammen $Q_0^{-3/2}$, wie bei überlagerten Wellen. Das Prinzip einer solchen Rotverschiebung ist im Bild 73 dargestellt. Die Metrik wirkt hier wie eine Linse, durch die wir die tatsächlichen Verhältnisse betrachten. Die Auflösung beträgt genau $\hbar/2$. Der Vergrößerungs- oder besser Verkleinerungsfaktor ändert sich mit der Zeit ist aber auch eine Funktion des Raumes und des Gravitationspotentials. Bei einer Kreisgüte von $Q_0=1$ zum Zeitpunkt t_1 tritt ein Phasensprung auf, das Phasenmaß des metrischen Wellenfeldes hat einen Nulldurchgang (Bild 23). Daher ist die Frequenz vor diesem Zeitpunkt negativ definiert, danach positiv.

Wie soll es aber z.B. bei einem Proton zu einer solchen Linsenwirkung kommen? Das Teilchen an sich ist in die Metrik eingebettet, wird von der Metrik sogar durchdrungen. Soll es jetzt zu einer Rotverschiebung z.B. der Masse kommen, müßte die Metrik um das Teilchen herum bestimmte Eigenschaften aufweisen, die zu einer Rotverschiebung führen. Würde man nämlich mit der normalen Metrik des leeren Raumes arbeiten, würde auch keine solche

Rotverschiebung auftreten. Auch müßte die Rotverschiebung innerhalb eines sehr kleinen Abstands zum Teilchen sehr schnell den Wert erreichen, für den das Licht eine Strecke vom "Ende der Welt" bis zu uns benötigt.

In [29] habe ich ein sehr gutes Modell dafür finden können. NANSTIEL beschreibt hier ein ähnliches Modell, in dem das Universum aus Elementen mit den Abmessungen der PLANCKschen Elementarlänge zusammengesetzt ist. Diese Elemente beschreibt er als nackte Singularitäten. Das Modell unterscheidet sich somit nicht wesentlich von meinem, sieht die PLANCKschen Elementarlängen aber nur als Teilchen bzw. teilchenartig. Auch handelt es sich bei meinem Modell nicht um nackte Singularitäten, da sie über einen Ereignishorizont im Abstand r_0 verfügen. In Wirklichkeit hat die PLANCKsche Elementarlänge, die mit dem MINKOWSKIschen Linienelement (MLE) identisch ist, sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften. NANSTIEL beschreibt in seinem Modell ein Objekt, das er als Graviton bezeichnet, welches sehr gut das Wirkprinzip der obengenannten Vor-Ort-Rotverschiebung widerspiegelt. Dieses ist mit einigen Änderungen versehen (ich bin nicht der Meinung, daß es sich hier um das Graviton als Quant des Gravitationsfeldes handelt) im Bild 74 dargestellt. Vielmehr ist das MINKOWSKIsche Linienelement selbst das Quant des Gravitationsfeldes mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß es auch den Raum bildet. Dies ist eigentlich einleuchtend.

Bild 74
Aufbau der Metrik in der
Umgebung eines Teilchens
frei nach NANSTIEL



Nach NANSTIEL haben freie Elementarlängen das Bestreben, sich um sich selbst bzw. um Teilchen herum aufzuwickeln. Nehmen wir letzteren Fall an, so könnte dies tatsächlich die Ursache für eine Vor-Ort-Rotverschiebung sein. Das Teilchen befindet sich im Grundzustand ($Q_0 = 1/2$). Bei der elektromagnetischen und der gravitativen Wechselwirkung muß die Wirkung den Umweg über die aufgewickelte Metrik nehmen, wobei es dann zu obengenannter Rotverschiebung kommt. In Wirklichkeit geht die Wirkung natürlich den direkten Weg entlang des Krümmungsgradienten. Bei jeder neuen Ebene kommt es zu einer Anpassung der Frequenzverhältnisse, so daß die Gesamtrötschiebung tatsächlich den obengenannten hohen Wert erreicht und dies viel schneller. Die Krümmung steigt mit abnehmendem Abstand zum Teilchen hin an, wird aber nicht unendlich.

Bei der starken Wechselwirkung nimmt die Wirkung den direkten Weg ohne Zuhilfenahme der Metrik. Allerdings müssen die Teilchen dann so dicht beieinander stehen, daß es zu einer Verdrängung der Metrik kommt. Die Naturkonstanten haben in diesem Fall den Wert wie für den leeren Raum ($Q_0 = 1/2$).

4.6.4.2.6. Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung

Während die Temperatur des metrischen Wellenfeldes gleich Null ist, ist das für die kosmische Hintergrundstrahlung nicht so. Da es sich um schwarze Strahlung handelt, können wir auch die *schwarze Temperatur* angeben. Durch Umstellen von (384) und Einsetzen der energetischen Rotverschiebung $12Q_0^{5/2}$ erhalten wir für $2\omega_1$:

$$T_k = \frac{1}{2,821439} \frac{\hbar\omega_k}{k} = \frac{1}{2,821439} \frac{\hbar_1\omega_1}{6k} Q^{-\frac{5}{2}} = 0,059071 \frac{\hbar_1\omega_1}{k} (2\omega_0 t - \beta r)^{-\frac{5}{2}} \quad (405)$$

Dies ist die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung unter Berücksichtigung des Frequenzganges (siehe Bild 75).

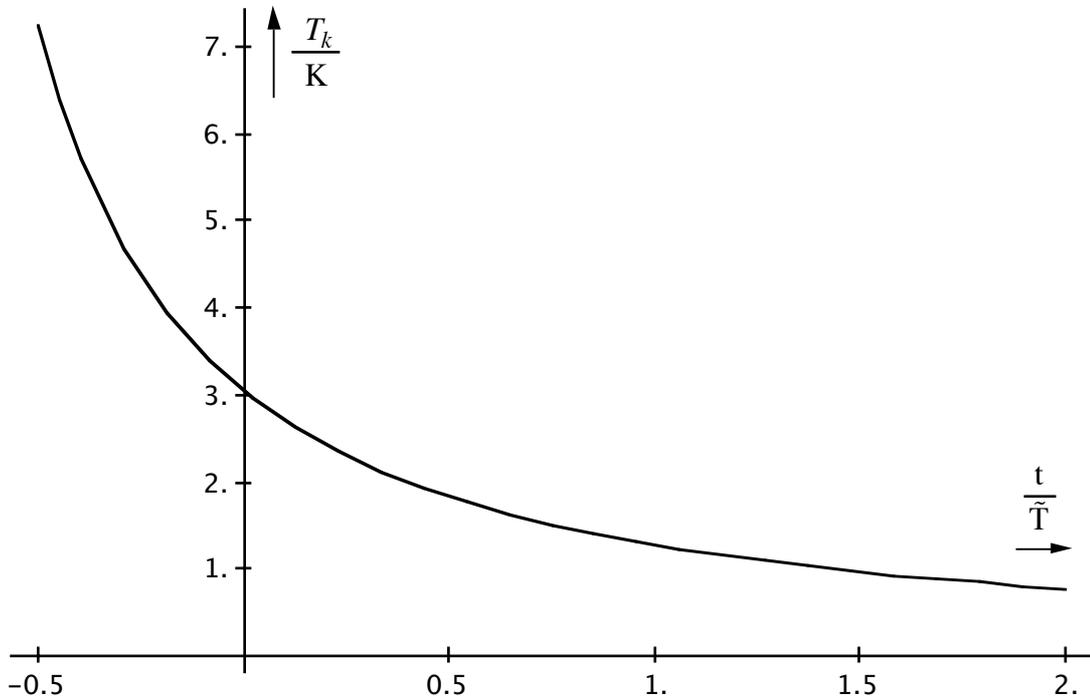


Bild 75
Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung (linear)

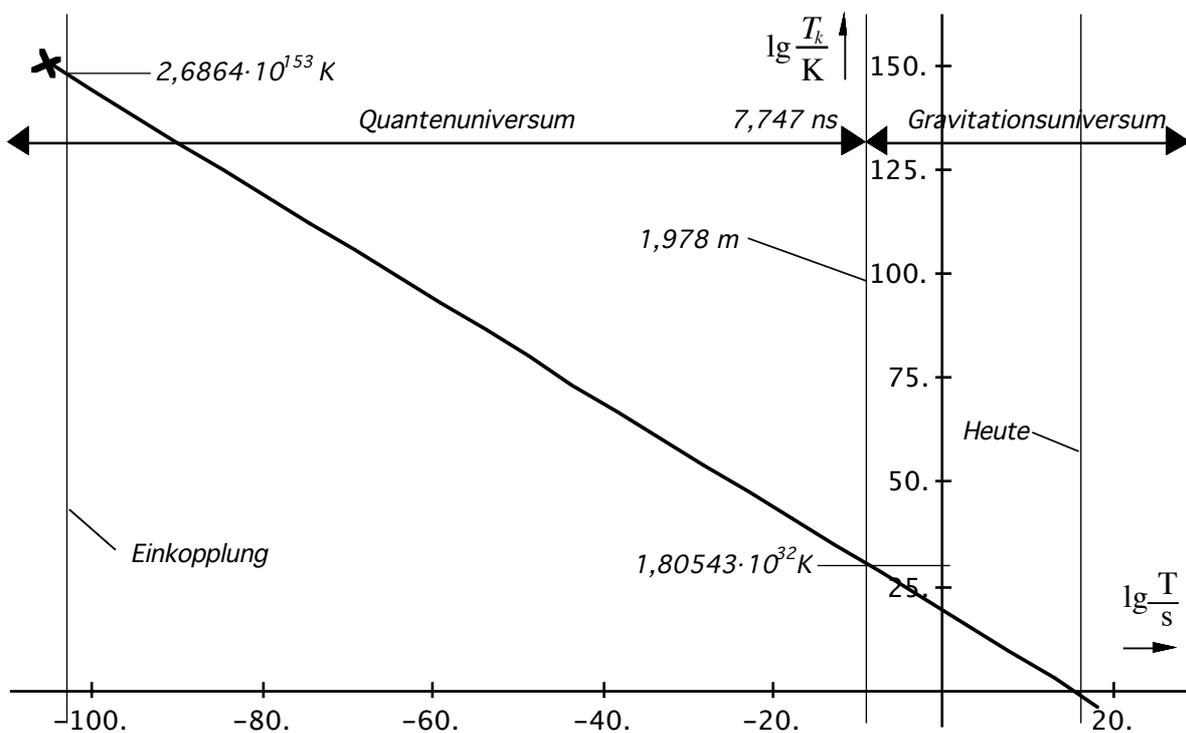


Bild 76
Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung vom Zeitpunkt der Einkopplung an betrachtet

Der zeitliche Verlauf ist in den Bildern 76 bis 77 dargestellt¹. Es bestehen Ähnlichkeiten zur Energiedichte. Auf die Darstellung der räumlichen Abhängigkeit soll hier verzichtet werden, da sie ebenfalls ähnlich ausfällt.

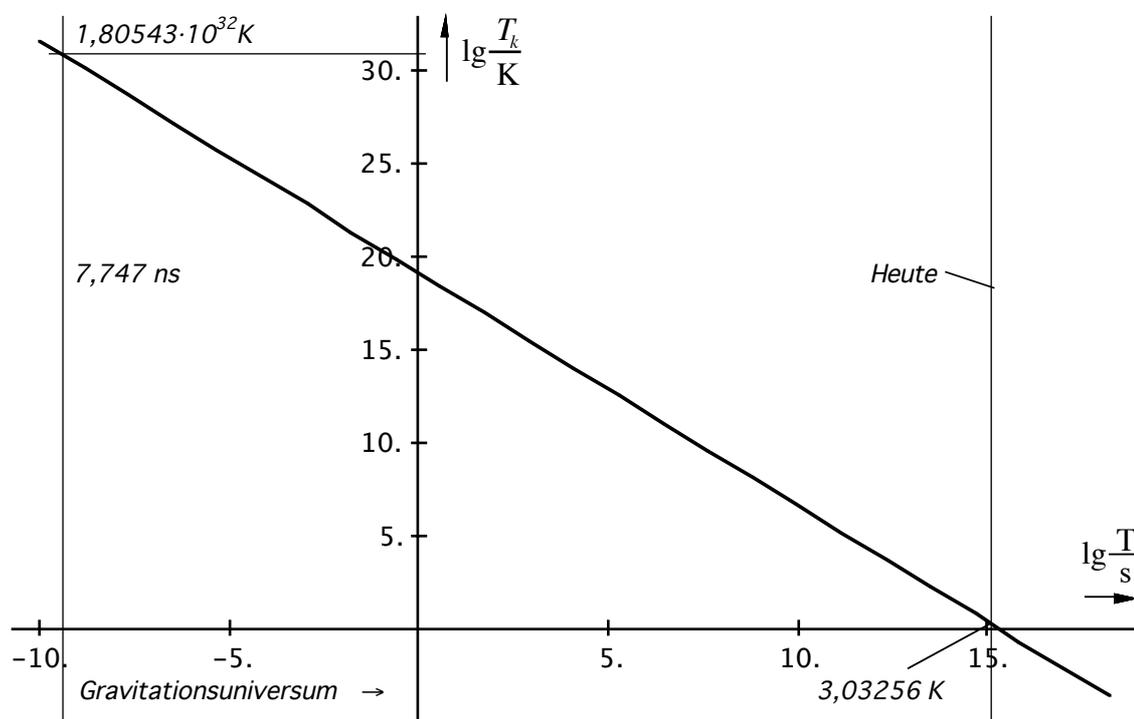


Bild 77
Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmologischen Hintergrundstrahlung vom Beginn des Gravitationsuniversums an betrachtet

4.6.4.2.7. Feldstärke des metrischen Wellenfeldes

Als nächstes wollen wir uns mit der Feldstärke des metrischen Wellenfeldes befassen. Im Unterschied zur kosmischen Hintergrundstrahlung liegen die Verhältnisse aufgrund des komplexen Ausbreitungswiderstands und der von c verschiedenen Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht ganz so einfach. So gilt der Ausdruck $c = \omega_0 r_0$ nur für die Näherungsformeln. Hier gilt $\underline{c} = \omega_0 \underline{r}_0$ und $\underline{r}_0 = r_1 Z_0^2 / \underline{Z}_F^2$ mit $r_1 = 1/\kappa_0 Z_0$. Normalerweise ist der POYNTING-Vektor definiert als $\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$. Bei einem komplexen Ansatz gilt aber nach [26]:

$$\underline{S} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\underline{E} \times \underline{H}^*] \quad (406)$$

Re ist der Realteil, \underline{H}^* ist die konjugiert komplexe Zeitfunktion. Die Richtung des POYNTING-Vektors ist immer die der Ausbreitungsrichtung. \underline{E} und \underline{H} hatten wir definiert zu:

$$\underline{E} = \hat{\underline{E}}_i H_0^{(1)}(2\omega_0 t) \quad \underline{H}^* = \hat{\underline{H}}_i H_0^{(2)}(2\omega_0 t) \quad (407)$$

Diese Definition gilt jedoch nur für ein rein zeitliches Koordinatensystem (hier findet keine Expansion statt), wie wir es z.B. am Expansionsmittelpunkt (Kopplungslänge) finden. Damit wird Ausdruck (237) als Näherungsformel physikalisch sinnlos. Wir wollen jetzt aber die Verhältnisse von dem Standpunkt aus betrachten, auf dem wir uns befinden, nämlich aus der Metrik heraus.

¹ Basiert auf einem Wert des HUBBLE-Parameters von $75,9 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$. Die aktuell vom COBE-Satelliten gemessene Temperatur von $2,725 \pm 0,002\text{K}$ (Wikipedia) läßt eher auf $H_0 = 72 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ schließen. Siehe auch Abschnitt 7.5.3.

Zunächst ersetzen wir S_i durch $2\pi S_1$, da sich besser damit rechnen läßt. Wir müssen (407) folgendermaßen korrigieren:

$$\underline{\mathbf{E}} = \sqrt{2\pi S_1 Z_F} (J_0(2\omega_0 t) + jY_0(2\omega_0 t)) \mathbf{e}_E \quad (408)$$

$$\underline{\mathbf{H}}^* = \sqrt{\frac{2\pi S_1}{Z_F}} (J_0(2\omega_0 t) - jY_0(2\omega_0 t)) \mathbf{e}_H \quad (409)$$

Jetzt gibt es aber noch einen Unterschied in der Ausbreitungsgeschwindigkeit gegenüber dem Normalfall. Wir müssen die Ausdrücke mit dem Ausdruck $c/|c|$ multiplizieren. Es gelten folgende Substitutionen ($M_0(x)$ ist das Modul der Hankelfunktion und identisch mit der Amplitude der zugehörigen Besselfunktionen):

$$Q_0 = 2\omega_0 t \quad \rho_0 \omega_0 t = \frac{c}{|c|} = \frac{Z_0}{|Z_F|} \sim \frac{1}{2} Q_0^{\frac{1}{2}} \quad M_0(2\omega_0 t) \sim Q_0^{-\frac{3}{2}} \quad (410)$$

$$\underline{\mathbf{E}} = j\rho_0 \omega_0 t \sqrt{2\pi S_1 Z_F} (J_0(2\omega_0 t) + jY_0(2\omega_0 t)) \mathbf{e}_E e^{-j\frac{1}{2}\arctan\theta} \quad (411)$$

$$\underline{\mathbf{H}}^* = j\rho_0 \omega_0 t \sqrt{\frac{2\pi S_1}{Z_F}} (J_0(2\omega_0 t) - jY_0(2\omega_0 t)) \mathbf{e}_H e^{+j\frac{1}{2}\arctan\theta} \quad (412)$$

Die Definition von ρ_0 findet man in (209). Jetzt gibt es aber noch eine Besonderheit zu beachten. Die elektrische und die magnetische Feldstärke ist pro Meter definiert. Bei einer durch die abweichende Ausbreitungsgeschwindigkeit verursachten Rotverschiebung wird auch das "Metermaß" verändert (gedehnt), so daß die Gesamtröverschiebung insgesamt durch das Quadrat des Produkts von (411) und (412) bestimmt ist (ohne S_1). Unter Anwendung von (406) erhalten wir schließlich für den Betrag S_0 :

$$S_0 \stackrel{?}{=} \frac{\pi^2}{4} S_1 (2\omega_0 t)^4 (J_0^2(2\omega_0 t) + Y_0^2(2\omega_0 t))^2 \rho_0^4 = 4\pi^2 S_1 \rho_0^4 \omega_0^4 t^4 M_0^4(2\omega_0 t) \quad (413)$$

$$S_0 \stackrel{?}{=} S_1 (2\omega_0 t - \beta r)^{-4} \quad \text{Näherung} \quad (414)$$

Die Näherungslösung wurde durch Probieren ermittelt. Wegen $r_0 \sim Q_0$ ist der POYNTING-Vektor damit auch proportional r_0^{-4} . Dies ist die doppelte geometrische Dämpfung aufgrund der Transformation der Ausbreitungsgeschwindigkeit (je zweimal pro Dimension), genauso, wie zu erwarten war. In diesem Fall tritt übrigens kein Imaginärteil (Blindleistung) auf, so daß wir das $\text{Re}[x]$ in (406) auch weglassen können. Wir wollen jetzt den Betrag von S_1 bestimmen und machen folgenden Ansatz:

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{q_0 \mathbf{e}_E}{\epsilon_0 r_0^2} = \frac{q_0 \mathbf{e}_E}{C_0 r_0} = \frac{1}{c} \frac{i_0}{C_0} \mathbf{e}_E \quad (415)$$

$$\underline{\mathbf{H}} = \frac{\varphi_0 \mathbf{e}_H}{\mu_0 r_0^2} = \frac{\varphi_0 \mathbf{e}_H}{L_0 r_0} = \frac{1}{c} \frac{u_0}{L_0} \mathbf{e}_H \quad (416)$$

\mathbf{e} ist der Einheitsvektor, q_0 , φ_0 , u_0 und i_0 sind Zeitfunktionen. Schließlich erhalten wir:

$$\mathbf{S}_0 = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{E}} \times \underline{\mathbf{H}}^*) = \frac{\hbar \omega_0^2}{r_0^2} \mathbf{e}_r = \frac{P_0}{r_0^2} \mathbf{e}_r \sim Q_0^{-5} !!! \quad (417)$$

In (417) sind nur noch Effektivwerte enthalten. Damit ist der Faktor 1/2 in die Definition von S_0 eingegangen. Es gibt aber eine Abweichung gegenüber (413) und (414). Der Wert S_0 von (417) ist proportional Q_0^{-5} (wie bei überlagerten Photonen) gegenüber Q_0^{-4} in (414). Der Grund

für die Abweichung ist die zeitliche Abhängigkeit des PLANCKschen Wirkungsquantums. In der Näherung gilt $\hbar \sim Q_0^{-1}$. Im Abschnitt 4.6.4.1.1. hatten wir bereits versucht, eine genaue Zeitfunktion dafür zu finden. Wir nehmen aber keine von den dort dargestellten Funktionen, sondern eine andere. Das Problem war ja, daß es sich beim PLANCKschen Wirkungsquantum um einen Mittelwert handelt, der in den ersten Augenblicken nach dem Urknall noch nicht definiert ist. Auch ist \hbar eine besondere Eigenschaft des metrischen Wellenfeldes. Existiert dieses nicht oder hat sich noch nicht vollständig etabliert, gibt es auch kein PLANCKsches Wirkungsquantum bzw. hat dieses einen kleineren Wert, als im Abschnitt 4.6.4.1.1. dargestellt. Wir verwenden daher folgende exakte Zeitfunktion:

$$\hbar = 1,253314 \hbar_1 \rho_0 \omega_0 t M_0(2\omega_0 t) \approx \hbar_1 Q_0^{-1} \quad (418)$$

Der Wert \hbar_1 und der sich durch Erweiterung auf $2\omega_0 t$ ergebende Faktor $1/2$ sind aber schon in S_1 enthalten, so daß die korrekten Versionen von (413) und (414) folgendermaßen lauten:

$$S_0 = \frac{\pi^2}{4} 1,253314 S_1(2\omega_0 t)^5 \rho_0^5 M_0^5(2\omega_0 t) \quad (419)$$

$$S_0 = S_1(2\omega_0 t - \beta r)^{-5} \quad \text{Näherung} \quad (420)$$

Der Initialwert S_1 , der sowohl für die exakte Funktion als auch für die Näherung gilt, ergibt sich damit zu:

$$S_1 = \frac{\hbar_1 \omega_1^2}{r_1^2} = \frac{\hbar_1 \mu_0 \kappa_0^4}{\epsilon_0^3} = 3,3907 \cdot 10^{426} \text{ Wm}^{-2} \quad (421)$$

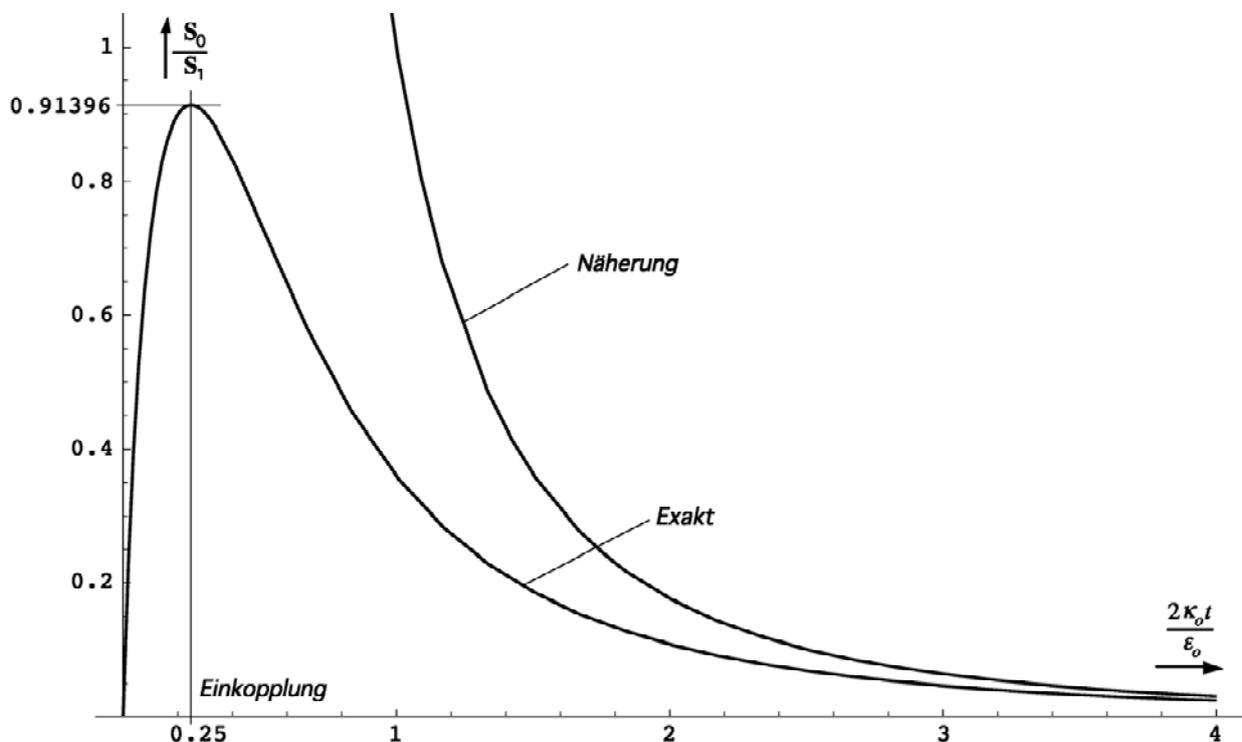


Bild 78
Zeitliche Abhängigkeit der elektromagnetischen
Feldstärke des metrischen Wellenfeldes exakt und Näherung

Der Näherungswert von S_0 zum Zeitpunkt der Einkopplung ($S_{0,5}$) ist genau 35 mal größer als nach der exakten Formel. Damit wäre zu diesem Zeitpunkt die Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung in etwa so groß wie die des metrischen Wellenfeldes. Diese und die

Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung lassen sich hier auf dieselbe Funktion (Bild 63) zurückführen. Die Funktion nach Bild 63 ist dann die Impulsantwort des leeren Raums auf einen DIRAC-Impuls als Ursprung des Universums. Ursache des DIRAC-Impulses wiederum ist eine einzige gewaltige Quantenfluktuation.

Vielleicht liegt hier auch der Grund, warum es überhaupt zur Bildung fermionischer Materie kommt. Das metrische Wellenfeld kann nur einen bestimmten Betrag Energie aufnehmen, so daß der Rest zwangsläufig in Form fermionischer Materie kondensiert. Gehen wir davon aus, daß z.B. nur die Hälfte der Energie als Strahlung eingekoppelt werden kann, entsteht aus dem Rest die feste Materie. Das Verhältnis zwischen beiden wäre dann jedoch nicht identisch mit dem heutigen. Aufgrund der starken Rotverschiebung kommt es aber schnell dazu, daß die Metrik in der Lage ist, weitere Strahlungsenergie aufzunehmen.

Aufgrund des geringen Wirkungsquerschnitts (zum Zeitpunkt der Einkopplung ist dieser gleich 1) kann bei den anfangs herrschenden hohen Temperaturen jedoch nur ein Bruchteil wieder in Strahlung umgewandelt werden, so daß sich schnell das heute vorherrschende Verhältnis einstellt. Der Verlauf der elektromagnetischen Feldstärke des metrischen Wellenfeldes (exakt und Näherung) in den ersten Augenblicken nach dem Urknall ist im Bild 78 dargestellt. Man erkennt, daß es zum Zeitpunkt des Urknalls noch keine Metrik gibt. Diese entsteht erst kurz danach.

Als nächstes wollen wir die Energiedichte des metrischen Wellenfeldes bestimmen. Da POYNTING-Vektor und der Vektor der Ausbreitungsgeschwindigkeit die gleiche Richtung haben, können wir mit den Beträgen rechnen. Hierbei besteht aber ein wesentlicher Unterschied zu klassischen Betrachtungen. Ist man gewöhnt, daß bei technischen Problemen der POYNTING-Vektor und die Energiedichte fest miteinander verknüpft sind (der Proportionalitätsfaktor ist $1/c$), ist dies beim metrischen Wellenfeld nicht so. Hier müssen wir durch $|c|$ dividieren.

Auch hier können wir w_I wieder gleichzeitig für Näherung und exakte Lösung verwenden. Zusätzlich zur Division durch $|c|$ (Für die Definition von w_I setzen wir $|c|=c$) müssen wir wieder die Transformation für das Metermaß vornehmen und zwar für die dritte räumliche Dimension. Das macht insgesamt $\sqrt{2\pi} \omega_0 t \rho_0 M_0(2\omega_0 t)$. Es gilt $1,253314 \sqrt{2\pi} = \pi$:

$$w_0 = \frac{\pi^3}{8} w_I (2\omega_0 t)^6 \rho_0^6 M_0^6(2\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad w_I = \frac{S_1}{c} \quad (422)$$

$$w_0 = w_I (2\omega_0 t - \beta r)^{-6} \quad \text{Näherung} \quad (423)$$

Der Verlauf der Energiedichte exakt und der Näherung ist im Bild 79 dargestellt. Die Näherungsformel wurde wieder durch Probieren ermittelt. Den gleichen Ausdruck würde man auch aus der Energie des einzelnen MLE ($\sim Q_0^{-2}$) unter Berücksichtigung der geometrischen Verdünnung ($\sim Q_0^{-3}$) und der Änderung von \hbar ($\sim Q_0^{-1}$) erhalten.

Es gibt einen signifikanten Unterschied zur Näherung in der Zeit kurz nach dem Urknall. Die Energiedichte des metrischen Wellenfeldes beginnt mit Null, steigt schnell an und fällt dann zusammen mit der Näherungslösung, die aus dem Unendlichen kommt, wieder ab. Das Maximum wird zum Zeitpunkt der Einkopplung erreicht. Im Vergleich mit der Verlustleistung (Bild 63) kann man erkennen, daß die Energie aus der Zeit unmittelbar nach dem Urknall zum Aufbau der Metrik verwendet wird. Ist dieser abgeschlossen, wird der Überschuß wieder abgegeben d.h. in die Metrik eingekoppelt. Es handelt es sich hier um rotverschobene Werte, so wie wir sie aus der Metrik heraus beobachten.

Jetzt können wir endlich eine Lösung für das Problem (374), den Energieerhaltungssatz der MAXWELLSchen Gleichungen angeben. Hier hat es wenig Sinn, mit Näherungsformeln zu rechnen. Betrachten wir dazu zuerst die Ableitung der Energiedichte. Zwar existiert dafür auch eine analytische Lösung, jedoch ist diese so kompliziert, daß die Rechenzeit wesentlich über der numerischer Verfahren liegt. Der Einfachheit halber werden wir daher mit dem Differenzenquotienten rechnen ($\Delta t = 0,0001 t_1$). Es gilt:

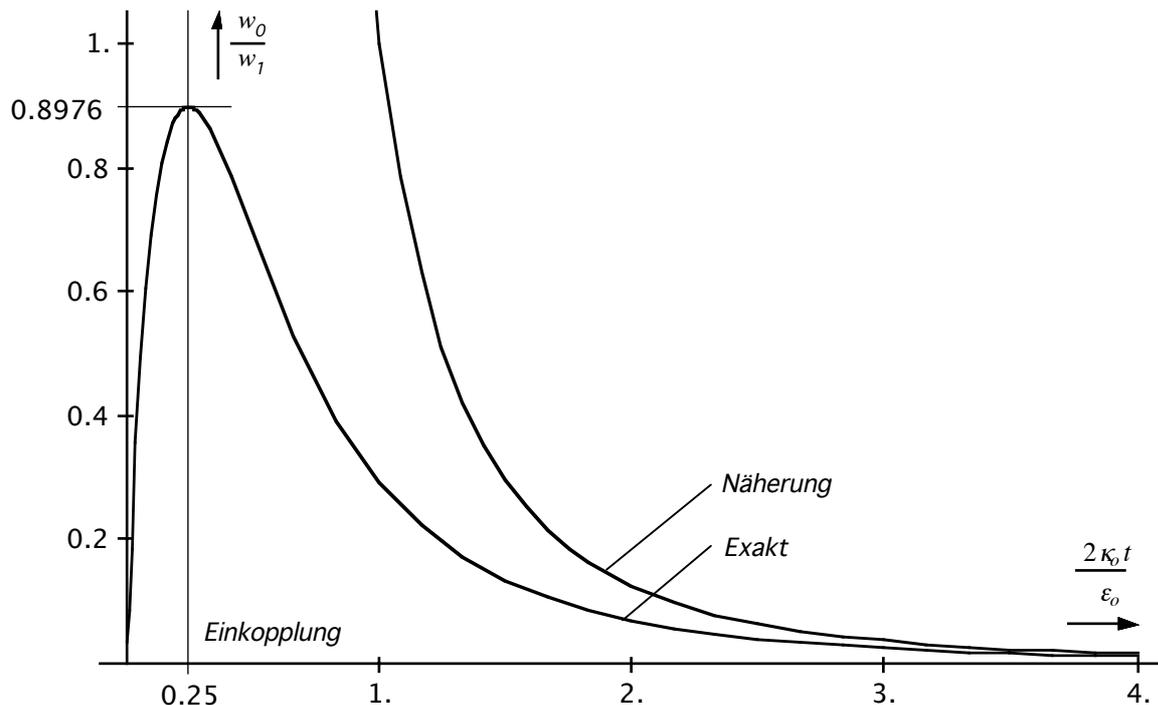


Bild 79
Zeitliche Abhängigkeit der Energiedichte
des metrischen Wellenfeldes exakt und Näherung

$$\dot{w}_0 = 8\pi^3 \dot{w}_l \frac{d}{dt} \rho_0^6 \omega_0^6 t^6 M_0^6(2\omega_0 t) \quad \text{mit} \quad \dot{w}_l = 3 \frac{S_1}{r_1} \quad (424)$$

$$\dot{w}_0 = \dot{w}_l (2\omega_0 t - \beta r)^{-8} \quad \text{Näherung} \quad (425)$$

Den Wert von \dot{w}_l haben wir durch Differentiation der Näherungslösung (423) nach der Zeit und anschließende Überprüfung erhalten. Der Faktor 3 stammt vom Exponenten der Zeit der Energiedichte (diese ist proportional t^{-3}). Nun zum Ausdruck \mathbf{iE} . Für $|Z_F| \approx Z_0$ und $\mathbf{i} = \kappa_0 \mathbf{E}$ gilt:

$$\mathbf{iE} = \kappa_0 \mathbf{E}^2 = \kappa_0 E^2 = 4\pi^2 \kappa_0 Z_0 S_1 \rho_0^4 \omega_0^4 t^4 M_0^4(2\omega_0 t) \quad (426)$$

$$\mathbf{iE} = \frac{4}{3} \pi^2 \dot{w}_l \rho_0^4 \omega_0^4 t^4 M_0^4(2\omega_0 t) \quad (427)$$

$$\mathbf{iE} = \frac{\dot{w}_l}{3} (2\omega_0 t - \beta r)^{-4} \quad \text{Näherung} \quad (428)$$

Wir setzen hier bewußt das Quadrat von (411) ohne zusätzliche Korrektur für \hbar bzw. q_0^2 ein. Da die MAXWELLSchen Gleichungen ja LORENTZ-invariant sein sollen, müßte sich nämlich die Korrektur in (426) auf beiden Seiten herauskürzen. Bei den nachfolgenden Betrachtungen würden wir dann eine Art bezugssystemunabhängiges Ergebnis erhalten (Es verschiebt sich nur der Standpunkt des Beobachters auf der Zeitachse). Allerdings bin ich mir in diesem Punkt, speziell bei dieser Anwendung, nicht ganz sicher. Jetzt wollen wir aber die Werte in (374) einsetzen und erhalten schließlich:

$$\text{div } \mathbf{S}_0 = -\kappa_0 E^2 - \dot{w}_0 \quad (429)$$

$$\text{div } \mathbf{S}_0 = -4\pi^2 \dot{w}_l \left(\frac{1}{3} \rho_0^4 \omega_0^4 t^4 M_0^4(2\omega_0 t) + 2\pi \frac{d}{dt} \rho_0^6 \omega_0^6 t^6 M_0^6(2\omega_0 t) \right) \quad (430)$$

Ein positiver Wert des Energiestromdichtevektors $\text{div}\mathbf{S}_0$ entspricht nach Definition einer Abstrahlung elektromagnetischer Energie. Der Ausdruck \dot{w}_0 (Bild 80) gibt Auskunft über die Energiebilanz der Metrik insgesamt. Man sieht, zuerst wird Energie aufgenommen, die zum Aufbau des metrischen Wellenfelds benötigt wird. Später nimmt die Gesamtenergiedichte wieder ab und strebt gegen +0.

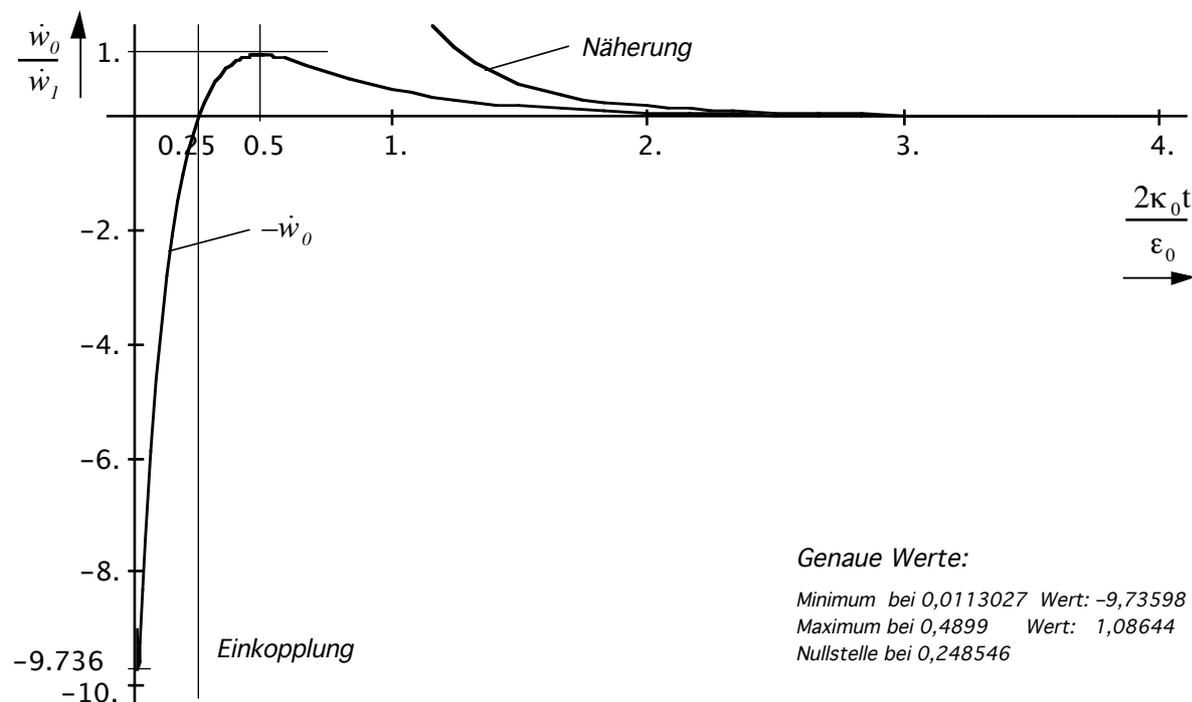


Bild 80
 Erste zeitliche Ableitung der Energiedichte des metrischen Wellenfelds

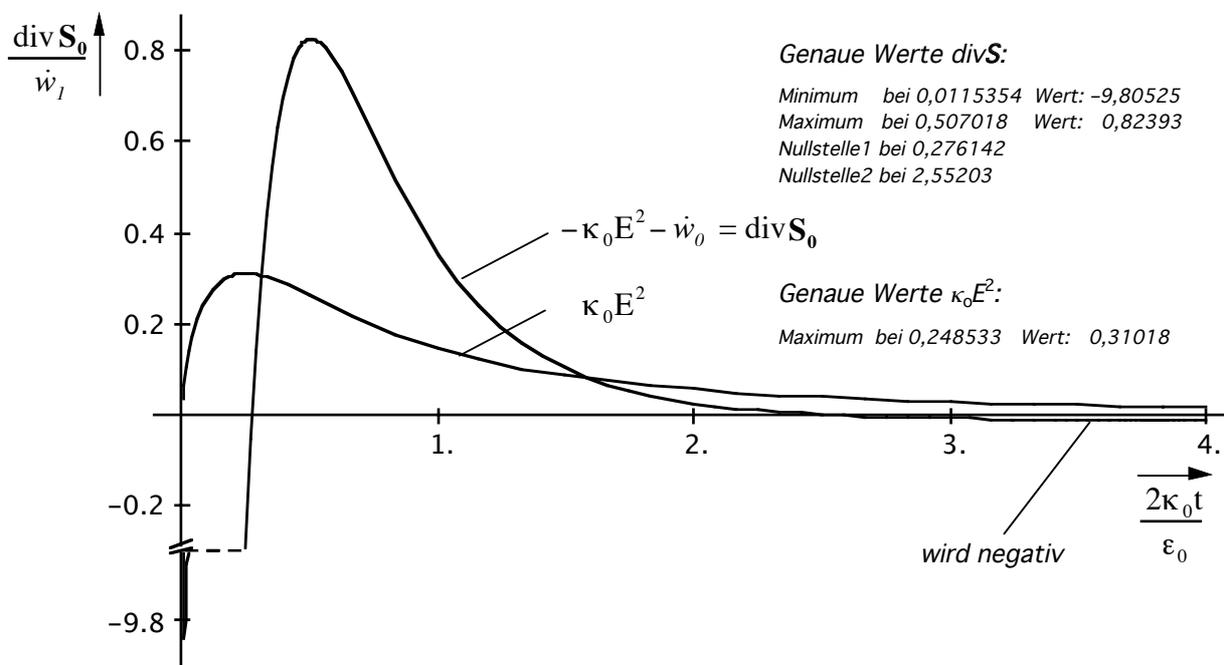


Bild 81
 Zeitlicher Verlauf des Energiestromdichtevektors und ohmsche Verluste des metrischen Wellenfelds

Besonders interessant ist der Energiestromdichtevektor $\text{div}\mathbf{S}_0$. Auch dieser Anteil ist anfangs negativ. Dies entspricht einem Zufluß. Dann wird wieder Energie abgestrahlt. Dies ist die

kosmische Hintergrundstrahlung. Dieser Abschnitt der Entwicklung ist aber nur sehr kurz, wie schon im vorigen Kapitel festgestellt. Bei einer Güte von 1,5975 hat der Energiestromdichtevektor einen erneuten Nulldurchgang. Es wird wiederum Energie aufgenommen, wenn auch der Betrag asymptotisch gegen Null strebt. Dies sind nichts anderes als die dielektrischen Verluste bei der Wellenausbreitung überlagerter Photonen. Die Energie geht also nicht verloren.

Bei großen Werten von t wird der Ausdruck \dot{w}_0 klein gegenüber den anderen, so daß man ihn vernachlässigen kann. Dann gilt:

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_0 + \kappa_0 E^2 = 0 \quad \text{für } t \gg 0 \quad (431)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{S}_0 = -\frac{\dot{w}_l}{3} (2\omega_0 t - \beta r)^{-4} \quad \text{Näherung} \quad (432)$$

Wir wollen nun überprüfen, ob der Anteil $\kappa_0 E^2$ für die Metrik tatsächlich der aufgenommenen Energie der kosmischen Hintergrundstrahlung entspricht. Ein wesentliches Kriterium dafür ist, daß sowohl der Anteil der Metrik $\kappa_0 E^2$ als auch der dielektrische Verlustanteil der kosmischen Hintergrundstrahlung $\kappa_{0R} E_K^2$ den gleichen zeitlichen Verlauf haben. Es gilt:

$$\kappa_{0R} = 2\kappa_0 Q_0^{-2} \sim Q_0^{-2} \quad \mathbf{E}_K \sim r_0^{-1} \sim Q_0^{-1} \quad (433)$$

$$\kappa_{0R} E_K^2 \sim Q_0^{-4} \quad \text{CMBR} \quad (434)$$

$$\kappa_0 E^2 \sim Q_0^{-4} \quad \text{Metrik} \quad (435)$$

Der elektrische Feldstärkevektor der kosmischen Hintergrundstrahlung \mathbf{E}_K unterliegt nur der geometrischen Verdünnung durch die Expansion des Raumes. Hier wird wieder das „Metermaß“ gedehnt. Eine Geschwindigkeitsanpassung ist nicht erforderlich, da sich die Hintergrundstrahlung immer mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und unsere Beobachtungen auch immer mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen. Da für überlagerte Wellen nur die rotverschobene Leitfähigkeit des Vakuums κ_{0R} (siehe 4.3.4.4.2.) wirksam wird, ergibt sich tatsächlich die gleiche zeitliche Abhängigkeit für große t .

Der Anteil $\kappa_0 E^2$ entspricht im Normalfall (positiver Energiestromdichtevektor) ohmschen Verlusten, die zu einer zusätzlichen Verringerung der Energiedichte führen. Ein positiver Anteil $\operatorname{div} \mathbf{S}_0$ beschreibt insbesondere den Energie(ab)transport durch das elektromagnetische Feld. Wird der Energiestromdichtevektor jedoch negativ (Energiezufluß), so kann diese entweder dem elektromagnetischen Feld hinzugefügt werden oder in andere Energieformen umgewandelt werden. Da $\dot{w}_0 \rightarrow 0$, kommt nur der zweite Fall in Frage. Da das Auftreten eines solchen Anteils im allgemeinen eine Umwandlung in andere Energieformen bedeutet (in einem leitfähigen Medium wird immer ein Teil in andere Energieformen umgewandelt) erwächst daraus die Frage, in welche?

Sehen wir uns die Energieverhältnisse einmal genauer an, so liegen diese etwa im Bereich der Differenz zwischen der Soll- und der Ist-Feldstärke der kosmischen Hintergrundstrahlung. Das würde bedeuten, daß die Energie $\kappa_0 E^2$ im Prinzip gänzlich in „feste“ Materie umgewandelt wird, der Anteil $\operatorname{div} \mathbf{S}_0$ jedoch mit der kosmischen Hintergrundstrahlung verknüpft ist. Die Teilchenbildung beginnt dann schon mit dem Beginn der Entwicklung. Die Metrik ist etwa zum Zeitpunkt $t_1/4$ voll ausgebildet und beginnt daraufhin, Strahlungsenergie (kosmische Hintergrundstrahlung) abzugeben. Möglich wäre aber auch, daß sich die Metrik zusammen mit der überlagerten Hintergrundstrahlung quasi in einem Stück aufbaut.

Etwa ab dem Zeitpunkt $2,552t_1$ beginnt die Metrik, einen Teil der Energie der kosmischen Hintergrundstrahlung wieder „aufzusaugen“ (dielektrische Verluste). Diese wird dann vollständig in Materie umgewandelt. Hier haben wir also die Frage beantwortet, ob

auch zum heutigen Zeitpunkt noch kosmische Hintergrundstrahlung emittiert wird. Die Antwort lautet nein. Es gibt aber Bereiche im Universum (Partikelhorizont) in denen auch "heute" noch eine Emission stattfindet.

Wenn man den Anteil $\kappa_0 E^2$ hundertprozentig der Bildung von Materie zuordnet, den Anteil $\text{div}\mathbf{S}_0$ der Emission bzw. Vernichtung elektromagnetischer Strahlung, so müßte es möglich sein den zeitlichen Verlauf des Bosonen-/Fermionen-Verhältnisses zu bestimmen. Bei gleicher Rotverschiebung von Strahlung (Bosonen) und Teilchen (Fermionen) würde sich dafür folgender Ausdruck ergeben:

$$\frac{n_\gamma}{n_M} = \frac{2m_a c^2}{\hbar\omega_T} \left(\frac{\int \dot{w}_0 dt}{\kappa_0 \int E^2 dt} - 1 \right) = \frac{2m_a c^2}{\hbar\omega_T} \left(\frac{-w_0 + 0,897659 w_l}{\kappa_0 \int E^2 dt} - 1 \right) \quad (436)$$

Die Integrationskonstante wurde mit Hilfe der Funktion FindRoot bestimmt unter der Bedingung, daß das Integral im Maximum von w_0 gleich Null ist, das Integral $\kappa_0 E^2$ durch numerische Integration (NIntegrate). Der zugehörige zeitliche Verlauf ist im Bild 82 dargestellt.

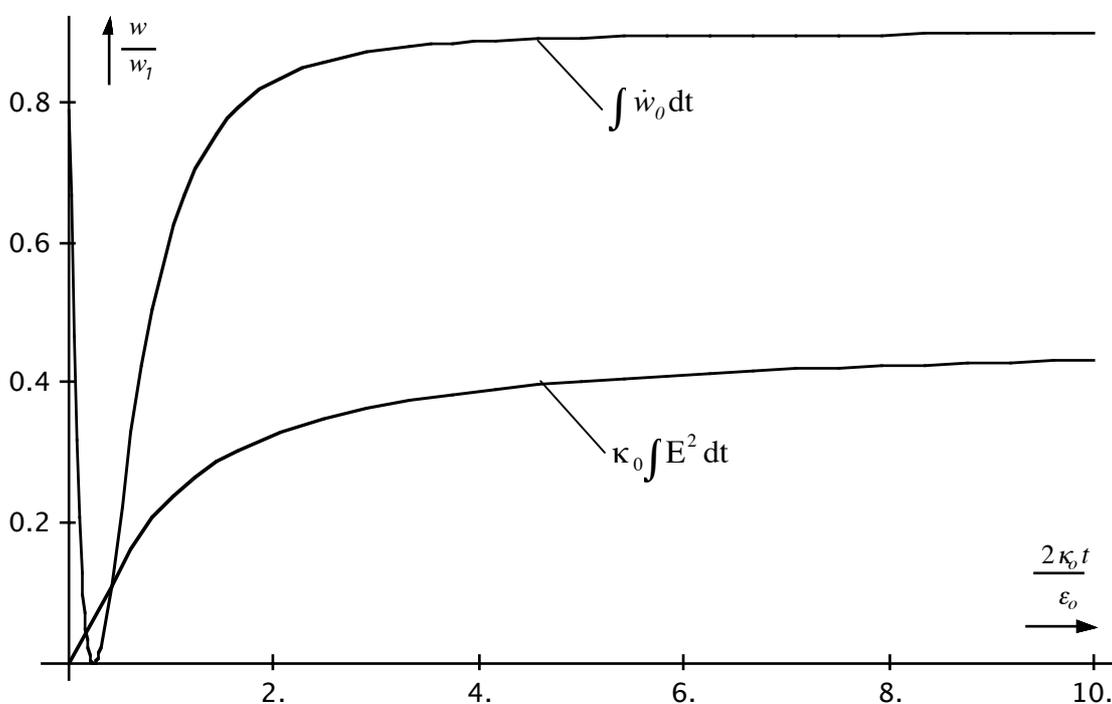


Bild 82
Integrale von Energiedichte und der dielektrischen
Verluste des metrischen Wellenfeldes

Die Berechnung von (436) ergibt einen Verlauf des Bosonen-/Fermionenverhältnisses, wie er im Bild 83 dargestellt ist. Man erkennt, es ergibt sich ein Wert, der weit über den im Abschnitt 4.6.4.2.5. bestimmten $6,080 \cdot 10^8$ liegt. Mit zunehmendem Weltalter nimmt er jedoch wieder ab und nähert sich asymptotisch einem Wert von $2,3864 \cdot 10^{12}$ zum heutigen Zeitpunkt.

Der Grund dafür ist, daß die durch den Prozeß $\kappa_0 E^2$ vom metrischen Wellenfeld gebildete Fermionenzahl nicht gleich der Gesamtfermionenzahl ist. Bei der Bildung der Fermionen unmittelbar nach dem Urknall werden ja nicht Teilchen gebildet, wie sie heute am häufigsten vorkommen (Elektron, Proton, Neutron), sondern hochangeregte Zustände superschwerer Elementarteilchen, wie wir sie noch gar nicht kennen. Diese Teilchen haben aber die Eigenschaft, bei Änderung der äußeren Verhältnisse in eine Vielzahl kleinerer und leichter Elementarteilchen zu zerfallen. Dadurch erhöht sich die Fermionenzahl kontinuierlich oder diskontinuierlich und die Kurve in Bild 83 fällt sehr viel stärker ab.

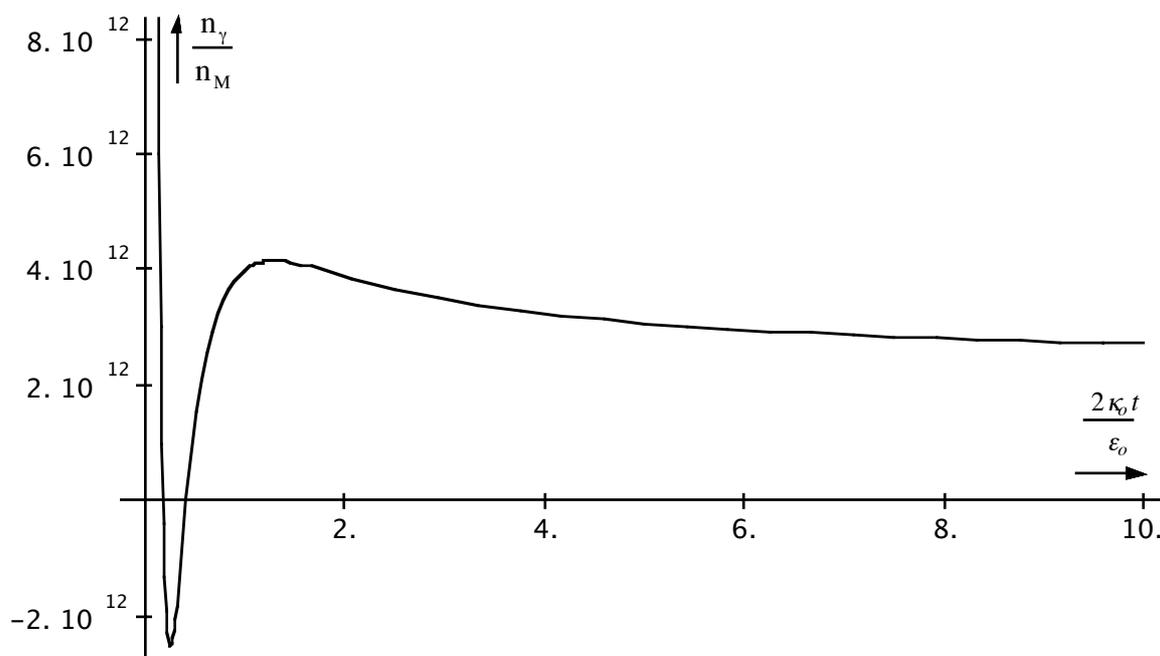


Bild 83
Durch das metrische Wellenfeld bestimmter Anteil am Bosonen-/Fermionen-Verhältnis als Funktion der Zeit ohne Berücksichtigung der Fermionenvervielfachung

Über die Größenordnung der Vervielfachung können wir jedoch keine genaueren Aussagen machen. Wir berücksichtigen diese durch einen zusätzlichen Faktor η , den wir in Ausdruck (436) folgendermaßen einfügen:

$$\frac{n_\gamma}{n_M} = \frac{2m_a c^2}{\hbar\omega_T} \left(\frac{\int_0^T \dot{w}_0 dt}{\eta \kappa_0 \int_0^T E^2 dt} - 1 \right) = 6,080 \cdot 10^8 \quad (437)$$

$$\frac{n_\gamma}{n_M} = \frac{2m_a c^2}{\hbar\omega_T} \left(\frac{0,897659}{2,5939 \cdot 0,34598} - 1 \right) = 4,9362769 \cdot 10^{-4} \frac{m_a c^2}{\hbar\omega_T} \quad (438)$$

Es ergibt sich Wert von $\eta=2,5939$. Die durch die Metrik gebildete fermionische Materie macht aber mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht die gesamte fermionischen Materie aus. Es gibt nämlich noch einen zweiten Prozeß, bei dem ebenfalls Fermionen gebildet werden können. Untermuert wird die Existenz eines solchen Prozesses durch folgende Widersprüche:

1. *Das abweichende Bosonen-/Fermionenverhältnis*
2. *Das metrische Wellenfeld baut sich über einen Zeitraum von $t_1/4$ auf. Während dieser Zeit wird kontinuierlich Energie aufgenommen. Wenn man von einer einmaligen Anregung in Form eines DIRAC-Impulses ausgeht, müßte die Energie dieses Impulses zumindest für diesen Zeitraum irgendwo zwischengespeichert worden sein.*
3. *Die Funktion nach Bild 83 hat einen negativen Bereich, was einer Vernichtung von Bosonen gleichkommt. Diese müssen jedoch vorher bereits existiert haben, denn wo nichts ist, kann auch nichts vernichtet werden.*
4. *Die vorherige Existenz impliziert eine vorherige Erzeugung, wenn man von einem leeren Universum zum Zeitpunkt $T=0$ ausgeht und eine "Schöpfung" fermionischer Materie ausschließt.*

Dieser Prozeß müßte zeitlich gesehen noch vor dem Aufbau der Metrik liegen und mit dem Zeitpunkt $T=0$ beginnen. Er wäre dann auch Ursache für die zusätzlich erzeugte fermionische Materie. Jetzt ergibt sich jedoch die Frage, um welchen Prozeß es sich denn handeln könnte. Der einfachste Fall für einen solchen Prozeß wäre die Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen für ein verlustbehaftetes Medium ohne Expansion gemäß 4.3.4.2., also die klassische Lösung. Aufgrund des hohen Wertes der spezifischen Leitfähigkeit κ_0 des Vakuums wäre diese Lösung dann so stark entartet, daß die Antwort auf einen DIRAC-Impuls ein einzelner Impuls wäre, der sehr gut in unser zeitliches Raster passen würde. Wir wollen diesen Impuls als Uripuls bezeichnen. Welche Eigenschaften ein solcher Uripuls hätte, werden wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

4.6.5. Der Uripuls

4.6.5.1. Der DIRAC-Impuls

Wir gehen von einer einmaligen Anregung durch einen DIRAC-Impuls $\delta(t)$ aus. Dieser Impuls ist eigentlich keine Funktion, sondern eine Distribution mit folgenden Eigenschaften:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad \delta(t) = \frac{d}{dt}\sigma(t) \quad (439)$$

$\sigma(t)$ ist die Sprungfunktion mit der Amplitude 1. Aus dem zweiten Ausdruck ergibt sich eine weitere wesentliche Eigenschaft:

$$\int_{-0}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{\infty} \delta(t) e^{-pt} dt = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1 \quad (440)$$

Das Integral bzw. die Fläche unterhalb des DIRAC-Impulses ist gleich 1. Aufgrund von (439) ist auch die LAPLACE-Transformierte gleich 1, was einem kontinuierlichen Spektrum entspricht, das über den gesamten Frequenzbereich $0 \leq \omega \leq \infty$ dieselbe Amplitude, nämlich 1 aufweist. Die Bandbreite ist damit unendlich.

Diesen Impuls nehmen wir also als Ausgang unserer Betrachtungen an. Er kommt auch den Vorstellungen von einem Urknall am nächsten. Da es sich um einen entarteten Fall handelt, wollen wir versuchen, eine Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen dafür zu finden. Dazu müssen wir den Raum zuerst quantisieren. Wir gehen von unserem Modell 4.2.1. Ausdruck (70) aus jedoch ohne Expansion:

$$C_U \ddot{\varphi}_U + \left(\dot{C}_U + \frac{1}{R_U} \right) \dot{\varphi}_U + \frac{1}{L_U} \varphi_U = 0 \quad \text{mit } \dot{C}_U = 0 \quad (441)$$

$$\ddot{\varphi}_U + \frac{1}{R_U C_U} \dot{\varphi}_U + \frac{1}{L_U C_U} \varphi_U = 0 \quad (442)$$

Da wir den Quantisierungsfaktor, die Kopplungslänge, noch nicht kennen, wollen wir diese zunächst allgemein als r_1/n annehmen. Die "Bauelemente" sind dann folgendermaßen definiert:

$$L_U = \frac{\mu_0 r_1}{n} = \frac{1}{n} \frac{\mu_0}{\kappa_0 Z_0} = \frac{1}{n} \frac{1}{\kappa_0 c} \quad (443)$$

$$C_U = \frac{\varepsilon_0 r_1}{n} = \frac{1}{n} \frac{\varepsilon_0}{\kappa_0 Z_0} = \frac{1}{n} \frac{\varepsilon_0^2 c}{\kappa_0} \quad (444)$$

$$R_U = \frac{\kappa_0 r_1 Z_0^2}{n} = \frac{1}{n} Z_0 \quad (445)$$

Dies führt zur folgenden charakteristischen Differentialgleichung:

$$\ddot{\varphi}_U + n \frac{n\kappa_0}{\varepsilon_0} \dot{\varphi}_U + \left(\frac{n\kappa_0}{\varepsilon_0} \right)^2 \varphi_U = 0 \quad \text{mit } \omega_U = \frac{n\kappa_0}{\varepsilon_0} \quad (446)$$

$$\ddot{\varphi}_U + n\omega_U \dot{\varphi}_U + \omega_U^2 \varphi_U = 0 \quad (447)$$

$$a = 1$$

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \quad b = n\omega_U \quad c = \omega_U^2 \quad (448)$$

$$r^2 + br + c = 0 \quad \text{Charakteristische Gleichung} \quad (449)$$

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = -\frac{n}{2} \omega_U \left(1 \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - 1} \right) \quad (450)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist abhängig von (450) und damit von n . Für $n < 2$ erhalten wir die Standardlösung gemäß 4.3.4.2. und für $n=2$ den aperiodischen Grenzfall. Das bedeutet, daß für Werte $n \geq 2$ ist eine Wellenausbreitung nicht mehr möglich ist, da die Lösung von Ausdruck (450) dann keinen Imaginäranteil hat und das Phasenmaß β nicht definiert ist. Es gibt dann natürlich auch keine Phasengeschwindigkeit.

4.6.5.2. Der aperiodische Grenzfall

Da wir den Fall 4.3.4.2. bereits eingehend untersucht haben, wollen wir jetzt den aperiodischen Grenzfall ($n=2$) genauer betrachten. Allgemein gilt dann:

$$\omega_U = \frac{2\kappa_0}{\varepsilon_0} = 2\omega_1 \quad \omega_U t = \frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0} = (2\omega_0 t)^2 \quad r_U = \frac{r_1}{2} \quad (451)$$

Interessanterweise ergibt sich hier dieselbe Kopplungslänge $r_1/2$ wie beim metrischen Wellenfeld. Auch die Frequenz ω_U ist dieselbe, wie die Ausgangsfrequenz der Metrik aber auch der kosmischen Hintergrundstrahlung. Offensichtlich lassen sich alle Wechselwirkungen auf ein und dieselben Bedingungen, wie sie bei der Kopplungslänge $r_1/2$ herrschen, zurückführen. Damit kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit annehmen, daß auch der Urimpuls dieselbe Kopplungslänge aufweist. Ein genauer Nachweis ist jedoch aufgrund der besonderen Bedingungen, wie sie in der Kosmologie herrschen nicht möglich, vielmehr ist man immer auf bestimmte Annahmen angewiesen und kann nur überprüfen, ob die Ergebnisse mit den Beobachtungen übereinstimmen.

Der mittlere Ausdruck von (451) ist insofern von Vorteil, daß er einen genauen zeitlichen Vergleich von Urimpuls und metrischem Wellenfeld sowie der kosmischen Hintergrundstrahlung erlaubt. Ganz allgemein gesehen scheint der Zustand $r_1/2$ ($Q=0,5$) eine Art Grundzustand des "leeren Raums ohne Metrik" darzustellen. Da der Begriff "leerer Raum ohne Metrik" schon des öfteren aufgetaucht ist und doch etwas schwer zu handhaben ist, wollen wir ihn zukünftig als *Subraum* bezeichnen. Es ist zu vermuten, daß auch der Subraum über so etwas wie eine Struktur verfügt.

Nun weiter zur Lösung unserer Differentialgleichung. Mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_1$ erhalten wir folgende Lösung für den aperiodischen Grenzfall:

$$\varphi_U = (1 + \omega_U t) e^{-\omega_U t} \varphi_{\uparrow} \quad (452)$$

$$\mathbf{H} = \frac{4\varphi}{\mu_0 r_1^2} \mathbf{e}_r = \frac{4\kappa_0^2 \varphi}{\epsilon_0} \mathbf{e}_r = 2\kappa_0 \varphi \omega_U \mathbf{e}_r \quad (453)$$

$$\underline{\mathbf{H}}_U = (1 + \omega_U t) e^{-\omega_U t} \mathbf{H}_{\uparrow} \quad \underline{\mathbf{E}}_U = (1 + \omega_U t) e^{-\omega_U t} \mathbf{E}_{\uparrow} \quad (454)$$

$$\underline{\mathbf{S}}_U = (1 + \omega_U t)^2 e^{-2\omega_U t} \mathbf{S}_{\uparrow} \quad (455)$$

Für den Übergang $\varphi \rightarrow \underline{\mathbf{H}}$ müssen wir hier wieder die Kopplungslänge einsetzen (453). Das Problem besteht nun darin, daß wir den Wert von φ_{\uparrow} nicht kennen. Daher können wir zunächst nur allgemeine Betrachtungen anstellen. Möglicherweise lassen sich die Werte aus dem Bosonen-/ Fermionenverhältnis herleiten. Beim aperiodischen Grenzfall handelt es sich jedoch auch um einen Grenzfall für das klassische MAXWELLSche Modell. Dies gilt weniger für die Feldstärke selbst als besonders für die Energiedichte.

Bei einer periodischen Funktion besteht das Spektrum nur aus einer einzigen Frequenz mit definierter Ausbreitungsgeschwindigkeit. Daher lassen sich der Wert und die Änderung der Energiedichte, sowie der Energiestromdichtevektor sehr gut durch dieses Modell beschreiben. Im vorliegenden Fall besteht das "Signal" jedoch aus einem einzelnen Impuls definierter Länge mit einem kontinuierlichen Spektrum, wobei sich die verschiedenen Anteile mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Es gibt daher keine definierte Energiedichte, eher eine Energiedichteverteilung, die stark von der Frequenz, der Entfernung und der Zeit abhängig ist. Dies gilt nicht für Lösung 4.3.4.3.1, die fastperiodisch ist. Der zeitliche Verlauf von Lösung (455) ist im Bild 84 dargestellt. Sie entspricht den im vorigen Abschnitt gestellten Anforderungen (Energiespeicherung bis zum Aufbau der Metrik).

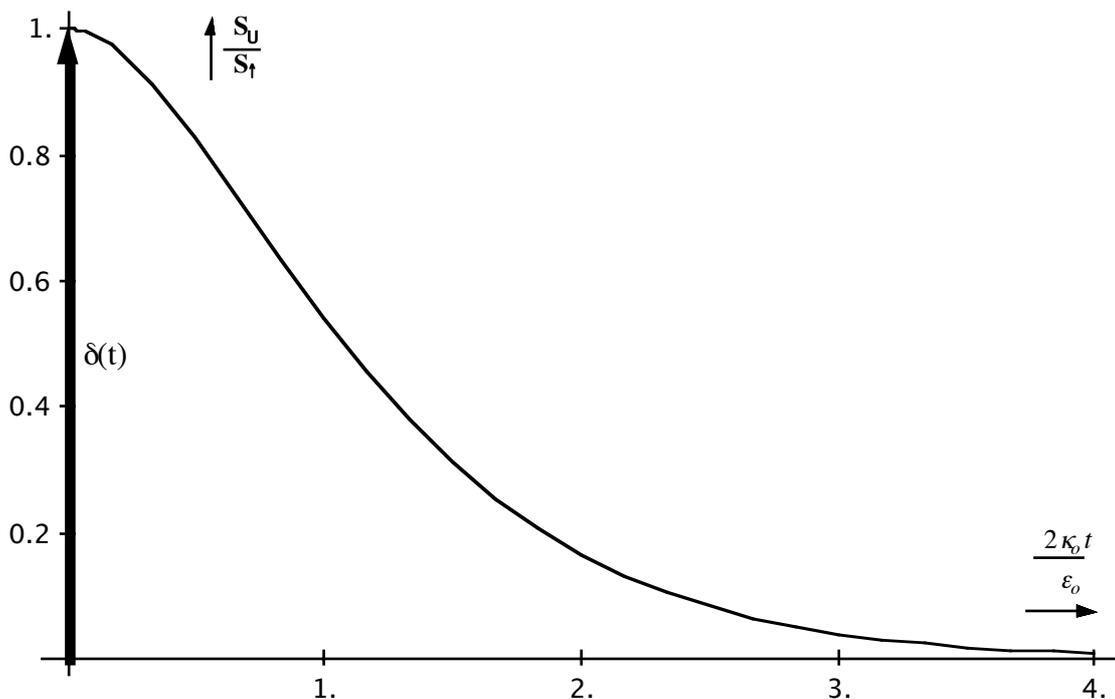


Bild 84
Zeitlicher Verlauf des POYNTING-Vektors
des Urimpulses am Punkt $r=0$

4.6.5.3. Spektralfunktion

Da es sich um einen einzelnen Impuls handelt, der erst ab dem Zeitpunkt $t=0$ definiert ist, ergibt sich eine kontinuierliche Spektralfunktion. Diese erhalten wir, indem wir Gleichung (447) mit Hilfe der LAPLACE-Transformation noch einmal lösen. Die Anfangsbedingungen $f_0^{(0)} = \varphi_{\uparrow}$ und $f_0^{(1)} = 0$ entnehmen wir dem vorhergehenden Abschnitt.

$$\ddot{\varphi}_U + 2\omega_U \dot{\varphi}_U + \omega_U^2 \varphi_U = 0 \rightarrow p^2 \varphi_U - p\varphi_{\uparrow} + 2p\varphi_U - 2\varphi_{\uparrow} + \omega_U^2 \varphi_U = 0 \quad (456)$$

$$\varphi_U (p^2 + 2p\omega_U + \omega_U^2) = \varphi_{\uparrow} (p+2) \quad (457)$$

$$\varphi_U = \varphi_{\uparrow} \frac{p+2\omega_U}{(p+\omega_U)^2} = \varphi_{\uparrow} \left(\frac{1}{p+\omega_U} + \frac{\omega_U}{(p+\omega_U)^2} \right) \quad (458)$$

Die Rücktransformation führt dann wieder zu Ausdruck (452). Uns interessiert jedoch die Spektralfunktion. Durch Substitution $p \rightarrow j\omega$ erhält man den Frequenzgang des Mediums (eigentlich die Amplitudendichte), der in diesem Fall (DIRAC-Impuls = Multiplikation mit 1) gleichzeitig unsere gesuchte Spektralfunktion ist. Unter Vernachlässigung des Faktors $1/\omega_U$ (Amplitudendichte) und Normierung auf den Faktor 1 bei $\omega=0$ erhalten wir schließlich ($\Omega_U = \omega/\omega_U$):

$$X_n(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+j\Omega_U} \left(1 + \frac{1}{1+j\Omega_U} \right) \quad \text{Komplexe Spektralfunktion} \quad (459)$$

$$A_n(\omega) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_U^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\Omega_U^2}} \right) \quad \text{Amplitudengang normiert} \quad (460)$$

Der Realteil von (459), der Amplitudengang des magnetischen Flusses und auch der elektrischen und magnetischen Feldstärke, ist in den Bildern 85 und 86 dargestellt.

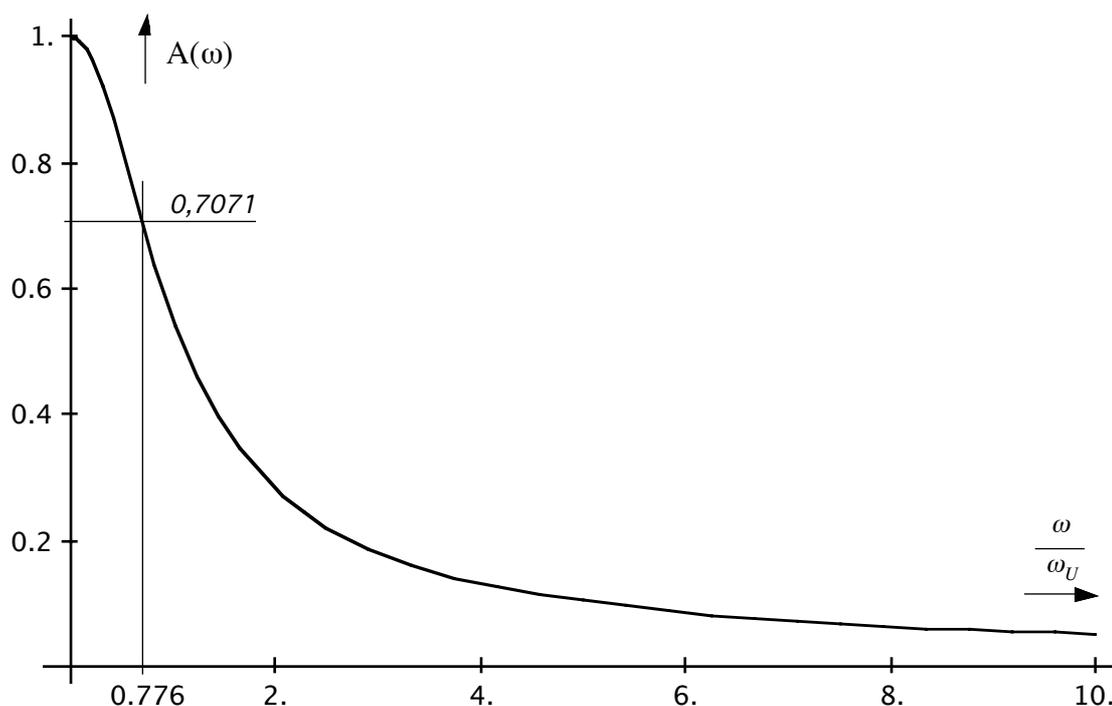


Bild 85
Normierte Spektralfunktion der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke des Urimpulses (linearer Maßstab)

Für den POYNTING-Vektor müssen wir (459) und (460) quadrieren. Die 3dB-Grenzfrequenz liegt bei $0,776\omega_U$ bzw. $1,552\omega_1$. Dies stimmt sehr gut mit der Grenzfrequenz für der Metrik überlagerte Photonen (Bild 20) überein, was als weiteres Argument dafür steht, daß die Kopplungslänge beim Urimpuls ebenfalls $r_1/2$ ist.

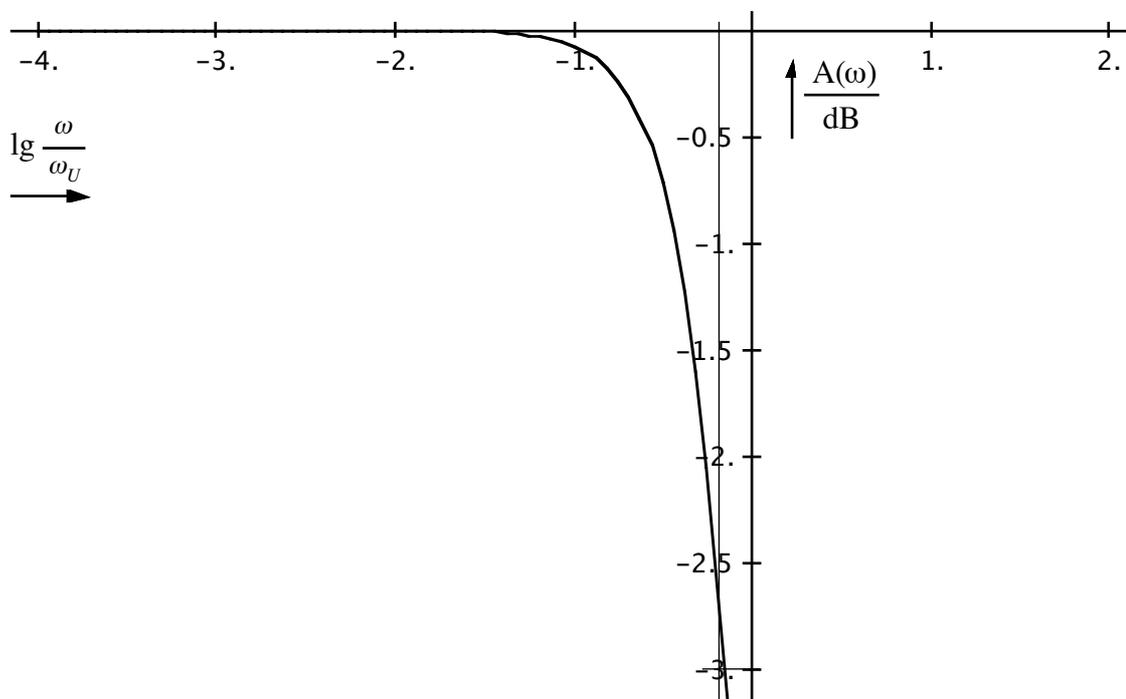


Bild 86
Normierte Spektralfunktion der elektrischen bzw.
magnetischen Feldstärke des Urimpulses (logarithmischer Maßstab)

4.6.5.4. Energiedichte

Die Energiedichte erhalten wir durch Division des POYNTING-Vektors durch die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dazu müssen wir diese zunächst bestimmen. Da es sich um einen einzelnen Impuls mit definierter Länge handelt, gibt es keine einheitliche Ausbreitungsgeschwindigkeit, da sich die einzelnen spektralen Anteile mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ausbreiten. Frequenzen unterhalb ω_U verhalten sich nach dem Standardmodell 4.3.4.2. (klassische Lösung für verlustbehaftetes Medium). Hierbei ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit abhängig von der Frequenz (178). Je höher die Frequenz, um so höher die Geschwindigkeit. Diese übersteigt jedoch nicht den Wert von c .

Für Frequenzen oberhalb ω_U gibt es überhaupt keine Ausbreitung, wenngleich sich deren Energie für eine gewisse Zeit innerhalb des Bereichs des metrischen Wellenfelds aufhält. Je höher die Frequenz, um so kürzer die Halbwertszeit, also um so geringer die mittlere zeitliche Amplitudendichte. Andererseits gilt auch, je größer die Frequenz, um so größer die Energie. Wir wollen daher sehen, ob es nicht einen Mittelwert gibt, den es genügt, zu betrachten, um die Gesamtenergiedichte zu bestimmen. Mehr wollen wir im Moment eigentlich nicht wissen. Dazu betrachten wir zunächst das energetische Spektrum. Das ist die gewichtete Amplitudendichte. Diese erhalten wir, indem wir (458) mit der Frequenz multiplizieren. Der Verlauf ist im Bild 87 dargestellt.

Man sieht, daß die niedrigen Frequenzen so gut wie keinen Anteil am Energiegehalt des Impulses haben. Über den gesamten Frequenzbereich betrachtet läßt sich ein Mittelwert finden, der die Größe 1 hat.

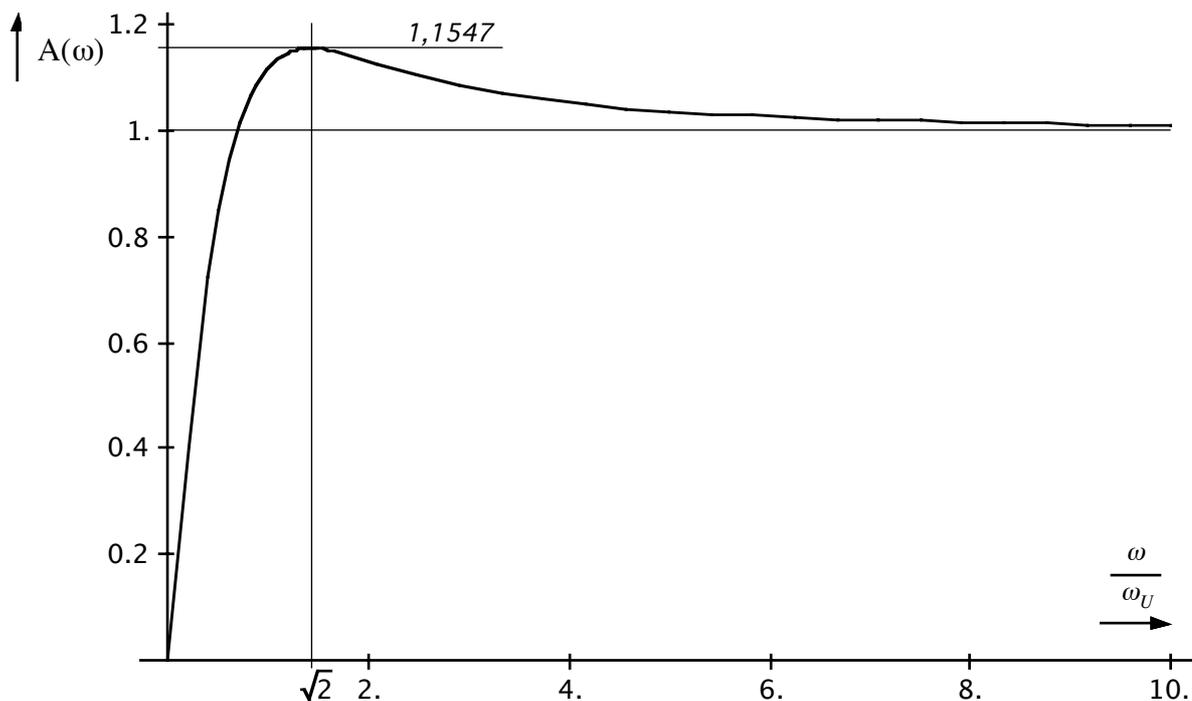


Bild 87
Energetisches Spektrum der elektrischen bzw.
magnetischen Feldstärke des Urimpulses

Beim POYNTING-Vektor liegt das Maximum übrigens bei $4/3$. Die mittlere zeitliche Amplitudendichte wiederum ist identisch mit dem normierten Amplitudengang (Bild 85). Bilden wir den quadratischen Mittelwert von beiden, so erhalten wir den im Bild 88 dargestellten Verlauf.

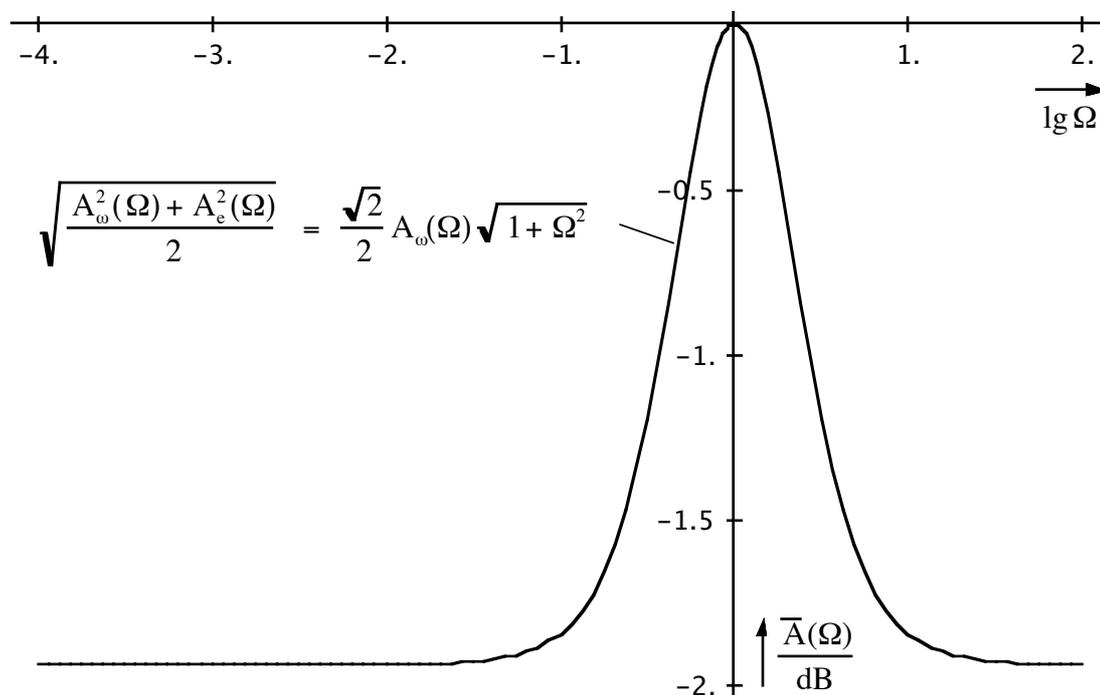


Bild 88
Quadratischer Mittelwert aus energetischer und mittlerer
zeitlicher Amplitudendichte (E- und H-Feld) des Urimpulses

Der quadratische Mittelwert aus energetischer und mittlerer zeitlicher Amplitudendichte liegt bei ω_U bzw. $2\omega_1$ (aperiodischer Grenzfall). Er eignet sich damit am besten zur Bestimmung der mittleren Energiedichte des Urimpulses. Wir wollen nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit für diesen Fall bestimmen und betrachten dazu eine weitere Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen.

4.6.5.4.1. Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen für den aperiodischen Grenzfall

Wir gehen zunächst wie im Abschnitt 4.3.4.2. vor, jedoch mit einem anderen Ansatz für die magnetische und elektrische Feldstärke:

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \underline{\mathbf{E}} \quad \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = -\mu_0 \frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} \quad (461)$$

$$\underline{\mathbf{H}} = (1 + \omega_U t) e^{-\omega_U t} \underline{\mathbf{H}} \quad \underline{\mathbf{E}} = (1 + \omega_U t) e^{-\omega_U t} \underline{\mathbf{E}} \quad (462)$$

Für die erste Ableitung der magnetische Feldstärke gilt (immer analog für $\underline{\mathbf{E}}$):

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{H}}}{\partial t} = -\omega_U^2 t e^{-\omega_U t} \underline{\mathbf{H}} = -\omega_U \frac{\omega_U t}{1 + \omega_U t} \underline{\mathbf{H}} \quad (463)$$

Wir benötigen auch wieder die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} = -\omega_U^2 (1 - \omega_U t) e^{-\omega_U t} \underline{\mathbf{H}} = -\omega_U^2 \frac{1 - \omega_U t}{1 + \omega_U t} \underline{\mathbf{H}} \quad (464)$$

Jetzt können wir in (461) einsetzen ($\varepsilon_0 \omega_U = 2\kappa_0$):

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \left(\kappa_0 - \varepsilon_0 \omega_U \frac{\omega_U t}{1 + \omega_U t} \right) \underline{\mathbf{E}} = \frac{\kappa_0 (1 + \omega_U t) - 2\kappa_0 \omega_U t}{1 + \omega_U t} \underline{\mathbf{E}} \quad (465)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \kappa_0 \frac{1 - \omega_U t}{1 + \omega_U t} \underline{\mathbf{E}} \quad \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = \mu_0 \omega_U \frac{\omega_U t}{1 + \omega_U t} \underline{\mathbf{H}} \quad (466)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}} = \operatorname{rot} \left(\kappa_0 \frac{1 - \omega_U t}{1 + \omega_U t} \right) \underline{\mathbf{E}} = \kappa_0 \frac{1 - \omega_U t}{1 + \omega_U t} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}} = -\Delta \underline{\mathbf{H}} \quad (467)$$

$$-\Delta \underline{\mathbf{H}} = \mu_0 \kappa_0 \omega_U^2 t \frac{1 - \omega_U t}{(1 + \omega_U t)^2} \underline{\mathbf{H}} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\kappa_0}{\varepsilon_0} \frac{t}{1 + \omega_U t} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} \quad (468)$$

Bei Ausbreitung nur in x-Richtung gilt wieder:

$$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial x^2} = \frac{1}{2c^2} \frac{\omega_U t}{1 + \omega_U t} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{H}}}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial x^2} = \frac{1}{2c^2} \frac{\omega_U t}{1 + \omega_U t} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} \quad (469)$$

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} c \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_U t}} \quad \frac{dr}{dt} = c \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_U t}} \quad (470)$$

Der Faktor $\sqrt{2}$ entfällt bei der Abbildung auf die Metrik, die sich in einem Winkel von 45° dazu ausbreitet. Es gibt also auch eine Lösung für diesen Spezialfall. Bei der Interpretation müssen wir jedoch große Vorsicht walten lassen. Da die Lösung rein reell ist, ist eine Ausbreitungsgeschwindigkeit nicht definiert. Es handelt sich vielmehr um eine Ausdehnungsgeschwindigkeit, wie wir sie auch schon beim einzelnen MINKOWSKI'schen Linienelement gefunden hatten (57):

$$\dot{r}_U = c \sqrt{1 + \frac{1}{\omega_U t}} = c \sqrt{1 + \frac{1}{4\omega_0^2 t^2}} \quad \dot{r}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\mu_0 \kappa_0 t}} = \frac{c}{2\omega_0 t} \quad (471)$$

$$r_U = ct \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2\omega_0^2 t^2}} + \frac{1}{2\omega_0^2 t^2} \operatorname{arccoth} \sqrt{1 + \frac{1}{2\omega_0^2 t^2}} \right) \quad r_0 = 2\omega_0 t r_1 \quad (472)$$

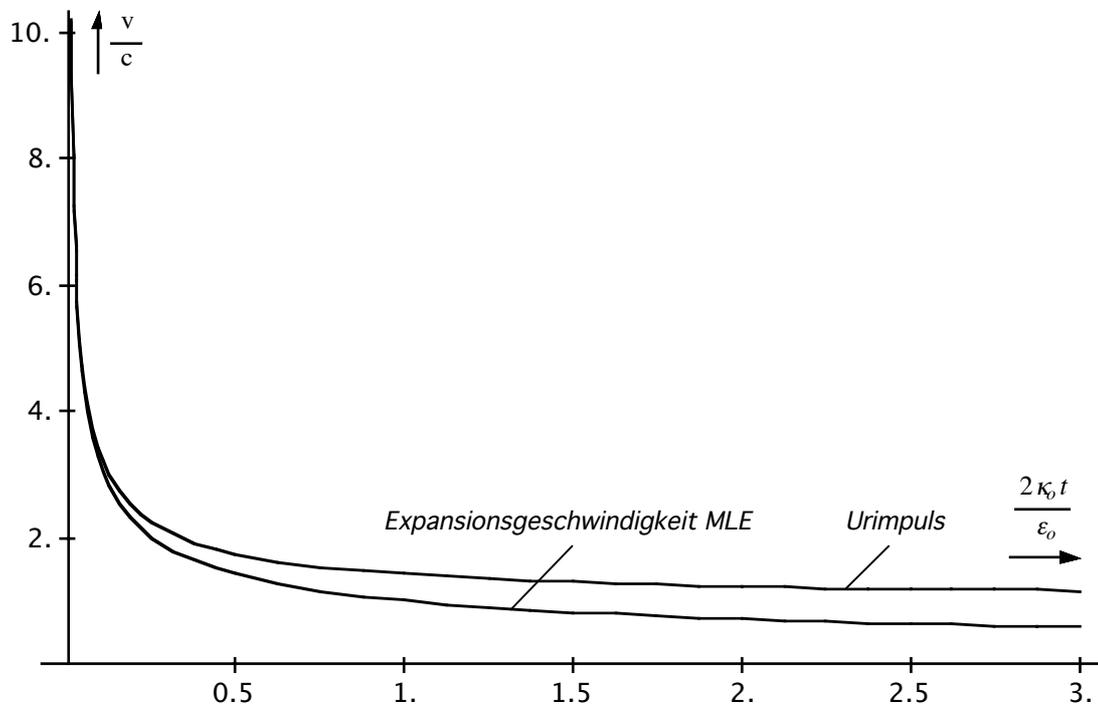


Bild 89
Ausdehnungsgeschwindigkeit von Uripuls
und MINKOWSKISCHEM Linienelement Nr. 1

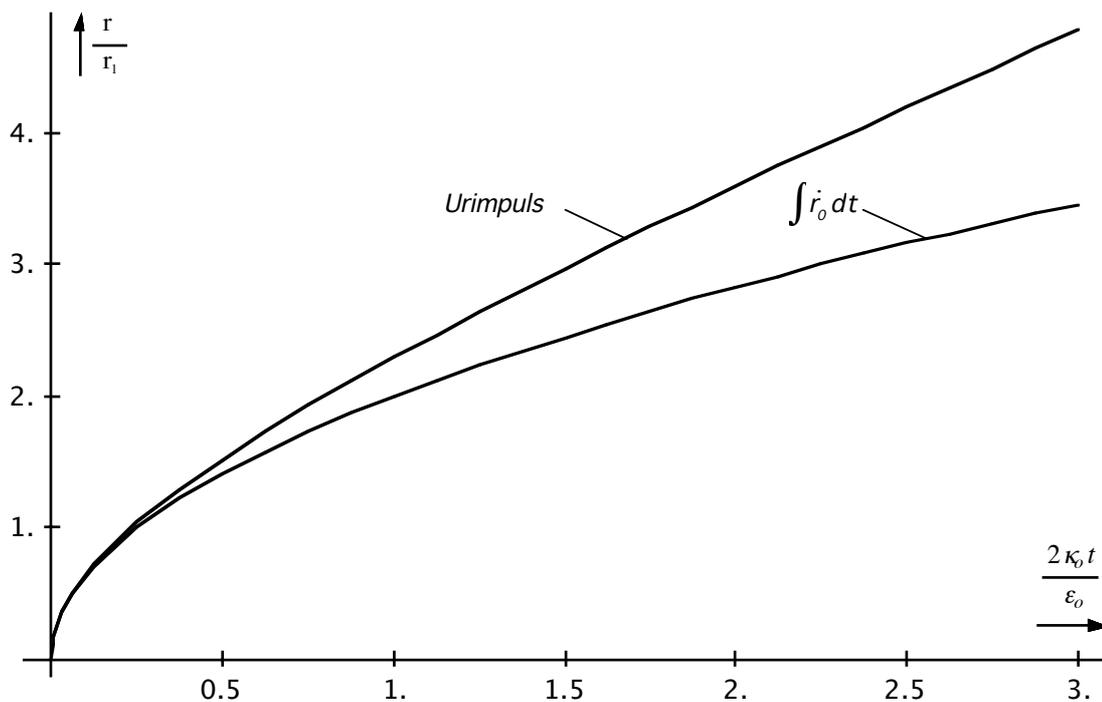


Bild 90
Ausdehnung von Uripuls und MINKOWSKISCHEM
Linienelement Nr. 1 als Funktion der Zeit

Auch ist die zeitliche Gültigkeit der Lösung stark eingeschränkt. Vergleichen wir die beiden in (471) angegebenen Ausdrücke, so müßte der Verlauf bei $\omega_U \ll 1$ fast identisch sein. Dies können wir im Bild 89 gut erkennen. Das gilt auch für die Ausdehnung des Urimpulses bzw. den Radius des MINKOWSKISchen Linienelements Nr. 1 (Bild 90). Das ist das erste Linienelement, in dem zu Anfang die gesamte Energie des Universums konzentriert ist.

Bis zum Zeitpunkt t_1 ist die Ausdehnung des Urimpulses in etwa identisch mit dem Linienelement Nr. 1. Danach überschreitet der Urimpuls die Grenzen des ersten Linienelements. Es besteht aber noch eine deutliche Überlappung. Inzwischen haben sich durch Wellenausbreitung bereits neue, angrenzende Linienelemente gebildet, die nun auch Energie aus dem Urimpuls entnehmen können. Spätestens ab diesem Zeitpunkt ist Ausdruck (471) nicht mehr gültig, da wir es nun mit der Überlagerung zweier Subsysteme zu tun haben, die miteinander verkoppelt sind.

Wir können aber annehmen, daß der Urimpuls nicht die äußere Grenze des Universums überschreitet. Über die Metrik kommt es auch zu einem Ausgleich unterschiedlicher lokaler Energiedichtewerte. Dann würde für den Urimpuls dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit wie für das metrische Wellenfeld gelten (210).

4.6.5.4.2. Bestimmung der mittleren Energiedichte des Urimpulses

Die mittlere Energiedichte erhält man durch Division des Ausdrucks für den POYNTING-Vektor (455) durch den Betrag der *Ausbreitungsgeschwindigkeit* (210):

$$w_U = w_\uparrow \rho_0 \omega_0 t (1 + 4\omega_0^2 t^2)^2 e^{-8\omega_0^2 t^2} \quad \text{mit } w_\uparrow = \frac{S_\uparrow}{c} \quad (473)$$

Der Verlauf ist im Bild 91 dargestellt. Man sieht, daß die Lebensdauer des Impulses genau $3t_1$ beträgt. Danach ist die gesamte Energie in andere Formen umgewandelt. Der zweite Nulldurchgang der Funktion $\text{div}S_0$ liegt bei $2,55t_1$. Damit erfüllt das Modell die Anforderungen an die Zwischenspeicherung der Energie des DIRAC-Impulses. Es muß jedoch noch einmal darauf hingewiesen werden, daß es sich hier nur um eine Näherung handelt. Die tatsächlichen Verhältnisse sind wesentlich komplizierter.

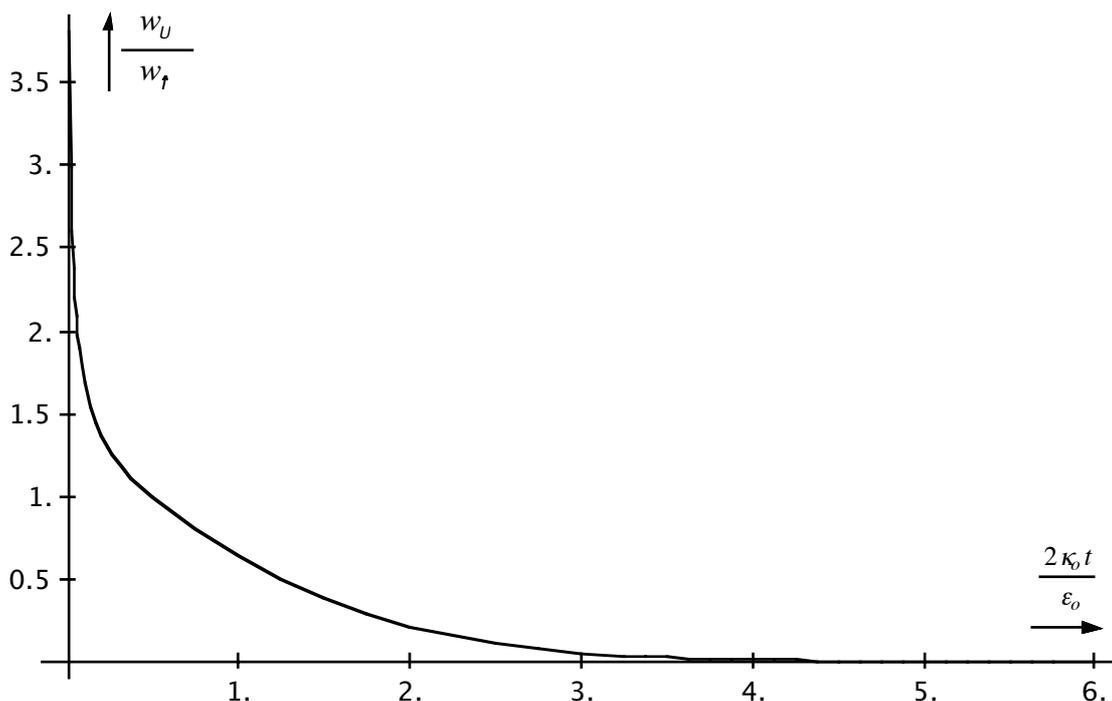


Bild 91
Mittlere Energiedichte des Urimpulses

Nun kann man wieder den Energieerhaltungssatz der MAXWELLSchen Gleichungen anwenden, um die Größenordnung von w_f zu bestimmen. Jetzt haben wir es aber mit einem "Überangebot" an Energie zu tun, wobei sich der Abfluß $\text{div}\mathbf{S}_U$ nicht auf die gewohnte Art ergibt, sondern durch die Aufnahmefähigkeit des metrischen Wellenfeldes $-\text{div}\mathbf{S}_0$ bestimmt wird. Die überschüssige Energie wird dann ebenfalls in fermionische Materie umgewandelt, was es noch schwieriger macht, eine einigermaßen verlässliche Aussage über das Bosonen-/Fermionenverhältnis für die Zeit unmittelbar nach dem Urknall zu treffen. Es gilt:

$$\dot{w}_f = \text{div}\mathbf{S}_0 - \dot{w}_U \quad \text{Leistungsdichte Fermionenerzeugung } \dot{w}_f \hat{=} \kappa_0 E^2 \quad (474)$$

Mit Hilfe von (474) läßt sich zumindest die untere Grenze von w_f bestimmen. Diese ergibt sich aus der Annahme, daß der Wert von (474) nicht negativ werden darf. Beim metrischen Wellenfeld gibt es einen negativen Bereich, in dem Energie aus dem Urimpuls entnommen wird. Beim Urimpuls selbst geht das nicht mehr, da man sich sonst Energie aus dem *Nichts* "borgen" müßte. Der Verlauf von (474) für verschiedene Werte von w_f ist im Bild 92 dargestellt. Die erste Ableitung von w_U wurde wieder mit Hilfe des Differenzenquotienten bestimmt.

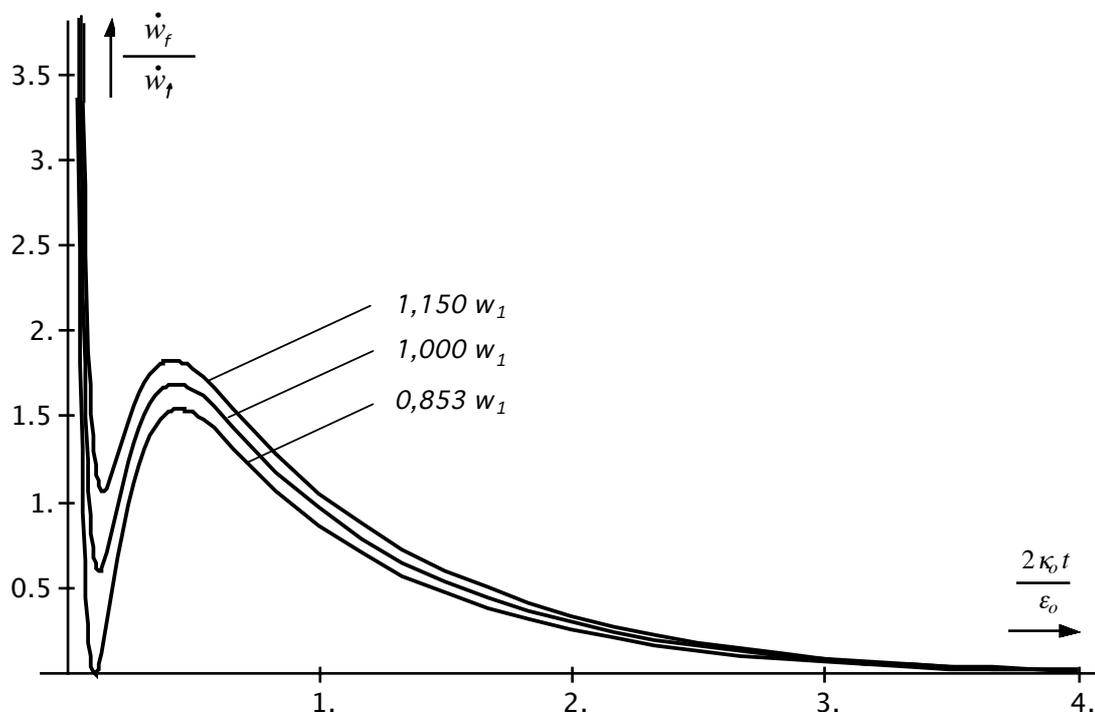


Bild 92
Leistungsdichte Fermionenerzeugung beim Urimpuls

Als untere Grenze für w_f ergibt sich hier ein Wert von $0,853w_1$. Die obere Grenze erhält man normalerweise aus dem Bosonen-/Fermionenverhältnis (438), unter der Annahme, daß der Fermionenvervielfachungsfaktor gleich Eins ist. Versuchen wir nun, w_f genau zu bestimmen, stellen wir fest, daß dies unmöglich ist, da sich die Integrationskonstante von $\int \dot{w}_i dt$ nicht bestimmen läßt.

Der Grund ist, daß unsere mittlere Energiedichte in Bild 91 im Punkt $t=0$ gegen unendlich strebt. Unser Modell versagt also in diesem Punkt. Es handelt sich aber ohnehin nur um eine grobe Näherung. Am wahrscheinlichsten ist daher die Annahme, daß $w_f = w_1$ gilt. Als Begründung mag gelten, daß Energie zwar in andere Formen umgewandelt wird, sich die Gesamtenergiedichte dabei aber nicht ändert. Die zweite Begründung ist, daß das metrische Wellenfeld zu Anfang noch gar nicht existent ist, sich aber mit etwa der gleichen Geschwindigkeit ausdehnt, wie der Urimpuls. Hier klärt sich auch das Phänomen der unendlichen Geschwindigkeit zu Beginn: Ein (noch) nicht existentes Feld kann sich sehr wohl mit unendlicher Geschwindigkeit ausbreiten, zumindest mathematisch. Weitere Aussagen

lassen sich leider nicht treffen. Auch ist eine Bestimmung der Gesamtenergie des Universums nicht möglich.

5. Lichtgeschwindigkeit

Im Abschnitt 4.3.4.4. haben wir gute Ergebnisse bei der Berechnung der kosmologischen Rotverschiebung erzielen können, indem wir annahmen, daß sich die Photonen rechtwinklig zur Expansionskurve der Metrik ausbreiten (Bild 34). Die Frequenz ergibt sich aus dem Produkt der durch die Expansion des MINKOWSKISchen Linienelements bedingten lokalen Zunahme der Wellenlänge (Zunahme des Weltradius) und der lokalen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik c_M . In der Näherung gilt:

$$\omega = \tilde{\omega} \frac{\tilde{Q}_0}{Q_0} \frac{c_M}{c} = \tilde{\omega} \frac{\tilde{Q}_0}{Q_0} \sin \delta = \tilde{\omega} \frac{\tilde{Q}_0 \tilde{Q}_0^{\frac{1}{2}}}{Q_0 Q_0^{\frac{1}{2}}} = \tilde{\omega} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{-\frac{3}{2}} = \tilde{\omega} \left(1 + \frac{t}{T} \right)^{-\frac{3}{4}} \quad (475)$$

mit $Q_0 = 1$ und $\tilde{\omega} = \omega_1$ für die kosmische Hintergrundstrahlung. Ansonsten können hier auch andere Werte stehen. Dies ist aber nur in der Näherung richtig und entspricht dem Fall, daß der Schnittwinkel α zwischen zeitartigem und metrischem Vektor im Dreieck immer $\pi/2$ beträgt. In der Zeit kurz nach dem Urknall und damit auch bei starken Gravitationsfeldern und/oder sehr hohen Geschwindigkeiten handelt es sich aber nicht mehr um einen rechten Winkel. Dann ergibt sich ein vollkommen anderes Verhalten bei der Geschwindigkeitsaddition.

Wir wollen zuerst die Verhältnisse genauer untersuchen, wie sie zu diesem Zeitpunkt bzw. in der Nähe der Singularität herrschten. Zuvor werden wir aber unser Modell des Photons, so wie wir es heute kennen, erweitern. Bisher ging man davon aus, daß das Photon den Spin ± 1 ($\pm \hbar$) und die Frequenz $\pm \omega$ besitzt, was dazu führt, daß das Photon mit seinem Antiteilchen ($-\hbar$)($-\omega$) identisch ist. Eine negative Frequenz bereitet hier also keine Schwierigkeiten. Nun haben wir aber gesehen, daß sich die Metrik für Photonen wie eine Leitung verhält und in der Leitungstheorie arbeitet man nicht nur mit negativen, sondern auch mit komplexen Frequenzen.

Die Frage lautet nun, warum sollte das nicht auch in der Theorie des Photons so sein? So wurden in letzter Zeit eine Reihe von Modellen aufgestellt, bei denen man davon ausgeht, daß die Ruhmasse des Photons und auch der Neutrinos ungleich Null ist und genau dies entspricht nach den Gesetzen der theoretischen Elektrotechnik der Einführung komplexer Frequenzen (vgl. Abschnitt 5.3.2.). Die Ruhmasse eines Photons nach diesem Modell ergibt sich zu $m_0 = \hbar H/c^2 = 2,73727 \cdot 10^{-69}$ kg. Dies stimmt sehr gut mit den Angaben in der Literatur überein.

Bei der Lösung der Wellengleichung des Photons gibt es rein mathematisch gesehen auch ein sogenanntes longitudinales sowie ein rein zeitartiges Photon (nicht zu verwechseln mit dem hier beschriebenen zeitartigen Photon, bei dem sich der Begriff zeitartig auf die Ausbreitungsrichtung entgegengesetzt zu der des raumartigen Photons bezieht). Diese beiden Zustände werden auch als Geisterzustände bezeichnet und mittels aufwendiger mathematischer Methoden eliminiert. Für das rein zeitartige Photon mag das ja gelten. Was ist aber mit den longitudinalen Photonen? Gibt es nicht so etwas in der Natur?

Tatsächlich gibt es ja die Neutrinos, die im allgemeinen dieselben Eigenschaften wie Photonen aufweisen, sich aber in Form einer „Korkenzieherkurve“ ausbreiten. Nehmen wir nun einmal an, daß es sich bei diesen longitudinalen Photonen um ebendiese Neutrinos handelt. Das wären dann Photonen, die gegenüber der Ausbreitungsrichtung um den Winkel $\pi/2$ verdreht auftreten, sich also im Winkel von $\pi/2$ zur Ausbreitungsrichtung der Photonen ausbreiten (Anteil c_v). Wie das aussehen könnte, sieht man im Bild 93 und 98. Die Neutrinos hätten damit eine imaginäre Frequenz und einen reellen Spin. Das würde dann zu einer imaginären Energie führen (Blindleistung). Die Neutrinos könnten dann so gut wie keine Arbeit verrichten und der Schnittwinkel mit der Metrik wäre nahezu Null, der Wirkungsquerschnitt extrem klein. Genau

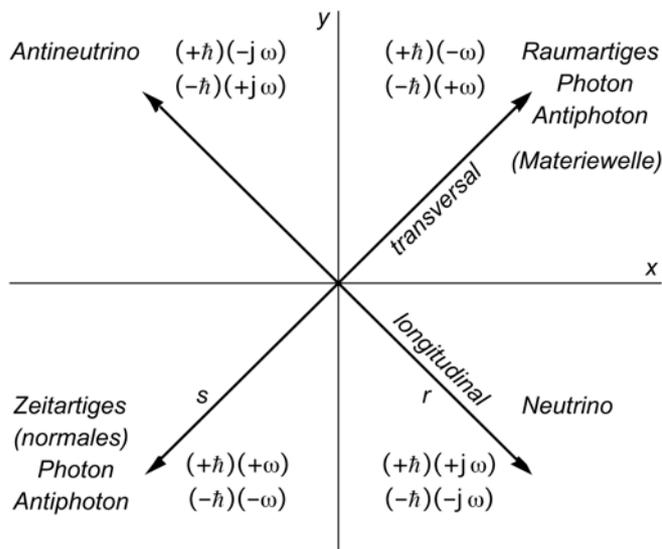


Bild 93
Erweitertes Photonenmodell

das sind aber die Eigenschaften der Neutrinos. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_v in Ausbreitungsrichtung der Photonen wäre ebenfalls extrem klein (c_M), was zu obengenannter Korrenzieherkurve führen würde, da auch hier die geometrische Summe gleich c ist.

Man sieht, auch hier hat das entsprechende Neutrino noch einmal ein Antiteilchen, das mit sich selbst identisch ist (Anti-Neutrino und Anti-Antineutrino). Nun kennen wir aber eigentlich drei verschiedene Arten von Neutrinos (ν_e , ν_μ und ν_τ). Wodurch unterscheiden sich dann diese voneinander? Die Antwort lautet: in Energie, Frequenz und/oder Phasenlage. Neutrinos werden nur bei Prozessen im Kern (β -Zerfall, schwache Wechselwirkung) gebildet. Daher ist aufgrund von Quanteneffekten die Varianz der Energie auf ebendiese drei Größen beschränkt.

Die Hypothese, daß alle drei Neutrinoarten eigentlich nur unterschiedliche Zustände eines einzigen Teilchen darstellen, wird durch die in letzter Zeit durchgeführten Neutrinonachweisexperimente untermauert. So hat man festgestellt, daß die nachgewiesenen Neutrinos nach ihrer Einfallsrichtung geordnet nicht gleichverteilt sind. Die Anzahl Neutrinos, die vor dem Nachweis den Erdkern durchmessen haben, ist geringer, als die aus anderen Richtungen. Dabei hat sich herausgestellt, daß diese nicht „verschwunden“ sind, indem sie z.B. mit irgendwelchen Baryonen in (schwache) Wechselwirkung getreten sind sondern, daß sie sich in andere Neutrinoarten umgewandelt hatten, die mit der Versuchsanordnung nicht nachgewiesen werden konnten (Neutrinooszillation).

Wie kann dies geschehen? Die Neutrinos unterscheiden sich noch durch eine andere Eigenschaft von den Photonen, durch den Spin. Während die Photonen einen ganzzahligen Spin haben, also Bosonen sind, haben die Neutrinos einen halbzahligen Spin, sind also Fermionen. Solange sich die Neutrinos im Vakuum fortbewegen, ist diese Eigenschaft unerheblich. Im Erdkern bewegen sie sich aber durch Materie hindurch. Auch wenn der Wirkungsquerschnitt für Zusammenstöße mit einzelnen Baryonen nicht viel größer ist, als im Vakuum, so ergibt sich doch eine wesentlich größere Wahrscheinlichkeit, daß die Neutrinos eine Elektronenhülle treffen, zumal der Erdkern sehr stark komprimiert ist und damit auch die Elektronenhüllen.

Und in der Elektronenhülle sind die Fermioneneigenschaften auf einmal nicht mehr uninteressant. Bewegen sich nun zwei Neutrinos gemeinsam durch eine Elektronenhülle, so können sie nicht gleichzeitig denselben Energiezustand einnehmen. Eines von den beiden Neutrinos muß sich unterordnen, auf einen anderen Energiezustand wechseln, und wandelt sich in eine andere Neutrinoart um. Bei den drei Neutrinoarten handelt es sich daher um verschiedene Resonanzen ein und desselben Teilchens. Möglich wäre dies durch eine doppelte oder dreifache Rotationsgeschwindigkeit bei gleicher Wellenlänge.

Wenn ein Teilchenphysiker diese Zeilen liest, wird er sich wahrscheinlich ins Fäustchen lachen, wollen wir hier sogar Neutrinos und Photonen zusammen in einen Topf werfen. Dazu

müssen wir zuerst das Problem mit dem Spin diskutieren. Ich persönlich sehe jedenfalls kein Problem darin, anzunehmen daß der Spin eine Funktion des Phasenwinkels der Ausbreitungsfunktion des Teilchens ist. Wenn auch die Neutrinos eine von Null verschiedene Ruhmasse haben sollen, diese wäre dann gleich der des Photons und ist eigentlich durch die Metrik bedingt, hätten auch die Neutrinos eine komplexe Frequenz und damit sogar einen reellen Spin, d.h. der Spin könnte auch gebrochenzahlige Werte annehmen. Dies wäre dann ein Teilchen mit Eigenschaften zwischen Photon und Neutrino.

Nun sind solche Teilchen bisher nicht beobachtet worden, da sie bei natürlichen Prozessen normalerweise nicht gebildet werden, aber möglich wären sie durchaus. Nach diesem Modell könnten sie kurz nach dem Urknall existiert haben und müßten auch heute noch in der Nähe schwarzer Löcher zu beobachten sein. Das ist auch nicht unglaubwürdiger als manche nichtlokalen Modelle. Ein Beispiel wären Photonen mit zirkularer Polarisierung, bei denen die Rotationsfrequenz um die Ausbreitungsachse sehr hoch ist.

Dieses Modell impliziert jedoch auch die Existenz eines sogenannten raumartigen Photons, das ist ein Photon mit negativer Ausbreitungsgeschwindigkeit. D.h. es breitet sich "entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung" aus, steht also quasi auf der Stelle und bildet eine stehende Welle. Auch so etwas gibt es in der Natur, nämlich die sogenannten DEBROGLIE-Materiewellen, die mit den Teilchen verknüpft sind. Bis auf die Stehwelleneigenschaften unterliegen diese denselben Gesetzmäßigkeiten wie "normale" Photonen. Das gilt auch für die Rotverschiebung.

Sollten Sie nun der Meinung sein, beim Neutrino handele es sich definitiv um ein anderes Teilchen als beim Photon, beide ließen sich also auf keinen Fall in einem gemeinsamen Modell vereinigen, beachten Sie bitte folgendes: Nach diesem Modell haben wir mit dem raumartigen Photon nur ein einziges neues Teilchen eingeführt, das dazu noch ählich oder gleich den DEBROGLIE-Materiewellen ist. Wenn man nun aber sowohl dem Photon als auch den Neutrinos eine Ruhmasse zuordnet, und beide als voneinander verschieden betrachtet, hätten wir auf einmal nicht nur eins, sondern 7 oder gar 15 neue Teilchen, 15, wenn man auf drei verschiedenen für jede einzelne Neutrinoart besteht (ν_e , ν_μ und ν_τ). Denn dann würde es auf einmal auch neutrinoartige Photonen/Antiphotonen und photonenartige Neutrinos geben, und diese in zeit- und raumartiger Ausführung. Das kann ich einfach nicht glauben.

Aus diesem Grund ist hier nur von Photonen und Neutrinos die Rede. Sollte der eben genannte Fall jedoch wahr werden, ersetzen Sie bitte selbständig, die Begriffe Neutrino/Antineutrino durch neutrinoartiges bzw. antineutrinoartiges Photon. Das gesagte müßte dann aber auch analog für die Neutrinos gelten, wieviele es davon auch geben mag. Betrachten wir jetzt aber zunächst das ganz normale Photon.

5.1. Photonen

In der Nähe der Singularität liegen die Verhältnisse so wie sie im Bild 94 dargestellt sind. Hier muß ich auch noch einen Widerspruch aufklären, der mir sonst als Fehler angerechnet werden könnte. Bisher habe ich Photonen immer als zeitartige Vektoren bezeichnet, obwohl sie allgemein als Nullvektoren (Geschwindigkeit c) identifiziert werden. Wenn ich von einem zeitartigen Vektor spreche, meine ich damit immer den Anteil \underline{c}_γ . Der Anteil \underline{c}_M ist ein raumartiger Vektor und c ist der Nullvektor, den wir messen.

Nun aber weiter zu unserem Problem. Es interessiert vor allem der Schnittwinkel γ mit der Ableitung \underline{c}_M an der metrischen Expansionskurve und auch der Betrag von $|\underline{c}_\gamma|=c_\gamma$. Da es sich nicht um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, gilt der Sinussatz:

$$c^2 = c_M^2 + c_\gamma^2 - 2c_M c_\gamma \cos \alpha \quad (476)$$

$$c_\gamma^2 - c_\gamma (2c_M \cos \alpha) + c_M^2 - c^2 = 0 \quad (477)$$

$$c_\gamma = c_M \cos \alpha \pm \sqrt{c_M^2 \cos^2 \alpha + c^2 - c_M^2} \quad (478)$$

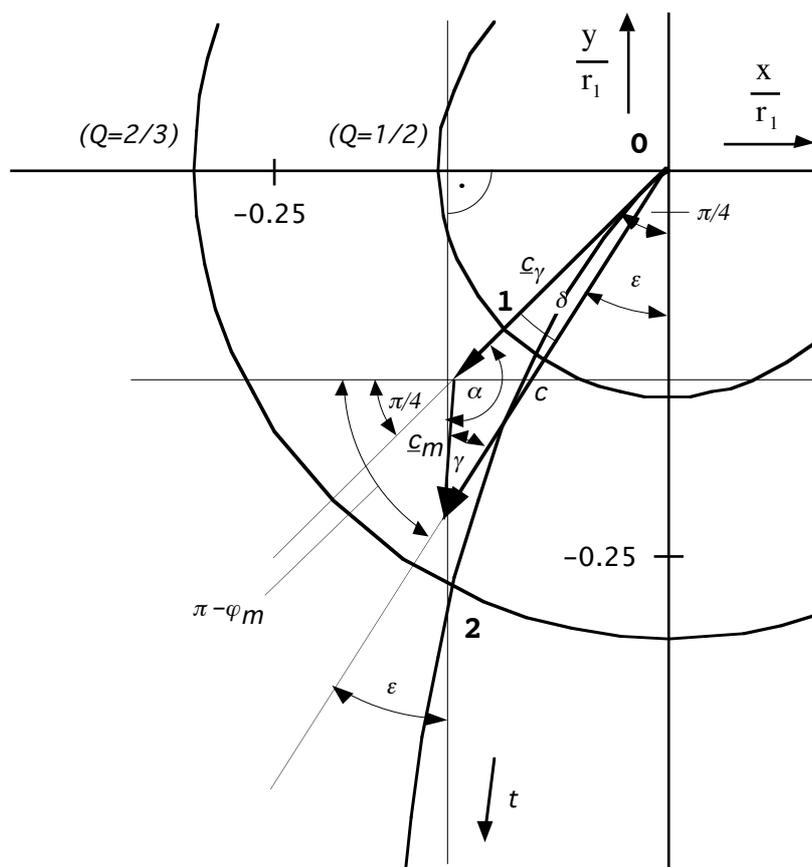


Bild 94
Vektorielle Geschwindigkeitsaddition
bei Photonen in der Nähe der Singularität

$$\frac{c_\gamma}{c} = \frac{c_M}{c} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} (1 - \cos^2 \alpha)} \quad (479)$$

Es gilt das positive Vorzeichen für “normale Photonen” γ (ergibt sich aus der Näherungslösung). Das negative Vorzeichen gilt für die raumartigen Photonen γ^* , die sich in der Nähe der Singularität anders verhalten.

$$c_\gamma = c \left(\frac{c_M}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (480)$$

$$c_{\bar{\gamma}} = c \left(\frac{c_M}{c} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (481)$$

Für den Winkel α_γ gilt in beiden Fällen (siehe (209)):

$$\alpha_\gamma = \frac{\pi}{4} - \arg \underline{c} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccot} \theta = \frac{3}{4} \pi + \frac{1}{2} \arg((1 - A^2 + B^2) + j2AB) \quad (482)$$

Der Verlauf der einzelnen Geschwindigkeitsanteile für die beiden Photonarten sowie für Neutrino und Antineutrino ist im Bild 95 dargestellt. Man sieht, daß einzelne Anteile auch eine größere Geschwindigkeit als c haben können. Wirksam wird jedoch immer nur c . Die untere Kurve stellt den Verlauf der Expansionsgeschwindigkeit der Metrik dar. Das Verhalten der unterschiedlichen Teilchen und Antiteilchen weicht um so mehr voneinander ab, je näher wir dem Punkt $Q=1$ kommen (Symmetriebrechung), um danach wieder abzunehmen.

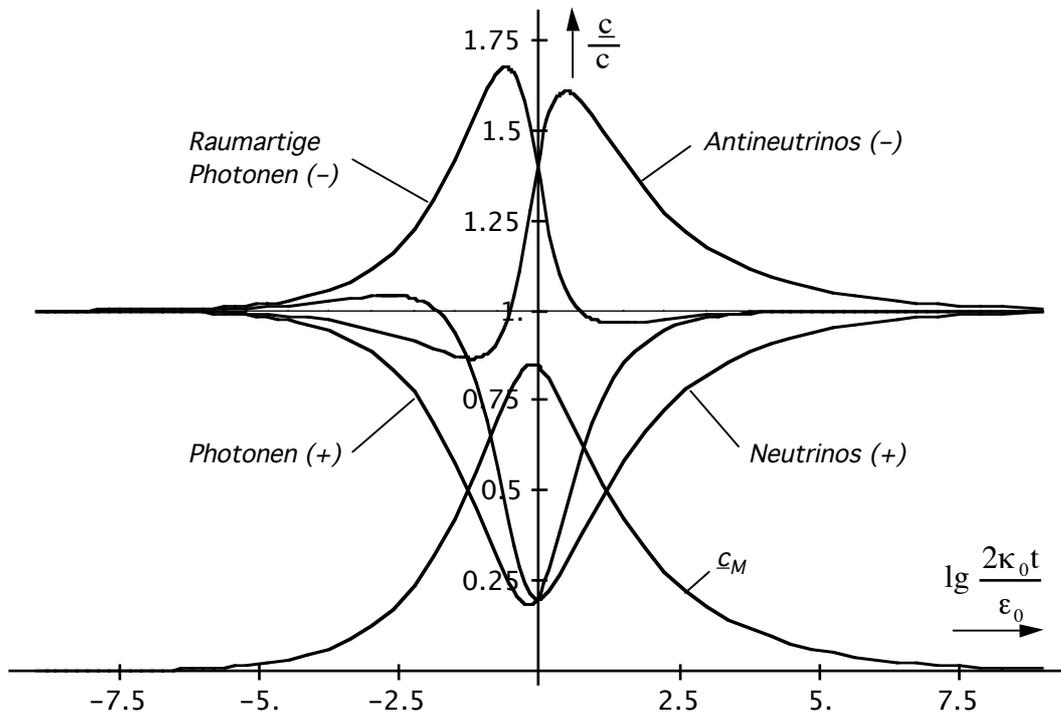


Bild 95
Verlauf der einzelnen Geschwindigkeitsanteile (absoluter Betrag) für Photon und Neutrino in der Nähe der Singularität

Den Schnittwinkel γ der (normalen) Photonen mit der Metrik erhält man unter Anwendung des Sinussatzes ($\alpha = \alpha_\gamma$):

$$\frac{c_M}{c} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha} \quad \sin \delta = \frac{c_M}{c} \sin \alpha = \frac{\sin \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \quad (483)$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\rho_0 \omega_0 t}\right) \quad \gamma = \pi - \alpha - \delta \quad (484)$$

$$\gamma = \arg \underline{c} - \arcsin\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg \underline{c}\right)\right) + \frac{3}{4}\pi \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (485)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \arctan \theta + \arccos\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta\right)\right) + \frac{\pi}{4} \quad (486)$$

Den Verlauf zeigt Bild 97. Dargestellt ist jedoch der Wert $\sin \gamma$, der eine wesentlich größere Bedeutung als der Winkel selbst hat. Um Rechenfehler zu vermeiden habe ich die Funktion $\arg \underline{c}$ immer direkt aus (206) bestimmt.

Ansonsten sollte man zur Berechnung von $\arctan \theta$ besser mit (211) arbeiten, da man durch die Mehrdeutigkeit der arctan-Funktion dann ein teilweise falsches Ergebnis erhält. Für den absoluten Phasenwinkel φ der Resultierenden c gilt:

$$\varphi = -\arccos\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta\right)\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (487)$$

Auf eine Darstellung von φ soll hier verzichtet werden. Für die raumartigen Photonen gilt ein anderer Ansatz:

In der Verlängerung von \underline{c}_γ läßt sich an \underline{c}_M nämlich noch ein zweites Dreieck konstruieren mit den Winkeln α^* (Komplementwinkel zu α), γ^* (Schnittwinkel mit Metrik neben γ) und δ^* (gegenüberliegend zu \underline{c}_M). Dieses entspricht der zweiten Lösung von (479) und gilt auch für Antineutrinos.

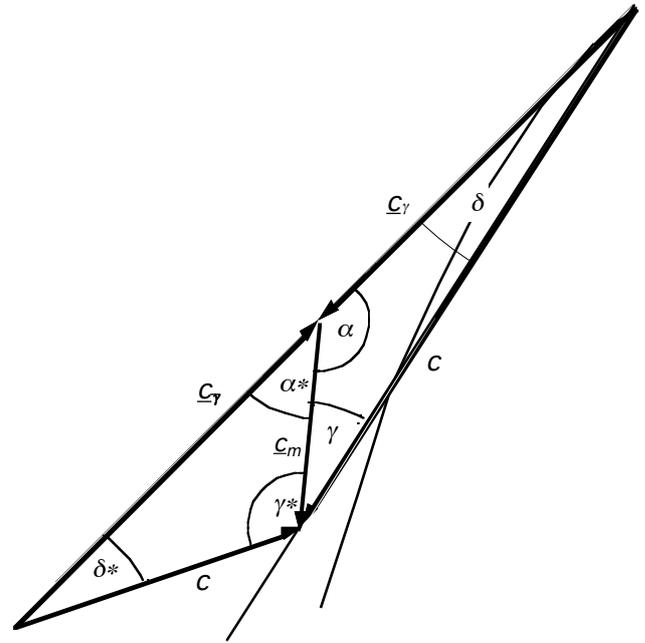


Bild 96
Komplementäres Dreieck und Winkel als
Zweitlösung der quadratischen Gleichungen
bei entgegengesetztem Geschwindigkeitsvektor \underline{c}_γ

Für die komplementären Winkel gilt:

$$\alpha^* = \pi - \alpha \quad \sin \alpha^* = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad (488)$$

$$\frac{c_M}{c} = \frac{\sin \delta^*}{\sin \alpha} \quad (489)$$

$$\delta^* = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{\rho_0 \omega_0 t}\right) \quad \gamma^* = \pi - \alpha^* - \delta^* = \alpha - \delta^* \quad (490)$$

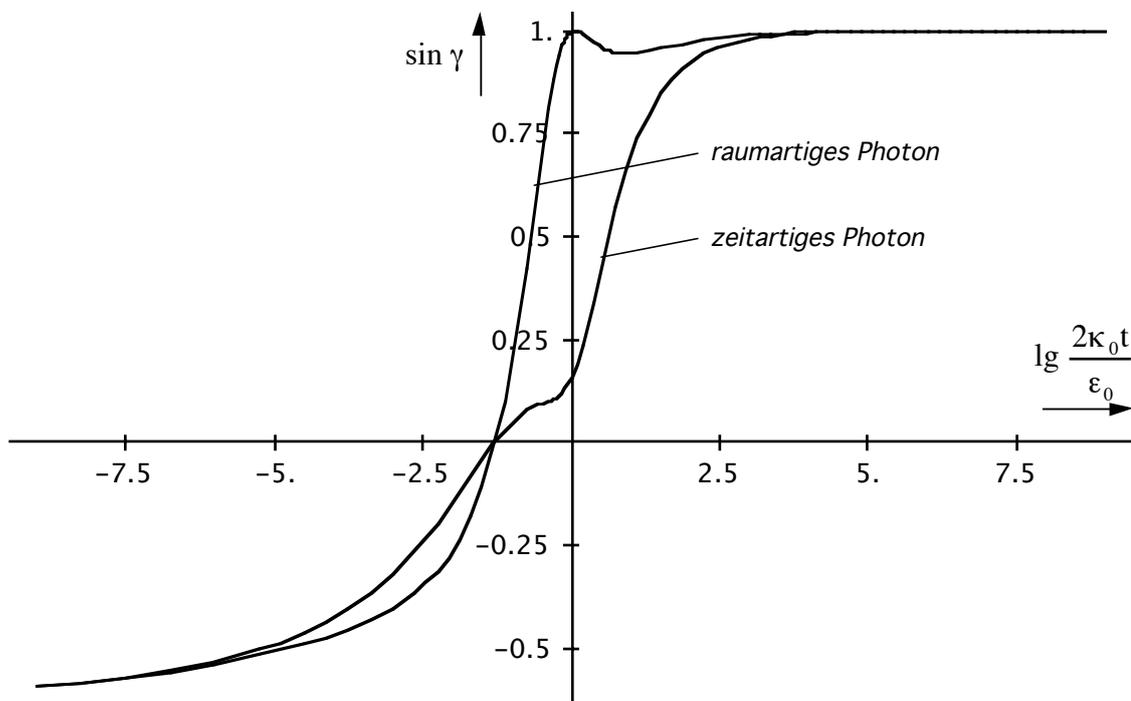


Bild 97
Verlauf der Funktion $\sin \gamma$ des Schnittwinkels mit der Metrik für zeitartige
(normale) und raumartige Photonen in der Nähe der Singularität

$$\gamma^* = -\arg \underline{c} - \arcsin\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg \underline{c}\right)\right) + \frac{\pi}{4} \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (491)$$

$$\gamma^* = -\frac{1}{2} \arctan \theta - \arcsin\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta\right)\right) + \frac{\pi}{4} \quad (492)$$

Der Verlauf von $\sin \gamma^*$ ist ebenfalls im Bild 97 dargestellt. Für den absoluten Phasenwinkel φ^* der Resultierenden \underline{c} gilt:

$$\varphi^* = \arcsin\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta\right)\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (493)$$

5.2. Neutrinos

Wir betrachten jetzt das Modell nach Bild 98. Es interessiert wieder der Schnittwinkel γ mit der Ableitung \underline{c}_M an der metrischen Expansionskurve und auch der Betrag von $|\underline{c}_v| = c_v$.

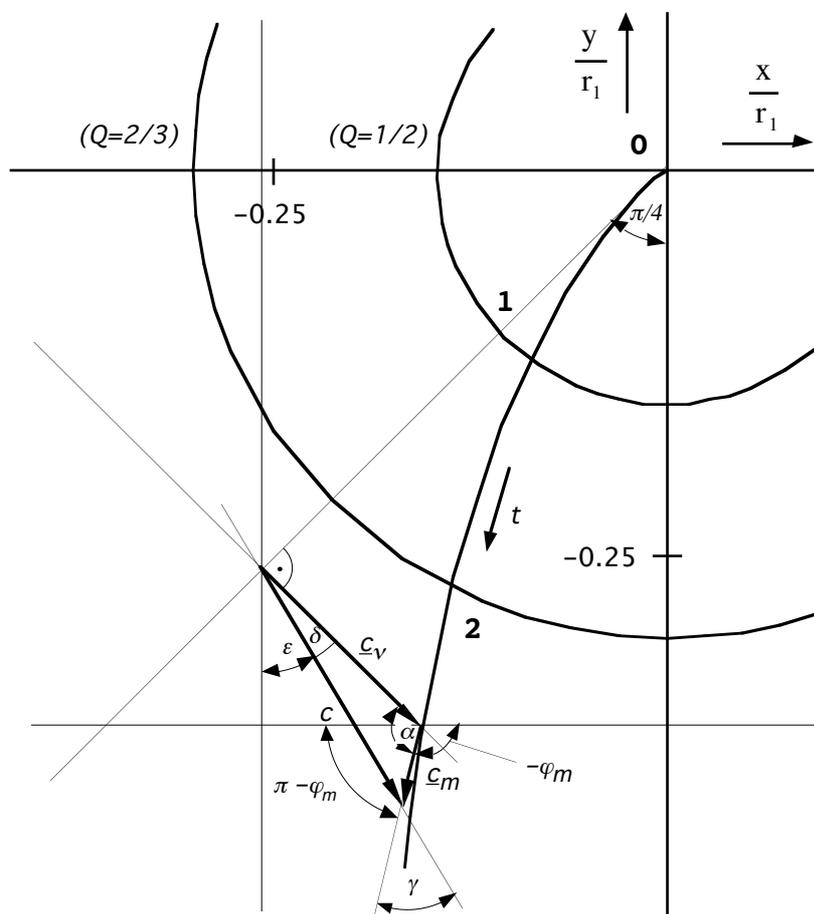


Bild 98
Vektorielle Geschwindigkeitsaddition
bei Neutrinos in der Nähe der Singularität

Da es sich nicht um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, gilt wieder der Sinussatz mit der Lösung:

$$c_v = c \left(\frac{c_M}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Neutrinos} \quad (494)$$

$$c_{\bar{\nu}} = c \left(\frac{c_M}{c} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Antineutrinos} \quad (495)$$

Für den Winkel α_{ν} gilt in beiden Fällen (siehe (209)):

$$\alpha_{\nu} = \frac{5}{4}\pi + \arg \underline{c} = -\frac{3}{4}\pi + \arg \underline{c} = -\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \right) = -\left(\frac{\pi}{2} + \alpha_{\gamma} \right) \quad (496)$$

Der Winkel α_{ν} ist stellt also eine Art Komplementwinkel von α_{γ} dar, d.h. wir können auf den Wert α_{ν} ganz verzichten. Mit α meinen wir also immer α_{γ} . Wichtige Beziehungen erhält man aus den Reduktionsformeln für beliebige Winkel: $\sin \alpha_{\nu} = -\cos \alpha_{\gamma}$, $\cos \alpha_{\nu} = -\sin \alpha_{\gamma}$, $\cos \alpha_{\nu} = -\sin \alpha_{\gamma}$, und $\tan \alpha_{\nu} = \cot \alpha_{\gamma}$. Der Verlauf der Funktionen (495) und (496) ist wiederum im Bild 95 dargestellt (Beträge). Den Schnittwinkel γ der Neutrinos mit der Metrik erhält man ebenfalls direkt unter Anwendung des Sinussatzes ($\alpha = \alpha_{\gamma}$):

$$\frac{c_M}{c} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha_{\nu}} = -\frac{\sin \delta}{\cos \alpha} \quad \sin \delta = -\frac{c_M}{c} \cos \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \quad (497)$$

$$\delta = -\arcsin \left(\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) \quad \gamma = \pi - \alpha - \delta = -\frac{\pi}{4} - \arg \underline{c} - \delta \quad (498)$$

$$\gamma = -\arg \underline{c} + \arcsin \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \arg \underline{c} \right) \right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Neutrinos} \quad (499)$$

$$\varphi^* = \arcsin \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (500)$$

Den Verlauf von $\sin \gamma$ können wir im Bild 99 sehen. Gut zu erkennen ist auch, daß der Wechselwirkungsquerschnitt der Neutrinos mit steigender Energie zunimmt, was dem derzeitigen Erkenntnisstand entspricht. Für den absoluten Phasenwinkel φ der Neutrinos gilt:

$$\varphi = -\arcsin \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \right) + \frac{\pi}{4} \quad \text{Neutrinos} \quad (501)$$

Für Antineutrinos gilt wieder ein anderer Ansatz. Die Winkel im Dreieck sind folgendermaßen definiert: α^* (Komplementwinkel zu α), δ^* (Schnittwinkel mit Metrik neben δ) und γ^* (gegenüberliegend zu \underline{c}_M). Es gilt:

$$\alpha_{\nu}^* = \pi - \alpha_{\nu} \quad \sin \alpha_{\nu}^* = \sin(\pi - \alpha_{\nu}) = \sin \alpha_{\nu} \\ \cos \alpha_{\nu}^* = \cos(\pi - \alpha_{\nu}) = -\cos \alpha_{\nu} \quad (502)$$

$$\frac{c_M}{c} = \frac{\sin \delta^*}{\sin \alpha_{\nu}^*} = -\frac{\sin \delta^*}{\cos \alpha} \quad \sin \delta^* = -\frac{c_M}{c} \cos \alpha = -\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \quad (503)$$

$$\delta^* = -\arcsin \left(\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) \quad \gamma^* = \pi - \alpha_{\nu}^* - \delta^* = \alpha_{\nu} - \delta^* \quad (504)$$

$$\gamma^* = \arg \underline{c} - \arccos \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \arg \underline{c} \right) \right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Antineutrinos} \quad (505)$$

$$\gamma^* = \frac{1}{2} \arctan \theta - \arccos \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \right) - \frac{\pi}{4} \quad (506)$$

Bild 99 zeigt den Verlauf von $\sin \gamma^*$. Für den absoluten Phasenwinkel φ^* der Resultierenden c erhalten wir schließlich:

$$\varphi^* = \arccos \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan \theta \right) \right) + \frac{\pi}{4} \quad \text{Antineutrinos} \quad (507)$$

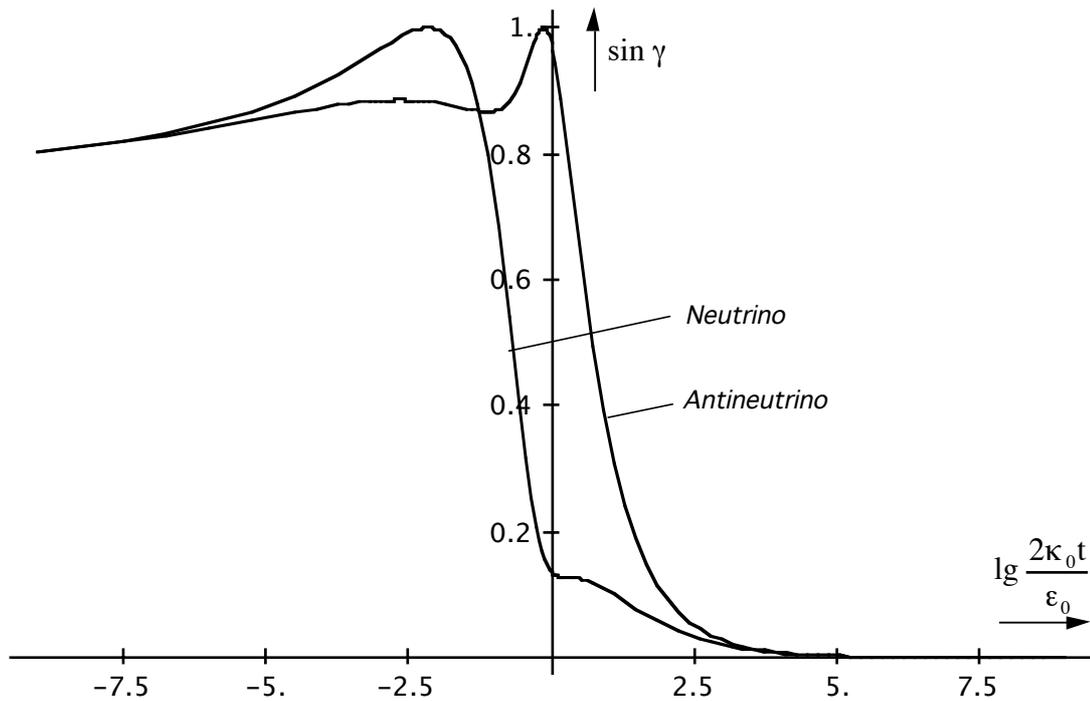


Bild 99
Verlauf der Funktion $\sin \gamma$ des Schnittwinkels mit der Metrik für Neutrinos und Antineutrinos in der Nähe der Singularität

Damit haben wir nachgewiesen, daß sich zumindest nach diesem Modell Photonen in der Zeit kurz nach dem Urknall und damit auch in sehr starken Gravitationsfeldern und bei sehr hohen Relativgeschwindigkeiten wie Neutrinos verhalten und umgekehrt. Zum Schluß noch einmal eine Zusammenfassung der wesentlichen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \gamma_{\gamma} &= \arg \underline{c} + \arccos \left(\frac{\sin \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) + \frac{\pi}{4} & \gamma_{\bar{\gamma}} &= -\arg \underline{c} - \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) + \frac{\pi}{4} \\ \gamma_{\nu} &= -\arg \underline{c} + \arcsin \left(\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) - \frac{\pi}{4} & \gamma_{\bar{\nu}} &= \arg \underline{c} - \arccos \left(\frac{\cos \alpha}{\rho_0 \omega_0 t} \right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (508)$$

Schnittwinkel γ mit der Metrik für die verschiedenen Photonarten

5.3. Rotverschiebung von Photonen und Neutrinos

5.3.1. Grundlagen

Da alle Photonen (und Neutrinos) reell oder/und virtuell mit der zeitlichen Singularität verbunden sind, gibt es beim Beobachter zwei Arten von Photonen. Die erste Art sind die Photonen, deren Frequenz oberhalb der Frequenz kosmischen Hintergrundstrahlung liegt. Diese möchte ich als kontemporäre Photonen bezeichnen, da ihr Ursprung innerhalb unseres Universums liegt. Die zweite Art sind die sogenannten orphanen Photonen mit einer Frequenz unterhalb der Frequenz der kosmischen Hintergrundstrahlung. Orphan deswegen, weil ihr Ursprung außerhalb unseres Universums liegt, d.h. um auf ihre derzeitige Frequenz rotverschoben zu werden, reicht das Weltalter $2T$ nicht aus, ihr Ursprung existiert noch nicht. Dennoch sind sie ebenfalls bereits mit der zeitlichen Singularität verbunden, denn dort steht die Zeit still. Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft bilden eine Einheit.

Wir wollen versuchen, einen exakten Ausdruck für die Rotverschiebung von Photonen und Neutrinos zu finden, der unabhängig von deren Frequenz ist. Wie wir bereits im vorangegangenen Abschnitt und im Abschnitt 4.3.4.4.3. festgestellt haben, werden die Verhältnisse sowohl durch die Seitenverhältnisse als auch durch die Winkel im metrischen Dreieck bestimmt. Wir gehen daher von (297) aus und betrachten eine beliebige Frequenz $\omega=2\pi c/\lambda$ an der zeitlichen Singularität, d.h. vor der Transformation. Wie bekannt, hat dort jede Frequenz den Wert $2\omega_1$, nach der Aufteilung auf 6 MLEs $\omega_s=\omega_1\sqrt{2}/3$. Dies entspricht übrigens der Frequenz der kosmischen Hintergrundstrahlung bei der Einkopplung. Die tatsächliche Frequenz beim Beobachter „entsteht“ erst durch die Applikation des Bezugssystems. Wenn wir dieses ausklammern, erhalten wir die gewünschte allgemeine Beziehung. Setzen wir für $\tilde{\omega}$ den Ausgangswert $2\omega_1$ und für \tilde{Q} die dazugehörige Güte $1/2$ (γ) bzw. $2/3$ ($\bar{\gamma}$) ein, erhalten wir mit Hilfe von (623) und (671c):

$$\omega = \tilde{\omega} \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_\gamma^4 - 1}{\beta_\gamma^4 - 1}} \approx \frac{\sqrt{2}}{3} \omega_1 \frac{1}{Q^2} \frac{1,19663}{\sqrt{\beta_\gamma^4 - 1}} \approx \frac{1}{Q^2} \frac{0,56408\omega_1}{\sqrt{\beta_\gamma^4 - 1}} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (509)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\left(\sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right)^4 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left((1 - \sin^2 \delta)^2 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (510)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{\cos^4 \delta} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}\delta^2} \right)^4 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \delta \ll 1 \quad (511)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{1 - 2\delta^2 + \frac{3}{2}\delta^4 - \frac{1}{2}\delta^6 + \frac{1}{16}\delta^8} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \sqrt{\frac{1}{2\delta^2} - 1} \quad (512)$$

Dieses Ergebnis entspricht offenbar Ausdruck (274) mit $\delta^2=y=Q_0^{-1}$. Wir setzen wieder ein:

$$\omega \approx H/2 \sqrt{\omega_0 t - 1} = H/\sqrt{2} \sqrt{2\omega_0 t} \quad \omega \sim Q_0^{-\frac{3}{2}} \quad (275)$$

Bis auf den abweichenden Faktor C , der beliebig gewählt werden kann, entspricht dies exakt dem Ausdruck (275), was auch nicht anders zu erwarten war. D.h. es gibt nur eine Näherung für zeit- und raumartige Photonen, jedoch zwei unterschiedliche exakte Ausdrücke. Bei den raumartigen Photonen gibt es übrigens ein Problem. Die Lösung der Phasenfunktion Ξ am Bezugspunkt $2/3$ ist nämlich rein imaginär, so daß es keinen reellen Bezug der raumartigen Photonen zu diesem Punkt gibt, was sich u.a. darin zeigt, daß diese über besondere Eigenschaften verfügen. So ist die Ruheschwindigkeit gleich Null und die Photonen lassen sich beliebig verschieben, was den Eigenschaften der DEBROGLIE-Materiewellen entspricht. Allerdings ergeben sich daraus Probleme bei der Anwendung von (299) bei der Umrechnung

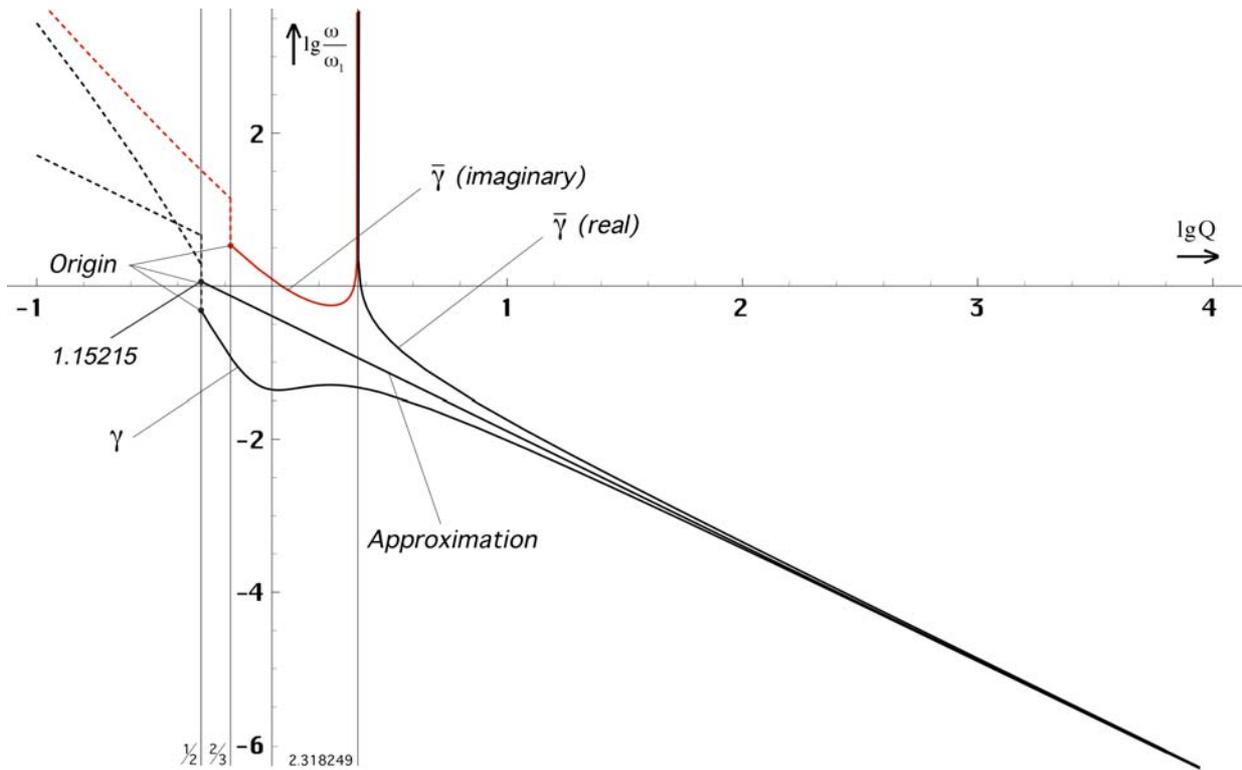


Bild 100
Rotverschiebung von Photonen exakt und Näherung

auf den Bezugspunkt. Wenn man nur die Rotverschiebung einer Materiewelle mit einem Startpunkt größer als $Q=2,318249$ (Phasensprung) bestimmen will, kann man (299) so anwenden, wie es ist. Beim Bezug auf den Punkt $2/3$ muß man allerdings den Ausdruck ändern und zwar folgendermaßen:

$$\omega = j\omega_{\bar{\gamma}} \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_{\bar{\gamma}}^4 - 1}{\beta_{\bar{\gamma}}^4 - 1}} \approx 3,27369\omega_1 \frac{1}{Q^2} \sqrt{\frac{1 - \tilde{\beta}_{\bar{\gamma}}^4}{\beta_{\bar{\gamma}}^4 - 1}} \approx \frac{1}{Q^2} \frac{0,56408\omega_1}{\sqrt{\beta_{\bar{\gamma}}^4 - 1}} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (513)$$

Dies entspricht einer imaginären Frequenz am Bezugspunkt $2/3$, was wir uns vorerst nur merken wollen. Die Werte ergeben sich aus der notwendigen Konvergenz beider Funktionen für $Q \rightarrow \infty$. Für die Näherungsfunktion gilt exakt:

$$\omega \approx \tilde{\omega} \left(\frac{\tilde{Q}}{Q} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{für } Q \text{ und } \tilde{Q} \gg 1 \quad \omega \approx 0,4073456\omega_1 Q^{-\frac{3}{2}} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (514)$$

Im Bild 100 ist der Verlauf der drei Funktionen dargestellt. Man sieht, die Näherung ist bis hinunter zu $Q=10^3$ hinreichend genau. Nur bei sehr starken Gravitationsfeldern benötigt man die exakten Ausdrücke. Im kosmologischen Maßstab genügt die Näherungsformel.

Damit haben wir die Lösung für beide Arten von Photonen gefunden. Was wir noch nicht kennen, ist die Lösung für Neutrinos und Antineutrinos. Dies ist auch der Grund dafür, daß wir die Näherung hier so ausführlich hergeleitet haben. Für Neutrinos gelten nun andere Gesetzmäßigkeiten. Mit Hilfe von (299) und (622) erhalten wir für einen Bezugspunkt von $1/2$:

$$\omega = \tilde{\omega} \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_v^4 - 1}{\beta_v^4 - 1}} \approx 1,4437\omega_1 \frac{1}{Q^2} \frac{0,39073}{\sqrt{\beta_v^4 - 1}} \approx \frac{1}{Q^2} \frac{0,56408\omega_1}{\sqrt{\beta_v^4 - 1}} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (515)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\left(-\frac{c_M}{c} \sin \alpha + \sqrt{1 - \frac{c_M^2}{c^2} \cos^2 \alpha} \right)^4 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\left(-\frac{c_M}{c} + 1 \right)^4 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (516)$$

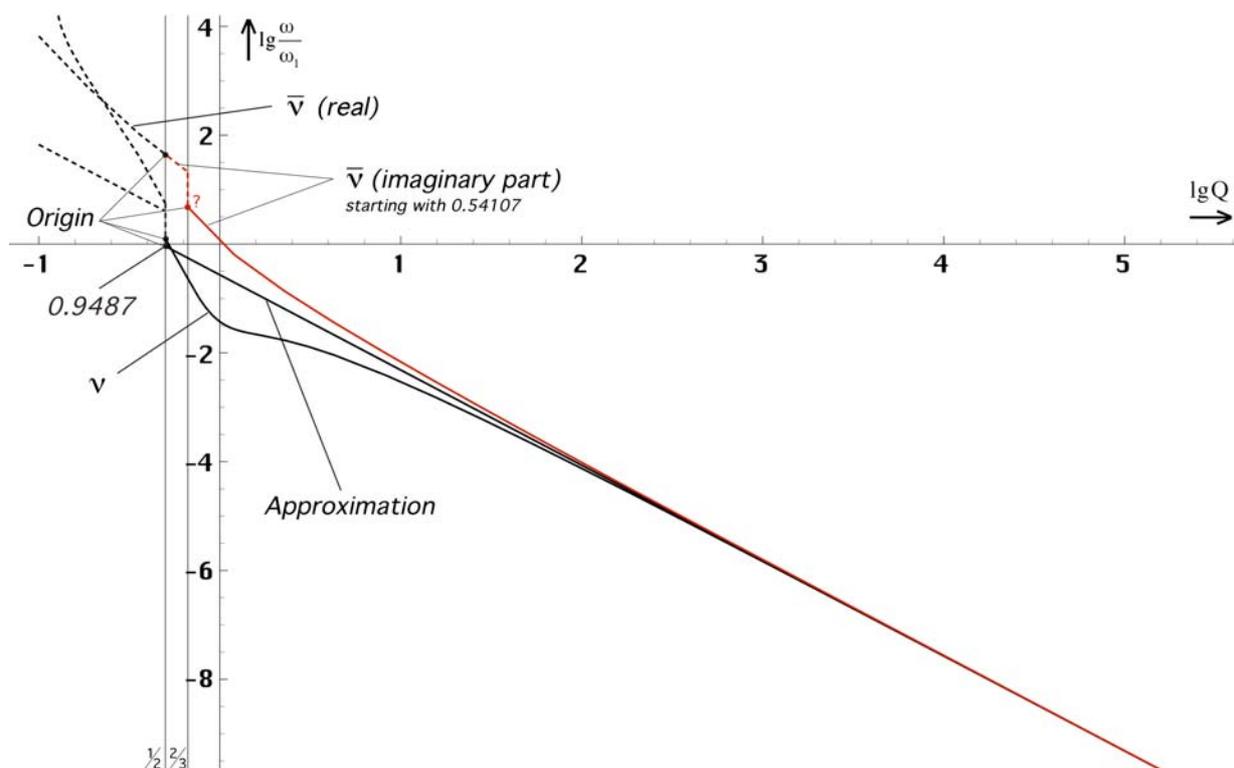


Bild 101
Rotverschiebung von Neutrinos exakt und Näherung

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\left(-\frac{2}{Q^{\frac{1}{2}}} + 1 \right)^4 - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{(1 - 2Q^{-\frac{1}{2}})^4} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } \frac{c_M}{c} \approx 2Q^{-\frac{1}{2}} \quad (517)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{1 - 8Q^{-\frac{1}{2}} + 24Q^{-1} - 32Q^{-\frac{3}{2}} + 16Q^{-2}} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\omega_1}{2} \frac{1}{Q^2} \sqrt{\frac{1}{8} Q^{\frac{1}{2}}} \quad (518)$$

$$\omega \approx \frac{\omega_1}{8} \sqrt{2} Q^{-\frac{3}{4}} Q^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \sqrt{2} H Q^{\frac{1}{4}} \quad \omega \sim Q_0^{-\frac{7}{4}} \quad (519)$$

$$\omega \approx \tilde{\omega} \left(\frac{\tilde{Q}}{Q} \right)^{\frac{7}{4}} \quad \text{für } Q \text{ und } \tilde{Q} \gg 1 \quad \omega \approx 0,282048 \omega_1 Q^{-\frac{7}{4}} \quad \text{für } Q \gg 1 \quad (520)$$

Für Antineutrinos erhält man das selbe Ergebnis. Offenbar sind die Neutrinos mit $Q^{7/4}$ stärker rotverschoben als die Photonen mit nur $Q^{5/4}$. Daher konvergieren sie auch langsamer mit der Näherungsfunktion, wie man es im Bild 101 erkennen kann. Und bei den Antineutrinos gibt es ein ähnliches Problem wie bei den raumartigen Photonen. Während bei letzteren der Zähler des Radikanden von (299) negativ am Bezugspunkt $2/3$ war, der Wurzelausdruck damit imaginär, ist es bei den Antineutrinos genau umgekehrt. Hier ergibt sich für den Bezugspunkt $1/2$ gerade noch eine reelle Lösung. Ab $Q=0,54107$ jedoch werden alle Lösungen imaginär. Auch hier macht sich das nur dann bemerkbar, wenn man die Rotverschiebung gegenüber dem Bezugspunkt $1/2$ bestimmen will. Das Problem läßt sich dann ebenfalls wieder mit einer imaginären Frequenz, diesmal jedoch negativ, beheben:

$$\omega = -j\omega_1 \frac{R(\tilde{Q})}{R(Q)} \sqrt{\frac{\tilde{\beta}_v^4 - 1}{\beta_v^4 - 1}} \approx 18,2787 \omega_1 \frac{1}{Q^2} \frac{0,03086}{\sqrt{1 - \beta_v^4}} \approx \frac{1}{Q^2} \frac{0,56408 \omega_1}{\sqrt{1 - \beta_v^4}} \quad (521)$$

Für Bezüge oberhalb von $Q=0,54107$ hat dies jedoch keinerlei Auswirkungen, da dann sowohl der Zähler als auch der Nenner negativ werden, der Wurzelausdruck wieder reell. Ausdruck (299) kann damit unverändert verwendet werden.

Nun haben wir jedoch nur angenommen, daß der Bezugspunkt bei den Antineutrinos bei 1/2 liegt. Begründet wurde dies durch die besonderen Eigenschaften der raumartigen Photonen, die sich dann als einzige auf 2/3 beziehen würden. Aus Symmetriegründen könnte man aber eher annehmen, daß der Bezugspunkt der „normalen“ Teilchen bei 1/2, der der Antiteilchen jedoch bei 2/3 liegt.

Dann wäre das Problem der Antineutrinos gelöst, (299) gilt immer und unverändert. Auch liegt die Grundfrequenz von Antiteilchen bei $Q < 1$ immer über der Frequenz der Metrik ω_0 (Summenfrequenz) und damit oberhalb der Grenzfrequenz des Subraums, während die der „normalen“ Teilchen immer darunter liegt (Differenzfrequenz). Antiteilchen können damit erst zu einem späteren Zeitpunkt existieren. Dies ist die Symmetriebrechung kurz nach dem Urknall, die dazu führt, daß unser Universum fast nur aus „normaler“ Materie besteht.

Anhand von (513) und (521) sieht man, daß die Grundfrequenz ω_1 , auch wenn sie imaginär ist, doch weit oberhalb der Grenzfrequenz ω_1 des Subraums liegt, was ebenfalls für einen Bezugspunkt 2/3 für die Antineutrinos sprechen würde. Die besonderen Eigenschaften der raumartigen Photonen wären dann dadurch gegeben, daß sie als einzige eine imaginäre Grundfrequenz, eine Polstelle 1. Ordnung und damit keine reelle Verbindung zu ihrem Bezugspunkt haben. Ich favorisiere daher die Version 2/3 für Antineutrinos. Dies hat jedoch keine praktischen Auswirkungen auf die weiteren Betrachtungen.

Der Bezug der Photonen und Neutrinos zu ihrem Ursprung (zeitliche Singularität) würde dem sogenannten Pilotstrahl in manchen nichtlokalen Theorien entsprechen. Der Bezug ist zeitlos, die Wirkung instantan und wurde sogar schon durch Experimente bestätigt. Trennt man ein verschränktes Photonenpaar und konserviert die einzelnen Photonen als stehende Welle, so „fühlen“ die zusammengehörigen Photonen einander auch auf große Entfernung. Damit wäre theoretisch eine überlichtschnelle Kommunikation möglich. Die Verbindung erfolgt über die zeitliche Singularität. Aber wie bekommt man das eine Photon unbeschadet nach α -Centauri?

5.3.2. Ausbreitungsfunktion für Photonen und Neutrinos

Nachdem wir einen Ausflug in die Zukunft der Kommunikation gemacht haben, nun aber weiter im Kontext. Im Laufe des vorangehenden Abschnitts ist ja schon zweimal der Begriff imaginäre Frequenz aufgetreten und die Frage lautet, was bedeutet dies speziell für die Wellenausbreitung von Photonen und Neutrinos? In der Elektrotechnik arbeitet man schon lange mit imaginären und komplexen Frequenzen und hat auch keine Probleme damit.

Betrachten wir aber unsere Ausbreitungsfunktion (305), so erkennt man, daß sie nur einen Spezialfall, nämlich den einer ebenen, linear polarisierten Welle beschreibt, die sich in r-Richtung ausbreitet. Die elektrische und magnetische Feldstärke variiert in x-Richtung. Ausdruck (306) wäre damit für linear polarisierte Photonen anwendbar, nicht jedoch für Neutrinos, denn die sind zirkular polarisiert.

Um alle diese zusätzlichen Parameter abbilden zu können, müssen wir (305) erweitern. Zusätzlich zur Lösung $x(r)$ benötigen wir noch eine Lösung in der dritten Dimension $y(r)$. Die Ausbreitungsfunktion besteht dann nach [26] aus insgesamt 4 Gleichungen (die zweite Lösung läßt sich analog nach (265) herleiten). Es gilt:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}_{x0} &= \hat{\mathbf{E}}_x e^{j\omega t} & \underline{\mathbf{E}}_{y0} &= \hat{\mathbf{E}}_y e^{j\omega t} & \frac{j\omega \underline{\mathbf{u}}_0}{\underline{\gamma}} &= \underline{Z}_F \approx Z_0 & \text{Ausgangsgrößen} \\ & & & & & & (522) \\ \underline{\mathbf{E}}_x &= \underline{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\underline{\gamma} r} & \underline{\mathbf{H}}_y &= \frac{\underline{\gamma}}{j\omega \underline{\mathbf{u}}_0} \underline{\mathbf{E}}_x & \underline{\mathbf{E}}_y &= \underline{\mathbf{E}}_{y0} e^{-\underline{\gamma} r} & \underline{\mathbf{H}}_x &= -\frac{\underline{\gamma}}{j\omega \underline{\mathbf{u}}_0} \underline{\mathbf{E}}_y \end{aligned}$$

Dies ist die allgemeine Ausbreitungsfunktion für eine elliptisch polarisierte ebene Welle im Vakuum. Der Punkt $r=0$ befindet sich hier an der Signalquelle. Beim Bezug auf den Beobachter muß man anstelle von $-\underline{\gamma}$ den Wert $+\underline{\gamma}$ einsetzen und die Korrekturen gemäß Abschnitt 4.3.4.4.6. vornehmen. Bei zirkularer Polarisation gilt $\underline{\mathbf{E}}_{x0} = \underline{\mathbf{E}}_{y0}$, bei linearer Polarisation $\underline{\mathbf{E}}_{y0} = 0$. Die magnetische Feldstärke steht dabei immer senkrecht auf der elektrischen.

In der Näherung sind die meisten natürlich entstandenen Photonen rein linear polarisiert, die Neutrinos verhalten sich dagegen zirkular, sind aber longitudinal polarisiert. Da das jeweilige Feldstärkemaximum bei zirkular polarisierten Wellen nach einer periodischen Funktion zwischen x und y wandert, gibt es gar noch eine zusätzliche Frequenz, die Rotationsfrequenz ω_{HF} . Diese ist abhängig vom Winkel $\delta = \omega_{HF} T_\omega$. Der Ausdruck T_ω ist die Periode der Zeitfunktion. Wie bekommen wir nun aber die Drehung der Polarisationsrichtung in unsere Ausbreitungsfunktion? Dies wird erreicht durch die Einführung komplexer Frequenzen. Dazu definieren wir zuerst vier komplexe Frequenzen, für jedes Teilchen eine:

$$\underline{\omega} = +\tilde{\omega} (\cos\delta \pm j\sin\delta) \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (523)$$

$$\underline{\omega} = -\tilde{\omega} (\cos\delta \pm j\sin\delta) \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (524)$$

$$\underline{\omega} = +\tilde{\omega} (\sin\delta \pm j\cos\delta) \quad \text{Neutrinos} \quad (525)$$

$$\underline{\omega} = -\tilde{\omega} (\sin\delta \pm j\cos\delta) \quad \text{Antineutrinos} \quad (526)$$

$\tilde{\omega}$ ist der Betrag von $\underline{\omega}$. Das obere Vorzeichen gilt für die x-Koordinate, das untere für die y-Koordinate. Die Beziehungen lassen sich nicht direkt aus (479), (494) bzw. (495) herleiten, da diese ein allgemeines Dreieck als Grundlage haben, die komplexe Exponentialfunktion jedoch auf einem rechtwinkligen Dreieck basiert. Anstelle des Real- und Imaginärteils der Frequenz $\underline{\omega}$ verwendet man daher die Projektionen auf x und y, wie es im Bild 104 dargestellt ist.

Für die Aufstellung einer absolut korrekten Ausbreitungsfunktion ist die komplexe e-Funktion nämlich nicht geeignet, dazu benötigt man die Hankelfunktion. Denn in Wirklichkeit gibt es in der Natur gar keine Sinusfunktionen. Diese wären bis zum Zeitpunkt $t = -\infty$ definiert und ein solcher Punkt existiert aus bekannten Gründen nicht. Bei kleinen Werten von Q verbleibt damit ein kleiner Restfehler. Da die Wellenlänge aber durch den Faktor $\Xi(r)$ korrekt berechnet wird, äußert sich dieser nicht in einer falschen Phasenlage, sondern in einem Abdriften der Welle von der Geraden r. Wenn man die Ausbreitungsfunktion aber entlang des Bogens r definiert sieht, spielt diese Abweichung keine Rolle mehr. Die Krümmung von r wird durch äußere Einflüsse bestimmt und ist nicht Bestandteil der Ausbreitungsfunktion.

Die Wellenlänge, die wir messen, ist immer der Realteil. Beim Photon entspricht dieser der eigentlichen Wellenlänge, beim Neutrino der Steigung des „Gewindes“. Der Imaginärteil beim Photon wiederum entspricht einer Drehung der Polarisationsrichtung (es gibt also eigentlich nur zirkular bzw. elliptisch polarisierte Photonen), beim Neutrino ist dieser verknüpft mit dem „Gewindedurchmesser“.

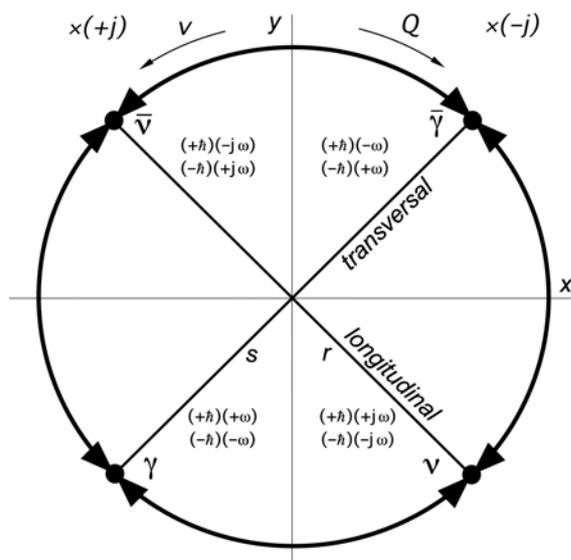


Bild 102
Photonenzirkel, Varianz der Eigenschaften
der Photonarten bei Änderung von Q und v

Die Multiplikation der Zeitfunktion mit $\pm j$ bedeutet damit die Transformation eines Teilchens in ein anderes, d.h., die Eigenschaften der Photonen und Neutrinos ändern sich mit dem Auftreten imaginärer Frequenzen. Dies ist immer dann der Fall, wenn die Güte Q sehr klein oder die Geschwindigkeit v sehr groß wird, d.h. bei sehr starken Gravitationsfeldern, kurz nach dem Urknall oder wenn die Geschwindigkeit nahe bei c liegt ($c = 10^{10} \text{ms}^{-1}$).

Bild 102 zeigt die Lage der einzelnen Teilchen im Phasenraum und die Varianz bei Änderungen von Q und v. Im Prinzip ändern sich aber nicht die Teilchen, sondern die Metrik. Es handelt sich daher nur um ein Beobachtungsphänomen, auch wenn die geänderten Eigenschaften physikalisch real sind.

Der Übergang erfolgt auch nicht allmählich, sondern sprunghaft und das umso steiler, je größer der Wert Q im Bezugssystem des Beobachters ist. Deshalb läßt sich dieser Effekt z.B. bei Be-

schleunigerexperimenten nicht nachweisen, weder heute, noch in ferner Zukunft, da die dazu erforderlichen Energien außerhalb der Verfügbarkeit der Menschheit liegen. Wie spätere Untersuchungen zeigen werden, überschreiten die Teilchen auch bei stärkster Krümmung die Koordinatenachsen x und y nicht bzw. nur unwesentlich. Ein Photon bleibt daher ein Photon, ein Neutrino ein Neutrino usw. Das bedeutet, der Bezugspunkt für das Antineutrino liegt bei $2/3$.

Bei technisch erzeugten zirkular polarisierten Photonen kann die Rotationsfrequenz ω_{HF} , beliebige, auch negative Werte (Rechtsschraube) annehmen, die vom Gutdünken und den Möglichkeiten des Technikers abhängen. Dies geschieht z.B., indem man eine zirkular polarisierte Sendeantenne verwendet oder ein Polarisationsfilter vor einer Lichtquelle mit einer bestimmten Geschwindigkeit rotieren läßt.

Laut [26] läßt sich eine zirkular polarisierte Welle als Überlagerung zweier linear nach x und y polarisierter Wellen darstellen, die die gleiche Amplitude haben und um 90° gegeneinander phasenverschoben sind. Dies ist jedoch der Spezialfall wenn ω_{HF} und ω gleich groß sind. Die Polarisationsrichtung der Welle rotiert dann genau einmal um 2π , wenn sie die Strecke λ zurückgelegt hat. Bei einer davon abweichenden Rotationsfrequenz ist natürlich die Phasenverschiebung kleiner (Photonen) oder auch größer (Neutrinos). Nun haben wir mit (522) bereits so ein Gleichungssystem gefunden, allerdings ohne Phasenverschiebung. Wenn wir diese hinzufügen, hat dies nur Auswirkungen auf die Zeitfunktion, die eigentliche Übertragungsfunktion $e^{-\gamma r}$ bleibt davon unberührt, d.h. es ist der Metrik egal, welche Art von Signal übertragen wird. Allerdings kommen unterschiedliche Funktionen $\Xi(r)$ zur Anwendung.

Wenn wir nur rein linear polarisierte Photonen oder rein longitudinal polarisierte Neutrinos betrachten, wird die Rotationsfrequenz ω_{HF} durch den Winkel δ_N bestimmt. Ausschlaggebend ist der Phasenwinkel, das Argument der komplexen Frequenz $\underline{\omega}$. Es gilt:

$$\delta_{\gamma} = \arctan \frac{+\sin \delta}{+\cos \delta} = + \arctan \tan \delta = + \delta \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (527)$$

$$\delta_{\bar{\gamma}} = \arctan \frac{-\sin \delta}{-\cos \delta} = - \arctan \tan \delta = - \delta \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (528)$$

$$\delta_{\nu} = \arctan \frac{+\cos \delta}{+\sin \delta} = + \arctan \cot \delta = + \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \quad \text{Neutrinos} \quad (529)$$

$$\delta_{\bar{\nu}} = \arctan \frac{-\cos \delta}{-\sin \delta} = - \arctan \cot \delta = - \left(\frac{\pi}{2} - \delta \right) \quad \text{Antineutrinos} \quad (530)$$

Der Term $\pm j\pi/2$ bei den Neutrinos entspricht einer Drehung des Koordinatensystems um $\pm 90^\circ$. Die Übertragungsfunktion (522), ist nämlich so, wie wir sie bisher verwendet haben, für Neutrinos nicht geeignet, da sich die Neutrinos im rechten Winkel zu den Photonen ausbreiten (siehe Bild 94 und 98). Vielmehr beschreibt die allgemeine Ausbreitungsfunktion $e^{j\omega t - \gamma r}$ nur die Wellenausbreitung entlang der reellen Koordinate des Phasenraums. Hierbei repräsentiert der Anteil $j\omega t$ den zeitartigen, der Anteil γr den raumartigen Vektor, die beide senkrecht aufeinander stehen. Um eine Wellenausbreitung entlang der imaginären Koordinate beschreiben zu können, ist obengenannte Drehung erforderlich. Dies geschieht, indem wir die ganze Zeitfunktion mit $\pm j$ multiplizieren. Und diese Multiplikation ergibt genau den Ausdruck $\pm j\pi/2$ im Exponenten. Wir nehmen also einen Übergang von der reellen auf die imaginäre Koordinate vor. Damit erhalten wir für die allgemeine Übertragungsfunktion:

$$\underline{\mathbf{E}}_{x0} = \hat{\mathbf{E}}_x e^{j(\omega t + \delta_N)} \quad \underline{\mathbf{E}}_{y0} = \hat{\mathbf{E}}_y e^{j(\omega t - \delta_N)} \quad \text{Zeitfunktion} \quad (531)$$

$$\underline{\mathbf{E}}_x = \underline{\mathbf{E}}_{x0} e^{-\gamma r} \quad \underline{\mathbf{H}}_y = \frac{1}{Z_F} \underline{\mathbf{E}}_x \quad \underline{\mathbf{E}}_y = \underline{\mathbf{E}}_{y0} e^{-\gamma r} \quad \underline{\mathbf{H}}_x = - \frac{1}{Z_F} \underline{\mathbf{E}}_y$$

Hierbei entspricht ein positiver Wert δ_N einer Linksschraube, ein negativer einer Rechtsschraube bei Ausbreitung in r -Richtung. Bei technischen Photonen addiert sich der künstliche

Rotationsanteil $\delta_K = \omega_{HF} T_\omega$ zum natürlichen δ_N . Wie bereits weiter oben erwähnt, überschreitet δ_N auch bei stärkster Krümmung den Wert $\pi/4$ nicht. Somit können sich die einzelnen Photonarten nicht ineinander umwandeln. Sie zeigen dann nur ähnliche Eigenschaften. Der von Null verschiedene Winkel δ ist auch verantwortlich für das Auftreten einer Drehung der Polarisationsrichtung linear polarisierter Photonen im kosmologischen Zeitrahmen. Dieser Effekt ist aber sehr schwer nachweisbar, da er extrem schwach ist. Nachdem wir die allgemeine Ausbreitungsfunktion aufgestellt haben, wollen wir als nächstes die „normalen“, d.h. zeitartigen Photonen, genauer betrachten.

5.3.2.1. Zeitartige Photonen

Zuerst wollen wir den Ausdruck für das Ausbreitungsmaß $\underline{\gamma}$ noch einmal darstellen. Er unterscheidet sich nicht von dem bereits bekannten Ausdruck (306):

$$\underline{\gamma}_\gamma = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_\gamma(r) \right) \Phi(\omega) \quad \text{Phasenmaß} \quad (532)$$

Das Phasenmaß ist unabhängig von der jeweiligen Koordinate. Interessanterweise tritt der Winkel δ überhaupt nicht in Erscheinung. Verwendet wird nur der Betrag $\tilde{\omega}$ der komplexen Frequenz $\underline{\omega}$. Man beobachtet jedoch immer den Realteil der Wellenlänge. Der Rest ist versteckt in der dritten Dimension γ .

Da die Dämpfung α mit ihrem Anteil $1/R = H/c$ eine Funktion des Abstands r ist, ist sie wegen $r = ct$ auch eine Funktion der Zeit. Und diese Abhängigkeit muß sich auch in der Beziehung $\underline{j\omega}$ an der Signalquelle ausdrücken. Sie ergibt sich durch die Einführung einer zusätzlichen kosmologischen Komponente, der imaginären Frequenz jH . Unter Vernachlässigung der Grenzfrequenz, diese spielt an der Quelle keine Rolle, erhalten wir:

$$j\underline{\omega}_\gamma t = j \left(j\tilde{H} + \tilde{\omega} \Xi_\gamma(t) \right) t = \left(-\tilde{H} + j\tilde{\omega} \Xi_\gamma(t) \right) t \quad \text{Zeitfunktion} \quad (533)$$

Der Anteil $-H$ entspricht der zeitabhängigen Expansion und Dämpfung beim Beobachter am Punkt $r=0$. Dieser unterliegt natürlich wie jeder Punkt im Universum auch einer zeitlichen Rotverschiebung und Dämpfung. Es gibt somit auch am Punkt $r=0$ einen Anteil $\text{div} \mathbf{S}$, der jetzt aber eine Funktion der Zeit ist. Geht man in der Zeit zurück ($-t$), so kommt man auch auf eine größere Amplitude, d.h. zu einem früheren Zeitpunkt erfolgten natürliche Emissionen mit einer höheren Energie. Der Ursprung der zeitartigen Photonen liegt bei $Q=1/2$.

Damit haben wir aber nur die Welleneigenschaften des Photons beschrieben, es verfügt jedoch auch über Teilcheneigenschaften. Ich schließe mich in diesem Punkt der geltenden Lehrmeinung an, mit einer Ausnahme—mit Hilfe von (528) läßt sich nämlich eine von Null verschiedene Ruhmasse des Photons definieren, wie sie von den verschiedensten modernen, lokalen und nichtlokalen Theorien immer wieder gefordert wird. Der Wert stimmt mit den dort gemachten Vorhersagen gut überein¹:

$$\tilde{m}_0 = \frac{\hbar \tilde{H}}{c^2} = 2,73727 \cdot 10^{-69} \text{kg} \quad \text{Ruhmasse Photonen} \quad (534)$$

5.3.2.2. Raumartige Photonen

Als nächstes betrachten wir das Ausbreitungsmaß $\underline{\gamma}$ für raumartige Photonen. Wir gehen zunächst wieder von (306) aus. Da sich raumartige Photonen jedoch entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung (mit $-c$) ausbreiten, müssen wir dies entsprechend berücksichtigen:

$$\underline{\gamma}_{\bar{\gamma}} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{-c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{-c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{-c} \Xi_{\bar{\gamma}}(r) \right) \Phi(\omega) \quad (535)$$

¹ In der Zeit kurz nach dem Urknall und in starken Gravitationsfeldern stellt die Ruhmasse des Photons eine nicht zu vernachlässigende Größe dar.

$$\underline{\gamma}_v = \left(\left(-\frac{\tilde{H}}{c} - \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) - j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_v(r) \right) \Phi(\omega) \quad \text{Ausbreitungsmaß} \quad (536)$$

Da sich raumartige Photonen entgegengesetzt zu zeitartigen bewegen, haben sie als einzige ein negatives Phasenmaß. Besonders interessant ist dies im Zusammenhang mit dem Ausdruck $j\omega t$. Diesen wollen wir als nächstes bestimmen. Da am Ende stehende Wellen herauskommen, kann der Ausdruck $\Psi(\omega)$ für die Grenzfrequenz an der Quelle diesmal nicht vernachlässigt werden:

$$j\omega t = j \left((j\tilde{H} + j\tilde{\omega}_0 \Psi(\omega)) + \tilde{\omega} \Xi_v(t) \right) t \quad (537)$$

$$j\omega t = \left((-\tilde{H} - \tilde{\omega}_0 \Psi(\omega)) + j\tilde{\omega} \Xi_v(t) \right) t \quad \text{Zeitfunktion} \quad (538)$$

Für die Differenz $j\omega t - \underline{\gamma}_v r$ mit $r = (-c+v)t$, $v = \text{const}$ erhalten wir durch Erweitern:

$$j\omega t - \underline{\gamma}_v r = \left(\left(-\frac{\tilde{H}}{c} - \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_v(r) \right) ct - \left(\left(-\frac{\tilde{H}}{c} - \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) - j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_v(r) \right) \frac{\Phi(\omega)}{\Phi(\omega)} (-c+v) t \quad (539)$$

$$j\omega t - \underline{\gamma}_v r = -2 \left(\tilde{H} + \tilde{\omega}_0 \Psi(\omega) \right) t + \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_v(t) \right) vt \quad (540)$$

v ist die Geschwindigkeit, mit der die Welle durch äußeren Anlaß bewegt wird (Translation). Der positive Term \tilde{H}/c beschreibt die Energiezunahme bei Beschleunigung, d.h. die relativistische Massenzunahme als Funktion der Geschwindigkeit sowie die Zunahme der Masse durch Annäherung an die zeitliche Singularität. Die lineare Addition der Geschwindigkeiten ist korrekt, da beide Geschwindigkeiten auf dasselbe System bezogen sind. Setzen wir jetzt $v=0$ ein, so erhalten wir ein rein reelles Ergebnis, das Ausbreitungsmaß hat den Wert Null. Es handelt sich damit um eine stehende Welle:

$$j\omega t - \underline{\gamma}_v r = - \left(2\tilde{H}t + 2\tilde{\omega}_0 t \Psi(\omega) \right) = - \left(\frac{t}{T} + \tilde{Q}_0 \Psi(\omega) \right) \approx - \frac{t}{T} \quad \underline{\gamma}_v = 0, \quad v = 0 \quad (541)$$

Die Näherung gilt für $\omega \ll \omega_0$. Da der Winkel δ nicht berührt ist, bleibt eine eventuelle Drehung der Polarisationsrichtung (Spin?) erhalten. Das Auftreten des doppelten Dämpfungsfaktors $2/R = 1/(R/2)$ läßt weiterhin darauf schließen, daß es sich hierbei um einen raumartigen Vektor handelt.

Damit stellt sich anschließend die Frage nach dem eigentlichen Charakter der raumartigen Photonen. Bisher hatten wir ja angenommen, daß sich die Fermionen irgendwie aus diesen zusammensetzen. Dies scheint aber nicht der Fall zu sein. So handelt es sich bei den raumartigen Photonen um Bosonen mit ganzzahligem Spin, während die Fermionen über einen halbzahligen Spin verfügen. Es ist aber schwer, sich vorzustellen, daß sich Teilchen mit halbzahligen Spin aus solchen mit ganzzahligem Spin zusammensetzen sollen, eher umgekehrt.

Stellen wir weiter einen Vergleich mit den zeitartigen Photonen an, diese vermitteln die elektromagnetische Wechselwirkung der Fermionen untereinander *über* die Metrik, könnten die raumartigen Photonen verantwortlich sein für dieselbe Wechselwirkung der Fermionen *mit* der Metrik. Dazu müssen sich diese jedoch in dieselbe Richtung bewegen wie die Fermionen (raumartiger Vektor) und mit derselben Geschwindigkeit (beliebig). Da die Metrik allgegenwärtig ist, müssen sie auch keine großen Entfernungen zurücklegen (beschränkte Lebensdauer). Die raumartigen Photonen vermitteln damit die metrischen Eigenschaften der Teilchen (Masse, Länge usw.).

Ebenso, wie die zeitartigen Photonen verfügen die raumartigen Photonen natürlich auch über Teilcheneigenschaften. Diese ähneln aber eher denen der DEBROGLIE-Materiewellen als denen der zeitartigen Photonen. Es handelt sich aber dennoch um Bosonen. Der Ursprung der raumartigen Photonen liegt bei $Q=2/3$. Die Ruhmasse entspricht der der zeitartigen Photonen.

5.3.2.3. Neutrinos

Jetzt ist es unumgänglich, die Beziehung auch für Neutrinos und Antineutrinos aufzustellen. Wir erwarten ein Verhalten ähnlich dem der zeitartigen Photonen, da sich Neutrinos ebenfalls mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Beginnen wir zunächst mit den Neutrinos. Wir gehen wieder von Ausdruck (306) aus und betrachten als erstes die Beziehung für $\underline{\gamma}_r$. Diesmal müssen wir jedoch berücksichtigen, daß sich die Welle nicht mit c , sondern mit $j\tilde{c}$, d.h. im rechten Winkel zu den Photonen, ausbreitet und dies im Nenner von $\underline{\gamma}$ entsprechend berücksichtigen. Die Funktion ist dann auch nicht entlang des Bogens r , sondern entlang $j\tilde{r}$ definiert, so daß sich der Faktor j wieder herauskürzt. Definiert man aber r als die tatsächliche Ausbreitungsrichtung der Neutrinos, kann man damit von einem unveränderten Ausdruck für $\underline{\gamma}$ ausgehen:

$$\underline{\gamma}_{\tilde{r}} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{j\tilde{c}} + \frac{\tilde{\omega}_0}{j\tilde{c}} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{j\tilde{c}} \Xi_{\nu}(r) \right) \Phi(\omega) j\tilde{r} \quad (542)$$

$$\underline{\gamma}_{\tilde{r}} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_{\nu}(r) \right) \Phi(\omega) r \quad (543)$$

$$\underline{\gamma}_{\tilde{r}} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_{\nu}(r) \right) \Phi(\omega) \quad \text{Phasenmaß} \quad (544)$$

Damit unterscheidet sich das Phasenmaß mit Ausnahme von Ξ nicht von dem der Photonen. Dies war auch nicht anders zu erwarten, handelt es sich doch um dasselbe Medium. Die Neutrinos unterliegen ebenfalls der Rotverschiebung und Grenzfrequenz.

Da der Winkel δ_{ν} wegen (529) positiv ist, rotieren Neutrinos mathematisch positiv (entgegengesetzt dem Uhrzeiger/Linksschraube) bei Ausbreitung in r -Richtung. Diese Eigenschaft wird auch als (negative) Helizität bezeichnet und ist der Träger der schwachen Ladung. Beim Neutrino hat sie den Wert -1 . Bei Spiegelung in allen Dimensionen bleibt die Helizität erhalten. Damit ist das Neutrino sein eigenes Antiteilchen. Dies trifft übrigens auch auf beide Photonarten zu. Als nächstes wollen wir die Zeitfunktion $j\omega t$ bestimmen:

$$j\omega_{\tilde{r}} t = j \left(j\tilde{H} + \tilde{\omega} \Xi_{\nu}(t) \right) t = \left(-\tilde{H} + j\tilde{\omega} \Xi_{\nu}(t) \right) t \quad \text{Zeitfunktion} \quad (545)$$

Man sieht, an der Signalquelle tritt eine reelle Dämpfung auf. Neutrinos unterliegen genauso der parametrischen Dämpfung, wie die Photonen. Dies sind aber wieder nur die Welleneigenschaften. Die Teilcheneigenschaften sind dadurch gekennzeichnet, daß es sich bei den Neutrinos um Fermionen mit halbzahligen Spin handelt. Dieser scheint daher mit der Lage der Ausbreitungsrichtung im komplexen Phasenraum verknüpft zu sein. Für $j\pi(2n)/2$ ergibt sich ein ganzzahliger Spin, für $j\pi(2n+1)/2$ ein halbzahliger. Das Vorzeichen wird durch den Phasenwinkel $j\pi/2$ bestimmt. Der Ursprung der Neutrinos liegt bei $Q=1/2$. Die Ruhmasse entspricht der der Photonen.

5.3.2.4. Antineutrinos

Wie wir wissen, breiten sich auch Antineutrinos mit Lichtgeschwindigkeit aus, im Gegensatz zu den Neutrinos jedoch entlang der negativen imaginären Achse mit der Geschwindigkeit $-j\tilde{c}$. Es gilt:

$$\underline{\gamma}_{\tilde{r}}(-j\tilde{r}) = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{-j\tilde{c}} + \frac{\tilde{\omega}_0}{-j\tilde{c}} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{-j\tilde{c}} \Xi_{\nu}(r) \right) \Phi(\omega)(-j\tilde{r}) \quad (546)$$

$$\underline{\gamma}_{\tilde{r}}(-j\tilde{r}) = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_{\nu}(r) \right) \Phi(\omega) r \quad (547)$$

$$\underline{\gamma}_{\bar{\nu}} = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_{\bar{\nu}}(r) \right) \Phi(\omega) \quad \text{Phasenmaß} \quad (548)$$

Da es sich bei den Antineutrinos um Antiteilchen handelt, müßten sie eigentlich auch ein negatives Phasenmaß haben. Nach (545) ist dies tatsächlich der Fall, nur ist es negativ imaginär, denn $1/j = -j$. Wir können aber ebenfalls mit demselben Phasenmaß arbeiten wie bei den Photonen, indem wir die Ausbreitungsfunktion wieder entlang des Bogens r definieren, der mit der tatsächlichen Ausbreitungsrichtung zusammenfällt. Die Antineutrinos unterliegen auch wieder der Rotverschiebung und Grenzfrequenz.

Der einzige Unterschied zu den Neutrinos ist das negative Vorzeichen von $\delta_{\bar{\nu}}$, siehe (530). Daher rotieren Antineutrinos mathematisch negativ (in Uhrzeigerrichtung/Rechtsschraube) bei Ausbreitung in r -Richtung. Sie haben eine positive Helizität und die schwache Ladung $+1$. Bei Spiegelung bleibt die Helizität ebenfalls erhalten. Damit ist auch das Antineutrino sein eigenes Antiteilchen, nicht etwa das Neutrino. Dieser Zustand wird als Paritätsverletzung bezeichnet. Als nächstes wollen wir die Zeitfunktion $j\omega t$ bestimmen:

$$j\omega t = j \left(j\tilde{H} + \tilde{\omega} \Xi_{\bar{\nu}}(t) \right) t = \left(-\tilde{H} + j\tilde{\omega} \Xi_{\bar{\nu}}(t) \right) t \quad \text{Zeitfunktion} \quad (549)$$

An der Signalquelle tritt wieder eine reelle Dämpfung auf, Antineutrinos unterliegen der parametrischen Dämpfung wie die Photonen und Neutrinos. Die Teilcheneigenschaften sind folgende: Antineutrinos sind Fermionen mit halbzahligem Spin. Der Phasenwinkel ist $-j\pi/2$. Da es sich um Antiteilchen handelt, liegt der Ursprung bei $Q=2/3$. Die Ruhmasse entspricht ebenfalls der der Photonen.

Damit haben wir ein maximal effizientes erweitertes Photonenmodell aufgestellt, das in der Lage ist, auch das Verhalten der Neutrinos und Antineutrinos widerspruchsfrei zu erklären und das auch unter kosmologischen Gesichtspunkten gültig ist.

Wie man an (538) gut erkennen kann, verfügen Neutrinos und Antineutrinos über wesentlich mehr Freiheitsgrade als das Photon. Dabei ist der Spin durch die Ausbreitungsrichtung, die schwache Ladung durch die Helizität, also δ_N definiert. Zwei Teilcheneigenschaften konnten wir damit zuordnen. Im Abschnitt 5. hatte ich ja schon einmal die Hypothese aufgestellt, daß es sich bei den drei bisher nachgewiesenen Neutrinoarten (ν_e, ν_μ, ν_τ) eigentlich nur um Resonanzen ein und desselben Teilchens handelt, wobei durch die Neutrinooszillation eine Verletzung des PAULI-Prinzips verhindert wird, wenn mehrere Neutrinos gleicher „Bauart“ gleichzeitig eine Elektronenhülle durchqueren.

Wodurch könnte sich nun aber der Unterschied zwischen diesen drei Neutrinoarten, mehr sollen es tatsächlich nicht sein, in der Ausbreitungsfunktion darstellen? Darüber können wir nur Vermutungen anstellen, die da wären:

1. *Es handelt sich doch um unterschiedliche Teilchen.*
2. *Es handelt sich um dasselbe Teilchen mit unterschiedlicher Frequenz/Energie. Neutrinos werden nur bei bestimmten Reaktionen innerhalb eines bestimmten Energiebands erzeugt bzw. resorbiert. Der Wert ist dabei abhängig von der Art der Reaktion.*

Dies ist die einfachste Antwort, würde aber die Neutrinooszillation nicht erklären.

3. *Es handelt sich um unterschiedliche Resonanzen ein und desselben Teilchens. Bei Verletzung des PAULI-Prinzips paßt ein Teilchen seine Energie an das noch freie Energieniveau an. Bei Neutrinos ist dies jedoch nur während des Aufenthalts innerhalb einer Elektronenhülle von Belang.*

Dies wäre eine praktikable Möglichkeit. Sie würde die Neutrinooszillation erklären. Es bleibt aber die Frage offen, inwieweit sich dies in der Ausbreitungsfunktion manifestiert. Möglich wäre ein fester additiver Phasenwinkel zum Winkel δ_N (zusätzliche Phasenverschiebung). Hier wäre z.B. ein Winkel von $2/3\pi$ möglich, um die Anzahl von drei zu garantieren. Eine andere

Möglichkeit wäre ein Vielfaches von 2π . Dann wären aber mehr als 3 Neutrinoarten möglich. Vielleicht sind aber 3 Neutrinoarten ausreichend? Eine weitere Möglichkeit wäre das Auftreten einer positiven oder negativen doppelten Frequenz in der y-Komponente der Wellenfunktion. Die Neutrinowelle setzt sich ja aus zwei Komponenten x und y zusammen. Hat eine davon die doppelte Frequenz, kommt es ebenfalls zu einer periodischen Lösung. Aus dem Korkenzieher wird eine rotierende 8 wie bei den LISSAJOUS-Figuren. Es gibt dabei Parallelen zum Atom, was diese Erklärung durchaus als denkbar erscheinen läßt. Das s-Orbital ist in der Draufsicht ebenfalls kreisförmig, das p-Orbital sieht aus wie eine 8 und es gibt insgesamt vier davon. Eins davon entfällt jedoch, da es in Ausbreitungsrichtung liegt, macht zusammen drei. Und hier noch die letzte Möglichkeit:

4. *Der Unterschied zwischen den drei Neutrinoarten läßt sich nicht in der Ausbreitungsfunktion darstellen.*

Die endgültige Antwort auf diese Frage möchte ich aber offenlassen und mich als nächstes dem nächsten Abschnitt zuwenden.

6. Das spezielle Relativitätsprinzip

Eigentlich sollte dieses Thema erst zu einem späteren Zeitpunkt behandelt werden. Im nächsten Abschnitt werden jedoch Informationen aus der SRT unter Berücksichtigung des in dieser Arbeit behandelten Modells benötigt, so daß ich das Kapitel Geschwindigkeit und Relativität vorgezogen habe.

6.1. Geschwindigkeit und Relativität

Haben wir bisher die zeitliche und räumliche Abhängigkeit verschiedener Größen betrachtet, wird es Zeit, auch die Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zu untersuchen. Weiterhin interessant sind die Beziehungen zu den neu eingeführten Größen Güte Q_0 (Phasenwinkel), ω_0 und κ_0 . Als Ausgangspunkt übernehmen wir die Aussagen der SRT, so wie sie von EINSTEIN aufgestellt wurden. Unter Geschwindigkeit verstehen wir daher die Relativgeschwindigkeit eines Beobachters zu einem anderen (Bezugssystem).

6.1.1. Grundlagen

Wir gehen zunächst von einem gedachten kartesischen Koordinatensystem aus, in dessen Nullpunkt sich der Beobachter befindet. Dieser fällt zusammen mit dem Mittelpunkt des Universums (jeder Punkt, an dem sich ein Beobachter befindet, ist für diesen immer der Mittelpunkt des Universums). Damit ist die Relativgeschwindigkeit des Beobachters nicht nur gegenüber dem Koordinatensystem, sondern auch gegenüber der Metrik gleich Null, nicht jedoch gegenüber dem leeren Raum (c_M). Weiterhin beobachten wir von diesem Punkt aus einen Körper, der sich mit der Relativgeschwindigkeit v gegenüber dem Koordinatenursprung bewegt. Wir messen die Länge x' im Verhältnis zur Ruhelänge x , die wir bestimmten, bevor wir den Körper auf die Geschwindigkeit v beschleunigt haben. Nach der nunmehr schon klassischen Aussage der SRT gilt für die beobachtete Länge (gilt nicht für Wellenlängen!):

$$x' = x \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (550)$$

Diese Beziehung wollen wir grundsätzlich nicht anzweifeln, ist sie doch durch eine Reihe von spektakulären Experimenten bewiesen. Allerdings gelten diese Beweise nicht für den gesamten Bereich $0 \leq v < c$. Die größte bisher erreichte Geschwindigkeit, bei der Messungen vorgenommen wurden liegt derzeit bei ca. $0,997c$ (ich kann mich hier irren) und wurde in einem Teilchenbeschleuniger erreicht. Bei dieser Geschwindigkeit wurden keine Abweichungen gegenüber den Aussagen der SRT, speziell Ausdruck (550) gefunden. Dennoch ist es durchaus denkbar, daß es eine Geschwindigkeit $v < c$ gibt, ab der die Aussagen der klassischen SRT nur

noch beschränkt oder überhaupt nicht mehr gültig sind. Sollten wir im Verlauf der weiteren Betrachtungen zu einer von der SRT abweichenden Aussage kommen, so muß diese bei sehr kleinen Geschwindigkeiten mit den Aussagen der klassischen Mechanik, im Bereich darüber bis zu $0,997c$ jedoch mit den Aussagen der SRT und den bisher gewonnenen Beobachtungsergebnissen übereinstimmen.

LANCZOS geht in [1] davon aus, daß sich die relativistischen Effekte erst aus der Existenz des metrischen Gitters ergeben, wobei die fermionischen Teilchen selbst eigenständige kugelsymmetrische Lösungen der Feldgleichungen darstellen und unabhängig vom metrischen Gitter existieren. Wir beobachten diese jedoch nur über einen Umweg mittels Bosonen (Photonen), die sich über das metrische Gitter ausbreiten, welches sich selbst wie eine Linse mit der Auflösung $\hbar/2$ (Unbestimmtheit) verhält.

Wenn sich unser Teilchen nun gegenüber der Metrik und damit gegenüber dem Beobachter bewegt, kommt es zum Auftreten einer bestimmten Differenzfrequenz ω , die von der Geschwindigkeit, mit der sich das Teilchen durch unser "Kristall" bewegt, abhängig ist. Das Teilchen verfügt ja gleichzeitig auch über Welleneigenschaften. Die Frequenz ist abhängig davon, wieviele MINKOWSKISCHE Linienelemente das Teilchen bei seiner Bewegung innerhalb eines bestimmten Zeitraums "streift" und damit auch abhängig von der lokalen MLE-Dichte (Weltalter, Gravitationspotential).

Nachdem ich den Vortrag von Prof. LANCZOS gelesen hatte, bekam ich anläßlich einer Physikvorlesung (diese liegt nun schon eine Weile zurück und ich möchte hiermit dem Dozenten Herrn Dr. Propp noch einmal herzlich danken) eine wesentliche Anregung zu diesem Modell. Thema dieser Vorlesung war der mechanische Oszillator.

Bei dem mechanischen Oszillator handelt es sich um ein fremderregtes System mit der Differentialgleichung [5]:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (551)$$

x ist die Auslenkung, ω_0 die Resonanzfrequenz, ω die Frequenz der anregenden Schwingung, F_0 die Kraft und m die Masse des Oszillators. Der Quotient F_0/m entspricht übrigens auch der Gravitationsfeldstärke. Der Koeffizient k ist ein Maß für die Dämpfung. Diese ist im allgemeinen verschwindend klein. Interessanterweise besteht eine Ähnlichkeit mit (76). Ein Vergleich führt zu der wesentlichen Aussage $k \hat{=} H$. Für die Amplitude A gilt dann:

$$A = \frac{F_0}{m} \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2 \omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (552)$$

Mit $k \rightarrow 0$ erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$A = \frac{F_0}{m} (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1} = \frac{F_0 \omega_0^2}{m} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} = A_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1} \quad (553)$$

Wenn man das Ergebnis mit (550) vergleicht, so sind beide Ausdrücke bis auf den Exponenten identisch, d.h. es besteht eine Ähnlichkeit zwischen dem Verhalten des mechanischen Oszillators und der relativistischen Massenzunahme. Das Interessante ist vor allem die Tatsache, daß die Amplitude bei einer Anregung mit einer Frequenz nahe Null gleich 1 ist — im Gegensatz zum elektrischen Schwingkreis — hier ist die Amplitude gleich Null, da das Signal durch die Induktivität kurzgeschlossen wird. Eine Ausnahme bildet das Modell nach Bild 10 mit Einkopplung über dem Kondensator. Bei Annäherung an die Resonanzfrequenz tritt eine Amplitudenerhöhung auf, die bei verschwindender Dämpfung gegen unendlich geht — wiederum genau wie bei der relativistischen Massenzunahme. Das Verhalten oberhalb ω_0 weicht dann jedoch ab: es tritt ein Phasensprung um $-\pi$ auf, während die Lösung (550) imaginär wird. Dies ist nicht weiter verwunderlich, im einen Fall handelt es sich ja um eine Auslenkung (Energie), im anderen um eine Länge, die man nicht ohne weiteres miteinander vergleichen kann.

6.1.2. Geschwindigkeit und Länge

6.1.2.1. Beziehungen zwischen Länge, Geschwindigkeit und Güte

Ich habe mich daher gefragt, ob sich ein Teilchen bei Beschleunigung nicht ebenfalls ähnlich wie ein mechanischer Oszillator verhalten könnte, wobei die Masse proportional zur Amplitude der fremderregten Eigenschwingung (DEBROGLIE-Materiewelle) ist. Dasselbe müßte analog dann auch für Größen wie Länge und Zeit gelten. Wenn ω_0 die Frequenz des MLE am Ort des Beobachters ist, ergibt sich die von der Geschwindigkeit abhängige Frequenz ω am Ort des Teilchens zu $\omega = v/r_0$. Nun müssen wir nur noch in (553) einsetzen und erhalten den klassischen Ausdruck der SRT für Wellenlängen, jedoch im Quadrat ($\omega_0 r_0 = c$):

$$A = A_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} = A_0 \left(1 - \frac{v^2}{\omega_0^2 r_0^2}\right)^{-1} = A_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (554)$$

6.1.2.1.1. Näherungslösungen

Der relativistische Dehnungsfaktor β ergibt sich offenbar aus dem Kehrwert der Wurzel des Klammerausdrucks von (554). Weiterhin benötigen wir einen Ausdruck, in dem die Geschwindigkeit mit der Güte verknüpft ist. Dies ist jedoch nicht so einfach, wie es zunächst erscheint. Daher wollen wir zunächst versuchen, eine oder auch mehrere Näherungslösungen dafür zu ermitteln. Dazu wollen wir die aus [5] entnommenen Ausdrücke (552) und (553) nicht einfach übernehmen, sondern untersuchen, wie man überhaupt darauf kommt. Wir gehen zunächst von (551) aus und vergleichen mit Gleichung (76). Ausdruck (551) entspricht dann der inhomogenen Differentialgleichung von (76), wenn man $x = \varphi_0$ setzt. Es gilt:

$$\ddot{\varphi}_0 + 2H\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = \dot{u}_a \cos \omega t \quad (555)$$

Zur Ermittlung der ersten Näherungslösung wollen wir zunächst die HUBBLE-Konstante ganz ignorieren, da sie extrem klein ist ($H=0$). Weiterhin gilt $u_a = d\varphi/dt = -\omega_0 \varphi$ und $d^2\varphi/dt^2 = \omega_0^2 \varphi$. Die Kreisfrequenz ω_0 wirkt also wie ein Differentialoperator. Gesucht ist der Amplitudengang $A(\omega)$. Nach [5] erhalten wir ihn durch Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (556). Zur Lösung benutzen wir die LAPLACE-Transformation:

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = \omega_0^2 \varphi_a \cos \omega t \quad (556)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2 \varphi_0 - p f_0^{(0)} - f_0^{(1)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad f_0^{(1)} = 0 \quad (557)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2 \varphi_0 \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (558)$$

Nach Einsetzen in (556) erhalten wir folgende charakteristische Gleichung:

$$p^2 \varphi_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad \varphi_0 (p^2 + \omega_0^2) = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (559)$$

$$\varphi_0(p) = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{(p^2 + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)} \quad \varphi_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\varphi_0(p)\} \quad (560)$$

$$\varphi_0(t) = \varphi_a \omega_0^2 \frac{\cos \omega t - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2} = 2\varphi_a \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \quad (561)$$

Die Funktion (561) sieht aus wie ein 100% amplitudenmoduliertes Signal, wobei die Hüllkurve sowohl im positiven als auch im negativen Bereich der Frequenz ω folgt. Dabei kommt es zu Abschnürungen, in denen die Amplitude gleich Null ist. Die Energie ist damit nicht gleichmäßig über den Weg verteilt. Vielmehr erfolgt der Transport in "Paketen", den Photonen (Teilchen). Da der Wert der Summe, aber auch der Differenz zweier Cosinusfunktionen immer im Bereich $-2 \leq y \leq 2$ liegt und der Wert φ_a keine Rolle spielt (für $\omega=0$ erhalten wir einen Wert von 1), gilt allgemein für die Amplitude und den relativistischen Dehnungsfaktor β :

$$\hat{\varphi}_0 = \varphi_a \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} = \varphi_a \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad \beta = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (562)$$

Eine weitere Ausnahme liegt im Resonanzfall $\omega = \omega_0$ vor. Hier ist die Funktion eigentlich nicht definiert ($0/0$). Der Wert strebt jedoch gegen Unendlich. Damit entspricht Ausdruck (562) der klassischen EINSTEINschen Lösung. Diese kann nach unserem Modell jedoch nur in einem verlustfreien Medium gelten. Ein Ausdruck für die Güte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit kann hier noch nicht angegeben werden, da die Funktion die Güte nicht enthält.

Wir haben eine Ergebnis gefunden, das auf der Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (556) beruht. Wir wollen aber untersuchen, ob es nicht noch eine andere Möglichkeit gibt, zum selben Ergebnis zu kommen. Der Grund ist, daß sich bei der Suche nach einer exakten Lösung erhebliche mathematische Schwierigkeiten einstellen werden, wenn wir versuchen, die inhomogene Differentialgleichung zu lösen.

Die zweite Lösungsmethode haben wir bereits im Abschnitt 4.3.2. angewandt. Sie beruht auf der Lösung der homogenen Differentialgleichung mit Hilfe der LAPLACE-Transformation mit anschließendem Übergang $p \rightarrow j\omega$, wobei eine Rücktransformation \mathcal{L}^{-1} nicht notwendig ist. Wir gehen also von (543) aus. Der Ansatz:

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = 0 \quad \rightarrow \quad p^2 \varphi_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = 0 \quad (563)$$

(563) führt zunächst nur zu dem trivialen Ergebnis $\varphi_0 = 0$. Wir müssen also die Anfangsbedingungen ändern und zwar folgendermaßen:

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2 \varphi_0 - p f_0^{(0)} - f_0^{(1)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad f_0^{(1)} = \omega_0^2 \varphi_a \quad (564)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2 \varphi_0 - \omega_0^2 \varphi_a \quad (565)$$

$$p^2 \varphi_0 + \omega_0^2 \varphi_0 = \omega_0^2 \varphi_a \quad \varphi_0 = \varphi_a \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} \quad (566)$$

$$G(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + \omega_0^2} \quad G(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \quad (567)$$

$$A(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1} \quad B(\omega) = \begin{cases} 0 & -\omega_0 < \omega < \omega_0 \\ \pi & \omega < -\omega_0, \omega > \omega_0 \end{cases} \quad (568)$$

$$\beta(v) = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \phi(v) = \begin{cases} 0 & -c < v < c \\ \frac{\pi}{2} & v < -c, v > c \end{cases} \quad (569)$$

Beide Lösungen sind also identisch und wir können auch einen Ausdruck für den Phasenwinkel ϕ angeben. Das zuletzt angewandte Verfahren hat den Vorteil einer einfacheren Berechnung. Eine Funktion $Q = f(v)$ können wir jedoch immer noch nicht angeben. Dazu müssen wir

die HUBBLE-Konstante mit in die Betrachtung einbeziehen. Zur Sicherheit wenden wir nochmals beide Lösungsverfahren an. Für die zweite Näherung betrachten wir H als Konstante, da sich der Wert zum heutigen Zeitpunkt so gut wie nicht ändert (adiabatisches Prinzip). Dann entfällt aber der Faktor 2 vor φ_0 . Wenn wir H als konstant annehmen, wird nämlich der Expansionsanteil r_0/r_0 gleich Null, d.h. der Faktor ist gleich 1 (siehe(72)). Es gilt:

$$\ddot{\varphi}_0 + H\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = \omega_0^2\varphi_a \cos\omega t \quad (570)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\varphi}_0\} = p\varphi_0 - f_0^{(0)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad (571)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\varphi}_0\} = p\varphi_0 \quad (572)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2\varphi_0 - p f_0^{(0)} - f_0^{(1)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad f_0^{(1)} = 0 \quad (573)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2\varphi_0 \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (574)$$

Nach Einsetzen in (570) erhalten wir folgende charakteristische Gleichung:

$$\varphi_0 p^2 + H\varphi_0 p + \omega_0^2\varphi_0 = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (575)$$

$$\varphi_0 (p^2 + Hp + \omega_0^2) = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{p^2 + \omega^2} \quad (576)$$

$$\varphi_0 = \varphi_a \omega_0^2 \frac{p}{(p^2 + Hp + \omega_0^2)(p^2 + \omega^2)} \quad (577)$$

Hier enden schon unsere Bemühungen, denn dieser Ausdruck ist nicht mehr in der Korrespondenztabelle enthalten und auch der BRONSTEIN hilft nicht weiter. Eine Lösung erhält man nach der Zerlegung in Partialbrüche. Dies wollen wir jedoch nicht weiter verfolgen und uns sofort dem zweiten Verfahren zuwenden:

$$\ddot{\varphi}_0 + H\dot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0 \quad (578)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\varphi}_0\} = p\varphi_0 - f_0^{(0)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad (579)$$

$$\mathcal{L}\{\dot{\varphi}_0\} = p\varphi_0 \quad (580)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2\varphi_0 - p f_0^{(0)} - f_0^{(1)} \quad f_0^{(0)} = 0 \quad f_0^{(1)} = \omega_0^2\varphi_a \quad (581)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{\varphi}_0\} = p^2\varphi_0 - \omega_0^2\varphi_a \quad (582)$$

Wir setzen wieder in (570) ein und erhalten schließlich:

$$\varphi_0 p^2 + H\varphi_0 p + \omega_0^2\varphi_0 = \varphi_a \omega_0^2 \quad \varphi_0 (p^2 + Hp + \omega_0^2) = \varphi_a \omega_0^2 \quad (583)$$

$$G(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + Hp + \omega_0^2} \quad G(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + jH\omega} \quad (584)$$

$$G(j\omega) = \omega_0^2 \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) - jH\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + H^2\omega^2} \quad (585)$$

$$A(\omega) = \omega_0^2 \frac{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + H^2\omega^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + H^2\omega^2} = \omega_0^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + H^2\omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (586)$$

Bis auf den Faktor 4 entspricht dies genau dem in [5] angegebenen Ausdruck (552). Wir haben also richtig gerechnet. Der Ausdruck (586) kann aber noch weiter umgewandelt werden ($HQ_0 = \omega_0$):

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(H\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} = \frac{\frac{\omega_0^2}{H\omega}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{H\omega}\right)^2}} \quad (587)$$

$$A(\omega) = \frac{\tilde{Q}_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0\omega}}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0\omega}\right)^2}} = \frac{\tilde{Q}_0 \frac{\omega_0}{\omega}}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (588)$$

$$A(\omega) = \frac{c}{v} \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 V^2}} = \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\frac{v^2}{c^2} + \tilde{Q}_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}} \quad \text{mit } V = \frac{v}{c} - \frac{c}{v} \quad (589)$$

Hierbei ist (Großbuchstabe) V die Verstimmung (380), wie wir sie aus der Elektrotechnik kennen. Nach Substitution von ω durch v erhalten wir für den Dehnungsfaktor β :

$$\beta(v) = \frac{\sqrt{\tilde{Q}_0}}{\sqrt[4]{\frac{v^2}{c^2} + \tilde{Q}_0^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2}} \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } Q_0 \gg 1 \quad (590)$$

Die Näherung (590) ist identisch mit dem EINSTEINschen Ausdruck und mit unserer ersten Näherung. Wir können auch einen Phasenwinkel angeben. Ausgehend von (585) gilt:

$$B(\omega) = -\arctan \frac{\omega H}{(\omega_0^2 - \omega^2)} = \arctan \frac{1}{Q_0} \frac{\omega \omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)} = \arctan \frac{1}{Q_0 V} \quad (591)$$

$$B(\omega) = -\pi + \operatorname{arccot}(Q_0 V) = -\frac{\pi}{2} - \arctan(Q_0 V) \quad (592)$$

$$\phi(v) = \frac{B(\omega)}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arctan(Q_0 V) \stackrel{?}{=} \alpha - \frac{\pi}{2} \quad (593)$$

Der letzte Ausdruck ist sehr interessant, könnte er uns doch eine Beziehung zwischen Güte, Geschwindigkeit und dem Winkel α angeben. Leider funktioniert dies nicht, da beide Funktionen einen unterschiedlichen Wertebereich haben. So überstreicht ϕ den Bereich $-\pi/4 \dots -3/4\pi$, die Funktion $\alpha - \pi/2$ jedoch den Bereich $-\pi/4 \dots -\pi$.

Wenn wir die Güte bestimmen wollen, müssen wir einen anderen Ansatz machen. Die Substitution $\omega = v/r_0$ gilt für den bewegten Körper. Tatsächlich haben wir doch einen Ausdruck für den relativistischen Dehnungsfaktor β erhalten. Was wir aber jetzt suchen, ist eine Beziehung für die Güte.

Wenn wir von der Güte sprechen, meinen wir damit die Güte der Metrik an der Stelle des bewegten Körpers und für diese gilt $\omega = \omega_0 + v/r_0$. Dabei machen wir uns die Tatsache zunutze, daß die Resonanzüberhöhung immer genau dem Wert der Güte entspricht. Bei Ausdruck (589) hat die Überhöhung im Fall $v=0$ den Wert 1 und Q_0 für $v=c$, genau umgekehrt wie bei der Metrik. Hier beträgt die Güte Q_0 für $v=0$ und 1 für $v=c$. Wir haben also gute Gründe, anzunehmen, daß die Güte einer Art gespiegelten Funktion (589) folgt. Diese erhalten wir, wenn wir den Ausdruck $\omega = \omega_0 - v/r_0$ in (584) einsetzen zu:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \frac{\frac{1}{1 - \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} - \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right)^2}} \quad \text{Gespiegelte Funktion} \quad (594)$$

Leider erfüllt diese Funktion nicht die an sie gestellten Anforderungen, da sie nicht symmetrisch in Bezug auf die x-Achse ist. So beträgt der Wert $Q_0(-c) = 1/3$, der Wert $Q_0(+c) = 1$. Das umgekehrte Verhältnis liegt bei der verschobenen Funktion (595) mit $\omega = \omega_0 + v/r_0$ vor:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \frac{\frac{1}{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} - \left(1 + \frac{v}{c}\right) \right)^2}} \quad \text{Verschobene Funktion} \quad (595)$$

Diese ist damit ebenfalls nicht geeignet. Nun wissen wir aber, daß bei der Multiplikation zweier Frequenzen gleichzeitig die Summen-, als auch die Differenzfrequenz auftritt. Dieser Ansatz führt uns dann zur richtigen Lösung:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \frac{\frac{1}{1 + \frac{v}{c}}}{\sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2 \left(\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} - \left(1 - \frac{v}{c}\right) \right)^2}} = \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 + \tilde{Q}_0^2 \frac{v^2}{c^2}}} \quad (596)$$

Mit der Näherungslösung:

$$Q_0 \approx \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{c^2}{v^2} \quad \text{für } Q_0 \gg 1 \quad (597)$$

Für $v=0$ hat (597) eine unendliche Lösung, was nicht ganz den Beobachtungen entspricht. Setzen wir jedoch die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik c_M als Grundgeschwindigkeit ein, es gilt dann $v=c_M+v_M$, so kommen wir für $v_M=0$ exakt auf die lokale Güte:

$$Q_0 \approx \frac{c^2}{c_M^2} \approx \sqrt{Q_0^2} \quad \text{wegen (224)} \quad (598)$$

Bei der Geschwindigkeit müssen wir hier also den raumartigen Vektor der Metrik addieren. Es handelt sich somit um eine Näherungslösung mit Definition der Geschwindigkeit gegenüber dem leeren Raum (absolute Geschwindigkeit). Dies entspricht einem gedachten kartesischen Koordinatensystem, das in der relativistischen Physik normalerweise keine Bedeutung hat, mit Ausnahme bei der Definition der Metrik selbst. Im Gegensatz dazu ist die Geschwindigkeit in (596) gegenüber der Metrik definiert (Bezugssystem). In diesem Fall müssen wir den metrischen Vektor c_M *nicht* addieren, da dieser bereits bei der Festlegung des Bezugssystems (Q_0) berücksichtigt wurde. Es gilt folgende Grundregel: Immer wenn die Funktion die Güte, r_0 oder ω_0 enthält, muß c_M nicht addiert werden. Die Begründung folgt später.

Sowohl bei der Funktion der Güte nach der Geschwindigkeit (596) als auch beim Ausdruck für β (590) handelt es sich um Näherungslösungen, da hier die Winkelverhältnisse nicht berücksichtigt sind. Eine wichtige Frage ist auch die nach dem physikalischen Inhalt von (596). Der Ausdruck beschreibt die Güte, die ein Beobachter bei einem gegenüber seinem lokalen Bezugssystem bewegten Körper messen würde. Diese ist abhängig von der Geschwindigkeit v . Für eine exakte Lösung hat (596) jedoch keine Bedeutung.

Der Verlauf beider Funktionen ist im Bild 103 dargestellt, wobei in (590) probeweise c_M addiert wurde. Als Vergleich ist auch die klassische EINSTEINSche Lösung einschließlich des imaginären Astes und der Verlauf von Q_0 zu sehen. Bei kleinen Güten kommt es zu einer Unsymmetrie der Funktion (596) um den Punkt Null herum. Man erkennt deutlich, daß das Maximum in den negativen Bereich verschoben ist und mit dem Minimum des Dehnungsfaktors zusammenfällt, jedoch nicht ganz exakt. Dies ist nicht etwa ein Schönheitsfehler, sondern der Übergang zur allgemeinen Relativitätstheorie. Im starken Gravitationsfeld ist der Dehnungsfaktor bei festgelegter Güte Q_0 und $v=0$ automatisch kleiner Eins. Dies ist die Wirkung der nicht verschwindenden Grundkrümmung im starken Gravitationsfeld, d.h. eine Länge erscheint schon bei Nullgeschwindigkeit kleiner als sie in Wirklichkeit ist. Praktischerweise sollte das Minimum des relativistischen Dehnungsfaktors mit dem Maximum von Q_0 zusammenfallen. Mit der Addition von c_M ist dies nur für größere Güten gewährleistet. Dies war auch zu erwarten, verstößt es doch gegen die oben angegebene Grundregel, da der Ausdruck Q_0 enthält.

Wir wollen daher den Verschiebungswert bestimmen, der notwendig ist, damit Minimum und Maximum zusammenfallen. Die zu verschiebende Funktion ist (590). Dies ergibt sich daraus, daß wir den Wert Q_0 für $v=0$ festgelegt haben. Daher können wir natürlich nicht plötzlich eine vom festgelegten Wert abweichende Güte für $v=0$ als Ergebnis erhalten. Eine verschobene Funktion (590) erfüllt ebenfalls die Differentialgleichung (578).

Wir berechnen zuerst die erste Ableitung von (589) und (596) und setzen diese gleich Null. Um die Rechnung zu vereinfachen, berechnen wir jedoch nicht die Ableitung der Funktion selbst, sondern von deren Quadrat. *Ausnahmsweise* setzen wir hier einmal $c=1$. Dies soll jedoch nicht zur Gewohnheit werden:

$$\beta^2 = \tilde{Q}_0^2 \frac{4\tilde{Q}_0^2 v(1-v^2) - 2v}{(v^2 + \tilde{Q}_0^2(1-v^2))^2} = 0 \quad 2\tilde{Q}_0^2 v(1-v^2) - v = 0 \quad (599)$$

$$v^3 - v \left(1 - \frac{1}{2\tilde{Q}_0^2} \right) = 0 \quad v_1 = 0 \text{ Minimum} \quad v_{2,3} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2\tilde{Q}_0^2}} \text{ Maximum} \quad (600)$$

$$Q_0' = -\tilde{Q}_0^2 \frac{2\tilde{Q}_0^2 v^2 + 2(1+v)}{(\tilde{Q}_0^2 v^2 + (1+v)^2)^2} = 0 \quad \tilde{Q}_0^2 v + (1+v) = 0 \quad (601)$$

$$v(1 + \tilde{Q}_0^2) + 1 = 0 \quad v = -\frac{1}{1 + \tilde{Q}_0^2} \quad \text{Maximum} \quad (602)$$

Damit gilt folgende Substitution für (590) mit $c \neq 1$:

$$\frac{v}{c} = \frac{v_M}{c} + \frac{1}{1 + \tilde{Q}_0^2} \quad (603)$$

Für die Extremwerte gilt unter Berücksichtigung von (603) mit $v_M = 0$ bzw. $v = v_{\max}$:

$$Q(0) = \tilde{Q}_0 \quad Q_{\max} = \sqrt{1 + \tilde{Q}_0^2} \quad (604)$$

$$\beta(0) = \frac{\sqrt{\tilde{Q}_0}}{\sqrt[4]{\frac{1}{(1 + \tilde{Q}_0^2)^2} + \tilde{Q}_0^2 \left(1 - \frac{1}{(1 + \tilde{Q}_0^2)^2}\right)^2}} \quad \beta_{\max} = \sqrt{\tilde{Q}_0} \quad (605)$$

Trotzdem handelt es sich bei (590) immer noch um eine Näherung. Gleichzeitig haben wir auch das Geheimnis negativer Geschwindigkeiten enthüllt. Die SRT kennt ja im eigentlichen Sinne nur positive Geschwindigkeiten. Dies stimmt auch insofern mit unserem Modell überein, daß sich ein Beobachter immer im Mittelpunkt des Universums befindet.

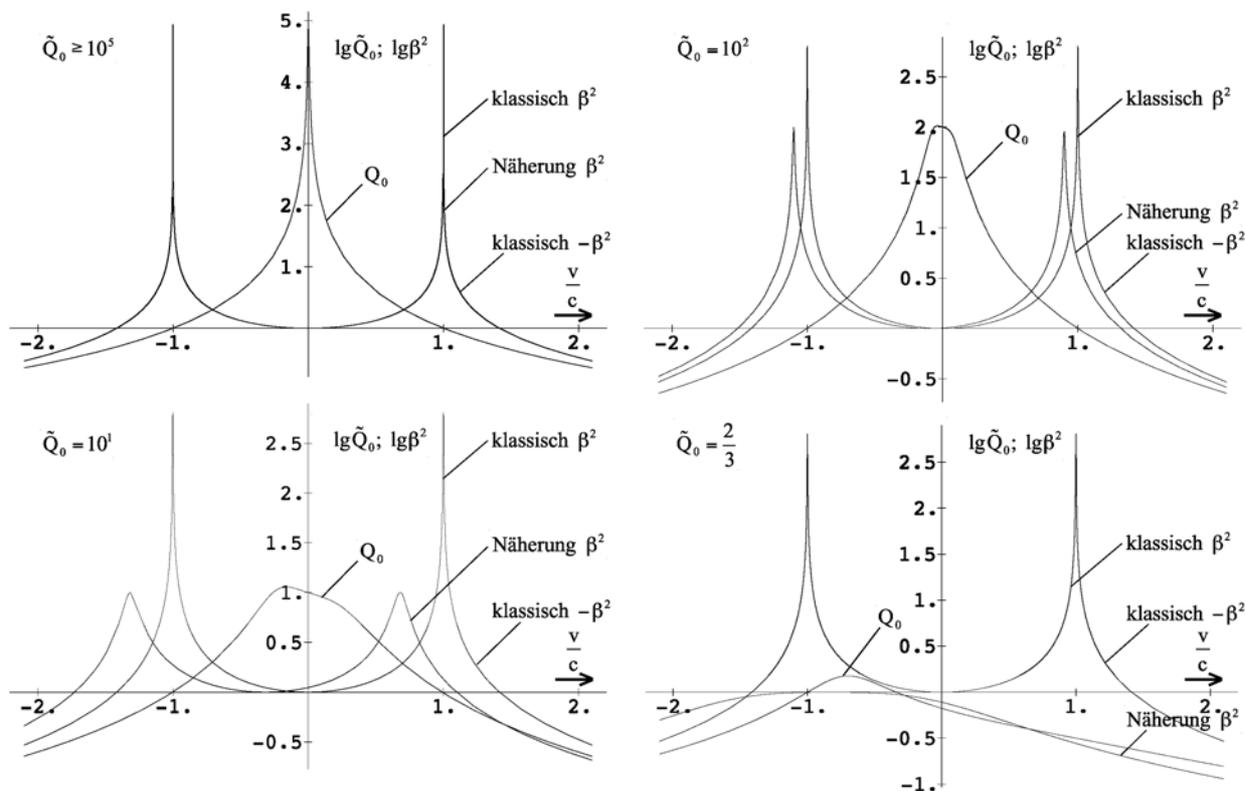


Bild 103
Relativistischer Dehnungsfaktor β und
Güte als Funktion der Geschwindigkeit

Ganz gleich, in welche Richtung er sich bewegt, bewegt er sich immer auf den Partikelhorizont cT zu (mit positiver Geschwindigkeit). Die klassischen EINSTEINSchen Ausdrücke ergeben daher dasselbe Ergebnis, auch wenn man negative Geschwindigkeiten einsetzt. Wenn nun aber jede Geschwindigkeit immer als Summe des metrischen und des Geschwindigkeitsvektors, also insgesamt gegenüber dem leeren Raum definiert ist, kommt es bei starken Gravitationsfeldern (kleinen Güten) zu einem Punkt, an dem diese Symmetrie gebrochen ist, da sich der metrische Vektor nicht mehr vernachlässigen läßt. Offensichtlich ist es ja auch nicht egal, ob man sich auf ein schwarzes Loch zu bewegt oder sich von ihm entfernt.

Nun haben wir mit (404) und (596) zwei voneinander unabhängige Beziehungen gefunden, die Abhängigkeit der Güte einerseits von Zeit und Raum, andererseits von der Geschwindigkeit beschreiben. Die Aufgabe besteht darin, beide Beziehungen zusammenzuführen. Beginnen wir mit Ausdruck (404). Er lautet folgendermaßen:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \tag{606}$$

Hier sind gleich drei Ausgangsgrößen (Q_0 , T und R) enthalten, die alle fest miteinander verkoppelt sind. Wenn wir diesen Ausdruck (596) zusammenführen wollen, ist es zweckmäßig, die Anzahl auf Eins zu reduzieren. Wir wollen daher T und R substituieren, so daß am Ende nur noch Q_0 und echte Konstanten in der Gleichung auftreten. Betrachten wir dazu noch einmal die Güte Q_0 . Diese ist von zentraler Bedeutung in diesem Modell, da sie fast sämtliche Maßstäbe im Universum beeinflusst. In Tabelle 5 sind die wichtigsten Beziehungen zwischen den Größen des leeren Raums (linke Spalte, alles echte Konstanten), des Mikrokosmos (mittlere Spalte, Variablen) und des Makrokosmos (rechte Spalte, Variablen) dargestellt (nicht vollständig).

r_1	— [$\times Q_0$] \rightarrow	r_0	— [$\times Q_0$] \rightarrow	R	Elementarlänge/Weltradius
t_1	— [$\times Q_0$] \rightarrow	t_0	— [$\times Q_0$] \rightarrow	T	Kleinste Zeiteinheit/Weltalter
ω_1	— [$: Q_0$] \rightarrow	ω_0	— [$: Q_0$] \rightarrow	H	Frequenz MLE/HUBBLE-Konstante
$2\kappa_0$	— [$: Q_0$] — — — — — \rightarrow [$: Q_0$] \rightarrow			κ_{OR}	Spezif. Leitfähigkeit Vakuum/Metrik
???	— [$: Q_0$] \rightarrow	\hbar_1	— [$: Q_0$] \rightarrow	\hbar	PLANCKSches Wirkungsquantum

Tabelle 5
Beziehungen zwischen den Grundgrößen
des Raums und des Mikro- und Makrokosmos

Unser Modell verfügt damit über die wesentliche Eigenschaft der logarithmischen Periodizität. Unter Anwendung der in der Tabelle angegebenen Beziehungen können wir Ausdruck (606) dann folgendermaßen umformen:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \left(\left(1 + \frac{1}{\tilde{Q}_0^2} \frac{t}{t_1} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\tilde{Q}_0^2} \frac{r}{r_1} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad \text{mit} \quad t_1 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \quad \text{und} \quad r_1 = \frac{1}{\kappa_0 Z_0} \tag{607}$$

Jetzt können wir diesen Ausdruck mit (596) zusammenführen. Dafür gibt es grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Die erste beschreibt den Fall, daß die Geschwindigkeit auf den Koordinatenursprung definiert ist. Dabei ist zu beachten, daß die Grundgüte in (607) abhängig ist vom Ergebnis von (596) und umgekehrt. Es besteht also eine gegenseitige Abhängigkeit:

$$Q_0 = \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 + \tilde{Q}_0^2 \frac{v^2}{c^2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{Q_0^2} \frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{Q_0^2} \frac{2}{r_1} \int v dt\right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (608)$$

Eine Lösung ist möglich, wenn v klein gegenüber c und t klein gegenüber T und r klein gegenüber R ist. Dann kann man beide Werte (T und R) als Konstanten annehmen und wir erhalten eine analytische Lösung. Im anderen Fall erhält man eine Lösung mit numerischen Verfahren durch Lösung der Gleichung:

$$\frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 + \tilde{Q}_0^2 \frac{v^2}{c^2}}} \left(\left(1 + \frac{1}{Q_0^2} \frac{t}{t_1}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{Q_0^2} \frac{2}{r_1} \int v dt\right)^{\frac{2}{3}} \right) - Q_0 = 0 \quad (609)$$

Auf diese Weise verliert man aber sein Bezugssystem, so daß die Lösung physikalisch sinnlos ist. Der beobachtete Körper bewegt sich aus dem Gültigkeitsbereich unseres Bezugssystems heraus. Wir haben es dann mit einem zweiten unabhängigen Bezugssystem zu tun und müssen eine LORENTZ-Transformation für die Geschwindigkeit vornehmen. Beim zweiten Fall, hier ist die Geschwindigkeit bezogen auf einen Punkt im Abstand r zum Koordinatenursprung, sieht es nicht besser aus. Jetzt müssen wir eine LORENTZ-Transformation für den Abstand r vornehmen. Die zugehörige Beziehung soll jedoch nicht weiter dargestellt werden.

Dieses Problem tritt übrigens auch bei der klassischen EINSTEINSchen Theorie auf. Damit ist ein Bezugssystem immer nur lokal gültig. Wie groß der lokale Bereich ist, hängt von den Ausgangsbedingungen ab.

Wir wollen nun unsere Betrachtungen fortsetzen unter der Einschränkung, daß die Ergebnisse nur für den Augenblick dt und im Bereich dr exakt gültig sind.

6.1.2.1.2. Exakte Lösung

Um eine exakte Beziehung sowohl für den Dehnungsfaktor als auch für die Güte zu erhalten, versuchen wir zunächst, Gleichung (76) lösen, wobei wir diesmal H nicht als Konstante ansehen. Auch mit anderen Ausgangsbedingungen erhalten wir dasselbe Ergebnis, wie im Abschnitt 4.3.2. Sowohl mit der Variation der Integrationskonstanten und anderen Methoden gelingt es jedoch nicht, ein Ergebnis zu erhalten, das auch nur annähernd mit den Beobachtungen übereinstimmt. Im Gegenteil, die Resultate stehen im krassen Gegensatz dazu. Die Frage ist, warum? Eine weitere Frage ist, warum liegen die Näherungslösungen so nahe an der Wahrheit?

Die Antwort liegt im physikalischen Inhalt der benutzten Gleichungen. Die Lösung von (76) ergibt eine Zeitfunktion. Wir suchen aber eine Funktion in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dr/dt also der ersten Ableitung des Weges nach der Zeit. In (78) ist außer t nur noch die Frequenz ω_1 enthalten. Diese ist eine echte Konstante und läßt damit nur die Einführung einer absoluten Geschwindigkeit (gegenüber dem leeren Raum) zu, so es denn eine solche geben sollte. In der Tat gibt eine absolute Geschwindigkeit aber nur eine einzige, nämlich die Lichtgeschwindigkeit.

Wenn wir also die Funktion in Abhängigkeit von einer anderen Geschwindigkeit bestimmen wollen, müssen wir zuerst ein Koordinatensystem (Bezugssystem) definieren und genau darin liegt unser Problem. Als erstes definieren wir einen Ort. An diesem gilt ein bestimmter Längenmaßstab (r_0) und auch ein dazugehöriger Zeitmaßstab (T). Weiterhin gilt auch der dazugehörige Wert ω_0 . Alle diese Werte sind fest über den Parameter Q_0 verkoppelt (raumzeitliches Koordinatensystem). Mit der Festlegung des Nullpunkts sind also alle Maßstäbe und Werte eindeutig definiert.

Auch im umgekehrten Fall, mit der Definition von Q_0 , ist das Bezugssystem eindeutig festgelegt. Dazu gehört übrigens auch ein fester Wert von H , d.h. mit der Definition eines Bezugssystems akzeptiert man automatisch H als Konstante ($r_0/r_0=0$). Das ist der Grund dafür, daß wir mit der Lösung von (578) so gute Ergebnisse erzielen konnten. Zum Wert Q_0 gehört weiterhin ein fester Wert c_M und der Winkel θ ist ebenfalls eindeutig festgelegt. Daraus ergibt sich, daß auch der Winkel α einen festen Wert hat (482).

Zu beachten ist jedoch der begrenzte räumliche und zeitliche Gültigkeitsbereich eines jeden Bezugssystems, mathematisch gesehen eigentlich nur für einen unendlich kleinen Abschnitt dr und für einen unendlich kleinen Zeitraum dt . Bei einer hohen Güte sind die Lösungen auch für größere Abschnitte und Zeiträume gültig. Bei kleinen Güten jedoch (hohe Krümmung) gelten die Beziehungen wirklich nur für dr und dt . Will man die exakte Funktion bestimmen, muß man über dr und dt integrieren. Das Ergebnis ist dann aber vom zurückgelegten Weg und Richtung abhängig.

Damit haben wir nachgewiesen, daß wir keine physikalisch sinnvolle Beziehung durch Lösung von (76) und (78) erhalten können. Die exakte Lösung ergibt sich vielmehr durch Anwendung der in den Abschnitten 5.1. und 5.2. erarbeiteten Grundlagen unter Beachtung der Winkelverhältnisse. Dabei erhalten wir den Wert von α , indem wir die Grundgüte in (482) einsetzen. Während der Winkel α also einen festen Wert hat, sind die Winkel γ und δ von der Geschwindigkeit v abhängig. Hierbei weist der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v} in dieselbe Richtung wie der metrische Vektor \mathbf{c}_M . Für den Winkel δ gilt damit für alle Arten von Photonen:

$$\delta = \arcsin\left(\left(\frac{1}{\rho_0\omega_0 t} + \frac{v}{c}\right)\sin\alpha\right) \quad (610)$$

Das hat dann auch wieder Auswirkungen auf Frequenz und Wellenlänge von Photonen und Neutrinos, die eng mit dem Winkel δ verknüpft sind. Der Winkel γ ist unterschiedlich definiert für Photonen und Neutrinos sowie deren Antiteilchen:

$$\gamma_\gamma = \arg \underline{c} + \arccos\left(\left(\frac{1}{\rho_0\omega_0 t} + \frac{v}{c}\right)\sin\alpha\right) + \frac{\pi}{4} \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad (611)$$

$$\gamma_{\bar{\gamma}} = -\arg \underline{c} - \arcsin\left(\left(\frac{1}{\rho_0\omega_0 t} + \frac{v}{c}\right)\sin\alpha\right) + \frac{\pi}{4} \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (612)$$

$$\gamma_\nu = -\arg \underline{c} + \arcsin\left(\left(\frac{1}{\rho_0\omega_0 t} + \frac{v}{c}\right)\cos\alpha\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Neutrinos} \quad (613)$$

$$\gamma_{\bar{\nu}} = \arg \underline{c} - \arccos\left(\left(\frac{1}{\rho_0\omega_0 t} + \frac{v}{c}\right)\cos\alpha\right) - \frac{\pi}{4} \quad \text{Antineutrinos} \quad (614)$$

6.1.2.2. Relativistische Längenkontraktion

Im vorhergehenden Absatz habe ich bereits angedeutet, daß es sich bei den bisher erhaltenen Lösungen um Näherungslösungen handelt, die auf der Annahme beruhen, daß der Winkel α zwischen Metrik und Photon immer genau $\pi/2$ beträgt. Wenn dies nicht der Fall ist, ändert sich damit auch der bisher als unanfechtbar angesehene EINSTEINSche Ausdruck für die relativistische Längenkontraktion. Zu meiner Entschuldigung möchte ich hier angeben, daß sich die Änderung aus der Grundannahme dieses Modells ergibt, nämlich daß sich die relativisti-

schen Effekte erst makroskopisch aus der Existenz des metrischen Gitters ergeben sollen. Wir haben sozusagen eine "Digitalisierung" des Raumes vorgenommen und dies führt zwangsläufig zu Abweichungen bei hohen Frequenzen (Geschwindigkeiten). Die "Schuld" liegt damit bei Prof. LANZOS, der die Idee zu diesem Modell hatte. Zur Bestimmung der exakten Lösung gehen wir zunächst von Ausdruck (516) aus, der richtig ist unter Annahme der Gültigkeit des Pythagoräischen Lehrsatzes. Diesen lösen wir folgendermaßen auf:

$$\beta^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \beta^{-2}c^2 = c^2 - v^2 \quad (615)$$

$$c^2 = \beta^{-2}c^2 + v^2 \quad (616)$$

Gesucht ist nun ein neuer Wert β bei Anwendung des Cosinussatzes anstelle des Pythagoras. Ausdruck (616) muß dann folgendermaßen erweitert werden:

$$c^2 = \beta^{-2}c^2 + v^2 - 2\beta^{-1}cv \cos \alpha \quad (617)$$

$$\beta^{-2}c^2 - 2\beta^{-1}cv \cos \alpha + (v^2 - c^2) = 0 \quad (618)$$

$$\beta^{-2} - 2\beta^{-1}\frac{v}{c} \cos \alpha - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0 \quad (619)$$

$$\beta_{1,2}^{-1} = \frac{v}{c} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \cos^2 \alpha} = \frac{v}{c} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}(1 - \cos^2 \alpha)} \quad (620)$$

Wir finden eine Übereinstimmung mit (479). Damit gilt das positive Vorzeichen für zeitartige Photonen (γ) und Neutrinos (ν), das negative für raumartige Photonen ($\bar{\gamma}$) und Antineutrinos ($\bar{\nu}$). Ausdruck (620) löst sich schließlich auf in die endgültige, Korrigierte Version des EINSTEINschen Ausdrucks für den Dehnungsfaktor β , der nun auch für sehr hohe Geschwindigkeiten und in sehr starken Gravitationsfeldern gilt ($\alpha = \alpha_{\gamma, \nu}$):

$$\beta^{-1} = \frac{v}{c} \cos \alpha \pm \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha}$$

Exakter Ausdruck des
relativistischen Dehnungsfaktors

(621)

Der gefundene Ausdruck ist jetzt nicht mehr allein von der Relativgeschwindigkeit, sondern auch vom Winkel α abhängig, der bei der Definition des Bezugssystems festgeschrieben wird. Die Geschwindigkeit v ist gleich der Summe aus metrischem und Geschwindigkeitsvektor. Es gilt $\underline{v} = \underline{v}_M + \underline{c}_M$ und $v = v_M + c_M$. Mit dem Ansatz:

$$\frac{v_\gamma}{\sin \gamma_\gamma} = \frac{c}{\sin \alpha_\gamma} \quad \alpha_\nu = \alpha_\gamma - \frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha_\nu = -\cos \alpha_\gamma \quad (622)$$

erhalten wir folgende Ausdrücke für den Dehnungsfaktor β ($\alpha = \alpha_\gamma$):

$$\beta_\gamma^{-1} = \frac{v_\gamma}{c} = \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad \text{Zeitartige Photonen} \quad \beta_{\bar{\gamma}}^{-1} = \frac{v_{\bar{\gamma}}}{c} = \frac{\sin \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin \alpha} \quad \text{Raumartige Photonen} \quad (623)$$

$$\beta_\nu^{-1} = \frac{v_\nu}{c} = \frac{\sin \gamma_\nu}{-\cos \alpha} \quad \text{Neutrinos} \quad \beta_{\bar{\nu}}^{-1} = \frac{v_{\bar{\nu}}}{c} = \frac{\sin \gamma_{\bar{\nu}}}{\cos \alpha} \quad \text{Antineutrinos} \quad (624)$$

Damit haben wir gleichzeitig das Brechungsgesetz hergeleitet und zwar für alle Arten von Photonen und Neutrinos. Das zeigt uns, daß wir auf dem richtigen Weg sind. Die Winkel können wir mit Hilfe von (482) bzw. (611-614) bestimmen. Die Probe ergibt eine exakte Übereinstimmung mit (621) im Fall $v=v_M+c_M$. Die Ausdrücke (623) und (624) entsprechen dem Produkt aus dem zeitlichen und geometrischen Anteil der Gesamtrötverschiebung (511), wie sich leicht nachweisen läßt. (er räumliche Anteil wird bei der geschwindigkeitsinduzierten Rotverschiebung nicht wirksam, da er durch die Bewegung der Photonen durch den Raum (Wellenlängengradient) verursacht wird. So kann man Ausdruck (621) auch folgendermaßen darstellen:

$$\beta_{\gamma, \bar{v}}^{-1} = \frac{v}{c} \cos \alpha \pm \cos \delta \approx \pm \cos \delta \quad (625)$$

$$\beta_{v, \bar{v}}^{-1} = \frac{v}{c} \sin \alpha \pm \cos \delta \approx \frac{v}{c} \pm 1 \quad (626)$$

Hierbei muß man genau aufpassen, der Anteil $v/c \cos \alpha$ entspricht nämlich keinesfalls dem Wert $\sin \delta$, wie man bei flüchtigem Hinsehen denken mag, vielmehr handelt es sich um die Projektion des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} auf den Vektor \mathbf{c}_γ , wie man im Bild 104 gut erkennen kann:

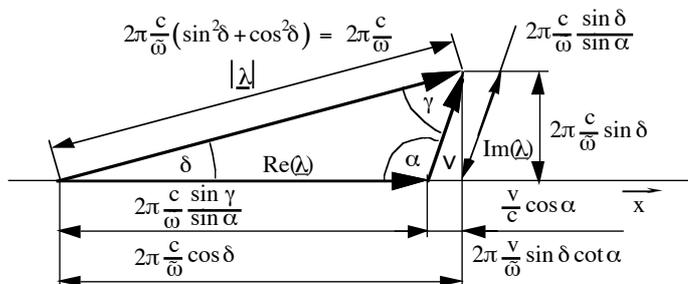


Bild 104
Wirkung des relativistischen
Dehnungsfaktors β

Je nach Ausbreitungsrichtung addiert oder subtrahiert sich dieser zu oder von \mathbf{c}_γ . Unter normalen Bedingungen (sehr hohe Güte) ist der Wert jedoch extrem klein und kann vernachlässigt werden. Dann bleibt nur noch der Wert $\cos \delta$ bei den Photonen bzw. $\sin \delta$ bei den Neutrinos übrig, was mit dem Phasenmaß β der Ausbreitungsfunktionen aus Abschnitt 5.3.2. übereinstimmt. Um hier eine exakte Lösung zu erhalten, müssen wir die entsprechenden β -Werte um die Ausdrücke $v/c \cos \alpha$ bzw. $v/c \sin \alpha$ erweitern. Der Verlauf der Funktion β für zeit- und raumartige Photonen für eine Güte $Q_0 > 10^5$ ist im Bild 105 dargestellt.

Hier ergibt sich ein Widerspruch bei den raumartigen Photonen (und Fermionen), der auf der Beobachtung beruht, daß für diese im Gegensatz zu den zeitartigen Photonen und Neutrinos der Kehrwert von β zum Ansatz kommt, während wir im Abschnitt 5.3.2. bis auf das unterschiedliche Vorzeichen denselben Ausdruck für das Phasenmaß β für beide Photonenarten erhalten haben. Wie läßt sich nun dieser Widerspruch aufklären? Im Abschnitt 5.3. hatten wir ja die komplexe Frequenz eines zeitartigen Photons eingeführt. Allgemein besteht es aus einem Real- und Imaginärteil:

$$\underline{\omega} = \omega (\cos \delta + j \sin \delta) \quad (627)$$

Die tangential rotverschobene Frequenz ergibt sich jedoch nicht, wie man zunächst vermutet zu $\underline{\omega} \beta_\gamma$. Der Grund dafür ist, daß die Beziehung $c = \lambda v$ eigentlich nicht stimmt, wenn man für λ und v die gemessenen Werte (Realteil) einsetzt. Tatsächlich gilt in der theoretischen Elektrotechnik die Beziehung $\lambda = 2\pi/\beta$ (β =Phasenmaß). Das bedeutet, daß eigentlich nur der Imaginärteil des Phasenmaßes bei der Bildung der Wellenlänge, so wie wir sie beobachten (Realteil), wirksam wird. Dies entspricht dem Fall, daß die Gesamtwellenlänge (Betrag) um einen gewissen Winkel gegenüber der Ausbreitungsrichtung verdreht ist, genau wie in unserem Modell.

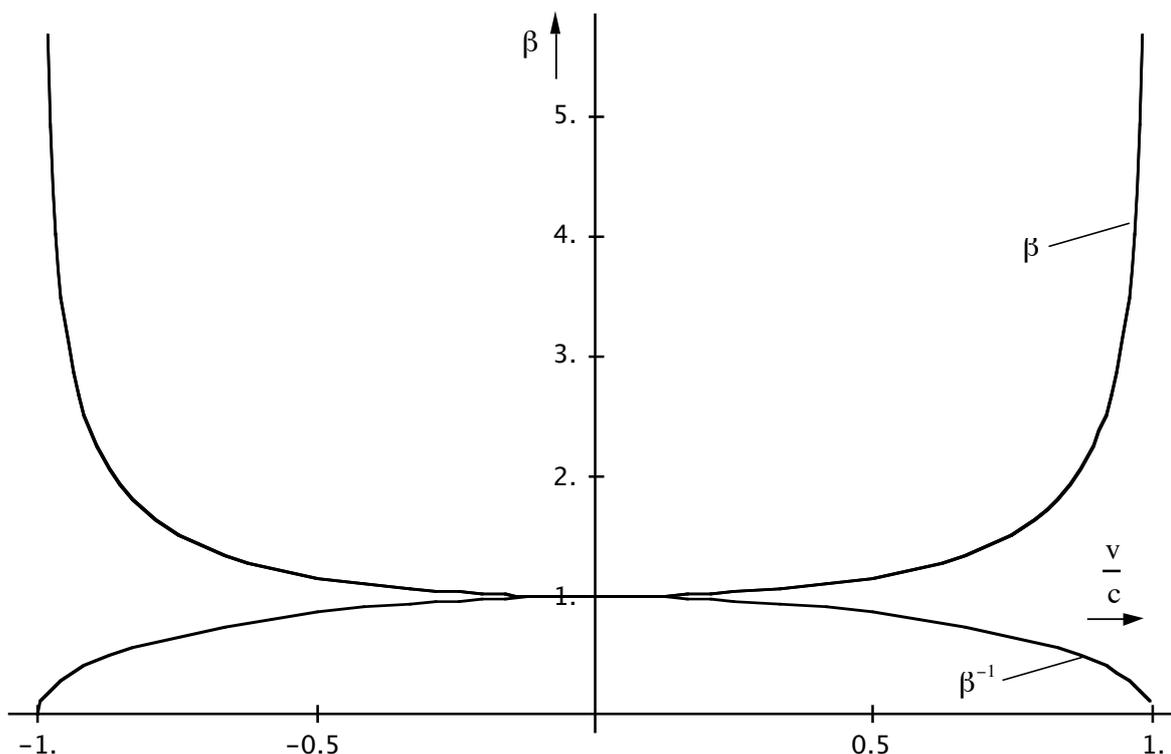


Bild 105
Relativistischer Dehnungsfaktor β_v für zeit- und raumartige Photonen
im Vergleich mit der klassischen EINSTEINSchen Lösung ($Q_0 > 10^5$)

Natürlich läßt sich auch eine komplexe Wellenlänge $\underline{\lambda}$ definieren, die gemessene Wellenlänge entspricht dann dem Realteil von $\underline{\lambda}$, und die erste Beziehung lautet richtig: $\underline{c} = \underline{\lambda} \cdot \underline{\nu}$ (siehe Bild 104). Dann gilt:

$$\underline{\lambda} = 2\pi \frac{c}{\omega} (\cos \delta - j \sin \delta) \quad (628)$$

Und genau die raumartigen Photonen waren ja die einzigen mit einem negativen Phasenmaß, d.h. sie bewegen sich entgegengesetzt zu allen anderen Photonenarten auf einem raumartigen Vektor. Die Ursache für das Wirksamwerden des Kehrwerts von β ist damit die besondere Eigenschaft der Exponentialfunktion ($e^{-\gamma r} = 1/e^{\gamma r}$) in Verbindung mit dem Pythagoras der Winkelfunktionen ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Wo liegt jetzt aber der Punkt, an dem der relativistische Dehnungsfaktor β ansetzt? Dieses Problem wurde in der SRT bisher nicht beachtet, müßte aber eigentlich bekannt sein.

Ausdruck (628) entspricht dem Inhalt nach der Beziehung $\underline{\lambda} = 2\pi/\underline{\gamma}$. Offensichtlich beeinflußt β den Betrag des Wellenlängenvektors $|\underline{\lambda}| = 2\pi/|\underline{\gamma}|$ und wirkt damit auf α und β gleichzeitig. Da wir nur den Realteil von $\underline{\lambda}$ beobachten, das ist der im Bild 104 dargestellte Anteil $2\pi c/\omega \sin \gamma / \sin \alpha$ bzw. $2\pi/\omega (c \cos \delta - v \sin \delta \cot \alpha)$, gilt insgesamt: $\lambda' = \lambda \sin \gamma / \sin \alpha$ (raumartig) bzw. $\lambda' = \lambda \sin \alpha / \sin \gamma$ (zeitartig). Beide Lösungen sind identisch mit den Ausdrücken $\lambda' = 2\pi/\beta(v)$ (raumartig) bzw. $\lambda' = 2\pi\beta(v)$ (zeitartig). Die Funktion $\beta(v)$ (Phasenmaß) erhält man, indem man den Anteil des metrischen Vektors c_M durch $v = v_M + c_M$ in allen Ausdrücken einschließlich $\Xi(v, r)$ und β substituiert. Das entspricht der Applikation der geschwindigkeitsabhängigen Ausdrücke (610-614) für δ und γ . Da die Funktion $\Xi(v, r)$ bereits den Realteil von ω ergibt, müssen wir den Betrag für α hochrechnen. Wir wählen den exakten raumartigen Vektor und nicht die Projektion. Ausdruck (532) und die entsprechenden Ausdrücke für Neutrinos und Antineutrinos würden dann folgendermaßen lauten:

$$\underline{\gamma}_\gamma = \left(\left(\frac{\tilde{H}}{c} + \frac{\tilde{\omega}_0}{c} \Psi(\omega) + \frac{\tilde{\omega} \sin \delta \cos \delta}{c \sin \gamma} \Xi_\gamma(v, r) \right) + j \frac{\tilde{\omega}}{c} \Xi_\gamma(v, r) \right) \Phi(\omega) \quad (629)$$

Sowohl c_M als auch $\sin\alpha$ werden bei der Definition des Bezugssystems festgeschrieben. Der Anteil $\omega/c \cdot \sin\delta \cos\delta / \sin\gamma \cdot \Xi_\gamma(v,r)$ beschreibt hier nicht eine zusätzliche Dämpfung, sondern ein Abweichen der Welle von der ursprünglichen Ausbreitungsrichtung r in Richtung des raumartigen Vektors v . Man sieht, unser einfaches Modell stößt hier an seine Grenzen. Aus diesem Grund hatten wir im Abschnitt 5.3.2. die Ausbreitungsfunktion nicht in $\{x,y,r,t\}$, sondern entlang des Bogens r definiert und für ω den Realteil eingesetzt. Das Dämpfungsmaß ist dann gleich Null und die Ausbreitungsfunktion unabhängig von der Ausbreitungsrichtung. Für die exakte Berechnung unter Berücksichtigung der Ausbreitungsrichtung gibt es wesentlich komfortablere Methoden. Die wichtigste ist die Darstellung in tensorieller Form (vgl. Abschnitt 7.2.5 ff).

Da der Winkel α im Normalfall extrem nahe an $\pi/2$ liegt, sieht man keinen Unterschied zur klassischen EINSTEINSchen Lösung, beide Kurven überdecken einander vollständig. Wie würde diese klassische Lösung jedoch für die Neutrinos aussehen? Dies zeigt Bild 106:

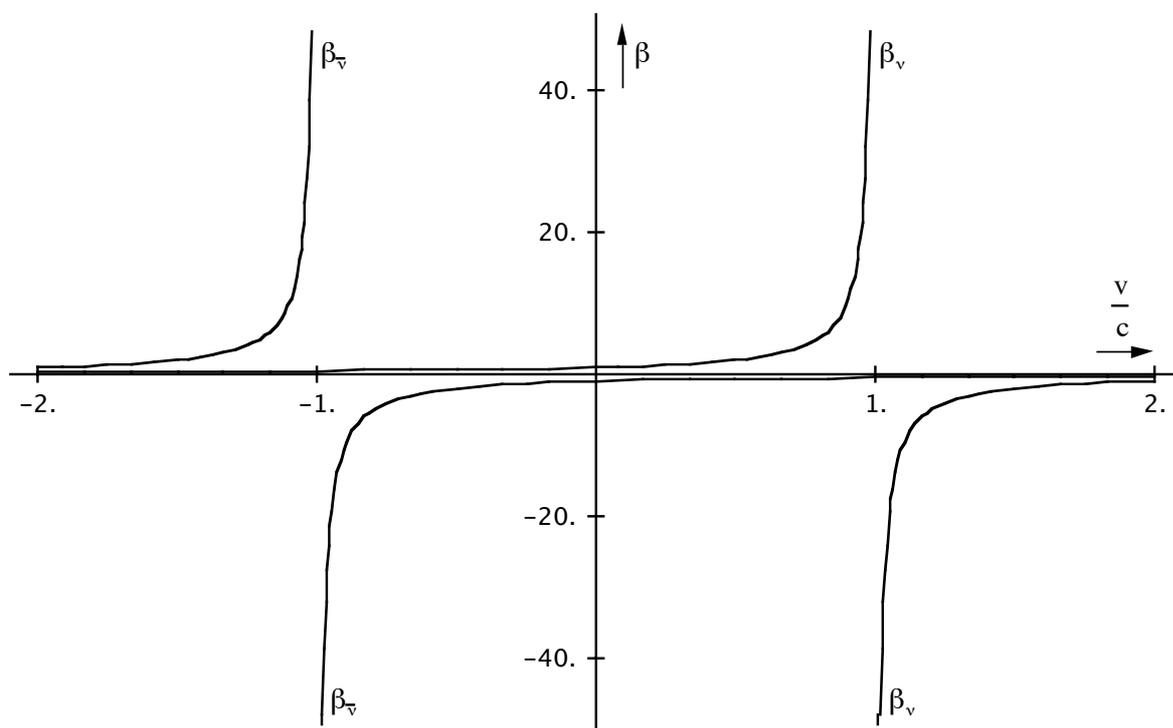


Bild 106
Relativistischer Dehnungsfaktor β_ν für Neutrinos und Antineutrinos
im Vergleich mit der hypothetischen klassischen Lösung ($Q_0 > 10^5$)

β_ν folgt hier der Funktion $v/c+1$ bzw. $v/c-1$, damit existieren auch reelle Lösungen für Geschwindigkeiten größer $\pm c$. Es gibt jedoch auch Unterschiede zur EINSTEINSchen Lösung bei kleineren Ausgangsgüten, da dann der Wert $\cos\alpha$ von (nahe) Null verschieden und $\sin\alpha \neq 1$ ist. In den Bildern 107-110 ist der Verlauf von β für die vier verschiedenen Photonarten und für verschiedene kleinere Gütewerte dargestellt. Bei den zeitartigen Photonen beobachten wir dieselbe Verschiebung wie bereits bei der Näherungslösung, hier jedoch verursacht durch den Anteil c_M . Dadurch kommt es zu einer Verschiebung der Polstelle im negativen Bereich aus dem Definitionsbereich (reelle Lösung) heraus, so daß das Maximum für $-v$ kleiner als Unendlich ist. Darüber hinaus wird die Lösung komplex.

Es ist also zumindest theoretisch möglich, über den „Rand“ zu springen. Dagegen gibt es im positiven Bereich einen negativen Ast hinter der Polstelle. Bei extrem kleinen Ausgangsgüten kommt es zu einer Drehung um den Winkel $\pi/2$. Die Photonen verhalten sich dann ähnlich wie Neutrinos.

Der Verlauf von β für raumartige Photonen erscheint als eine (nicht ganz exakte) Spiegelung der Verhältnisse bei den zeitartigen Photonen. Auch hier gibt es dieselbe Verschiebung in den negativen Bereich verursacht durch c_M . Die von Unendlich verschiedene Maximalüberhöhung liegt jetzt bei positiven Geschwindigkeiten. Je kleiner die Ausgangsgüte, um so kleiner die maximale Überhöhung.

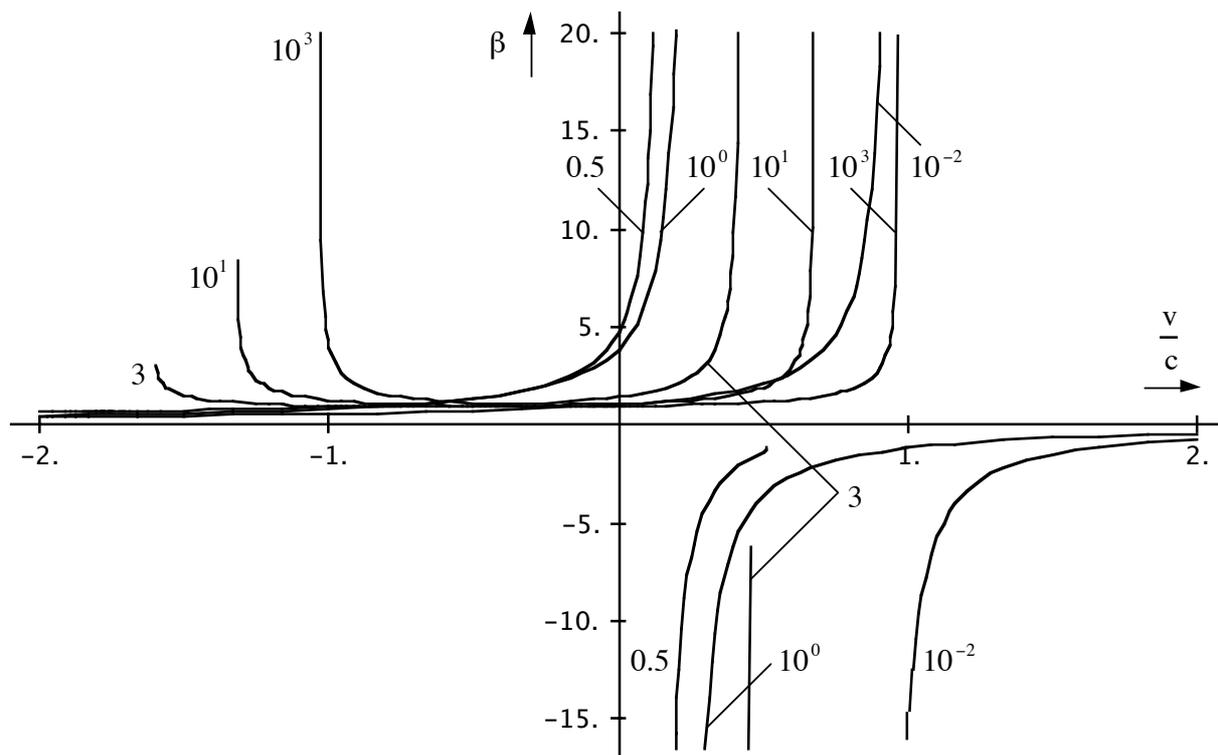


Bild 107
 Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für zeitartige Photonen bei kleinen Gütewerten

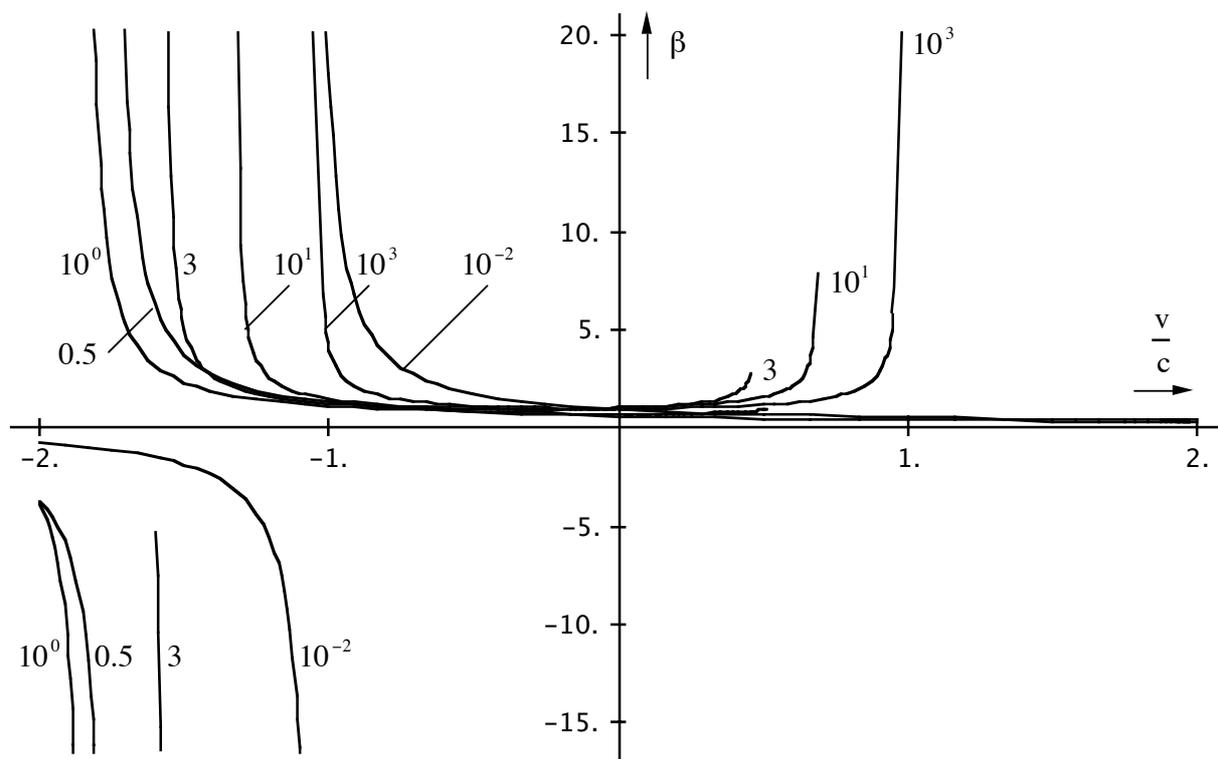


Bild 108
 Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für raumartige Photonen

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Neutrinos und Antineutrinos. Hier gibt es jedoch keine maximale Überhöhung, sondern nur eine Polstelle und eine Art Minimum, das ist die Grenze des reellen Definitionsbereichs (Verzweigungspunkt 1. Ordnung). Bei sehr kleinen Gütewerten verhalten sich Neutrinos wie Photonen. Dann gibt es auch eine maximale Überhöhung, die mit dem Verzweigungspunkt zusammenfällt (das Maximum bei den

Photonen ist auch eine Verzweigung). Die Lage der Polstelle erhalten wir mit $v=c_M+v_M$ durch Lösung der Gleichung:

$$\mp \frac{v}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha} = 0 \quad \text{zu } v = \pm (c - c_M) \quad (630)$$

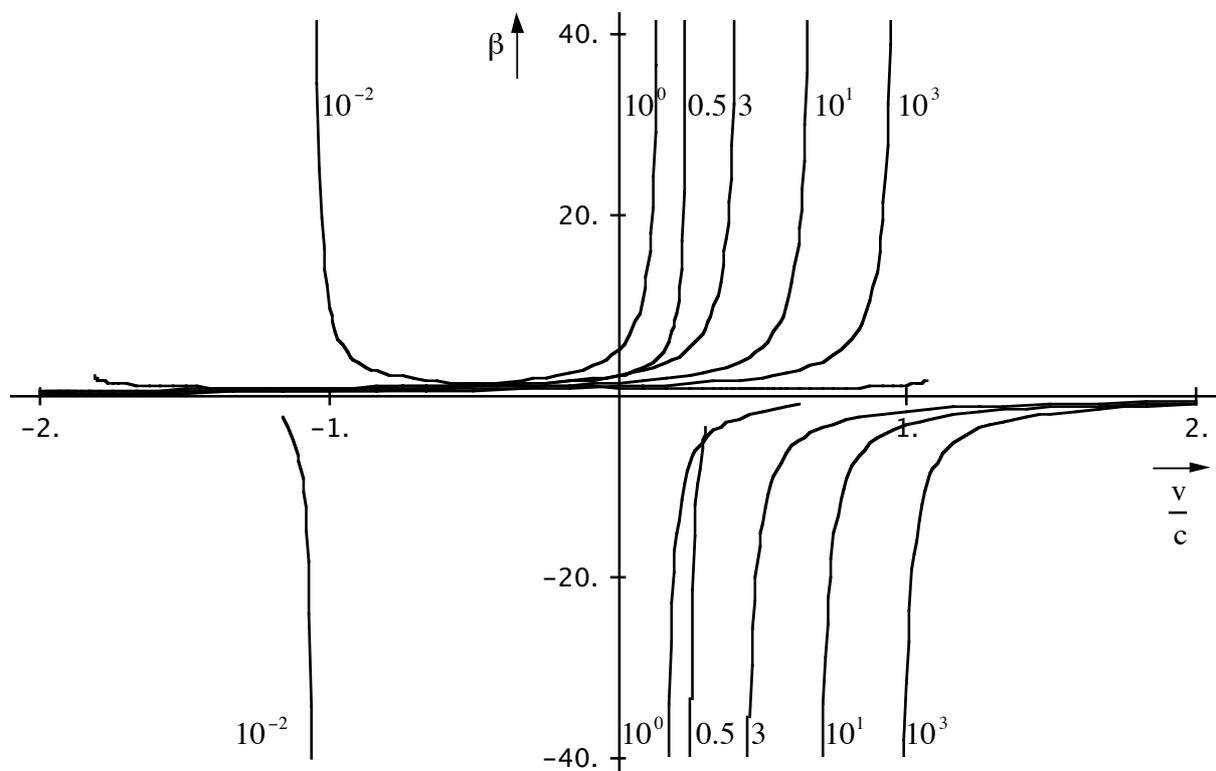


Bild 109
Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für Neutrinos

Ausdruck (630) gilt übrigens auch für Neutrinos. Die maximale Überhöhung (Verzweigung) finden wir immer auf der Seite mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Werte errechnen sich folgendermaßen:

$$\frac{(c_M + v_M)^2}{c^2} \sin^2 \alpha = 1 \quad v = \mp \frac{c}{\sin \alpha} - c_M \quad (631)$$

$$\hat{\beta}_\gamma = \cot \alpha \mp \frac{c_M}{c} \cos \alpha \quad \text{Photonen (Maximum)} \quad \check{\beta}_\nu = \tan \alpha \mp \frac{c_M}{c} \sin \alpha \quad \text{Neutrinos (Verzweigung)} \quad (632)$$

$$\hat{\beta}_\gamma \approx \cot \alpha \approx \frac{4}{3} \tilde{Q}_0 \quad \check{\beta}_\nu \approx \tan \alpha \approx \frac{3}{4} \tilde{Q}_0^{-1} \quad (633)$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für das zeitartige, das untere für das raumartige Photon. Zum Vergleich ist im Bild 111 der Verlauf der exakten (632) und der Näherungslösung (633) für Photonen dargestellt. Man sieht, die Näherung ist gut für Werte bis hinunter zu $Q_0=1$. Dies wären die Verhältnisse direkt am SCHWARZSCHILD-Radius.

Damit müssen wir die gute Nachricht, daß es möglich ist, über den "Rand" zu springen wieder relativieren. In der Tat sind die Polstellen in der klassischen EINSTEINschen Lösung die Ursache dafür, daß es für einen materiellen Körper unmöglich ist, eine Geschwindigkeit größer c zu erreichen. In diesem Modell besteht zumindest theoretisch die Möglichkeit, daß dieser Körper mit einer positiven Geschwindigkeit den Wall überwindet. Jedoch liegt die dazu notwendige Geschwindigkeit bei der derzeit aktuellen Güte von ca. 10^{60} so nahe bei c , daß eine solche Fragestellung physikalisch sinnlos wird. Sollte es tatsächlich gelingen, ein Raumschiff

zu bauen, das eine Geschwindigkeit größer c erreicht, wäre die Zeitdilatation bis zum Erreichen dieses Punktes so groß, daß, selbst wenn es dazu nur eine Sekunde bräuchte, auf der Erde ein Zeitraum vergehen würde, der größer als das derzeitige Weltalter ist.

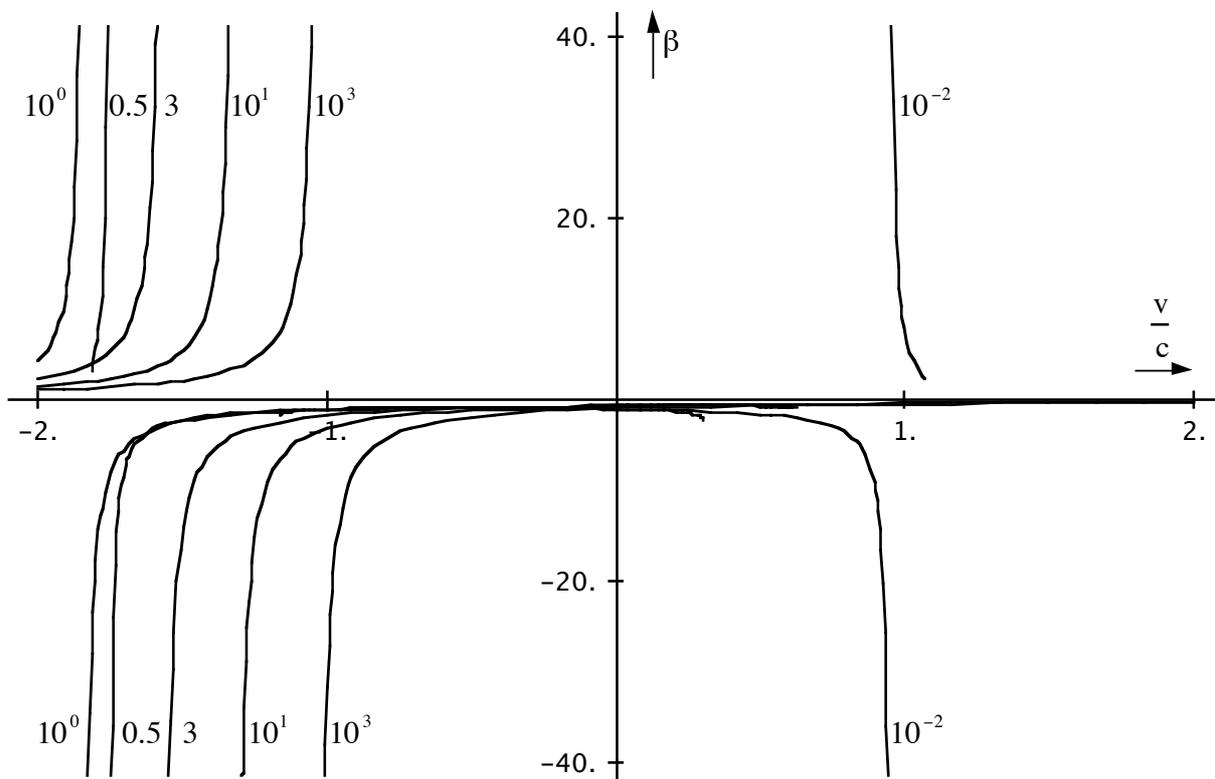


Bild 110
Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_{\nu}(v)$ für Antineutrinos

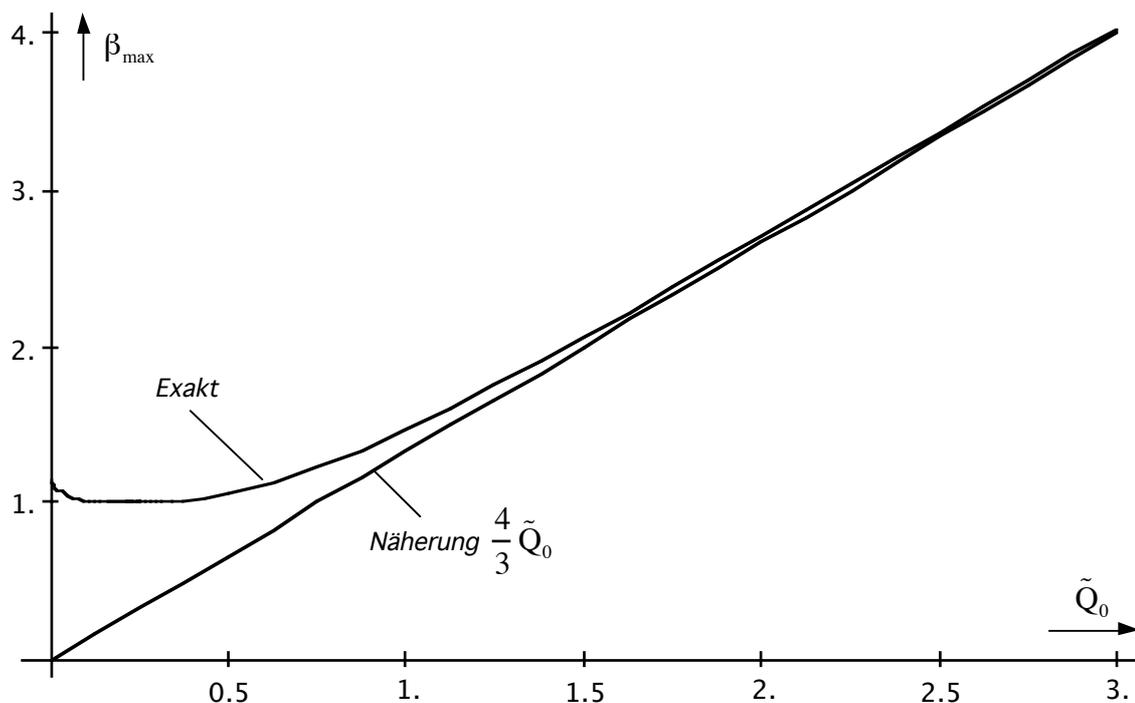


Bild 111
Exakter Verlauf und Näherung für die maximale Überhöhung von β beim zeit- und raumartigen Photon

Bei einer eventuellen Rückkehr würde man die Erde nicht mehr vorfinden. Auch gäbe es Probleme mit dem Antrieb, speziell beim Bremsen. Aus einem Photonenantrieb würde ein Neutrinoantrieb, der keinerlei Wirkung zeigt. Man müßte also zusätzlich einen Antineutrinoantrieb mitnehmen, um eine Bremswirkung zu erzielen.

Was bedeutet aber eine negative bzw. komplexe Lösung für β ? Wenn eine negative Lösung auftritt, vollführt die Welle einen Phasensprung und die Frequenz wird negativ. In der Leitungstheorie ist dies gleichbedeutend mit einer negativen Phasengeschwindigkeit. Die Welle breitet sich dann in die entgegengesetzte Richtung aus, aus einem zeitartigen wird ein raumartiges Photon, aus einem Neutrino ein Antineutrino und umgekehrt. Das Bezugssystem bleibt jedoch noch intakt, man kann eine Wirkung von der bewegten Signalquelle empfangen. Eine komplexe Lösung bedeutet dagegen den Zusammenbruch des Bezugssystems, d.h. eine LORENTZ-Transformation ist nicht mehr möglich. Das bedeutet aber auch, daß es keinen kausalen Zusammenhang zwischen Quelle und Empfänger mehr geben kann.

Zum Schluß soll noch darauf hingewiesen werden, daß der tangentielle Anteil beim zeitartigen Photon (Drehung der Polarisationsrichtung) zusätzlich der Dopplerverschiebung unterliegt — eine Tatsache, die leicht durch Experimente nachweisbar sein müßte. Aus einer zirkular polarisierten Welle wird eine elliptisch polarisierte. Die Verhältnisse liegen damit wesentlich komplizierter als in der Literatur gewöhnlich dargestellt. Man geht allgemein von einer „idealen“ rein horizontal oder vertikal polarisierten Welle ohne Dämpfung aus, die es nicht gibt. Der Beweis dafür ist die Existenz der kosmologischen Rotverschiebung, die sich auf diese Weise nicht erklären läßt.

Ich möchte daher die Betrachtungen in dieser Richtung nicht weiter vertiefen, sondern vielmehr zur Diskussion anregen und nur allgemein andeuten, was der physikalische Inhalt einer komplexen Lösung bedeuten könnte. Eine komplexe Lösung erhält man, wenn der Wurzelausdruck negativ bzw. das Argument von arcsin bzw. arccos größer Eins wird. Dann erhält man z.B. eine komplexe Lösung für $\beta = \text{cosec} \gamma = a + jb$ mit $b > a$ und es gilt:

$$\frac{\lambda}{\sin \gamma} = \tilde{\lambda} (a + jb) \quad (634)$$

Während bei einer reellen Lösung beide Anteile von λ nur gedehnt werden, kommt es bei einer komplexen Lösung zu einer zusätzlichen Drehung des Wellenlängenvektors um den Winkel $\arctan(b/a)$. Da dieser nun aber, wenn auch nur kleinen imaginären Anteil enthält, gibt es damit nach Multiplikation mit j immer noch einen gewissen reellen Anteil, der auch nachweisbar sein müßte, sofern die Energie nicht im Rauschen verschwindet. Die Energie $\hbar\omega$ teilt sich dann in einen Real- und einen Imaginärteil auf, wobei nur der Realteil Arbeit verrichten kann. Der Imaginärteil ist das Äquivalent zur Blindleistung (fragen Sie Ihren Elektriker). Da $b > a$ gilt verhält sich das Photon nun wie ein Neutrino, das ja bekanntlich kaum nachweisbar ist. Es gibt jedoch eine Nachweismöglichkeit mit Hilfe der schwachen Wechselwirkung. Diese verletzt damit das Kausalitätsprinzip.

Wie sieht es nun mit der Übereinstimmung zwischen unserer exakten und der im vorigen Abschnitt gefundenen Näherungslösung aus? Ich habe das überprüft. Der Verlauf der Näherung stimmt bis etwa zu $Q_0 = 10^5$ hinunter mit der exakten Lösung überein. Jedoch hat die Näherung zwei anstelle von einem Maximum und der Wert ist zu klein. Wenn man statt v die Summe $c_M + v$ einsetzt, gibt es noch eine gute Übereinstimmung bis hinab zu $Q_0 = 10^3$.

Weiterhin interessiert uns das Verhältnis zur klassischen EINSTEINSchen Lösung. Dazu betrachten wir zunächst das Quadrat des klassischen Dehnungsfaktors β :

$$\beta^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (635)$$

Wenn man idealisierte Bedingungen annimmt, läßt sich dieser Ausdruck folgendermaßen kombinieren:

$$\beta^2 = - \left(+\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} \left(-\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1} = -\beta_\gamma \beta_{\bar{\gamma}} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (636)$$

$$\beta^2 = - \left(\frac{v}{c} + 1 \right)^{-1} \left(\frac{v}{c} - 1 \right)^{-1} = -\beta_v \beta_{\bar{v}} \quad \alpha = 0 \quad (637)$$

Eigentlich gibt es ja nach dem starren EINSTEINschen Ausdruck keinen Unterschied zwischen zeitartigen und raumartigen Photonen, hier ist es nur das Vorzeichen. Und welche Gesetzmäßigkeit für Neutrinos gilt, läßt sich ohnehin nur ahnen, ist man doch froh, wenn man überhaupt einige von ihnen nachweisen kann. Man kann aber davon ausgehen, daß (622) gilt. Immerhin ist es uns gelungen, eine neue Gesetzmäßigkeit zu finden:

$$\beta^2 = -\beta_x \beta_{\bar{x}} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \quad x = \gamma, v \quad (638)$$

Damit stellt der klassische Wert β das geometrische Mittel der Dehnungsfaktoren von Teilchen und Antiteilchen dar. Wir überprüfen weiter:

$$\beta^2 = - \left(\frac{v}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right)^{-1} \left(\frac{v}{c} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \right)^{-1} \quad (639)$$

$$\beta^2 = - \left(\frac{v^2}{c^2} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 1 \right)^{-1} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1} \quad (640)$$

Ausdruck (638), den wir mit Hilfe der Näherung erhalten haben, gilt damit exakt. Bleibt noch zu untersuchen, ob es nicht möglich ist, eine Vereinfachung bei der Berechnung von $\sin \gamma$ zu finden, die es ermöglicht, die Anzahl der zu berechnenden Größen zu reduzieren, z.B. eine oder mehrere Größen durch eine andere zu ersetzen, wie es uns beim Winkel α gelungen ist. Eine genaue Betrachtung von (614) führt uns sofort zu dem Ergebnis:

$$\sin \gamma_{\bar{\gamma}}(v) = -\sin \gamma_{\gamma}(-2c_M - v) \quad \text{und} \quad \sin \gamma_{\bar{v}}(v) = -\sin \gamma_v(-2c_M - v) \quad (641)$$

Der Winkel α kürzt sich ja heraus. Damit ist es gelungen die Anzahl der zu berechnenden Größen weiter zu reduzieren. Weiterhin haben wir damit nachgewiesen, daß sich Antiteilchen entgegengesetzt zu Teilchen bewegen. Abschließend wollen wir die Beziehungen für die relativistische Längenkontraktion bezogen auf den Realteil der (Wellen-)Länge noch einmal angeben:

$$x' = x \sin \gamma_{\bar{\gamma}} \operatorname{cosec} \alpha \quad \text{Raumartige Photonen + Fermionen} \quad (642)$$

Hiermit haben wir klammheimlich akzeptiert, daß auch ein makroskopischer Körper gegenüber der Metrik verdreht beobachtet werden kann, zwar nicht insgesamt, jedoch als Summe der Teilchen aus denen er besteht. Und diese Teilchen werden ja durch, wenn auch spezielle, Wellenfunktionen beschrieben. Wie anders soll es denn sonst zur relativistischen Längenkontraktion kommen? Lösung (640) und die folgenden gelten für $\beta \in \mathbb{R}$, wobei \mathbb{R} die Menge der reellen Zahlen repräsentiert. Für „gewöhnliche“ Wellenlängen gelten andere Beziehungen. Ohne Berücksichtigung der Dopplerverschiebung gilt:

$$\lambda' = \lambda \operatorname{cosec} \gamma_{\gamma} \sin \alpha \quad \text{Zeitartige Photonen (Photonen)} \quad (643)$$

$$\lambda' = -\lambda \operatorname{cosec} \gamma_v \cos \alpha \quad \text{Neutrinos} \quad (644)$$

$$\lambda' = \lambda \operatorname{cosec} \gamma_{\bar{v}} \cos \alpha \quad \text{Antineutrinos} \quad (645)$$

Die Ausdrücke (642) bis (645) repräsentieren insgesamt den zeitlichen Anteil der relativistischen Rotverschiebung, die sogenannte radiale Dopplerverschiebung, die auftritt, wenn das Signal im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung auftrifft/abgestrahlt wird, plus geometrischem Anteil (Perspektive). Bei axialem/-r Auftreffen/Abstrahlung kommt dazu der Anteil der axialen Dopplerverschiebung, die wir im nächsten Abschnitt betrachten wollen.

6.1.2.3. Relativistische Dopplerverschiebung

Grundsätzlich gibt es die Dopplerverschiebung nur in den Fällen (643) bis (645), da sich raumartige Photonen ja nicht ausbreiten, sie werden nur bewegt. Weiterhin ist hier zu unterscheiden in den Fall, daß sich die Quelle dem Beobachter nähert ($-v$) und in den Fall, daß sie sich vom Beobachter entfernt ($+v$). Betrachtet wird allgemein der zweite Fall, nämlich daß sich die Quelle vom Beobachter entfernt. Im anderen Fall müssen wir einfach eine negative Geschwindigkeit v einsetzen. Wir wollen auch nur die rein axiale Dopplerverschiebung untersuchen, da sich alle anderen Fälle in einen radialen und axialen Vektor aufspalten lassen. Nach klassischer Auffassung gilt allgemein:

$$\lambda' = \lambda \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda \left(\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (646)$$

Der Klammerausdruck wird auch als k -Faktor bezeichnet. Der Wurzelausdruck repräsentiert den radialen Anteil. Bei diesem handelt es sich immer um eine Rotverschiebung. Daher steht der Wurzelausdruck auch immer im Nenner. Das Signal erreicht den Beobachter sozusagen "von hinten um die Ecke".

Wir wollen nun die exakten Ausdrücke für Photon, Neutrino und Antineutrino herleiten. Zunächst einmal müssen wir den Wurzelausdruck in (646) durch den exakten Ausdruck (621) ersetzen. Dies ist aber noch nicht die endgültige Lösung:

$$\lambda' = \lambda \frac{1 + \frac{v}{c}}{\frac{v}{c} \cos \alpha_v + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha_v}} \quad (647)$$

Der Grund liegt darin, daß sich unser Photon bei hohen Geschwindigkeiten wie ein Neutrino verhalten soll. Weiterhin kann der Ausdruck (647) nicht korrekt sein, da im Zähler der Winkel α nicht auftritt. Da der Wellenlängenvektor jedoch gegenüber der Metrik um einen bestimmten Winkel verdreht ist, was sich bei der transversalen Dopplerverschiebung bemerkbar macht, muß auch der radiale Anteil betroffen sein, da er exakt im Winkel $\pi/2$ dazu orientiert ist.

Gesucht ist also ein Ausdruck, der dieses Dilemma vermeidet und im Fall kleiner Geschwindigkeiten Ausdruck (646) ergibt. Für Neutrinos gilt im Falle kleiner Geschwindigkeiten folgende Näherung ($\cos \alpha$ ist immer negativ):

$$\frac{v}{c} \cos \alpha_v + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha_v} \approx -\frac{v}{c} + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 0 = 1 - \frac{v}{c} \quad \text{Neutrinos} \quad (648)$$

$$\frac{v}{c} \cos \alpha_v - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha_v} \approx -\frac{v}{c} - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot 0 = -\left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad \text{Antineutrinos} \quad (649)$$

Der zweite Ausdruck ist aber genau der Ausdruck im Zähler von (649). Wir vermuten nun, daß der Zähler eigentlich genau gleich dem linken Teil von (649) ist. Dann ist die gemessene Wellenlänge gleich der Wellenlänge im Ruhezustand multipliziert mit dem Quotienten aus dem Verlängerungsfaktor des Imaginärteils und dem Verlängerungsfaktor des Realteils der Wellenlänge. Damit wäre unser Problem gelöst. Der Ausdruck für zeitartige Photonen lautet dann genau:

$$\lambda'_\gamma = -\lambda_\gamma \frac{\frac{v}{c} \cos \alpha_\gamma - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha_\gamma}}{\frac{v}{c} \cos \alpha_\gamma + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha_\gamma}} \quad \text{Photonen} \quad (650)$$

Dies entspricht insgesamt dem zeitlichen und perspektivischen Anteil. Ausdruck (650) ist damit schon identisch mit der exakten Lösung, die sich auch folgendermaßen darstellen läßt:

$$\lambda' = -\lambda \frac{\beta_\gamma}{\beta_{\bar{\nu}}} = -\lambda \frac{\sin \gamma_{\bar{\nu}} \sin \alpha}{\sin \gamma_\gamma \cos \alpha} = -\lambda \frac{\sin \gamma_{\bar{\nu}}}{\sin \gamma_\gamma} \tan \alpha \quad \text{Photonen} \quad (651)$$

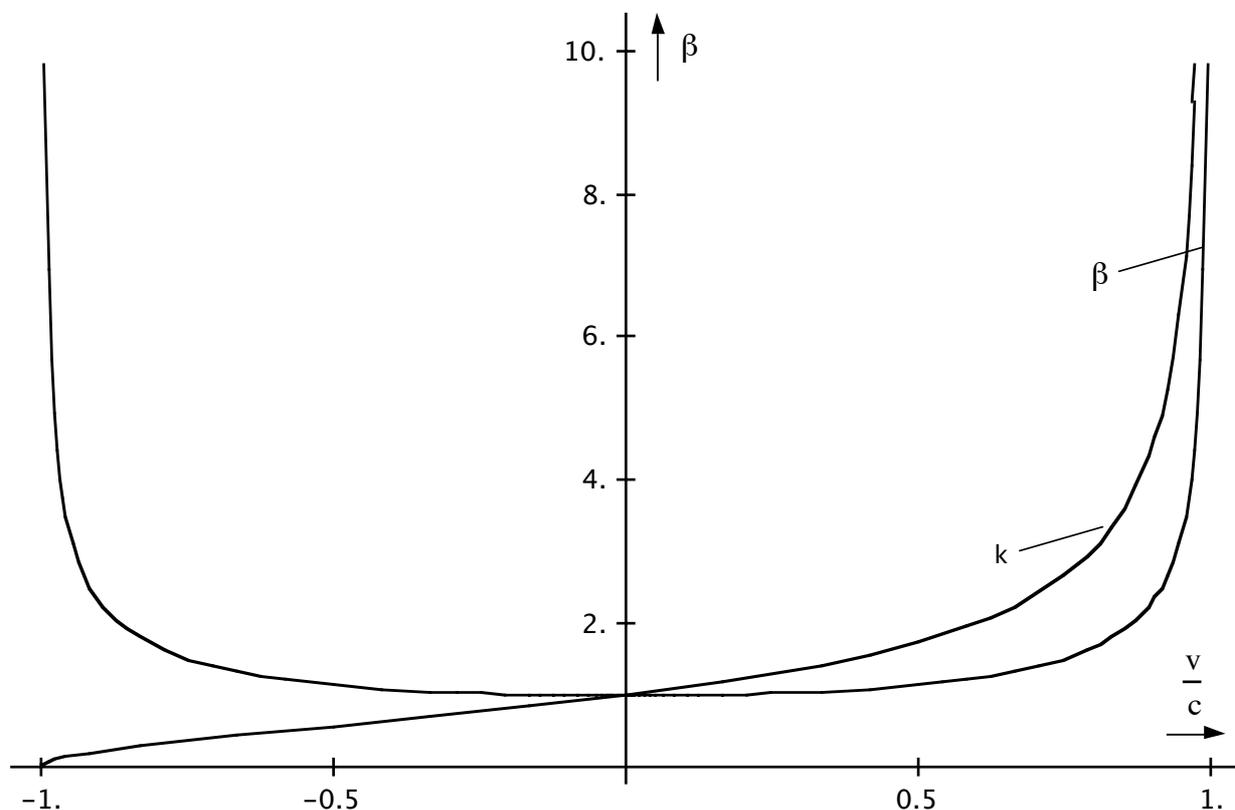


Bild 112
Verhältnis zwischen k-Faktor und relativistischem
Dehnungsfaktor β klassische und Modellösung $Q_0 > 10^5$

Hierbei ist λ die Wellenlänge des Nullvektors und λ' der Realteil des komplexen Wellenlängenvektors, d.h. der Wert, den wir messen. Für das Neutrino und Antineutrino lassen sich ähnliche Beziehungen finden. Wir wollen hier jedoch nur die trigonometrischen Ausdrücke gemäß (552) darstellen:

$$\lambda' = \lambda \frac{\beta_\nu}{\beta_{\bar{\nu}}} = -\lambda \frac{\sin \gamma_{\bar{\nu}} \cos \alpha}{\sin \gamma_\nu \sin \alpha} = -\lambda \frac{\sin \gamma_{\bar{\nu}}}{\sin \gamma_\nu} \cot \alpha \quad \text{Neutrinos} \quad (652)$$

$$\lambda' = \lambda \frac{\beta_{\bar{\nu}}}{\beta_\nu} = \lambda \frac{\sin \gamma_\nu \cos \alpha}{\sin \gamma_{\bar{\nu}} \sin \alpha} = \lambda \frac{\sin \gamma_\nu}{\sin \gamma_{\bar{\nu}}} \cot \alpha \quad \text{Antineutrinos} \quad (653)$$

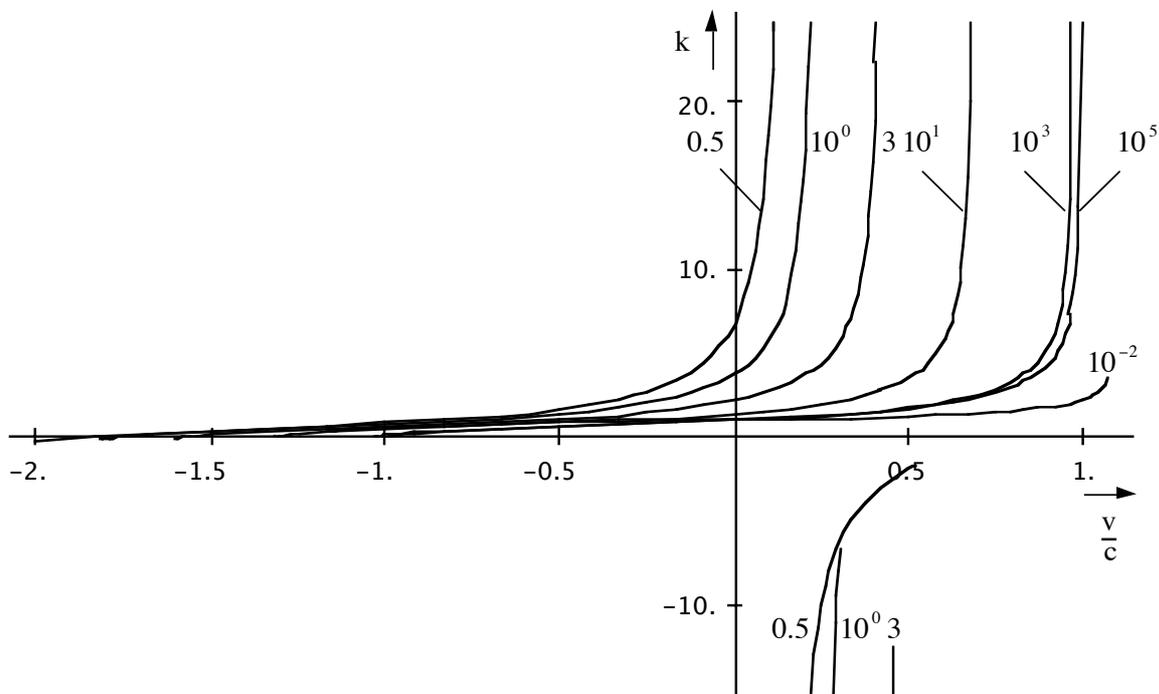


Bild 113
 Relativistische Dopplerverschiebung (Wellenlänge)
 der zeitartigen Photonen und Neutrinos bei einer Güte von $Q < 10^5$

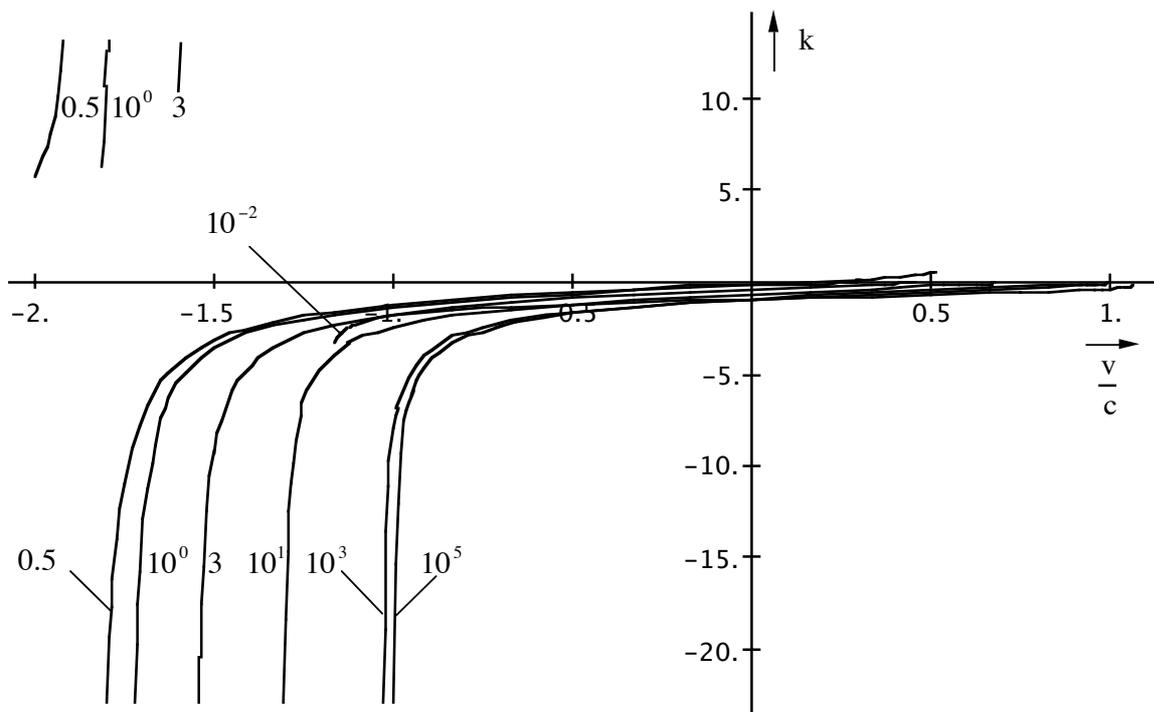


Bild 114
 Relativistische Dopplerverschiebung (Wellenlänge)
 der Antineutrinos bei einer Güte von $Q < 10^5$

Der idealisierte Verlauf für zeitartige Photonen und die beiden Neutrinoarten ist im Bild 112 dargestellt. Man sieht die Kurve für $Q_0 > 10^5$, die mit dem klassischen k-Faktor zusammenfällt, im Vergleich dazu der klassische Ausdruck β .

Bild 113 und 114 zeigt die Verhältnisse für kleinere Ausgangsgüten. Der Funktionsverlauf für zeitartige Photonen und Neutrinos ist identisch, der für Antineutrinos gespiegelt in x und y. Mit etwas gutem Willen erkennt man auch die durch den Anteil H/c verursachte Asymmetrie.

Einen Ausdruck für raumartige Photonen gibt es aus den bekannten Gründen nicht. Rein mathematisch gesehen existiert dieser natürlich auch. Er ist dann identisch mit dem der Antineutrinos, hat jedoch keine physikalische Bedeutung. Damit haben wir die relativistische Dopplerverschiebung eindeutig beschrieben. Als nächstes wollen wir die relativistische Zeitdilatation betrachten.

6.1.3. Geschwindigkeit und Zeit

Die Grundlagen hierzu haben wir im Prinzip schon im vorhergehenden Abschnitt dargelegt. Grundsätzlich gilt [30]: Bewegt sich ein Körper (System S') relativ zu einem anderen mit einer bestimmten Geschwindigkeit v , so vergeht für ihn die Zeit t langsamer (gegenüber dem Ruhesystem S). Beobachtet er nun einen Vorgang, der im Ruhesystem S die Dauer t hat, so beträgt für ihn (System S') die Dauer t' :

$$t' = t \operatorname{cosec} \gamma_v \sin \alpha \quad \text{Relativistische Zeitdilatation} \quad (654)$$

t' ist für ihn wesentlich länger als t . Das Auftreten des Ausdrucks β_v zeigt schon an, daß die Beobachtung mittels Photonen erfolgt. Das bedeutet, daß auch der zeitliche Vektor gegenüber der Metrik (Raumzeit) um einen bestimmten Winkel versetzt beobachtet wird, genau wie die Wellenlänge. Da es sich um ein raum-zeitliches Koordinatensystem handelt, ist dies nicht weiter verwunderlich.

Man kann sich die Zeitdilatation auch so vergegenwärtigen: Die beobachteten Photonen haben eine bestimmte Wellenlänge. Wenn wir auf dem Lichtstrahl den Anfang und das Ende markieren (z.B. durch eine kurze Pause), würde der bewegte Beobachter durch die Rotverschiebung den Strahl mit einer größeren Wellenlänge empfangen (wir betrachten hier nur die transversale, zeitartige Dopplerverschiebung). Da die Wellenzahl und auch c konstant sind, dauert es natürlich länger, bis der Beobachter die zweite Pause empfängt.

Betrachtete man den Vorgang mittels Neutrinos (wenn das ginge), so müßte man hier β_v einsetzen und man würde eine von t' abweichende Dauer messen.

6.1.4. Geschwindigkeit und Masse

Die Abhängigkeit der Masse von der Relativgeschwindigkeit ist eine unbestrittene Tatsache und durch eine Reihe von Experimenten und Anwendungen gesichert. Nach der klassischen Theorie (SRT) gilt folgendes [30]: Wir betrachten einen Körper mit der Ruhmasse m_0 im Koordinatensystem S (bei der Bestimmung der Ruhmasse haben wir automatisch das Koordinatensystem akzeptiert). Wenn wir nun diesen Körper auf die Geschwindigkeit v gegenüber S beschleunigen, so hat er jetzt die Masse:

$$m = m_0 \operatorname{cosec} \gamma_v \sin \alpha \quad \text{Relativistische Massenzunahme} \quad (655)$$

Ich habe hier schon einmal den Wert β_v eingesetzt, da sich der Körper aus einer bestimmten Anordnung von Fermionen zusammensetzt, die mit Hilfe von raumartigen Photonen mit der Metrik wechselwirken. Die träge Masse wäre demnach der Widerstand, den die Metrik einem

Körper bei Beschleunigung entgegengesetzt. Je größer die Energie der raumartigen Photonen, um so größer der Widerstand. Damit folgt die träge und auch die schwere Masse den Gesetzmäßigkeiten der raumartigen Photonen.

Wenn wir dies akzeptieren, akzeptieren wir gleichzeitig die Existenz negativer, ja sogar imaginärer Massen. Negative Massen würden einander ebenso anziehen, wie positive und wären von ihrem Charakter her der Antimaterie zuzuordnen. Dagegen würden zwei Körper, der eine aus "normaler", der andere aus Antimaterie einander abstoßen. Negative Massen hätten auch eine negative Energie. Wenn man, wie im Abschnitt 4.6.4.2.5. die Energie m_0c^2 als die Differenzenergie zur Energie des metrischen Wellenfelds definiert, wäre dies durchaus möglich. Mit der Definition des Bezugssystems legen wir einen festen Wert für $\hbar\omega_0$ und damit auch für die Differenz zur Energie des Teilchens und damit die Ruhmasse, fest.

Wie sieht es dann aber mit imaginären Massen aus? Wenn wir eine imaginäre Frequenz ω akzeptieren, müssen wir auch die Existenz imaginärer Massen akzeptieren und die Anerkennung imaginärer Massen impliziert automatisch die Existenz negativer Massen. Eine imaginäre Masse wäre z.B. der Imaginärteil der Energie $\hbar\omega$ einer elektromagnetischen Welle, die wir von der Seite um einen bestimmten Winkel versetzt betrachten. Da es sich hier um eine Energieform handelt, die keine Arbeit verrichten kann, würde eine imaginäre Masse auch keine Kraftwirkung ausüben bzw. einer Kraftwirkung unterliegen. Neutrinos und Antineutrinos verfügen über einen hohen Anteil imaginärer Masse $\hbar\text{Im}(\omega)/c^2$ (die Ruhmasse ist Null oder besser $\hbar H/c^2$). Da es aber immer noch einen, wenn auch geringen Realteil gibt, können sich Neutrinos auch nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, sind also keine Tachyonen.

Nun sollte man meinen, Ausdruck (655) wäre bereits die richtige, exakte Lösung. Diese Aussage ist aber noch nicht eindeutig. So entspricht (655) nur dem Produkt aus zeitlichem und geometrischem Anteil. Bei Wellenlängen und Zeiträumen ist es leicht zu verstehen, daß diese nur dem zeitlichen und geometrischen Anteil der Rotverschiebung unterliegen, während der räumliche Anteil durch die Festlegung des Koordinatensystems bestimmt wird. Ob das bei der Masse genauso ist, wollen wir als nächstes untersuchen.

Wir haben ja bereits festgestellt, daß die fermionische Materie über Welleneigenschaften verfügt, die sogenannten DEBROGLIE-Materiewellen. Diese unterliegen dann natürlich auch der Rotverschiebung, sei es die kosmologische oder die durch eine Relativgeschwindigkeit bedingte. Ausgehend von (348) bei einer Temperatur $T=0$ des metrischen Strahlungsfeldes kommen wir auf den fundamentalen Ausdruck:

$$W = \hbar\omega = mc^2 \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{\hbar\omega}{c^2} \quad (656)$$

Im Abschnitt 4.6.4.2.3. haben wir festgestellt, daß die Frequenz ω proportional $Q_0^{-3/2}$ ist (näherungsweise). Ein Vergleich mit (521) führt uns sofort zur Lösung:

$$m \approx \frac{\hbar\tilde{\omega}}{c^2} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0}\right)^{-\frac{3}{2}} = m_0 \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx m_0 \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_{\tilde{\gamma}}} = m_0\beta_{\tilde{\gamma}} \quad (657)$$

Wenn dafür den exakten Ausdruck $\beta_{\tilde{\gamma}}$ und für v die Summe $v=v_M+c_M$ einsetzen, ist das Ergebnis noch nicht identisch mit dem im Abschnitt 4.6.4.1. gefundenen. Das PLANCKSche Wirkungsquantum ist nach diesem Modell nämlich ebenfalls eine Funktion von Q_0 . Es gilt $\hbar\sim Q_0^{-1}$. Damit erhalten wir insgesamt für die energetische Rotverschiebung den Ausdruck $W\sim Q_0^{-5/2}$, wie wir ihn bereits bei Untersuchung der kosmischen Hintergrundstrahlung gefunden hatten:

$$m \approx \frac{\hbar\tilde{\omega}}{c^2} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0}\right)^{-\frac{5}{2}} = m_0 \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0}\right)^{-\frac{5}{2}} \approx \frac{m_0}{\sqrt[3]{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_{\tilde{\gamma}}} = m_0\beta^{\frac{2}{3}}\beta_{\tilde{\gamma}} \quad (658)$$

Wenn wir das PLANCKsche Wirkungsquantum also als variabel ansehen, wäre die Masse dann proportional $Q_0^{-5/2}$, was leicht einzusehen ist. Die „Differenz“ Q_0^{-1} entspricht nun aber genau dem räumlichen Anteil der Rotverschiebung, dem Navigationsgradienten und die Größenordnung von \hbar ist abhängig vom Bezugssystem. Damit haben wir nachgewiesen, daß innerhalb eines Bezugssystems für die Masse nur das Produkt aus zeitlichem und geometrischem Anteil wirksam wird. Der räumliche Anteil wird bei der Definition des Bezugssystems berücksichtigt. Kosmologisch gesehen befinden sich alle natürlichen Körper entlang r im freien Fall, so daß sie sich nicht gegenüber der Metrik bewegen ($v=0$), wie wir noch sehen werden, wobei v die Geschwindigkeit gegenüber der Metrik ist. Der rechte Klammerausdruck im Navigationsgradienten entfällt dann ganz und wir erhalten für die Masse:

$$m = m_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\vec{r}}} \left(\left(1 + \frac{t}{\bar{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{\bar{R}} \int \mathbf{v} dt \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-1} = m_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\vec{r}}} \left(1 + \frac{t}{\bar{T}} \right)_{v=0}^{-\frac{1}{2}} \quad (659)$$

Hier gilt ein gedachtes kartesisches Koordinatensystem außerhalb der Metrik und der Winkel γ ist nicht konstant. Ein solches Koordinatensystem haben wir benutzt, um die Eigenschaften der Metrik zu definieren.

Was bedeutet aber ein nicht konstantes PLANCKsches Wirkungsquantum für die physikalischen Gesetze? Wenn wir sagen, daß \hbar keine Konstante sein soll, sind aufgrund der Definition von \hbar (37) die Ladung und der magnetische Fluß ebenfalls keine Konstanten mehr. Das gilt dann auch für die Elektronenladung.

$$\hbar = q_0 \varphi_0 \sim Q_0^{-\frac{2}{2}} \rightarrow q_0 \sim Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad \varphi_0 \sim Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad (660)$$

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der schweren Masse (gravitative Anziehung), da auch die Gravitationskonstante vom Bezugssystem abhängig ist. Näheres dazu im Abschnitt 6.2.4. Die allgemeine Wirkung auf die physikalischen Gesetzmäßigkeiten soll anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden, der HEISENBERGschen Unschärferelation. In ihr unterliegt sowohl m , als auch λ einer Rotverschiebung:

$$\Delta(mv) \cdot \Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2} \quad (661)$$

$$\beta \Delta(mv) \cdot \beta^{-1} \Delta\lambda \geq \frac{\hbar}{2} \quad (662)$$

$$\Delta(mv) \left(\frac{Q_0}{\bar{Q}_0} \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \Delta\lambda \left(\frac{Q_0}{\bar{Q}_0} \right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{\hbar}{2} \quad \text{Klassisch} \quad (663)$$

$$\Delta(mv) \left(\frac{Q_0}{\bar{Q}_0} \right)^{-\frac{5}{2}} \cdot \Delta\lambda \left(\frac{Q_0}{\bar{Q}_0} \right)^{\frac{3}{2}} \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{Q_0}{\bar{Q}_0} \right)^{-\frac{2}{2}} \quad \text{Tatsächlich} \quad (664)$$

Damit unterliegen die Elektronen z.B. im Teilchenbeschleuniger (siehe Abschnitt 6.2.2.) rein quantitativ gesehen ganz anderen physikalischen Gesetzen, als bisher angenommen. Das meßbare Ergebnis entspricht jedoch dem klassischen Modell, d.h. die Änderungen kürzen sich heraus, da sowohl Masse, Länge und PLANCKsches Wirkungsquantum vom Bezugssystem abhängig sind. D.h. ein Beobachter sieht auch quantitativ immer dieselben physikalischen Gesetze unabhängig vom Bezugssystem. Als Konsequenz müssen wir auch die im Abschnitt 4.6.4.1.2. gemachten Aussagen bezüglich der Unbestimmtheit von Ort und Impuls von Elektronen in der Zeit kurz nach dem Urknall revidieren. Dort hatten wir ja für das Elektron eine konstante Masse angenommen. Diese steigt aber um den Faktor $Q_0^{-5/2}$ an, je mehr wir uns

dem Zeitpunkt $t=0$ nähern, so daß die damalige Unbestimmtheit den gleichen Wert wie heute gehabt hätte. Abschließend können wir folgende Aussage treffen:

VII. Wenn man das PLANCKsche Wirkungsquantum als veränderlich ansieht, beobachtet man dasselbe wie nach dem klassischen Modell, da dann auch Größen wie Ladung und magnetischer Fluß keine Konstanten mehr sind und sich die Änderungen herauskürzen.

Wenn man also nicht gerade eine Gravitationstheorie aufstellen oder die kosmologische Rotverschiebung erklären will, kann man sich gemütlich zurücklehnen, das PLANCKsche Wirkungsquantum eine Konstante sein lassen und erhält trotzdem die richtigen Ergebnisse.

6.1.5. Geschwindigkeit und andere Größen

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir gesehen, daß Größen wie Länge, Zeit und Masse sowohl von der Geschwindigkeit als auch vom Bezugssystem, abhängig sind. Weiterhin haben wir festgestellt, daß andere Größen, wie z.B. Ladung und Fluß allein vom Bezugssystem abhängen. Diese Abhängigkeit wird verursacht vom räumlichen Anteil der Rotverschiebung und entspricht bei den Fermionen dem Navigationsgradienten. Damit sind diese Größen aber auch von der Zeit und vom Abstand zum Koordinatenursprung und somit indirekt von der Geschwindigkeit (Integral) abhängig. Für die Ladung gilt z.B.:

$$q_0 = \tilde{q}_0 \left(\left(1 + \frac{t}{T} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \tilde{q}_0 \left(\left(1 + \frac{t}{T} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\tilde{R}} \int \mathbf{v} dt \right)^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (665)$$

Dies entspricht der Abhängigkeit von Q_0 (660) und gilt exakt. Wenn wir z.B. die Ladung von einem auf ein anderes Bezugssystem transformieren wollen (LORENTZ-Transformation), gilt im Gegensatz zur bisherigen Auffassung $q_0 \sim Q_0^{1/2} \sim \beta^{1/3}$. Hierbei ist β der klassische relativistische Dehnungsfaktor. Die Ladungs- und Fluß-Zunahme wird jedoch durch eine zusätzliche Massenzunahme in gleicher Größenordnung wieder ausgeglichen, so daß wir das gleiche beobachten, als wären q_0 und φ_0 invariant gegenüber LORENTZ-Transformationen und es gilt $m \sim \beta$.

Damit sind dann aber auch andere Größen, wie z.B. Spannung und Strom vom Bezugssystem abhängig. Durch Anwendung von Beziehungen wie $q = C \cdot U = \epsilon_0 r \cdot U$ und $\varphi = L \cdot I = \mu_0 r \cdot I$ erhält man folgende Abhängigkeiten: $U \sim Q_0^{-3/2} \sim \beta$ und $I \sim Q_0^{-3/2} \sim \beta$. Im Normalfall kann man aber alle diese Größen als Konstanten betrachten.

Einen Sonderfall bildet die Elektronenladung. Diese ist zunächst einmal auch vom Bezugssystem abhängig und folgt dem Wert von q_0 . Bei sehr hohen Geschwindigkeiten und/oder kleinen Güten gibt es aber noch eine zusätzliche Abhängigkeit von der Geschwindigkeit. Diese wollen wir im nächsten Abschnitt betrachten.

6.2. **Physikalische Größen von besonderer Bedeutung**

Wir wollen daher diese Arbeit mit der Untersuchung physikalischer Konstanten fortsetzen, die großen Einfluß auf den Aufbau unserer Welt haben. Eine davon ist die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante.

6.2.1. Die Feinstrukturkonstante

Die Feinstrukturkonstante α ist eine charakteristische Grundgröße der DIRACschen Theorie des Elektrons. Sie ist ein Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung, d.h. für die Kopplung geladener Elementarteilchen mit Photonen. Nach [5] ist sie folgendermaßen definiert:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137,038} = \frac{1}{4\pi} \cdot 0,0917 = 0,007297 \quad (666)$$

e ist in diesem Fall die Elektronenladung. Die Feinstrukturkonstante hat sich bisher bei der Beschreibung der Aufspaltung der Atomspektren (Lamb-Shift) gut bewährt. Auch wird sie verwandt, um die Abweichung zwischen Spin und magnetischem Moment, wie sie beim Elektron auftritt, zu erklären. Wir wollen nun aber sehen, ob sich hinter Ausdruck (666) nicht noch eine wesentliche, fundamentalere Gesetzmäßigkeit verbirgt.

Es ist offensichtlich angebracht, bei der Wechselwirkung von Elektronen oder Protonen mit Photonen mit der Elektronenladung zu rechnen. Im Abschnitt 4.6.3. haben wir jedoch festgestellt, daß es noch eine zweite Ladung, nämlich die Ladung des Kugelkondensators im MLE q_0 gibt, die mit $3,301378 e$ ganz in der Nähe liegt (350).

Bei einer Konstanten hat es im allgemeinen keinen Einfluß auf den physikalischen Inhalt, wenn man sie mit einer anderen Konstanten multipliziert. Versuchen wir doch jetzt einmal, was passiert, wenn man in (666) anstelle der Elektronenladung q_0 einsetzt:

$$\alpha_0 = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{\hbar}{4\pi\epsilon_0 c \hbar Z_0} = \frac{1}{4\pi} \quad q_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{Z_0}} \quad (667)$$

Damit haben wir das Wesen der SOMMERFELDSchen Feinstrukturkonstante aufgedeckt. Es gilt folgende eindeutige Aussage:

VIII. Die SOMMERFELDSche Feinstrukturkonstante ist das quadratische Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MINKOWSKischen Linienelements multipliziert mit einem geometrischen Faktor.

Der geometrische Faktor entspricht dem vollen Raumwinkel 1sr und ist der Faktor bei der Berechnung der Oberfläche einer Kugel. Dies ist nicht weiter verwunderlich, haben wir es doch hier mit der Wechselwirkung zweier unterschiedlicher Lösungen der Feldgleichungen untereinander zu tun. Die eine ist das Elektron (Kugel), die andere das Photon (Welle).

Damit haben wir zwar das Wesen der Feinstrukturkonstante aufgedeckt, damit ergibt sich jedoch eine neue Frage, die wir schon einmal im Verlauf dieser Arbeit gestellt haben:

1. *Warum beträgt die Elektronenladung ausgerechnet $0,302822 q_0$?*

Dies ist jedoch noch nicht alles. Aus dieser Frage und der Annahme, daß das PLANCKsche Wirkungsquantum nicht konstant ist, ergeben sich eine Reihe weiterer Fragen:

2. *Ist das Verhältnis zwischen beiden konstant? Wenn ja, warum?*
3. *Wenn nein oder weiß nicht:
Ist es ein Zufall, daß die Elektronenladung gerade heute nahe bei q_0 liegt?*
4. *Nach welcher Gesetzmäßigkeit verändert sich der Wert der Feinstrukturkonstante oder bleibt er konstant?*
5. *Welche Auswirkungen hat das auf andere Bereiche der Physik (Atommodell)?*

Als wesentlich kristallisiert sich hier Frage 3 heraus, die wir jedoch nicht mit absoluter Gewißheit beantworten können. Mit hoher Wahrscheinlichkeit können wir sagen, daß es kein Zufall ist. Das würde aber bedeuten, die Elektronenladung ist nicht konstant. Wir wollen jedoch den anderen Fall nicht ganz ausschließen.

6.2.2. Die Elektronenladung

6.2.2.1. Statische Betrachtung

Schon DIRAC hat eine Hypothese aufgestellt, nach der die Elektronenladung eine Funktion der Zeit ist (DIRACsche Hypothese). In seinem Modell ist auch die Gravitations»konstante« keine Konstante. Dies bedeutet, man kann diese Möglichkeit nicht ausschließen und es lohnt auf jeden Fall, hier weitere Untersuchungen anzustellen.

Wenn wir davon ausgehen, daß es kein Zufall ist, daß die Elektronenladung nahe bei q_0 liegt, so kann man auch vermuten, daß ein Verhältnis zwischen beiden besteht, daß sich nach einer gewissen Gesetzmäßigkeit verhält.

Die Definition von q_0 enthält das PLANCKsche Wirkungsquantum, das gleichwohl für die Theorie der Bosonen (z.B. Photonen) als auch für Fermionen (z.B. Elektronen) von wesentlicher Bedeutung ist — kombiniert mit dem Wellenausbreitungswiderstand des Vakuums Z_0 . Dies legt die Vermutung nahe, daß es sich bei beiden Ladungen eigentlich um ein und dasselbe handelt, wobei die Elektronenladung u.U. aufgrund besonderer Bedingungen nur kleiner (e) *erscheint*. Daher wollen wir untersuchen, ob es möglich ist, die Elektronenladung aus der Ladung des MINKOWSKIschen Linienelements q_0 zu berechnen. Wir betrachten dazu das Modell nach Bild 115.

Wir haben bisher festgestellt, daß sich der Grundzustand der Metrik nahe beim Expansionsmittelpunkt (0) bei einer Güte von $Q=1/2$ befindet. Im Bild 115 ist die Expansionskurve in diesem Gebiet eingezeichnet. Weiterhin haben wir festgestellt, daß es auch für die fermionische Materie so etwas wie einen Grundzustand geben muß, wobei wir beide Arten von Materie nur rotverschoben durch die *Linse* der Metrik beobachten können. Es ergibt sich die Frage: Bei welchem Gütewert liegt nun eigentlich der Grundzustand der fermionischen Materie?

Am naheliegendsten wäre die Annahme, daß sich dieser ebenfalls im Punkt $Q=1/2$ befindet. Nun haben wir festgestellt, daß dieser Punkt (1) den aperiodischen Grenzfall bildet, in dem keine periodische Wellenfunktion existieren kann. Dies ist aber eine notwendige Bedingung für die Existenz z.B. des Elektrons als Materiewelle (DEBROGLIE). Materiewellen bewegen sich nach unserer Definition entgegengesetzt zur Ausbreitungsrichtung der Metrik, was zur Folge hat, daß sie sich nicht fortbewegen, quasi auf der Stelle verharren und stehende Wellen bilden. Weiterhin ergibt sich daraus, daß diese Wellen im Gegensatz zu zeitartigen Vektoren den Punkt $Q=1$, in dem ein Phasensprung auftritt, nicht überwinden können, da sie hier reflektiert werden. Eine Materiewelle wäre damit zwischen den Punkten $1/2$ und 1 „eingesperrt“.

Wir nehmen nun weiter an, daß das Elektron in Wirklichkeit ebenfalls die Ladung q_0 hat, von der wir aber nur den Anteil e „sehen“, da das Elektron im Phasenraum gegenüber dem Beobachter, der sich weit weg auf der r -Achse befindet, um einen Winkel β verdreht ist.

Die (verschobene) r -Achse ist die Asymptote der Bahnkurve der Expansion (Bild 25) und verhält sich in der Nähe des Nullpunktes wie eine Parabel, weiter weg, wie eine Hyperbel. Uns interessiert zunächst vor allem der Winkel ε , der sich aus dem Argument des Integrals der komplexen Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} der Metrik (206) ergibt. Es gilt:

$$\varepsilon = \arg \int_0^T \underline{c} \, dt = -\arg j2 \int_0^T \frac{1}{2\omega_0 t} \frac{dt}{\sqrt{1 - \Theta^2(2\omega_0 t)}} \quad (668a)$$

Wirksam wird hier das Integral von \underline{c} und nicht der Wert selber, da für die weiteren Berechnungen nicht die Geschwindigkeit \underline{c} des Elektrons, sondern dessen Ort von Interesse ist. Mit Hilfe von (209) können wir (668a) folgendermaßen umformen:

$$\varepsilon = -\operatorname{arg} c \int_0^T \frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} \left(\cos \frac{1}{2} \operatorname{arg} \theta + j \sin \frac{1}{2} \operatorname{arg} \theta \right) dt = \operatorname{arg} 2c \int_0^T \frac{1}{2\omega_0 t \rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\operatorname{arg} \theta + \pi)} dt \quad (668b)$$

Das Integral nach der Zeit ist jedoch nicht besonders gut geeignet, da die Frequenz ω_0 selbst eine Funktion der Zeit ist. Wir substituieren daher t durch den Phasenwinkel $Q=2\omega_0 t$ und erhalten für den Winkel ε und für den Betrag des Nullvektors r_N :

$$Q = \sqrt{\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}} \quad dQ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\varepsilon_0}} t^{-\frac{1}{2}} dt \quad dt = \frac{\varepsilon_0}{\kappa_0} Q dQ \quad (669a)$$

$$\varepsilon = \operatorname{arg} 2r_1 \int_0^Q \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\operatorname{arg} \theta + \pi)} dQ = \operatorname{arg} \int_0^Q \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\operatorname{arg} \theta + \pi)} dQ \quad (669b)$$

$$r_N = \left| 2Zr_1 \int_0^Q \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\operatorname{arg} \theta + \pi)} dQ \right| \quad Z = \frac{R(Q)}{r_0(Q)} = \frac{H_1 R}{H_0 r_0} = \frac{3}{2} Q^{\frac{1}{2}} \quad (669c)$$

Mit $r_1=1/(\kappa_0 Z_0)$. Allerdings ist der linke Ausdruck von (669c) noch nicht vollständig, beschreibt er doch nur die Ausbreitung der Welle, es fehlt noch der Expansionsanteil Z des konstanten Wellenzahlvektors r_K über den gesamten Weltradius R , ansonsten gilt $Z=2mQ^{1/2}$ siehe (329). Er hat die Eigenschaft eines Zoomfaktors und wird vor das Integral gesetzt, da er alle Elemente dr gleichzeitig beeinflusst (siehe Abschnitt 4.5.2.). Insgesamt gilt:

$$r_N = \left| 3r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\operatorname{arg} \theta + \pi)} dQ \right| \quad (669d)$$

Nun läßt sich bestimmt eine analytische Lösung dieses Integrals finden, wenn man nur genug Zeit investiert. Dies würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Daher bestimmen wir das Integral numerisch mit Hilfe der »Mathematica«-Funktion `NIntegrate`. Dabei macht aber die Funktion $1/\rho_0$ besondere Schwierigkeiten und zwar aufgrund der vielen Nullstellen der Besselfunktionen. Um dennoch eine genaue Lösung zu ermöglichen, substituieren wir den Ausdruck $1/\rho_0$ durch eine Interpolationsfunktion mit Liste (Funktion `Interpolate`). Ausdruck (669b) $\operatorname{Ep}[Q]$ und (669d) $\operatorname{Rn}[Q]$ kann dann folgendermaßen berechnet werden (ohne r_1):

```

A=Function[(BesselJ[0,#]*BesselJ[2,#]+BesselY[0,#]*BesselY[2,#])/(BesselJ[0,#]^2+BesselY[0,#]^2)];
B=Function[(BesselY[0,#]*BesselJ[2,#]-BesselJ[0,#]*BesselY[2,#])/(BesselJ[0,#]^2+BesselY[0,#]^2)];
RhoQQ=Function[If[#<30,Sqrt[Sqrt[(1-A[#]^2+B[#]^2)^2+(2*A[#]*B[#])^2]],2/Sqrt[#]]];
ArgThetaQ=Function[Arg[1-A[#]^2+B[#]^2+I*2*A[#]*B[#]]];
rq={{0,0}};
For[x=-8; i=0, x<4, ++i, x+=.01; AppendTo[rq, {10^x, N[1/RhoQQ[10^x]]}];
RhoQ1=Interpolation[rq];
RhoQQ1=Function[If[#<10^4,RhoQ1[#],.5*Sqrt[#]]];
Ep=Function[Arg[NIntegrate[RhoQQ1[x]*Exp[-1/2*(ArgThetaQ[x]+Pi)],{x,0,#}]]];
Rn=Function[Abs[3*Sqrt[#]*NIntegrate[RhoQQ1[x]*Exp[-1/2*(ArgThetaQ[x]+Pi)],{x,0,#}]]];

```

(669e)

Der absolute Fehler ist kleiner 10^{-7} . Die Elektronenladung ist dann die rechtwinklige Abbildung der Ladung q_0 auf die r -Achse wie im Bild 115 dargestellt:

$$\sin \gamma = \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon \right) = \frac{e}{q_0} \quad e = q_0 \sin \gamma \quad (670)$$

Variablen auf. Die schwache Wechselwirkung wird quantitativ gesehen stark, da sich die Neutrinos dann wie Photonen verhalten. Gleichzeitig kommt es zu einer Symmetriebrechung.

Nun aber zurück zum Elektron: Während der Grundzustand der Metrik bei einer Güte von $Q=1/2$ angesiedelt ist, haben wir für das Elektron einen Wert von $Q=0,656724$ gefunden, hatten jedoch einen Wert von $Q=2/3$ erwartet. Rechnet man mit $Q=2/3$, erhält man einen Wert für e , der um 2,54% über dem tatsächlich beobachteten liegt. Wie ist diese Abweichung zu interpretieren?

Die Feinstrukturkonstante wird ja bekanntlich bei der Interpretation von Wechselwirkungsprozessen zwischen Elektron und Photon eingesetzt, wobei sich der Beobachter normalerweise weit entfernt auf dem konstanten Wellenzahlvektor r_K bei einem Wert $Q \gg 1$ befindet. In großer Entfernung fällt dieser mit der r -Achse zusammen. Auch das Elektron als Fermion bewegt sich nur entlang des konstanten Wellenzahlvektors. Da die Güte Q identisch mit dem Phasenwinkel der Hankelfunktion ist, ist diese definiert entlang von r_K , d.h. entlang des Bogens. Die Wellenfunktion des Elektrons weist damit eine gewisse Krümmung auf. Das Photon selber, der Nullvektor r_N , ist dagegen geradlinig und nicht gekrümmt. Da es sich um ein Photon handelt, das der Beobachter bei $Q \gg 1$ beobachtet, liegt der Winkel α extrem nahe bei $\pi/2$.

Die eigentliche Wechselwirkung findet nun allerdings im Grundzustand des Elektrons bei $Q=2/3$ statt, d.h. der Nullvektor wird mit allen seinen Winkeln vergrößert auf den Phasenraum des Elektrons abgebildet. Das Ergebnis der Wechselwirkung wird dann wiederum verkleinert bei $Q \gg 1$ beobachtet. Und bei der eigentlichen Wechselwirkung kommt es zwangsweise zu einer Anpassung (Streckung) der gekrümmten Wellenfunktion des Elektrons auf den nicht gekrümmten Nullvektor. Aus diesem Grund ist es von Interesse, die Bogenlänge von r_K zu bestimmen. Wenn wir auch keine analytische Lösung für (669d) finden konnten, ist die Bestimmung der Bogenlänge nicht unmöglich. Mit Hilfe von (668b) erhalten wir:

$$r_K = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{\epsilon_0}{\kappa_0} \int_0^Q Q \sqrt{x'^2 + y'^2} dQ \quad (671a)$$

$$r_K = 2r_1 \int_0^Q \frac{Q}{\rho_0} \sqrt{\cos^2 \frac{1}{2} \arg \theta + \sin^2 \frac{1}{2} \arg \theta} dQ = 2r_1 \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} \quad (671b)$$

Dies ist aber wiederum nur der Anteil der Wellenausbreitung. Zusammen mit dem Expansionsanteil, dieser gilt gleichermaßen für die Bogenlänge, erhalten wir:

$$r_K = 3r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} = 3r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q \frac{dQ}{\sqrt[4]{(1-A^2+B^2)^2 + (2AB)^2}} \stackrel{\text{def}}{=} R(Q) \quad (671c)$$

Auch für den Ausdruck (671c) gibt es gewiß eine analytische Lösung, diese ist aber immer noch zu kompliziert, so daß wir dieses Integral ebenfalls numerisch bestimmen werden, zumindest für kleine Werte Q , denn für große Werte gilt die Näherung $2/\rho_0 \approx Q^{1/2}$ und das Integral wird damit analytisch lösbar:

$$r_K = \frac{3}{2} r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q \frac{2}{\rho_0} dQ \approx \frac{3}{2} r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q Q^{\frac{1}{2}} dQ = r_1 Q^2 \quad Q \gg 1 \quad (671d)$$

Dies ist eine bekannte Beziehung, die wir damit hergeleitet haben. Sie gilt allerdings nur für Werte $Q \gg 1$. Für die numerische Bestimmung des Integrals verwenden wir vorteilhafterweise folgenden Ausdruck in »Mathematica«:

$$Rk = \text{Function}[If[# < 10^4, 3 * Sqrt[#] * NIntegrate[RhoQQ1[x], {x, 0, #}], #^2]]; \quad (671e)$$

Nun interessiert uns vor allem das Verhältnis zwischen r_K und r_N . Der Verlauf ist in Bild 116 dargestellt und zwar mit und ohne Expansionsanteil.

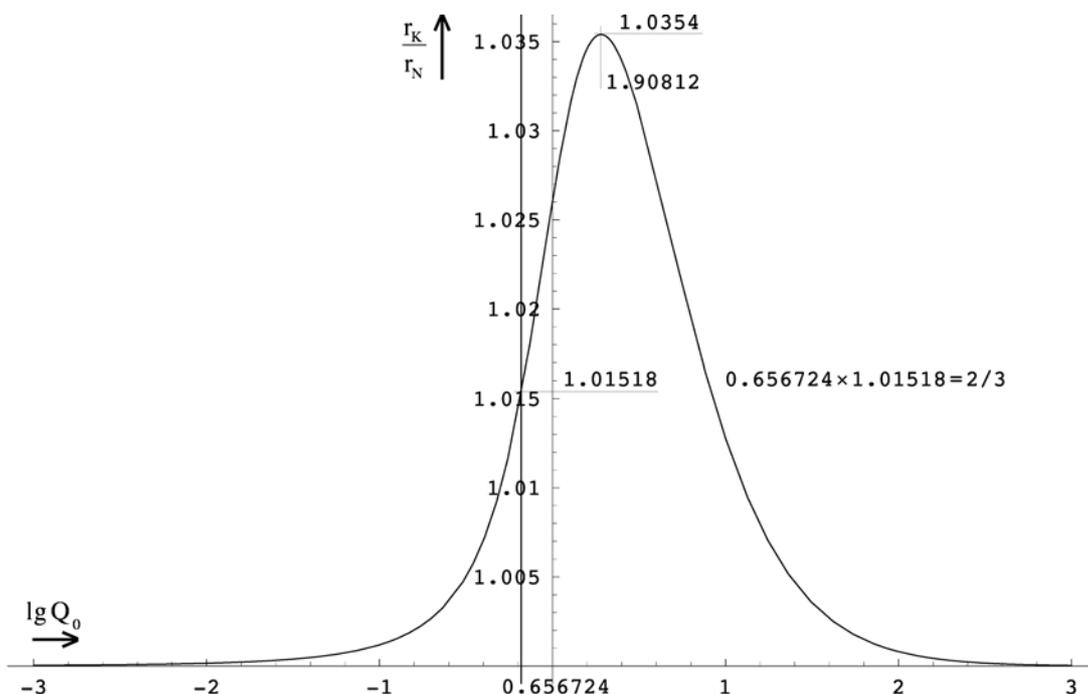


Bild 116
Verhältnis zwischen der Länge des konstanten Wellenzahlvektors r_K und der Länge des Nullvektors r_N als Funktion von Q_0

Der Expansionsanteil kürzt sich in diesem Fall heraus. Und man sieht hier folgendes: Nimmt man an, daß der Grundzustand (r_N) des Elektrons bei $Q_0=0,656724$ liegt, so ist der zugehörige konstante Wellenzahlvektor r_K um genau 1,0151826 länger. Multipliziert man nun aber den Phasenwinkel $Q_0=2\omega_0 t=0,656724$ mit 1,0151826, so erhält man als Ergebnis einen Wert von 0,6666946. Dies ist bis auf eine Abweichung von nur $2,794 \cdot 10^{-5}$ gleich $2/3$. Ursache könnte der Rechenfehler bei der numerischen Integration sein. Erhöht man allerdings die Genauigkeit der Berechnung auf das doppelte, erhält man genau dasselbe Ergebnis bis auf die letzte Stelle. Es könnte sich dann nur noch um einen systematischen Fehler handeln oder um andere, nicht berücksichtigte Einflüsse (z.B. Hyperfeinstruktur) bei der Bestimmung der Elektronenladung im Experiment. Oder aber der Wert liegt tatsächlich nicht genau bei $2/3$, sondern bei $0,6666946$, was auch nicht unbedingt ein Problem darstellen sollte und eine Abweichung von nur $2,794 \cdot 10^{-5}$ ist in der QED schon ein voller Erfolg.

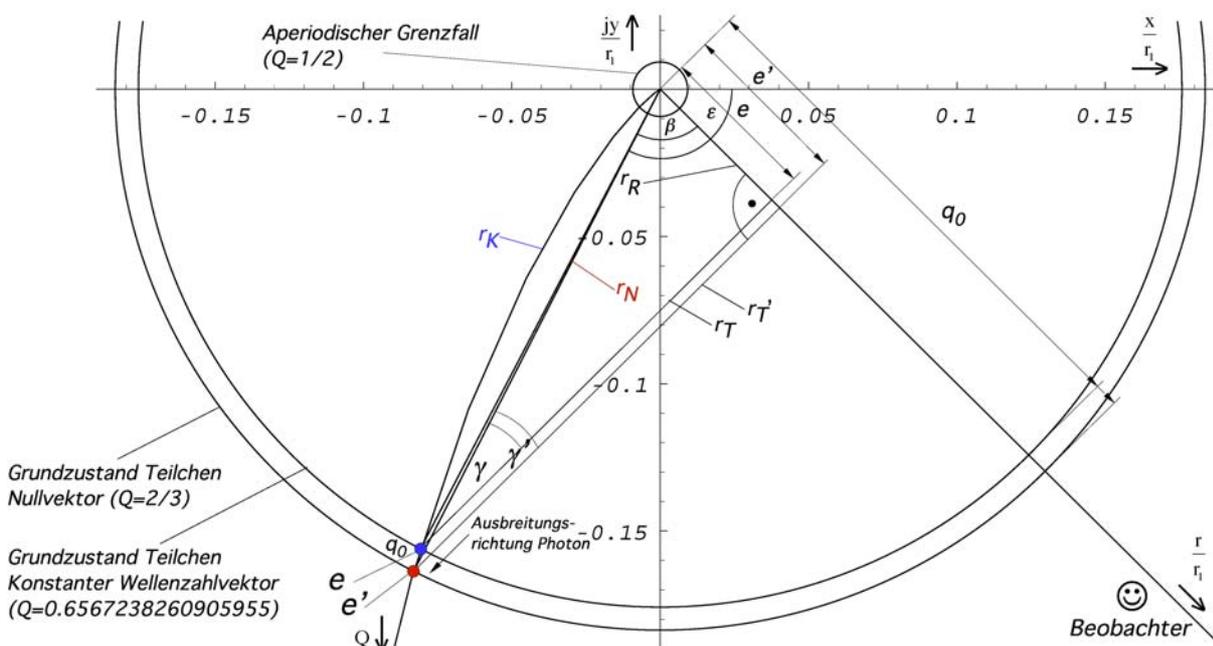


Bild 117
Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MLE im Phasenraum des Elektrons (größerer Maßstab)

Im Bild 117 sind die genauen Verhältnisse noch einmal in einem größeren Maßstab dargestellt. Man erkennt die beiden Grundzustände des Elektrons e (blau) und e' (rot), wobei letzterer gleich dem gestreckten konstanten Wellenzahlvektor von e sein müßte. Dies ist allerdings nicht der Fall, da sich bei der Streckung der Winkel ε und damit auch β geringfügig ändert. Wir bestimmen die Längen von r_K bzw. r_N für die drei Werte zu:

$$r_K(0,656724) = 3r_1 \sqrt{0,656724} \int_0^{0,656724} \frac{dQ}{\rho_0} = 0,178510 r_1 \quad (672a)$$

$$r_N\left(\frac{2}{3}\right) = \left| 3r_1 \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\arg\theta+\pi)} dQ \right| = 0,183660 r_1 \quad (672b)$$

$$r_N(0,666695) = \left| 3r_1 \sqrt{0,666695} \int_0^{0,666695} \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\arg\theta+\pi)} dQ \right| = 0,183683 r_1 \quad (672c)$$

Man sieht, es kommt zu keiner Übereinstimmung in der Länge. Auch wenn man den Expansionsfaktor herausrechnet erhält man immer ein abweichendes Ergebnis (Übereinstimmung würde bei einem Phasenwinkel von 0,660147 vorliegen). Das bedeutet, der Grundzustand e liegt nicht bei $Q=2/3$, sondern bei einer Bogenlänge $r_K=2/3r_1$. Weiterhin können wir mit hoher Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, daß sich der Zustand e' bei einem Phasenwinkel von $Q=2/3$ befindet, kommt doch dieser Wert auch häufig als Faktor in der QED vor. Nun wollen wir noch die zugehörigen Ladungen berechnen:

$$q_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg \int_0^{0,656724} \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\arg\theta+\pi)} dQ\right) = e \quad (672d)$$

$$q_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \arg \int_0^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\rho_0} e^{-j\frac{1}{2}(\arg\theta+\pi)} dQ\right) = 1,0253956 e = e' \quad (672e)$$

Den Zustand e' würde ich dabei als angeregten Zustand des Elektrons bezeichnen. Gerade bei der Feinstrukturkonstante (Kopplungskonstante bei Wechselwirkungen zwischen Photonen und Elektronen) müssen ja immer Korrekturen vorgenommen werden, um das rechnerische Ergebnis mit den Messungen in Übereinstimmung zu bringen, wobei man allgemein davon ausgeht, daß der überall angegebene Wert (666) den Grundzustand von α bei einer Energie $W=0$ angibt, der sich umso mehr erhöht, je größer die Energie der Wechselwirkung ist. Im Durchschnitt korrigiert man α um 10% nach oben. Nun kann man anstelle von einem korrigierten α natürlich auch von einer nach oben korrigierten Elektronenladung e' ausgehen und da e in α zum Quadrat vorkommt, böte sich der Wert (672e) hier schon mal an, denn $1,0254^2=1,05144$. Das sind zwar noch keine 10% aber wenn man die Ladung korrigiert, muß man im gleichen Zug auch die Masse korrigieren und es gilt $1,05144^2=1,10552$.

Möglich wäre natürlich, daß es außer e' eine Reihe verschiedener angeregter Zustände des Elektrons gibt, die alle auf dem konstanten Wellenzahlvektor liegen. Damit haben wir nachgewiesen, daß es möglich ist, eine Beziehung zwischen der Ladung des Elektrons e und der Ladung des MLE q_0 zu finden. Vielleicht sind diese beiden ladungstragenden Teilchen sogar identisch, einmal als freies Teilchen (Elektron), das andere mal gebunden in der Metrik?

6.2.2.2. Dynamische Betrachtung

Wir haben bisher festgestellt, daß die Elektronenladung gleich der rechtwinkligen Abbildung der Ladung q_0 des MLE auf die Metrikachse r ist (sein könnte). Was passiert nun, wenn sich

der Beobachter mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt oder in einem Gebiet starker Krümmung befindet oder ganz einfach, wie ist die räumliche und zeitliche Abhängigkeit der Elektronenladung?

Wenn sich der Beobachter mit einer von Null verschiedenen Relativgeschwindigkeit zum Koordinatenursprung bewegt, bewegt er sich physikalisch gesehen rückwärts auf der Expansionskurve in Richtung auf den Nullpunkt. Genauso ist es, wenn er in die Nähe eines starken Gravitationsfeldes oder des Partikelhorizonts kommt. Die zeitliche Abhängigkeit ist entgegengesetzt. In der natürlichen Zeitrichtung entfernt er sich vom Nullpunkt der Expansionskurve.

All dies ist abhängig vom Wert Q_0 (Bezugssystem), von Zeit, Entfernung, Geschwindigkeit und/oder Gravitationspotential. Um diese Abhängigkeit zu bestimmen, betrachten wir noch einmal das Modell nach Bild 115 und zwar ohne Expansion (spielt hier keine Rolle).

Befindet sich der Beobachter weit entfernt auf der r -Achse, so beträgt der Phasenwinkel $\varepsilon - \beta$ der Metrik, das ist der Vektor vom Ursprung zum Punkt des Beobachters auf der Expansionskurve, (beinahe) $-\pi/4$ (r -Achse). Die r -Achse bildet die Asymptote der Expansionskurve. Nähert man sich nun dem Ursprung, so wird der Betrag des Winkels größer (r -Achse klappt nach links). Die Ladung ergibt sich jetzt zu $e' = q_0 \sin \gamma'$ (nicht identisch mit e' und γ' aus Bild 117). Hierbei bleibt der rechte Winkel (α) bestehen, da sich mit dem Umklappen auch die Ausbreitungsrichtung der Photonen ändert. Im Dreieck $e' r_T' q_0$ gilt dann folgende Beziehung:

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - (-\varepsilon_e + \arg \int \underline{c} dt) \quad (673)$$

$$\sin \gamma = \sin \left(\frac{\pi}{2} - (-\varepsilon_e + \arg \int \underline{c} dt) \right) = \cos (2,04846 + \arg \int \underline{c} dt) \quad (674)$$

$$e' = q_0 \cos (2,04846 + \arg \int \underline{c} dt) \quad (675)$$

Der Verlauf der dazugehörigen Funktion in Abhängigkeit von Q_0 ist im Bild 118 dargestellt. Man erkennt, daß das Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MLE über einen großen Bereich nahezu konstant ist. Bei der Feinstrukturkonstante handelt es sich also tatsächlich um eine Konstante, zumindest für den heutzutage technisch zugänglichen Bereich. Nähert man sich dem Ursprung, z.B. bei sehr hohen Geschwindigkeiten, ändert sich das Verhältnis. Das Maximum liegt bei $Q=2/3$.

Da in diesem Fall nicht die Funktion \underline{c} , sondern deren Integral für den Winkel $\sin \gamma$ wirksam wird, ist es auch schwieriger, die Funktion in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v aufzustellen. Ein möglicher Ansatz wäre gegeben, wenn man annimmt, daß dann anstelle des relativistischen Dehnungsfaktors ebenfalls dessen Integral $\arcsin(v/c)$ wirksam wird. Dieses ergibt als Resultat bereits einen Winkel und die Beziehung (675) würde dann folgendermaßen lauten:

$$e' = q_0 \cos \left(2,04846 + \arg \int_0^T \underline{c} dt + \arcsin \frac{v}{c} \right) \quad (676)$$

$$e' \approx q_0 \cos \left(1,26306 + \arcsin \frac{v}{c} \right) \quad (677)$$

Die letzten beiden Ausdrücke können aber nicht bestehen, da sich Widersprüche mit den Meßergebnissen aus Beschleunigerexperimenten ergeben. So müßte bereits bei den derzeit erreichten Geschwindigkeiten eine merkliche Abweichung der Elektronenladung auftreten, die man aber nicht gefunden hat. Auch entspricht Ausdruck (676) der Applikation des Winkels γ_{γ} aus der Theorie des Photons, d. h. (676) läßt sich mit Hilfe des Winkels γ_{γ} darstellen ($v=c_M+v_M$). Wirksam wird aber das Integral nach der Zeit, also der Weg.

Mit Hilfe von Ausdruck (675) gelingt es zumindest, die Funktion $\cos\beta$ in Abhängigkeit von der Güte darzustellen. Wenn es jetzt gelingt, die Güte als Funktion der Geschwindigkeit zu bestimmen, haben wir auch die gesuchte Funktion $\cos\beta(v)$. Im Abschnitt 6.1.2.1. haben wir eine Näherungslösung gefunden, die es uns erlauben würde, $\cos\beta(v)$ näherungsweise darzustellen. Gleichzeitig haben wir aber mit dem Ausdruck für den relativistischen Dehnungsfaktor β auch einen Phasenwinkel $\phi(v)$ gefunden, mit dem wir bisher nichts anfangen konnten (593).

Wenn wir nun unseren Winkel β mit Hilfe von ϕ ausdrücken wollen, müssen wir vorher eine Anpassung der Wertebereiche vornehmen (Phasenangleichung), denn beide sind unterschiedlich. Gesucht ist die Differenz $\varepsilon - \beta$, die über einen Bereich von $3/4\pi$ läuft ($-\pi/4 \dots -\pi$):

$$\varepsilon - \beta = \arg \int \underline{c} dt \approx -\frac{5}{8}\pi - \frac{3}{4}\arctan \tilde{Q}_0 V \quad (678)$$

Hierbei ist V die Verstimmung gemäß (589). In (675) eingesetzt erhalten wir schließlich:

$$\sin \gamma \approx \cos\left(0,0849646 - \frac{3}{4}\arctan \tilde{Q}_0 V\right) \approx \cos \frac{3}{4}\arctan \tilde{Q}_0 V \quad (679)$$

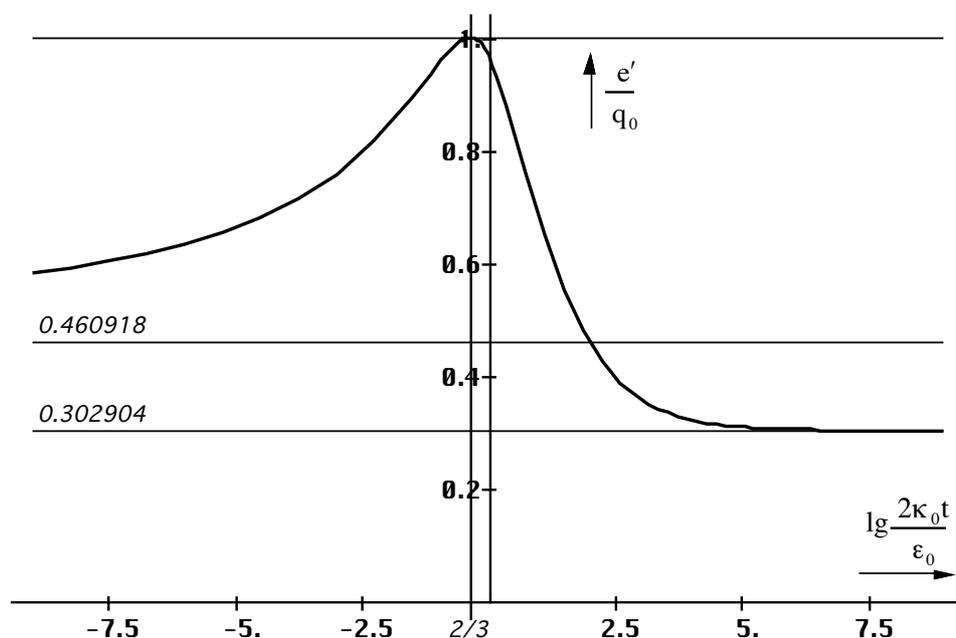


Bild 118
Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MINKOWSKISCHEN
Linielements als Funktion der Zeit/Güte nach (675)

Bei dem kleinen Nullwinkel 0,0849646 scheint es sich wieder um ein Krümmungsphänomen aus der QED zu handeln, wobei der Wert bei Annahme der exakten Ausgangsbedingungen durchaus gleich Null sein könnte. Wie kommen wir nun aber gerade auf einen Faktor $3/4$? Die Multiplikation eines Phasenwinkels mit einem Faktor $3/4$ entspricht dem Exponenten $3/4$ im Betrag. Betrachten wir den Ausdruck $\arg \int \underline{c} dt$ genauer, so hängt \underline{c} von der Zeit dt ab. In der Näherung gilt $\underline{c} \sim Q_0^{-1/2} \sim t^{-1/4}$. Ins Integral eingesetzt erhalten wir wiederum:

$$\int \underline{c} dt \approx c \int Q_0^{-1/2} dt = c \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_0}{2\kappa_0}} \int t^{-1/4} dt = \frac{4}{3} c \sqrt[4]{\frac{\varepsilon_0 t^3}{2\kappa_0}} \quad (680)$$

$$\int \underline{c} dt \approx \frac{2}{3} r_1 \left(\frac{2\kappa_0 t}{\varepsilon_0}\right)^{3/4} = \frac{2}{3} r_1 Q_0^{3/2} \hat{=} \frac{\tilde{R}}{2} \beta^{-1} \quad (681)$$

R ist der Weltradius und β der klassische relativistische Dehnungsfaktor. Wir kommen hier also tatsächlich auf einen Exponenten von $3/4$ für t und dieser entspricht direkt dem Kehrwert

des relativistischen Dehnungsfaktors. Damit wäre Ausdruck (679) nicht unwahrscheinlich. Er stellt genau gesehen aber nur eine Näherungslösung dar, da er auf der Lösung der falschen Differentialgleichung beruht. Den exakten Ausdruck erhalten wir durch Erweiterung von (679) mit Hilfe von (149) als Lösung der exakten Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich ($\Omega=Q_0V$) zu:

$$\sin \gamma = \cos \left(0,0849646 - \frac{3}{4} \left(\arctan(\tilde{Q}_0 V) - \frac{\tilde{Q}_0 V}{1 + \tilde{Q}_0^2 V^2} \right) \right) \quad (682)$$

Der Verlauf für beide Lösungen ist in den folgenden Bildern dargestellt. Die Eigenschaften von (682) sind folgende: Für große Werte Q_0 kann man den Bruch vernachlässigen und der Wert $\sin \gamma$ ist bis nahe an c konstant. Danach springt γ direkt auf $-\pi$. Bei einem Ausgangswert $Q_0=10^{60}$ ergibt sich z.B. erst bei einer Geschwindigkeit von $c(1-10^{-30})$ eine merkliche Abweichung, also außerhalb der technischen Möglichkeiten. Anders sieht es bei kleineren Ausgangsgüten aus. Hier gibt es einen weichen Übergang.

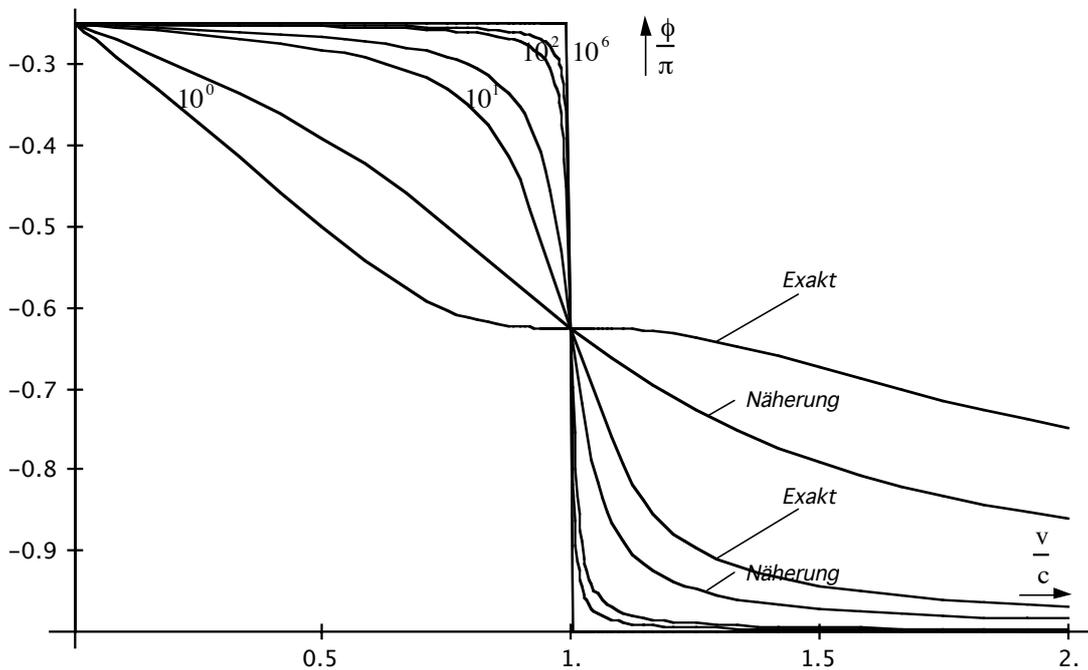


Bild 119
Phasenwinkel ϕ des Beobachters
als Funktion der Geschwindigkeit $v=v_M$

Für die Geschwindigkeit wurde hier ein Wert $v=v_M$ also gegenüber der Metrik angenommen. Bei kleinen Ausgangsgüten entspricht dieser Fall aber nicht den Gegebenheiten, da der Winkel ϕ hier schon bei $v=0$ von $-\pi/4$ verschieden sein müßte. Wir müssen also auch hier den metrischen Vektor c_M addieren, um den Einfluß der nicht unwesentlichen Grundkrümmung, wie sie z.B. in der Nähe eines Partikelhorizonts auftritt, zu berücksichtigen. Dies steht im Gegensatz zu unserer ursprünglich im Abschnitt 6.1.2.1. gemachten Aussage, die wir hiermit zurückziehen. Der metrische Vektor muß also bei allen Geschwindigkeiten addiert werden, auch wenn der entsprechende Ausdruck Q_0 , ω_0 oder r_0 enthält. Der tatsächliche(?) Verlauf des Phasenwinkels ϕ sowie das daraus resultierende Verhältnis zwischen Elektronenladung und Ladung des MLE ist in den Bildern 120 und 121 dargestellt.

Für die für uns maßgeblichen Güten von $10^3 \dots 10^{60}$ ist die Feinstrukturkonstante also tatsächlich eine Konstante (der Wert 10^3 wird bereits $3,2 \cdot 10^{99}$ s nach dem Urknall erreicht). Innerhalb oder hinter einem Partikelhorizont hat sie jedoch einen anderen Wert. Legt man den Ursprung des Bezugssystems in die Nähe einer Singularität, wird man in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ein anderes Ladungsverhältnis messen, abgesehen vom räumlichen Anteil, der gleichzeitig auf e und q_0 wirkt und in jedem Bezugssystem vorhanden ist. Zusätzlich ändert sich e natürlich mit q_0 , was nicht vergessen werden sollte.

Die Ausdrücke (679) und (682) gelten jedoch nur für positive Geschwindigkeiten. Befindet man sich z.B. in der Nähe eines SCHWARZSCHILD-Radius (außerhalb), ist die Geschwindigkeit auf das Zentrum der Singularität gerichtet. Bewegt man sich nun von diesem Ort mit einer Geschwindigkeit fort, bei der die Summe $c_M + v_M$ negativ wird, hat man den Einflußbereich der Singularität verlassen. Die neue Geschwindigkeit ist dann wieder positiv auf den Partikelhorizont des Universums $R/2$ gerichtet.

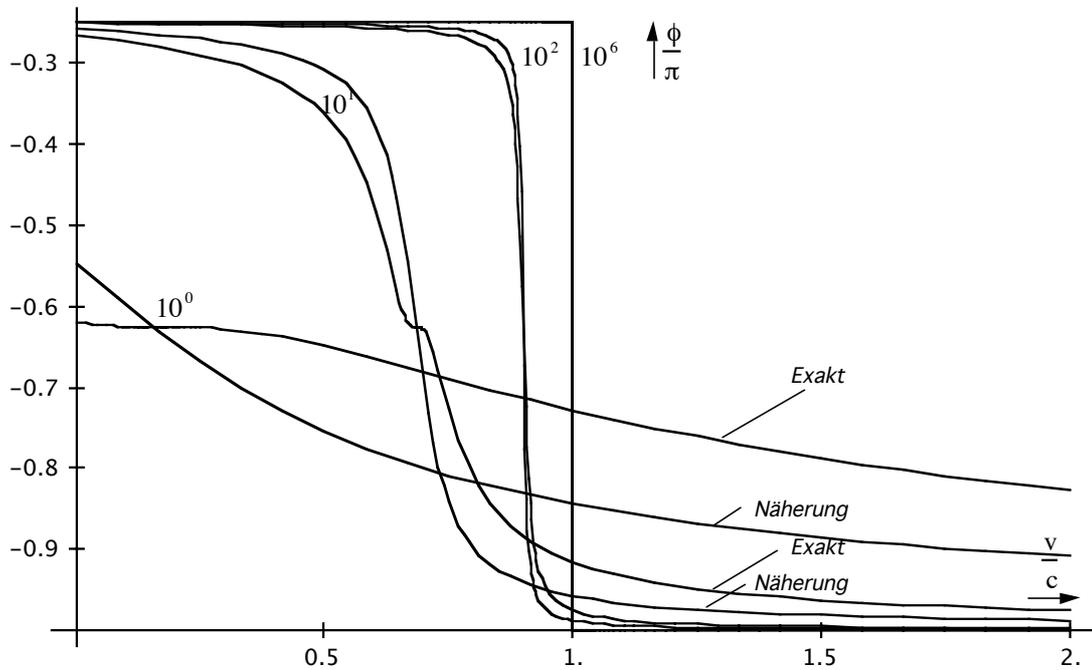


Bild 120
Phasenwinkel ϕ des Beobachters
als Funktion der Geschwindigkeit $v = v_M + c_M$

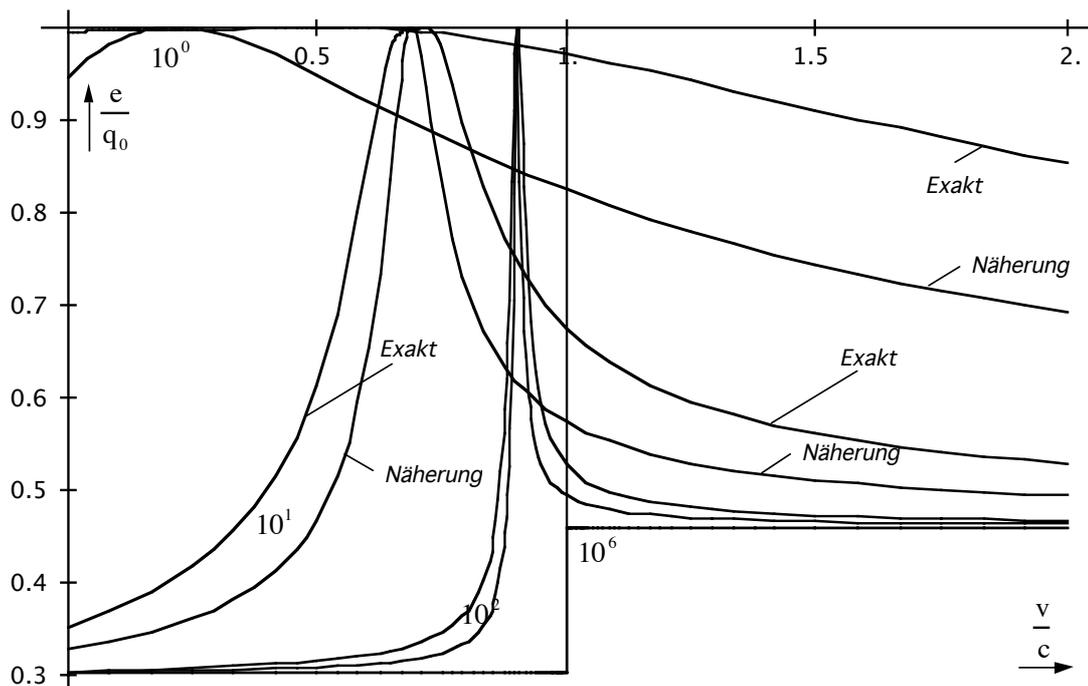


Bild 121
Verhältnis von Elektronenladung zur Ladung des MINKOWSKISCHEN
Linielements als Funktion von Güte und Geschwindigkeit $v = v_M + c_M$

Zum Schluß noch zum Thema Teilchenbeschleuniger. Ich hatte ja versprochen, diesen Punkt noch einmal in Bezug auf den zusätzlichen Anteil der Masse- und Ladungszunahme genauer zu untersuchen. Die Frage ist, kürzen sich auch im Teilchenbeschleuniger die zusätzlichen Anteile heraus? Rufen wir uns zuerst die unterschiedlichen Abhängigkeiten ins Gedächtnis:

$$mc^2 \sim Q_0^{-\frac{5}{2}} \quad \hbar\omega \sim Q_0^{-\frac{5}{2}} \quad (683)$$

$$\omega \sim Q_0^{-\frac{3}{2}} \quad \hbar = q_0\varphi_0 \sim Q_0^{-\frac{2}{2}} \rightarrow q_0 \sim Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad \varphi_0 \sim Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad (684)$$

Für den technisch zugänglichen Bereich genügen die Näherungsformeln. Derzeit wird nun davon ausgegangen, daß sowohl die Elektronenladung als auch das PLANCKsche Wirkungsquantum echte Konstanten sind. Das gleiche gilt auch für die magnetische Induktion $B=d\varphi/dA$, durch den das Elektron im Beschleuniger auf seiner Bahn gehalten wird.

Wir haben es nun mit zweierlei Kräften zu tun. Einerseits unterliegt das Elektron der Zentrifugalkraft $F_z=m_e v/r$, andererseits erzeugt es eine LORENTZ-Kraft $\mathbf{F}_L=e(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$. Beide sind entgegengerichtet. Es gilt $v\perp r$, also $F_L=e vB$. Für das Zyklotron ($B=\text{const}$) und auch für das Synchrotron ($B\neq\text{const}$) erhalten wir damit den klassischen Ausdruck:

$$r = \frac{\beta(\tilde{m}_e v)}{eB} \sim \beta v \quad (685)$$

Nach diesem Modell unterliegen nun sowohl m_e , e als auch die Induktion B einer zusätzlichen Rotverschiebung. Insgesamt gilt für die Elektronenmasse $m_e\sim Q_0^{-5/2}\sim\beta^{5/3}$, für die Elektronenladung $e\sim Q_0^{-1/2}\sim\beta^{1/3}$ und wenn man davon ausgeht, daß der Bahnradius r und damit auch die Flächenelemente dA des Magnetfelds B für den Beobachter *keiner* Längenkontraktion unterliegen, für die Induktion $B\sim\varphi\sim Q_0^{-1/2}\sim\beta^{1/3}$. In (685) eingesetzt erhalten wir schließlich mit

$$r = \frac{\beta^{\frac{5}{3}}(\tilde{m}_e v)}{\beta^{\frac{1}{3}}\tilde{e}\beta^{\frac{1}{3}}B} \sim \beta v \quad (686)$$

dasselbe Ergebnis wie nach dem klassischen Modell, wo wir e und B als konstant angesehen haben. Die zusätzliche Massenzunahme kürzt sich also tatsächlich heraus.

6.2.3. Der klassische Elektronenradius

Inzwischen wissen wir, daß es diesen eigentlich nicht gibt, wird das Elektron doch durch eine Wellenfunktion beschrieben. Das Elektron verfügt aber auch über Teilcheneigenschaften. Nun haben wir das MINKOWSKISCHE Linienelement als einen Kugelkondensator beschrieben, der sich in seinem eigenen Magnetfeld bewegt und diesem auch einen Radius $r_0/(4\pi)$ zugeordnet, was Ähnlichkeiten mit dem Vorgehen bei der Definition des klassischen Elektronenradius aufweist.

Hierbei ging man seinerzeit davon aus, daß auch das Elektron einem Kugelkondensator gleicht mit einer bestimmten Kapazität, die abhängig sein sollte vom Radius des Elektrons. Da die Ladung bekannt war, gab es nur einen bestimmten Radius, bei dem Energie, Ladung und Kapazität in Übereinstimmung gebracht werden konnten. Dieser ist folgendermaßen definiert:

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\beta m_e c^2} \sim \beta^{-1} \quad (687)$$

Wir haben hier gleich den relativistischen Dehnungsfaktor β für die Masse eingesetzt. Der klassische Elektronenradius folgt damit nach klassischem Verständnis (interessante

Doppelung) der Funktion der relativistischen Längenkontraktion, was keinen Widerspruch darstellt. Nun setzen wir die tatsächlichen Werte für die Masse und die Ladung des Elektrons ein und erhalten den Ausdruck für den “modernen” klassischen Elektronenradius:

$$r_e = \frac{\beta^{\frac{2}{3}} e^2}{4\pi\epsilon_0 \beta^{\frac{5}{3}} m_e c^2} \sim \beta^{-1} \sim Q_0^{\frac{3}{2}} \quad (688)$$

Auch hier kürzen sich der zusätzliche Masseanteil und die Ladungszunahme heraus. Der Radius unterliegt damit auch nach “moderner” Auffassung der einfachen relativistischen Längenkontraktion. Damit gibt es einen wesentlichen Unterschied zum Kondensator des MLE, dessen Radius nur proportional Q_0 ist.

6.2.4. Der BOHRsche Wasserstoffradius

Auch beim Atom ist ein ähnlicher Effekt zu beobachten. Betrachten wir dazu als einfaches Beispiel den klassischen BOHRschen Wasserstoffradius, der zwar die tatsächlichen Bedingungen nicht richtig widerspiegelt, jedoch als Maßstab dafür dienen kann, ob sich die Größenverhältnisse innerhalb des Atoms ändern. Er ist nach [5] folgendermaßen definiert (wir benutzen wieder die Näherung und setzen gleich β für die Masse ein):

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{\beta m_e e^2} \sim \beta^{-1} \quad (689)$$

Auch der BOHRsche Wasserstoffradius unterliegt damit der einfachen relativistischen Längenkontraktion, d.h. die atomaren Maßstäbe werden um den Faktor β^{-1} verkürzt beobachtet, genau wie bei einem makroskopischen Körper. Wie sieht es nun aber mit den zusätzlichen Anteilen aus?

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \beta^{\frac{4}{3}} \hbar^2}{\beta^{\frac{5}{3}} m_e \beta^{\frac{2}{3}} e^2} \sim \beta^{-1} \sim Q_0^{\frac{3}{2}} \quad (690)$$

Auch hier kürzen sich die zusätzlichen Anteile heraus. Das bedeutet, sowohl die Abmessungen der Teilchen als auch die „Bahnradien“, d.h. die Abmessungen der Orbitale, unterliegen nur der einfachen relativistischen Längenkontraktion. Wäre dies anders, hätten die Atome zu einem früheren Zeitpunkt der Entwicklung des Universums andere chemische Eigenschaften gehabt.

6.2.5. Die COMPTON-Wellenlänge des Elektrons/Protons/Neutrons...

Nach [5] ist diese folgendermaßen definiert (wir betrachten stellvertretend nur das Elektron):

$$\lambda = \frac{\hbar}{\beta m_e c} \sim \beta^{-1} \quad (691)$$

Auch dieser Ausdruck stimmt wieder gut mit den Aussagen der SRT überein. Mit den zusätzlichen relativistischen Anteilen erhalten wir nun folgenden Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\beta^{\frac{2}{3}} \tilde{\hbar}}{\beta^{\frac{5}{3}} \tilde{m}_e c} \sim \beta^{-1} \sim Q_0^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\tilde{\hbar}}{\tilde{m}_e c} \beta^{-\frac{2}{3}} \frac{\sin \gamma_{\tilde{\nu}}}{\sin \alpha} \quad (692)$$

Auch hier kürzen sich die Anteile wieder heraus. Der exakte Ausdruck lautet jedoch anders und ist rechts dargestellt, da es sich um eine (raumartige) Wellenfunktion handelt.

6.2.6. Das BOHRsche Magneton/Kernmagneton

Das BOHRsche Magneton ist das magnetische Dipolmoment des Elektrons, das Kernmagneton das magnetische Dipolmoment des Protons. Beide unterscheiden sich nur durch die Masse (m_e bzw. m_p) im Nenner. Nach klassischer Auffassung gilt:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2\beta m_e} \sim \beta^{-1} \quad (693)$$

Setzen wir hier die zusätzlichen Anteile ein, erhalten wir:

$$\mu_B = \frac{\beta^{\frac{1}{3}} e \beta^{\frac{2}{3}} \hbar}{2\beta^{\frac{2}{3}} m_e} \sim \beta^{-\frac{2}{3}} \sim Q_0 \quad (694)$$

In diesem Fall erhalten wir ein abweichendes Ergebnis. Da das magnetische Moment aber immer in Verbindung mit einer Ladung oder einem magnetischen Fluß zu sehen ist, diese/dieser ist proportional $\beta^{-1/3}$, kommt es auch hier zum Ausgleich der zusätzlichen Anteile. Insgesamt gesehen, kann man sagen, daß der räumliche Anteil an der Gesamtrötverschiebung keinerlei quantitativen und qualitativen Einfluß auf die physikalischen Gesetze beim Beobachter hat. Er hat nur kosmologische Bedeutung und spielt eine wesentliche Rolle bei der Aufstellung einer Gravitationstheorie.

6.2.7. Die Gravitationskonstante

Wir haben gesehen, daß das PLANCKsche Wirkungsquantum keine Konstante, sondern eine Funktion von Raum und Zeit ist. Aus der Definition von κ_0 (55) ergibt sich, daß dies auch für die NEWTONsche Gravitationskonstante gelten muß. Nach Umstellen erhalten wir:

$$G = \frac{c^3}{\mu_0 \kappa_0 \hbar H} = \frac{2c^3 t}{\mu_0 \kappa_0 \hbar} = \frac{c^2}{\mu_0 \kappa_0 \hbar} R \quad (695)$$

Durch Einsetzen von (138) erhalten wir schließlich:

$$G = \frac{c^2}{\mu_0 \kappa_0 \hbar_1} Q_0 R \quad (696)$$

Hier tritt erstmalig das Produkt $Q_0 R$ auf, was aufgrund der logarithmischen Periodizität des Universums zu der interessanten Frage führt, was sich denn im Abstand $Q_0 R$ befindet? Möglicherweise gibt es ein übergeordnetes Universum von dem unser eigenes nur einen mikroskopischen Teil (r_0) ausmacht? Die kosmische Hintergrundstrahlung würde dann entsprechend fortgesetzt das metrische Strahlungsfeld dieses übergeordneten Universums ergeben.

6.2.7.1. Zeitliche Abhängigkeit

Wir ersetzen Q_0 und R durch die entsprechenden Zeitfunktionen (697) und transformieren anschließend auf unsere lokalen Koordinaten (698):

$$G = \frac{2c^3 t}{\mu_0 \kappa_0 \hbar_1} 2\omega_0 t \quad (697)$$

$$G = \tilde{R}\tilde{Q}_0 \frac{c^2}{\mu_0\kappa_0\hbar_1} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{2c^3\tilde{T}\tilde{Q}_0}{\mu_0\kappa_0\hbar_1} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (698)$$

Der zeitliche Verlauf am Punkt $r=0$ ist in den Bildern 122 und 123 dargestellt. Zu Beginn der Expansion lag der Wert der Gravitationskonstante bei Null, wie man im Bild 120 gut erkennen kann. Im Bild 123 ist auch der Wert der Gravitationskonstante 1s nach dem Urknall eingetragen.

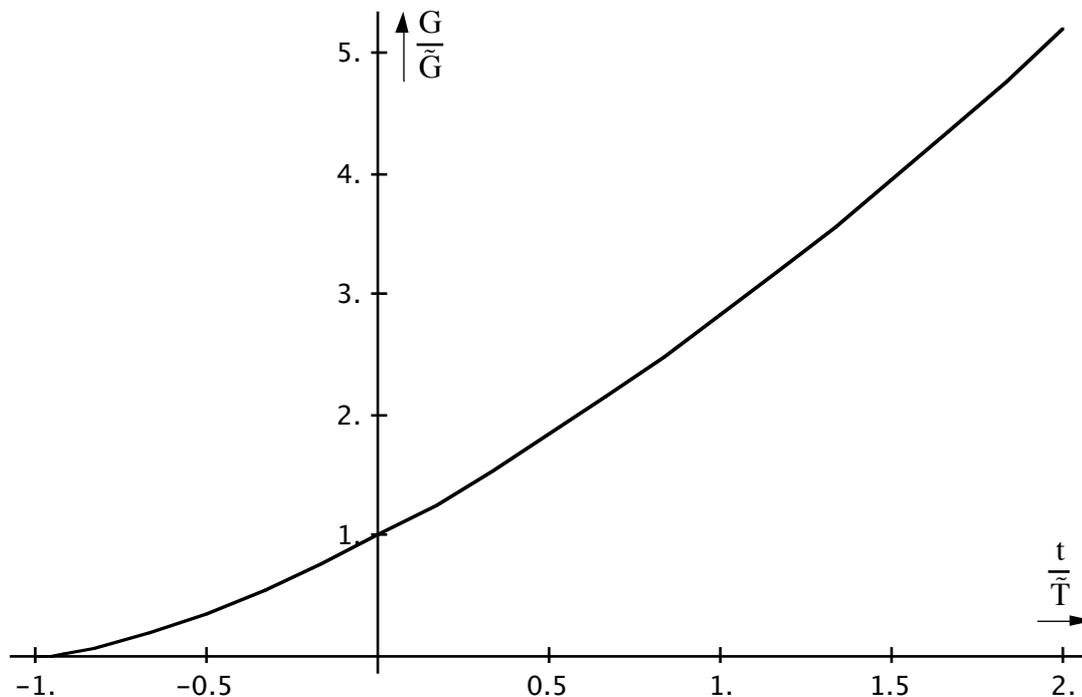


Bild 122
Zeitlicher Verlauf der Gravitationskonstante
am Punkt $r=0$ (linearer Maßstab)

Daraus resultiert, daß die Gravitation zu einem Zeitpunkt $t < 7,747 \text{ ns}$ (Quantenuniversum) keine wesentliche Rolle gespielt haben kann. Gravitation und Quanteneffekte schließen demnach einander aus. Nur ist dieser Ausschluß nicht absolut. Vielmehr gibt es eine Übergangszone, in der es sowohl Gravitation als auch Quanteneffekte im Maßstab des gesamten Universums gegeben hat. Zum Zeitpunkt $t=0$ und qualitativ gesehen kurz danach gab es jedenfalls keine Gravitation.

Das wäre auch die Erklärung dafür, warum bisher keine Gravitationsquanten nachgewiesen werden konnten — es gibt keine Quantengravitation. Dieser Sachverhalt sollte eigentlich einleuchten. Macht es doch keinen Sinn, die Gravitationskraft eines Teilchens zu berechnen, von dem man überhaupt nicht weiß an welchem Punkt es sich derzeit befindet oder wo es sich demnächst befinden wird. Mit etwas gutem Willen könnte man die raumartigen Photonen als Gravitationsquanten bezeichnen oder auch die MINKOWSKI'schen Linienelemente selber. Letztere vor allem deswegen, weil sie von ihren Eigenschaften her (Bosonen mit der Spinquantenzahl 2) am besten mit den von der SRT vorhergesagten Quanten des Gravitationsfeldes übereinstimmen. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß sie nicht frei beweglich sind, sondern vielmehr den Raum bzw. die Raumzeit selber bilden.

Durch die Expansion des Universums kommt es auch zu einer Vergrößerung des Abstands zweier durch Gravitationskräfte gekoppelter Massen. Dieser wird durch den Anstieg des Wertes der Gravitationskonstante kompensiert. Ob diese Kompensation vollständig ist, werden wir am Ende dieses Abschnitts genauer untersuchen.

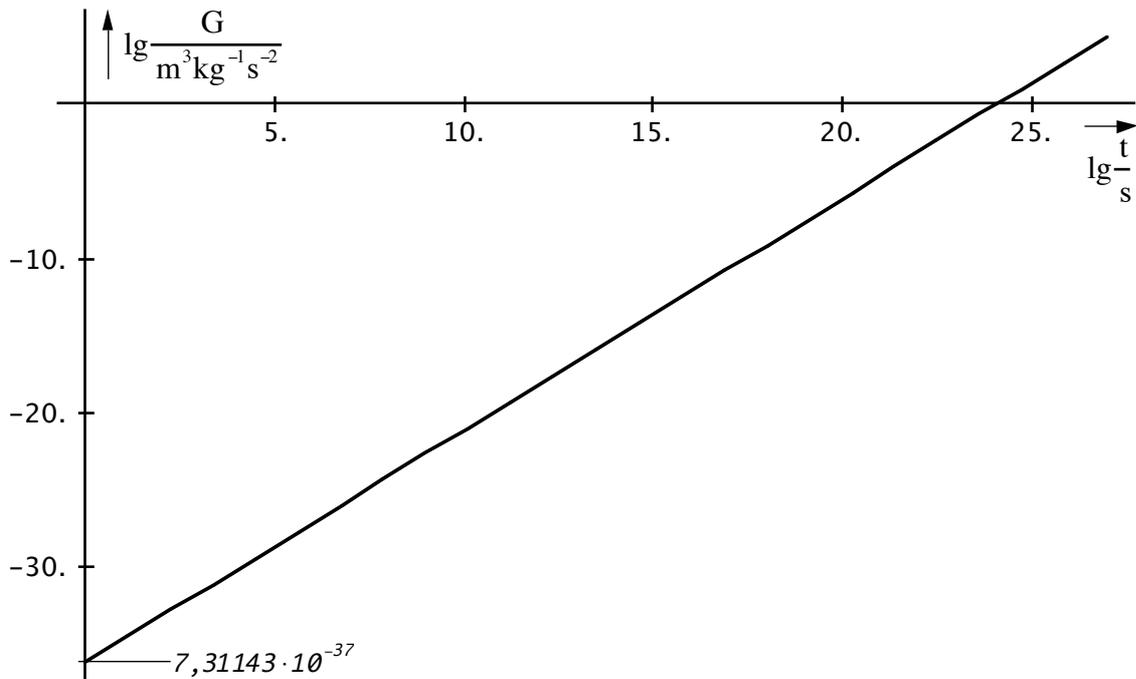


Bild 123
Zeitlicher Verlauf der Gravitationskonstante
lokales Weltalter (logarithmischer Maßstab)

6.2.7.2. Räumliche Abhängigkeit

Besteht eine zeitliche Abhängigkeit, so gibt es auch eine räumliche Abhängigkeit. Die Beziehung erhalten wir direkt durch Erweitern von (697), der lokale Weltradius ist nur von der Zeit abhängig.

$$G = \frac{2c^3 t}{\mu_0 \kappa_0 \hbar_1} (2\omega_0 t - \beta r) \quad (699)$$

$$G = \underset{[\text{Räumlich}]}{\tilde{R}\tilde{Q}_0 \frac{c^2}{\mu_0 \kappa_0 \hbar_1} \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)} \underset{[\text{Zeitlich}]}{\left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \right)} \quad (700)$$

Ausdruck (700) läßt sich ebenfalls in einen räumlichen und einen zeitlichen Anteil aufspalten. Der räumliche Anteil geht hier mit dem doppelten Exponenten ein. Dazu gehört eigentlich auch eine Drehung, besonders bei kleinen Werten von Q_0 , die hier nicht berücksichtigt wird ($\sin\alpha$?). Diese wirkt jedoch nicht auf G , sondern auf die beteiligten Massen, wie wir noch sehen werden. Der Funktionsverlauf ist im Bild 124 dargestellt. Koordinatenursprung ist der Punkt $r=0$.

Man erkennt ein interessantes Phänomen. Der Wert der Gravitationskonstante nimmt zum lokalen Weltradius $R/2$ hin bis auf Null ab. Jenseits dieses Punktes jedoch wird er negativ, die Anziehung wird zur Abstoßung. Die anziehende Wirkung der Gravitation ist also auf eine maximale Entfernung beschränkt. Objekte bzw. Strukturen, deren Abmessungen größer sind, können daher nicht existieren. Dies ist wahrscheinlich die Ursache dafür, warum oberhalb der Supercluster keine größeren Strukturen im Kosmos gefunden werden konnten. Direkt am Partikelhorizont ist die Gravitationskonstante gleich Null. Ein Raumfahrer, der einen SCHWARZSCHILD-Horizont überwindet kommt dann vielleicht doch nicht als Briefmarke heraus bzw. herein.

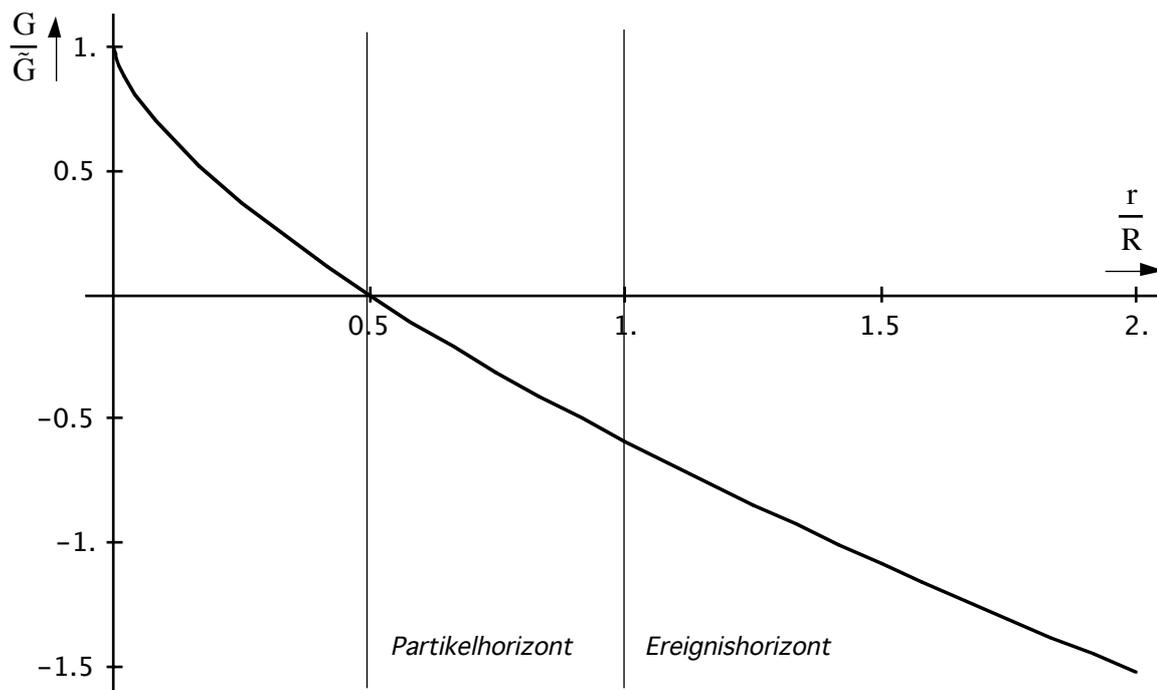


Bild 124
Räumliche Abhängigkeit der Gravitationskonstante
zum Zeitpunkt T (linearer Maßstab)

Der Verlauf hinter dem Ereignishorizont ist hypothetisch. Aus Bild 61 kann man entnehmen, daß die Energie des metrischen Wellenfelds hinter R sehr schnell abnimmt. Wahrscheinlich gibt es dort auch nichts, es sei denn andere Universen, deren externen Felder sich dem unseren überlagern. Eine Wirkung aus diesem Bereich in den unseren kann es nicht geben. Möglicherweise ist aber der dort nicht unerhebliche negative Wert unserer Gravitationskonstante Ursache für die Expansion dieses übergeordneten Universums.

Im Bild 125 ist der Verlauf der Gravitationskonstante für den Fall eines konstanten Wellenzahlvektors dargestellt. Dies entspricht einem mit der Metrik bewegten Körper. Für die Abstandsfunktion wurde (329) eingesetzt. Wie zu erwarten ist der Verlauf von der Anfangsentfernung abhängig (R ist der heutige Wert). Dabei kann ein Körper, der sich anfänglich hinter dem Partikelhorizont befindet ($-G$), schon mal von diesem überholt werden.

Die Gravitationskonstante nimmt bei beliebigen Anfangsentfernungen proportional $t^{3/2}$ zu. Bei Entfernungen größer $0,01R$ kommt es aber zu einer zeitlichen Verschiebung, d.h. der lokale Wert wird erst später erreicht. Dies sieht man am besten, wenn man für die Funktion von Bild 125 einen logarithmischen Maßstab auf beide Achsen anwendet (hier nicht dargestellt).

Abschließend wollen wir untersuchen, ob sich auch bei der Gravitationskonstante der räumliche Anteil herauskürzt. Dazu betrachten wir zunächst den Gesamtfall einschließlich räumlichem Anteil und Ausdruck (698), den wir in Einheiten von Q_0 umformen (Näherung):

$$G = G_1 Q_0^3 = G_1 \beta^{-2} \quad (701)$$

Die Gravitationskonstante ist damit auch von der Geschwindigkeit abhängig, eine Tatsache, die sich eigentlich schon aus der klassischen Theorie (SRT) ergibt, wenn man annimmt, daß der Abstand zwischen zwei Himmelskörpern von einem mit der Geschwindigkeit v bewegten Beobachter um den Faktor β^{-1} wie in der SRT üblich verkürzt beobachtet wird. Dies würde einer zeitlichen Zunahme des Abstands $r \sim t^{3/4}$ wie bei den Wellenlängen entsprechen. Nur wird darauf im allgemeinen nicht eingegangen. Vielmehr nimmt man die Gravitationskonstante als konstant an. Dann würde aber nach klassischer Auffassung der Abstand r nicht zu-, sondern proportional $t^{-3/4}$ abnehmen, was eigentlich auch nicht sein kann.

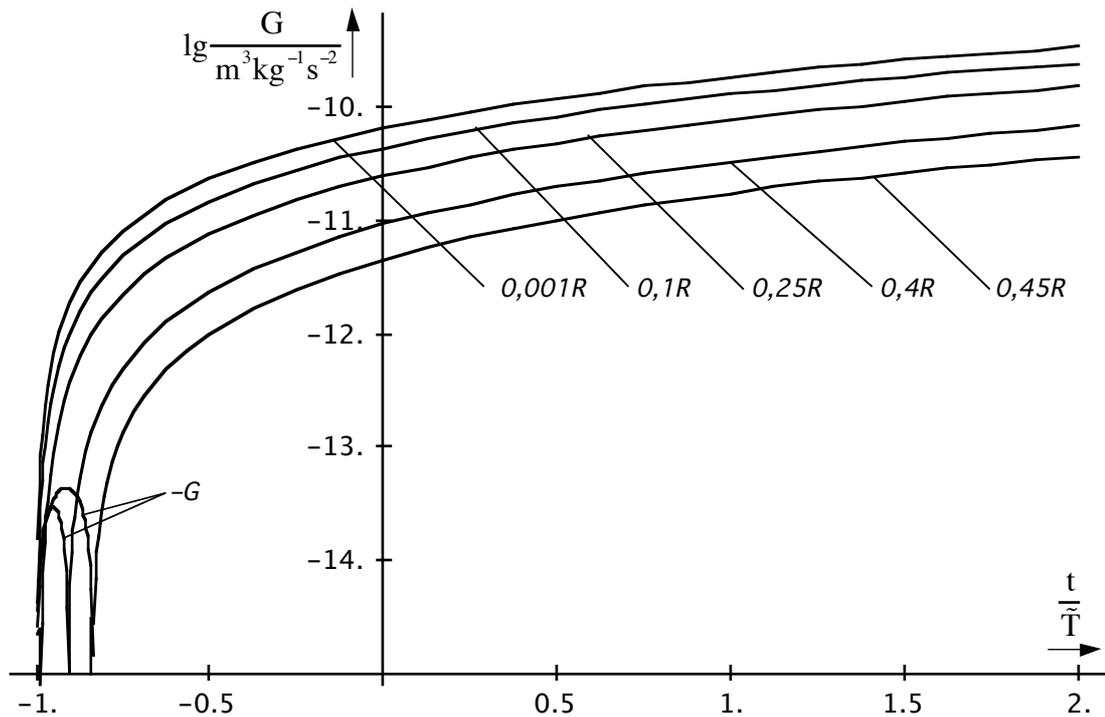


Bild 125
Zeitlicher Verlauf der lokalen Gravitationskonstante
im Abstand r bei konstantem Wellenzahlvektor

Zurück zum raumartigen Anteil: Wir betrachten dazu vereinfachend zwei Körper mit den Massen M und m , die sich im Abstand $r \ll 0,01R$ voneinander befinden. Eine weitere Einschränkung ist, daß $M \gg m$ sein soll und m eine Kreisbahn um M beschreibt, also alles in allem Bedingungen, bei denen die klassische NEWTONsche Beziehung angewendet werden kann.

Wir legen den Koordinatenursprung in den Mittelpunkt von M , was nur geht, wenn $M \gg m$ gilt. Andernfalls würden beide Massen um einen gemeinsamen Schwerpunkt außerhalb beider Körper rotieren. Die kinetische Energie von m beträgt $0,5 \cdot mv^2$ und unterliegt damit derselben energetischen Rotverschiebung wie alle anderen Energieformen. Die Geschwindigkeit v ist konstant, da sowohl dx als dt dieselbe Rotverschiebung aufweisen und sich diese herauskürzt. Damit ist die Geschwindigkeit innerhalb eines Bezugssystems absolut und muß nur bei Beobachtung von einem anderen Bezugssystem aus transformiert werden, ein Fakt, der oft falsch interpretiert wird. Die Masse M übt eine Gravitationskraft F_g auf m aus in der Größenordnung von:

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{2r} \quad (702)$$

Der rechte Ausdruck ist die Zentrifugalkraft F_Z der in der Umlaufbahn befindlichen Masse m . Nach Kürzen und Umstellen nach r erhalten wir:

$$r = \frac{2MG}{v^2} \quad (703)$$

Der Bahnradius ist also nur noch von der Geschwindigkeit und von M abhängig, nicht von m . Ähnlich sieht es mit der Fallbeschleunigung g aus, die man ebenfalls durch Umstellen von Ausdruck (702) erhält:

$$g = \frac{MG}{r^2} \quad (704)$$

Gleichung (704) wir daher auch als die klassische Gravitationsfeldstärke bezeichnet. Da er jedoch auf der relativistisch falschen Beziehung $F=m \cdot g$ beruht, ist er nicht der gesuchte exakte Ausdruck. Bei Entfernungen $r \gg 0,01R$ kommt ein weiteres Problem hinzu. Dieses ist dadurch gegeben, daß Ausdruck (700) nicht mehr für zwei Körper im Abstand r zueinander gilt ($\text{grad}G \neq 0$), d.h. G ist nur der Wert, den wir vom Koordinatenursprung aus beobachten, gültig für zwei lokal nahe beieinander stehende Körper, die sich im Abstand r von uns befinden (nahe kann hier auch die Größenordnung eines gesamten Planetensystems bedeuten). Damit wird G zu einer lokalen Größe oder mit anderen Worten: Da der weit entfernte Bereich kosmologisch gesehen jünger ist, beobachten wir dort auch einen kleineren Wert von G .

Wenn wir die Gravitationskonstante, die über den gesamten Abstand r wirksam wird bestimmen wollen, müssen wir rein formal r in (700) durch dr ersetzen und anschließend nach r integrieren. Da uns jedoch eigentlich nur der Abstand r interessiert, gehen wir gleich von (703) aus und differenzieren zunächst beide Seiten:

$$dr = \frac{2}{v^2} d(MG) \quad (705)$$

Hierbei haben wir konstante Faktoren bereits ausgeklammert. Dieser Fall entspricht einer "Aufteilung" der Gravitationskonstante auf die dazwischenliegenden Linienelemente dr und bedeutet schon eine nicht unerhebliche Abweichung vom klassischen Modell. Nach diesem müßte sich eine Gravitationswirkung nämlich instantan ausbreiten. Durch astronomische Beobachtungen wissen wir aber, daß sich auch die Gravitation nur mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet. Damit entspräche das gewonnene Ergebnis nicht den physikalischen Tatsachen. Durch die Aufteilung umgehen wir einige der damit verbundenen Nachteile, dürfen aber nicht vergessen, daß wir hier nur einen Spezialfall betrachten ($M \gg m$), der sich gerade noch mit dem klassischen Modell vereinbaren läßt.

Als nächstes setzen wir die exakten Ausdrücke für M (659) mit $v=0$ und G (700) ein. Das bedeutet, wenn wir eine Lösung für den Abstand r finden, so ist diese nur dann gültig, wenn wir als Ergebnis die Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor erhalten ($v=0$). Der Ausdruck dr ist eigentlich unser Linienelement r_0 . Dieses nimmt gemäß $r_0 \sim Q_0 \sim t^{1/2} \sim \beta^{-2/3}$ zu. Daher müssen wir es auch mit $(1+t/T)^{1/2}$ multiplizieren, um die zeitliche Abhängigkeit zu berücksichtigen. Damit erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{2}{v^2} \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\frac{r}{R}}} \left(1 + \frac{t}{T}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{t}{T}\right) \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \right) d(\tilde{M}\tilde{G}) \quad (706)$$

$$dr = \frac{2}{v^2} \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\frac{r}{R}}} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \right) d(\tilde{M}\tilde{G}) \quad (707)$$

Da r_0 nicht unendlich klein ist (infinite Struktur), sondern eine bestimmte Mindestgröße hat (finite Struktur), sind die Gesetzmäßigkeiten der Differentialrechnung eigentlich nur dann und auch nur näherungsweise anwendbar, wenn r_0 klein gegenüber dem Weltradius R ist. Da das Verhältnis durch die Beziehung $R = Q_0 r_0 = Q_0^2 r_1$ bestimmt wird, können wir die Differentialrechnung daher auch nur ab einer Güte von $Q_0 \geq 10^3$, je nach geforderter Genauigkeit, anwenden. Dann liegt aber der Wert der beiden Winkelfunktionen bei 1, so daß wir diese vernachlässigen können:

$$dr \approx \frac{2}{v^2} \left(\left(1 + \frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \right) d(\tilde{M}\tilde{G}) \quad \text{für } Q_0 > 10^3 \quad (708)$$

Die Durchführung der Berechnung für Güten $Q_0 < 10^3$ können wir uns ganz sparen, da die anderen physikalischen Verhältnisse dann so extrem sind, daß makroskopische Körper gar nicht existieren können. Zusätzlich gewinnen Quanteneffekte die Oberhand, so daß es

überhaupt sinnlos wird, von einem „Abstand“ zwischen zwei „Körpern“ zu sprechen. Wir benutzen daher ab sofort das Gleichheitszeichen und fahren fort, indem wir (708) folgendermaßen umformen:

$$\frac{dr}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{v^2} d(\tilde{M}\tilde{G}) \quad (709)$$

$$\int \frac{dr}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{v^2} = \tilde{r} \quad (710)$$

Dieses Integral haben wir schon einmal im Abschnitt 4.5.1. gelöst. Wir benutzen dieselbe Substitution:

$$\frac{3}{2}\tilde{R} \int \frac{r'^2}{a^2 - r'^2} dr' - \tilde{r} = 0 \quad \text{mit } r' = \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ und } a^2 = (1 + t')^{\frac{1}{2}} \quad (711)$$

$$\frac{3}{2}\tilde{R} \left(a \operatorname{artanh} \frac{r'}{a} - r' \right) - \tilde{r} = 0 \quad \text{mit } \tilde{r} = \frac{3}{2}\tilde{R} (\operatorname{artanh} \tilde{r}' - \tilde{r}') \quad (712)$$

Mit der Substitution $r' = F\tilde{r}'$ kommen wir auf die endgültige Lösung:

$$a \operatorname{artanh} \frac{\tilde{r}'F}{a} - \operatorname{artanh} \tilde{r}' - \tilde{r}'(F - 1) = 0 \quad r(t) = \tilde{r}F^3(t) \quad \text{q.e.d.} \quad (713)$$

Dies ist aber nichts anderes als unsere Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor (322), unser Ansatz war also richtig. Daraus können wir vor allem folgende wichtige Schlüsse ziehen:

1. *Ein Körper, der sich anfänglich nicht gegenüber der Metrik bewegt, wird dies auch in Zukunft nicht (von allein) tun.*

Diese Aussage ist identisch mit dem Impulserhaltungssatz.

2. *Der Abstand zwischen zwei Körpern, die sich nicht gegenüber der Metrik bewegen, (freier Fall), steigt gemäß der Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor.*
3. *Das Gleichungssystem zur Berechnung des Abstands zwischen zwei Körpern ist unterbestimmt. Es gibt daher eine unendliche Anzahl von möglichen Lösungen, mit den Anfangsbedingungen $v = v_0$.*

Die letzte Aussage ist von besonderer Bedeutung, ergibt sie sich doch direkt aus Gleichung (659), in der wir $v=0$ gesetzt hatten. Möglich sind hier aber beliebige Zeitfunktionen, was zu der unendlichen Anzahl möglicher Lösungen führt. Dies kann auch gar nicht anders sein, ansonsten wäre jedwede Navigation unmöglich, jeder Körper, wäre auf ewig an seinen angestammten Platz gefesselt, was ja bekanntlich nicht der Fall ist. Daher ist es auch sinnlos, nach einer allgemeinen Lösung für dieses Problem zu suchen. Von besondere Interesse ist jedoch die Untersuchung der Verhältnisse bei Körpern im freien Fall, die wir hier vorgenommen haben.

Nun sind wir hier vom klassischen Modell für den Spezialfall $M \gg m$ ausgegangen, wobei wir die Massen und die Gravitations»konstante« als variabel angesehen haben. Gleichzeitig ist es uns aber gelungen, sowohl die Massen M und m als auch G aus der Lösung (713) zu eliminieren. Und wenn sich diese Größen bei einer Kreisbahn eliminieren lassen, geht das auch bei anderen Bahnformen. Daher können wir verallgemeinernd sagen:

IX. Für die kosmologische Expansion mittels Gravitation gekoppelter Massen sind nicht die Eigenschaften der beteiligten Massen sondern ausschließlich die Eigenschaften des Raumes verantwortlich. Dabei spielen die Bahnen der beteiligten Körper keine Rolle. Alle mittleren Abstände und Größenverhältnisse ändern sich nach derselben Funktion, der Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor. Diese hängt von der Anfangsentfernung ab.

Damit wird aber auch die Frage nach der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Gravitation sinnlos. Interessant ist noch der Fall, daß sich ein makroskopischer Körper mit $v \neq 0$ einer Singularität nähert.

Bei starker Krümmung müssen wir dann doch die Winkel α und γ beachten. Dadurch werden die Feldlinien des Gravitationsfelds in der Nähe eines schwarzen Lochs „aufgewickelt“, so daß sich materielle Körper nicht axial sondern um einen bestimmten Winkel verdreht von der Quelle kosmologisch gesehen „entfernen“. Da sie gleichzeitig angezogen werden, fallen sie schließlich in die Singularität, wenn die Annäherungsgeschwindigkeit größer wird als die Expansionsgeschwindigkeit des Raumes, die dort wesentlich höher ist als gewöhnlich.

Diesen Fall können wir jedoch mit dem klassischen Ansatz nicht mehr exakt behandeln. Dies wurde von EINSTEIN schon früh erkannt und er entwickelte die Allgemeine Relativitätstheorie (ART), der wir uns im nächsten Kapitel widmen werden. Hierbei bedeutet die Tatsache, daß wir in dieser Arbeit auch mit einem stark veränderten klassischen Ansatz zu einem widerspruchsfreien Ergebnis gekommen sind, noch lange nicht, daß die Aussagen der ART falsch sind. Vielmehr stellen letztere eine „einfachere“ und exaktere Beschreibung desselben Tatbestands dar. Dazu müssen wir aber untersuchen, ob die Aussagen dieses Modells mit der ART vereinbar sind (oder umgekehrt).

7. Das allgemeine Relativitätsprinzip

7.1. Die Grundgrößen des Gravitationsfeldes

7.1.1. Potential und Feldstärke pro Längeneinheit

Bevor wir in diesem Abschnitt weitergehende Untersuchungen anstellen, wollen wir uns zuerst mit den Grundgrößen des Gravitationsfeldes befassen, da hier allgemein Unkenntnis oder Konfusion hinsichtlich der einzelnen Werte und Bezeichnungen besteht. Wir wollen wieder unsere bewährte Methode des Vergleichs mit anderen physikalischen Feldgrößen, z.B. beim elektrischen und beim Magnetfeld anwenden, auch wenn eine Übernahme 1:1 beim Gravitationsfeld aufgrund der besonderen Eigenschaften nicht möglich sein wird.

Zunächst zum Gravitationspotential: Beim elektrischen und beim Magnetfeld gibt es im allgemeinen ein Potential ϕ [V] bzw. ψ [A], wobei man nach Division durch eine Längeneinheit $2\pi r$ (Kreisumfang der Feldlinie um eine gedachte punktförmigen Quelle) auf den Ausdruck für die Feldstärke pro Längeneinheit kommt (es gibt nämlich noch eine zweite Feldstärke pro Flächeneinheit). Im Nenner steht dann immer die Einheit [m], die Feldstärke ergibt sich damit in Einheiten von [V/m] bzw. [A/m]:

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\psi}{\infty} - \frac{\psi}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_r = - \frac{\psi}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad \text{Magnetische Feldstärke H-Feld} \quad (714)$$

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\phi}{\infty} - \frac{\phi}{2\pi r} \right) \mathbf{e}_r = - \frac{\phi}{2\pi r} \mathbf{e}_r \quad \text{Elektrische Feldstärke E-Feld} \quad (715)$$

Hierbei ist \mathbf{e}_r der Einheitsvektor. Beim Magnetfeld ist ψ im allgemeinen gleichzusetzen mit dem Strom i durch einen Leiter. Die Feldstärke in der Umgebung eines einzelnen Leiters ergibt sich damit als die Differenz aus dem Potential im unendlichen, dieses ist gleich Null (hier kann aber auch ein anderes Potential stehen, z.B. von einem zweiten Leiter ($\neq 0$)), und dem Potential im Abstand r . Aus diesem Grund ist die Feldstärke einer einzelnen punktförmigen bzw. geradenähnlichen Quelle im allgemeinen negativ definiert.

Wie sieht es nun aber bei der Gravitationsfeldstärke aus? Im Nenner würde wahrscheinlich wieder die Einheit [m] stehen. Was steht jedoch im Zähler? Die Antwort lautet: auch eine Länge. Die Maßeinheit wäre dann [m/m] bzw. [1]. Um welche Länge könnte es sich hier handeln? Am besten geeignet dafür wäre die PLANCKSche Elementarlänge (r_0), die, wie wir gesehen haben, ein Maß für alle lokalen Größenverhältnisse darstellt. Wir benutzen aber den Wert $r_0/2$, der den kleinstmöglichen raumartigen Vektor darstellt. Damit wäre das Gravitationspotential, das wir vorerst mit U bezeichnen wollen, folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{U} = \left(\frac{r_0}{2 \cdot \infty} - \frac{2r_0}{2r_0} \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{r_0}{\infty} - \frac{r_0}{r_0} \right) \mathbf{e}_r = - \mathbf{e}_r \quad (716)$$

Der Faktor 2π tritt hier nicht auf, da die Gravitation nicht mit einer Rotation sondern mit einer elastischen Deformation der einzelnen Linienelemente verknüpft sein soll. Nun wissen wir aus den vorhergehenden Betrachtungen, daß die maximale raumartige Entfernung im Universum gleich $R/2$ ist. Dies gilt eigentlich auch für das elektrische und das Magnetfeld. Da diese beiden Felder jedoch umgekehrt, d.h. zeitartig, orientiert sind (der größtmögliche zeitartige Vektor ist R), ist der Unterschied vernachlässigbar klein. Der entsprechende Term ist dann eben nicht genau, sondern nur fast gleich Null, nicht so beim Gravitationsfeld. So lautet Ausdruck (716) korrekt:

$$\mathbf{U} = \left(\frac{2r_0}{2R} - \frac{r_0}{r_0} \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{r_0}{R} - 1 \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{1}{Q_0} - 1 \right) \mathbf{e}_r \quad (717)$$

$$-\mathbf{U} = \left(1 - \frac{1}{Q_0}\right) \mathbf{e}_r \quad (718)$$

Aus der ART kennen wir nun die Beziehung für die g_{00} -Komponente des metrischen Tensors, der in etwa die Form von Ausdruck (718) hat. Es gilt:

$$-g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} + O\left(\frac{v}{c}\right) \approx 1 - \frac{2MG}{rc^2} \quad \text{mit} \quad \Phi = -\frac{MG}{r} \quad (719)$$

Hierbei ist Φ das klassische NEWTONsche Gravitationspotential und $O(x)$ eine gegen Null konvergierende Reihe. In der Näherung, bei kleinen Krümmungswerten gilt $O(x) \approx 0$. Nun ist es aber bisher nicht gelungen, diese Funktion genau zu bestimmen. Vielmehr gehört sie zu den am meisten gesuchten Ausdrücken in der ART. Man bricht die Reihe im allgemeinen nach dem linearen Glied ab und kann daher nur Abschätzungen für den Fall schwacher Gravitationsfelder angeben.

Ausdruck (719) links (g_{00}) wird fälschlicherweise auch als das relativistische Gravitationspotential bezeichnet. Die richtige Bezeichnung müßte jedoch *Gravitationsfeldstärke* lauten. Das *Gravitationspotential* ist dann korrekterweise identisch mit der halben PLANCKschen Elementarlänge $r_0/2$ am Ort der Beobachtung (Bezugssystem).

Nach unserem Modell können wir jedoch den exakten Ausdruck für g_{00} ohne Probleme bestimmen. Durch Einsetzen von (695) erhalten wir zunächst:

$$-g_{00} = 1 - 2 \frac{\frac{M}{m_0}}{\frac{r}{r_0}} \quad \text{mit} \quad \frac{r_0}{m_0} = \frac{G}{c^2} = \frac{R}{\hbar \mu_0 \kappa_0} = \frac{r_0^2}{\hbar \epsilon_0 Z_0} \quad (720)$$

ein einfaches Masse/Radiusverhältnis zu den entsprechenden Werten des MINKOWSKIschen Linienelements. Der rechte Ausdruck von (720) ist bis auf einen Faktor 8π identisch mit der Kopplungskonstante in den Feldgleichungen der ART:

$$G^{ik} = \frac{8\pi r_0^2}{\hbar \epsilon_0 Z_0} T^{ik} = \frac{8\pi c r_0^2}{\hbar} T^{ik} \quad (721)$$

Hierbei ist G_{ik} die Geometrie des Raumes, T_{ik} der Energie-Impuls-Tensor (im Bezugssystem). Damit scheint die Gravitation eher ein elektrodynamischer Effekt zu sein. Nun aber zurück zu g_{00} . Da g_{00} quadratisch ist, betrachten wir besser den Wert $(-g_{00})^{1/2}$. Aus der SRT wissen wir, daß dieser Wert identisch ist mit dem Kehrwert des relativistischen Verkürzungsfaktors β_γ . Dieser taucht auch in den Ausdrücken der LORENTZ-Transformation auf. Er ist verantwortlich für die relativistische Rotverschiebung von zeit- und raumartigen Photonen. Im Abschnitt 6.1.2.2. hatten wir festgestellt, daß dieser von dem klassischen Wert β :

$$\beta^{-1} = \sqrt{-g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{Klassisch} \quad (722)$$

abweicht. Tatsächlich wird der Wert β_γ :

$$\beta_\gamma^{-1} = \sqrt{-g_{00}} = \frac{v}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad (723)$$

wirksam, wodurch der Kehrwert des relativistischen Verkürzungsfaktors β_γ proportional zum Phasenmaß β der Ausbreitungsfunktion einer EM-Welle wird. Dies ist so korrekt, da sich die

Wellenlänge direkt aus der Beziehung $\lambda = 2\pi/\beta$ ergibt. Damit können wir sagen, daß (723) exakt gilt. Wir müssen nur eine Möglichkeit finden, die Geschwindigkeit v durch $MGr^{-1}c^{-2}$ zu substituieren. Die Lösung erhalten wir durch Umstellen von (703) nach v zu:

$$\sqrt{-g_{00}} = \sqrt{\frac{2MG}{rc^2}} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{2MG}{rc^2} \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad (724)$$

$$\sqrt{-g_{00}} = \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad \text{Gravitationsfeldstärke } g\text{-Feld} \quad (725)$$

Ausdruck (724) gilt jedoch nur unter Vernachlässigung von c_M und für $v_M = 0$. Bei der Berechnung der Winkelfunktion $\sin \gamma$ in (725) müssen wir für die Geschwindigkeit v folgende Beziehung einsetzen:

$$v = c_M + v_M + \sqrt{\frac{2MG}{r}} \quad (726)$$

Damit hätten wir die Funktion $O(x)$ eindeutig bestimmt, mit dem Resultat, daß wir sie nun nicht mehr benötigen, da wir ja den exakten Ausdruck kennen. Allerdings enthält Ausdruck (726) noch die raum-, zeit- und geschwindigkeitsabhängigen Werte M und G , so daß wir mit (724) und (726) nicht viel anfangen können. Durch Einsetzen von (658) und (700) kommen wir auf folgenden Ausdruck ($v_M + v_G = 0$):

$$\frac{2MG}{rc^2} = \frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \right) \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_\gamma} \quad (727)$$

Die Variablen r im Zähler und im Nenner der rechten Seite sind aber nur dann identisch, wenn der Massenmittelpunkt mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammenfällt. Hier taucht auch wieder unser Navigationsgradient auf. Durch Koeffizientenvergleich mit (718) erhalten wir für die Güte Q_0 :

$$\tilde{Q}_0 = \frac{c^2}{2\tilde{M}\tilde{G}} \frac{r}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad (728)$$

$$Q_0 = \frac{c^2 r}{2\tilde{M}\tilde{G}} \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} = \frac{r}{\tilde{R}_S} \frac{\sin \gamma_\gamma}{\sin \alpha} \quad (729)$$

R_S ist der SCHWARZSCHILD-Radius von M . Ausdruck (729) gilt wegen (404) aber nur außerhalb der Masseverteilung. Damit liegt der Punkt $Q_0 = 1$ nicht im Abstand R_S sondern geringfügig innerhalb. Unter Vernachlässigung der Winkelfunktionen können wir jetzt (728) folgendermaßen umstellen:

$$\frac{2\tilde{M}\tilde{G}\tilde{Q}_0}{c^2} = \frac{r}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} = \tilde{r} \quad d\tilde{r} = \frac{dr}{\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}} \quad (730)$$

bei größeren Werten von r müssen wir wieder r durch dr ersetzen, weiter siehe (710). Damit kommen wir auch hier auf dasselbe Ergebnis wie bei unserem halbklassischen Ansatz, die Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor. Da der Radius r bei der Expansion stetig ansteigt, steigt auch die Güte in der unmittelbaren Umgebung eines mit der Metrik bewegten Körpers stetig an.

Wenn wir die exakte Lösung (727) inclusive der Winkelfunktionen bestimmen wollten, benötigen wir zuerst eine Lösung für $\underline{c} = f(M, G, r)$. Hierbei nutzen wir die Beziehung $Q_0 = 2\omega_0 t$, indem wir (728) in (206) oder (209) einsetzen. Da Ausdruck (729) jedoch die Funktion enthält, die wir eigentlich bestimmen wollen, eine Variablentrennung ist nicht möglich, gibt es wieder nur eine implizite Lösung, die sich mit den bekannten numerischen Verfahren berechnen läßt. Wir erwarten ein Lösungsverhalten ähnlich wie das der Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor (322) mit begrenztem Lösungsbereich.

Aus den bereits im vorangegangenen Abschnitt besprochenen Gründen macht es jedoch physikalisch gesehen keinen Sinn, die Lösung unter Einbeziehung der Winkelfunktionen zu bestimmen. Auch wirken sich diese bei der Betrachtung von Objekten im freien Fall erst in einem Abstand $r \approx R/2$ aus, d.h. direkt am Partikelhorizont, so daß wir in den meisten Fällen (99,99%) mit der einfachen Abstandsfunktion rechnen können.

Nach Gleichsetzen von (718) und (719) erhalten wir mit dem Ansatz $g_{00} = U$ und Koeffizientenvergleich mit (723) eine wichtige Beziehung:

$$\sqrt{-g_{00}} = \sqrt{\frac{1}{\tilde{Q}_0}} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{Q}_0} \sin^2 \alpha} \quad \text{Gravitationsfeldstärke } g\text{-Feld} \quad (731)$$

$$\sqrt{-g_{00}} \approx \sqrt{\frac{1}{\tilde{Q}_0}} + \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{Q}_0}} \approx \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{Q}_0}} \quad \text{Näherung} \quad (732)$$

Das bedeutet nichts anderes, als daß der Wert \tilde{Q}_0 identisch mit dem Bezugssystem ist, wie wir bereits vermutet hatten (α ist eine direkte Funktion von Q_0 und nicht abhängig von v). Da auch die Geschwindigkeit vom Bezugssystem abhängt, erhalten wir für:

$$\tilde{Q}_0 = \frac{c^2 r}{2MG} = \frac{c^2}{v^2} \quad \text{mit} \quad v = c_M + v_M + v_G \quad (733)$$

Hierbei ist zu beachten, daß M und G auch von c_M und v_M abhängen. Nun könnte man denken, wir hätten damit auch das Problem aus Abschnitt 6.1.2.1. gelöst, nämlich inwieweit die Güte von der Geschwindigkeit *und* der Zeit *und* dem Raum abhängt. Leider ist dies nicht der Fall. Wenn wir v_M und v_G gleich Null setzen, gilt nämlich nur *näherungsweise*:

$$Q_0 = Q_0(\tilde{c}_M) \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \approx \frac{c^2}{v^2} \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (734)$$

Das stimmt zwar mit unserer Näherungslösung für ein nicht expandierendes Universum (597) überein, kann aber nicht ganz exakt sein, da dann die Güte für einen mit der Metrik bewegten Beobachter nicht kleiner als 1,378 wird. Zumindest gilt (734) für Gütewerte größer 10 auch für ein expandierendes Universum. Für den Bereich darunter müssen wir uns etwas anderes einfallen lassen, was insofern problematisch ist, da es keine eindeutige inverse Funktion $Q_0(c_M)$ gibt (die inverse Funktion des Phasenwinkels $Q_0(\arg \underline{c})$ ist eindeutig definiert). Wenn man jedoch das Bezugssystem als primär ansieht, benötigt man Ausdruck (734) auch gar nicht.

In der ART sind Raum und Zeit gleichberechtigte Dimensionen. Die Definition der Gravitationsfeldstärke als dimensionslose Größe läßt damit auch eine andere Auslegung zu. Neben $[m/m]$ sind auch beliebige andere Kombinationen möglich wie z.B. $[s/s]$, $[kg/kg]$ oder $[Js/Js]$. Bekanntlich beeinflußt das Gravitationsfeld den Zeitablauf und auch Größen wie z.B. das PLANCKsche Wirkungsquantum bleiben damit nicht unbeeinflußt. Allgemein gilt: Das Gravitationsfeld ist an alles gekoppelt. Daher sollten wir uns nicht wundern, wenn z.B. im Nenner eines Ausdrucks anstelle einer Längeneinheit die Zeit auftritt. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

7.1.2. Ladung und Feldstärke pro Flächeneinheit

In der Elektrotechnik kennt man noch eine zweite Art der Feldstärke. Diese ist definiert als Fluß bzw. Ladung pro Flächeneinheit. Die Maßeinheiten sind $[\text{Vs}/\text{m}^2]$ für die magnetische Induktion sowie $[\text{As}/\text{m}^2]$ für die elektrische Ladungsdichte, auch als Influenz bezeichnet. Die Proportionalitätsfaktoren für die Berechnung aus \mathbf{H} und \mathbf{E} sind μ_0 und ϵ_0 bzw. μ und ϵ .

$$\mathbf{B} = \frac{d\varphi}{dA} \mathbf{e}_r = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{Induktion} \quad \text{B-Feld} \quad (735)$$

$$\mathbf{D} = \frac{dq}{dA} \mathbf{e}_r = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{Influenz} \quad \text{D-Feld} \quad (736)$$

Das sind genau die Faktoren aus dem COULOMBSchen und dem FARADAYSchen Gesetz (siehe Tabelle 6). Beide haben große Ähnlichkeit mit dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz. In diesem tritt die Gravitationskonstante an die Stelle von ϵ_0 bzw. μ_0 . Auch im Gravitationsfeld gibt es eine ähnliche Größe, die man mit Induktion und Influenz vergleichen kann: Die NEWTONSche Gravitationsfeldstärke (Fallbeschleunigung). Diese ist folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{a} = \frac{MG}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{Gravitation} \quad \text{a-Feld} \quad (737)$$

Wir benutzen hier besser den Buchstaben a für die allgemeine Beschleunigung, da wir nicht zweimal den Ausdruck g -Feld benutzen können. Die Maßeinheit ist $[\text{m}/\text{s}^2]$. Hier liegt allerdings ein Unterschied zu den elektrischen Feldgrößen vor. Da Raum und Zeit gleichberechtigte Dimensionen sind, ist das aber kein Widerspruch. Sieht man sich Ausdruck (732) genauer an, so steht auch hier im Nenner eine Fläche. Der Zähler stellt dann so etwas wie die gravitative "Ladung" bzw. den "Fluß" dar. Durch Erweitern mit m^2 kann man die Maßeinheit auch als $[(\text{m}^3/\text{s}^2)/\text{m}^2]$ schreiben ohne den physikalischen Inhalt zu verändern, wobei der Klammerausdruck dem Produkt MG entspricht. Da wir jedoch noch nicht genau wissen, um was es sich dabei handelt, bezeichnen wir dieses Produkt vorerst als Gravitations»fluß« Ψ .

$$\mathbf{a} = \frac{d\Psi}{dA} \mathbf{e}_r \quad \text{Gravitation} \quad \text{a-Feld} \quad (738)$$

Eine Berechnung aus der Feldstärke (726) mit Hilfe eines Koeffizienten wie in der Elektrotechnik ist leider nicht möglich. Nun können wir auch die Beziehungen für die Ladung bzw. den Fluß angeben:

$$\varphi = \oint \mathbf{B} d\mathbf{A} \quad \text{Magnetischer Fluß} \quad (739)$$

$$q = \oint \mathbf{D} d\mathbf{A} \quad \text{Elektrische Ladung} \quad (740)$$

$$\Psi = \oint \mathbf{a} d\mathbf{A} \quad \text{Gravitations»fluß«} \quad (741)$$

Wir wollen jetzt untersuchen, welche physikalische Bedeutung dem Ausdruck Ψ zukommt. So enthält die Maßeinheit $[\text{m}^3/\text{s}^2]$ die Länge und die Zeit, also nur Kenngrößen der Raumzeit. Auch bei unserer halbklassischen Betrachtungsweise konnten wir dasselbe beobachten. Dies stimmt gut mit der Aussage der ART überein, daß sich makroskopische Körper auf Weltlinien bewegen, für deren Verlauf die Eigenschaften des Raumes verantwortlich sind und läßt gleichzeitig die Vermutung aufkommen, daß sich die eigentliche Gravitationsladung nicht innerhalb der beteiligten Körper, sondern eher außerhalb befindet.

Nach der klassischen Theorie ist die Masse gleich der Gravitationsladung. Diese Bezeichnung wollen wir beibehalten, da es auch eine Rückwirkung der Masse auf die Metrik

gibt. Der Ausdruck Ψ wäre dann so etwas wie eine Beschreibung des Zustands der Metrik außerhalb der Masseverteilung, eine "Induktion" der Masse.

Ein Vergleich der Maßeinheit mit (721) führt uns schließlich zur Lösung: Ψ ist identisch mit der Geometrie G_{ik} des Raumes. Weil G_{ik} jedoch ein Tensor ist, können wir ihn nicht direkt mit Ψ (Skalar) gleichsetzen. Wir behalten daher das Symbol Ψ bei. Aus dem gleichen Grund ist die Verwendung von Ψ unüblich. Man benutzt stattdessen das klassische NEWTONSche Gravitationspotential Φ (719). Trotzdem läßt sich aber vortrefflich mit Ψ rechnen. Hier nur einige Beispiele:

$$\mathbf{a} = \frac{\Psi}{r^2} \mathbf{e}_r \quad R_s = \frac{2\Psi}{c^2} \quad \text{mit} \quad \Psi = MG \quad (742)$$

R_s ist wieder der SCHWARZSCHILD-Radius. Und auch das NEWTONSche Gravitationsgesetz hat dann die selbe Form wie das COULOMBSche Gesetz (Proportionalitätsfaktor im Nenner, siehe Tabelle 6). Dabei darf man aber nicht vergessen, daß die Masse selbst wiederum auch von den Eigenschaften des sie umgebenden Raumes abhängig ist.

Feldgröße	Magnetfeld		Elektrisches Feld		Gravitationsfeld		Übliche Bezeichnung
Bezeichnung	MMK	--	EMK	--	MLE	--	--
Potential	ψ	[A]	ϕ	[V]	$\frac{r_0}{2}$	[m]	Plancksche Elementarlänge
Bezeichnung	Magnet. Feldst.	--	Elektr. Feldst.	--	Grav. Feldst.	--	--
Feldstärke 1	$H = \frac{\psi}{2\pi R} - \frac{\psi}{2\pi r}$	$\left[\frac{A}{m}\right]$	$E = \frac{\phi}{2\pi R} - \frac{\phi}{2\pi r}$	$\left[\frac{V}{m}\right]$	$g_{00} = \frac{r_0}{R} - \frac{r_0}{r_0^3}$	$\left[\frac{m}{m}\right]$	Gravitationspotential
Bezeichnung	Magn. Urspg.	--	El. Ladung	--	Grav. Ladung	--	--
Ladung	V	[V]	$q = \int DdA$	[As]	M	[kg]	Masse
Bezeichnung	Magn. Fluß	--	El. Strom	--	Geometrie	--	--
Fluß	$\varphi = \int BdA$	[Vs]	I	[A]	$\Psi = GM$ $\Psi = \int adA$	$\left[\frac{m^3}{s^2}\right]$	Unüblich
Bezeichnung	Induktion	--	Influenz	--	Gravitation	--	--
Feldstärke 2	$B = \frac{d\varphi}{dA}$ $B = \mu_0 H$	$\left[\frac{Vs}{m^2}\right]$	$D = \frac{dq}{dA}$ $D = \epsilon_0 E$	$\left[\frac{As}{m^2}\right]$	$a = \frac{d\Psi}{dA}$ --	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	Beschleunigung
Bezeichnung	Faradaya kraft	--	Coulombkraft	--	Trägheitskraft	--	--
Kraft 1	$F = \varphi H^1$	[N]	$F = qE$	[N]	$F = Ma$	[N]	Trägheitskraft
Bezeichnung	Faradaysches G.	--	Coulombsches G.	--	Newtonsches GG	--	--
Kraft 2	$F = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{\varphi_1\varphi_2}{r^2}$	[N]	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2}$	[N]	$F = \frac{1}{G} \frac{\Psi_1\Psi_2}{r^2}$	[N]	Anziehungskraft
Bezeichnung	M. Ladungsichte	--	E. Stromdichte	--	G. Spannung	--	--
Sonstiges	$\Xi = \frac{dV}{dA}$ --	$\left[\frac{V}{m^2}\right]$	$S = \frac{dI}{dA}$ $S = \kappa E$	$\left[\frac{A}{m^2}\right]$	$G_{00} = \frac{dF}{dA}$ --	$\left[\frac{N}{m^2}\right]$	Geometrie

Tabelle 6
Feldgrößen des elektrischen, magnetischen und Gravitationsfelds im Vergleich

1) physikalisch sinnlos
2) Dauermagnet

3) $Q_0 \geq 10^5$

Bei der Wirkung der Masse auf die Geometrie handelt sich also tatsächlich um eine Art Induktion. Allerdings ist diese nur von 1. Ordnung, während sie beim EM-Feld die Ordnung 2 hat. Das hat Auswirkungen auf die Symmetrie der betrachteten Feldgrößen. Aufgrund der Ordnung 2 gibt es zu jeder magnetischen Größe eine elektrische Gegengröße und umgekehrt (Kreuzsymmetrie). Beim Gravitationsfeld ist dies nicht der Fall. Wenn es hier Symmetrien gibt, dann bestehen diese zu anderen Größen des Gravitationsfelds selbst (Eigensymmetrie).

Mehr darüber finden wir in Tabelle 6, die eigens aufgestellt wurde um solche Symmetrien aufzudecken. Allerdings erscheinen einige doch weit hergeholt. So gelten einige Beziehungen nur theoretisch, wie z.B. die mit einem Stern gekennzeichneten Ausdrücke (es gibt keine magnetischen Punktladungen). Die magnetische Ladungsdichte (Dipole!) tritt nur beim Dauermagneten auf und ist auch von deren Orientierung abhängig. Die elektrische Stromdichte gehört eigentlich zum elektrischen Strömungsfeld und der Gravitationsdruck ist eine unübliche Größe. Letzteren könnte man als den Druck bezeichnen, den eine Masseverteilung auf die Metrik ausübt (gilt nur im Inneren der Masseverteilung).

Interessant ist aber auch die Untersuchung des Produkts MG . Wenn wir M durch den Ausdruck $\hbar\omega_D/c^2$ (ω_D ist die DEBROGLIE-Kreisfrequenz eines Teilchens) sowie G durch (695) ersetzen, kommen wir auf folgende Beziehungen:

$$\Psi = MG = \frac{c}{\mu_0\kappa_0} \frac{\omega_D}{H} = r_1 c^2 \frac{\omega_D}{H} = r_0 c^2 \frac{\omega_D}{\omega_0} = r_0^2 c \omega_D \quad (743)$$

$$R_s = \frac{2\Psi}{c^2} = \frac{2}{\kappa_0 Z_0} \frac{\omega_D}{H} = 2r_1 \frac{\omega_D}{H} = 2r_0 \frac{\omega_D}{\omega_0} = 2\frac{r_0^2}{c} \omega_D \quad (744)$$

Außer der Frequenz ω_D treten auch hier nur Grundgrößen der Metrik und des Subraums auf. Damit kann man sagen, daß die Gravitations»konstante« eigentlich nur ein künstliches mathematisches Gebilde ist, im Gegensatz zu μ_0 und ε_0 als echte Naturkonstanten.

Wie könnte die Gravitation nun funktionieren? Die Massen wechselwirken mit der Metrik, nicht aber miteinander. Die gravitative Wirkung selbst wird durch die Metrik ausgeübt oder einfacher, ohne Metrik keine Masse und keine Gravitation. In Abwesenheit der Metrik würden beliebige Körper oder Teilchen nur der starken Wechselwirkung unterliegen, da diese durch den Subraum vermittelt wird. Gleichzeitig verhindert die Anwesenheit des metrischen Wellenfeldes das Wirksamwerden der starken Wechselwirkung über größere Abstände.

Wir hatten ja schon festgestellt, daß die träge Masse gleich dem Widerstand ist, den die Metrik dem Körper bei Beschleunigung entgegensetzt. Andererseits kann man sich auch vorstellen, daß die aktive und passive schwere Masse durch die Wirkung der Masse auf die Metrik bzw. umgekehrt verursacht wird.

Existiert nun an einer Stelle in der Metrik eine Masseverteilung, so besteht diese zunächst einmal aus einer gewissen Anzahl Teilchen (Fermionen) mit der DEBROGLIE-Frequenz ω_D . Im Abschnitt 4.6.4.2.5. hatten wir ein Modell aufgestellt, das die Masserotverschiebung und die Symmetriebrechung zwischen normalen und Antiteilchen erklärt. Danach haben die Teilchen eigentlich eine sehr viel größere Masse, als wir durch die Metrik beobachten können, wobei normale Teilchen mit einer Frequenz kleiner als, Antiteilchen dagegen mit einer Frequenz größer als ω_0 verknüpft sind.

Bei der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem anderen über die Metrik wird dann nur die Energie $\hbar\omega_D$ wirksam und auch bei der Bildung eines einzelnen Teilchens benötigen wir nur diesen Betrag. Der Rest sollte durch die Metrik dazugegeben werden. Bei der Paarerzeugung hingegen (auch virtuell) benötigen wir überhaupt keine zusätzliche Energie. Die Energieübertragung zwischen Teilchen und Metrik geschieht mittels raumartiger Photonen.

So einfach scheinen aber die Verhältnisse nun doch nicht zu liegen. Zuerst einmal sind die Abmessungen der Teilchen wesentlich größer als r_0 , so daß sich innerhalb eines Teilchens eine

große Anzahl Linienelemente befindet. Beide, sowohl das Teilchen als auch die Metrik, sind aber auch Wellenfunktionen, die einander überlagern, so daß aufgrund der Nichtlinearität tatsächlich die Differenzfrequenz $\omega - \omega_D$ bei "normalen" Teilchen und die Summenfrequenz bei den Antiteilchen auftritt. Diese Summen- bzw. Differenzfrequenz bestimmt dann unsere "eigentlich sehr viel größere Masse" und damit auch die Abmessungen von r_0 innerhalb des Teilchens, wobei eine niedrigere Frequenz einem höheren Wert von r_0 entspricht (größere Güte, größere Abmessungen).

Diese größeren Linienelemente beanspruchen nun aber mehr Raum als gewöhnlich, so daß sich im Endeffekt innerhalb eines makroskopischen Körpers weniger Linienelemente befinden, als normal. Es werden quasi Linienelemente aus dem Körper herausgedrängt. Damit diese außerhalb Platz finden, kommt es zu einer Kompression der PLANCKschen Elementarlänge, was einer kleineren Güte bzw. einer höheren Krümmung entspricht. Erst mit zunehmendem Abstand gleicht sich r_0 wieder an den Durchschnittswert des Universums an. Durch die Kontraktion kommt es zu einer Anziehung zwischen den beteiligten Körpern. Das Herausdrängen selbst ist dann nicht die Induktion sondern die Gravitation der Masse.

Diese größeren Linienelemente beanspruchen nun aber mehr Raum als gewöhnlich, so daß sich im Endeffekt innerhalb eines makroskopischen Körpers weniger Linienelemente befinden, als normal. Es werden quasi Linienelemente aus dem Körper herausgedrängt. Damit diese außerhalb Platz finden, kommt es zu einer Kompression der PLANCKschen Elementarlänge, was einer kleineren Güte bzw. einer höheren Krümmung entspricht. Erst mit zunehmendem Abstand gleicht sich r_0 wieder an den Durchschnittswert des Universums an. Durch die Kontraktion kommt es zu einer Anziehung zwischen den beteiligten Körpern. Das Herausdrängen selbst ist dann nicht die Induktion sondern die Gravitation der Masse.

4.4. Das Wesen der Gravitation

Ist es uns bisher erfolgreich gelungen, die Verwendung von Tensoren zu vermeiden, ist das ab diesem Punkt anders. Die Ursachen liegen in den Eigenschaften der Gravitation, die im Gegensatz zum EM-Feld nicht mit einer Drehung, sondern einer elastischen Deformation des metrischen Raumgitters (Kristall) verbunden sein sollen [1]. Und diese läßt sich eben nicht mit einer rein vektoriiellen Betrachtung behandeln. Zu diesem Zweck wurde das mathematische Werkzeug der Tensoralgebra geschaffen, die ursprünglich gerade zur Berechnung von Spannungen (Tensionen) in Kristallen verwendet wurde. Daher erscheint es durchaus sinnvoll, dieses Werkzeug auch zur Behandlung von Problemen der Gravitation zu verwenden. Interessanterweise benutzen auch Autoren, die den Raum nicht als kristalline Struktur betrachten, die Tensoralgebra zum selben Zweck.

Ursprünglich hatte ich vor, diese Arbeit an diesem Punkt zu unterbrechen, und einen Kurs in Kryptologie zu belegen. Glücklicherweise hat aber d'INVERNO mit [30] ein Lehrbuch veröffentlicht, in dem die Lösungswege solcher Aufgaben ausführlich beschrieben sind, wenn auch diese Beschreibungen gleichmäßig über das ganze Buch verteilt sind, so daß man nicht umhin kommt, alles zu lesen.

Gleichzeitig empfehle ich, den Vortrag von LANCZOS [1] bzw. Abschnitt 3.1.2. noch einmal Revue passieren zu lassen. Dies allein schon um festzustellen, inwieweit wir das Modell von LANCZOS bereits mit Leben erfüllt haben.

7.2.1. Noch einmal das MINKOWSKIsche Linienelement

Nun haben wir im Verlauf der Arbeit bereits häufig den Ausdruck MINKOWSKIches Linienelement (MLE) benutzt, ohne auf dessen eigentliche Bedeutung einzugehen. Vielmehr haben wir darunter bisher ein physikalisches Objekt mit bestimmten Eigenschaften gesehen, von denen der lokale Zustand des Universums abhängt. Der Grund liegt darin, daß auch LANCZOS diesen Ausdruck in seinem Modell verwendet hat und bisher keine andere Bezeichnung für

dieses Objekt existiert, die nur annähernd dessen physikalischen Inhalt beschreibt. So kommt der Ausdruck PLANCKsche Elementarlänge schon deshalb nicht infrage, da es sich hier nicht nur um eine Länge handelt, sondern um viel mehr. Manche Autoren benutzen dafür den Ausdruck Graviton. Diesen möchte ich aber auch nicht verwenden, da man mit der Endung -on im allgemeinen ein frei bewegliches Teilchen assoziiert (die MLEs dagegen sind dies nicht, sie bilden vielmehr den Raum selbst) und auch die Vorsilbe Gravit- beschreibt die Eigenschaften nur unvollständig, da hier die elektromagnetischen Eigenschaften unter den Tisch fallen.

In der ART dagegen ist der Begriff MLE viel allgemeiner gefaßt. So handelt es sich hier nur um ein mathematisches Konstrukt, das die lokalen Eigenschaften des (leeren) Raumes beschreibt. In [1] arbeitet LANCZOS (und auch EINSTEIN) mit dem Ausdruck (0.23) in der Form:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \underline{c}^2 t^2 \quad (745)$$

mit der Signatur + + + -, das sind die Vorzeichen der einzelnen Komponenten eines Vierervektors. Diese Signatur wird im allgemeinen in der SRT verwendet., während in der ART die Signatur + - - - üblich ist. Hierbei ist auch die Sortierreihenfolge verändert ($\underline{c}t$ steht an erster Stelle). Man arbeitet im allgemeinen mit der differentiellen Form von (740), was zu dem in [30] angegebenen Ausdruck führt:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (746)$$

Hier haben wir es wieder einmal mit der leider in der SRT und ART üblichen Schreibweise zu tun, die Zusammenhänge verschleiert, indem man $c=1$ setzt und das ganze schöne mathematische Konstrukt von vorneherein für anderweitige Betrachtungen unbrauchbar macht (vorgegebene Struktur). Nun hatten wir uns aber von Anfang an geschworen, diese Mode nicht mitzumachen und vielmehr alle Variablen und Konstanten voll auszuschreiben. Ausdruck (746) müßte dann korrekt lauten:

$$ds^2 = d(\underline{c}t)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad \text{bzw.} \quad (747)$$

$$ds^2 = d(x^0)^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b \quad (748)$$

mit $(dx)^2 = dx^2$. Und genau dieses ds^2 stellt dann das eigentliche MINKOWSKIsche Linienelement dar, wobei die Indizes der einzelnen $(x^i) = (\underline{c}t, x, y, z)$ im Innern der Klammern stehen (hochgestellt), im Gegensatz zur normalen Vorgehensweise (tiefgestellt). Die Komponente x^0 lautet damit korrekt $\underline{c}t$ (Länge) und nicht t . Ich habe hier einmal die komplexe Phasengeschwindigkeit \underline{c} anstelle von c eingesetzt (für Nullvektoren gilt $\underline{c}=c$). Sollte ein Ausdruck mehrere hochgestellte Zeichen enthalten, so dient das äußere immer der Numerierung, wobei im allgemeinen über doppelt auftretende Indizes zusätzlich summiert wird.

Mathematisch gesehen sind alle drei Ausdrücke in (748) identisch, d.h. sie bezeichnen dasselbe, nämlich das MINKOWSKIsche Linienelement. Allerdings läßt nur der rechte Ausdruck direkte Berechnungen mit Tensoren (Matrizen) zu. Der Ausdruck η_{ab} wird auch als *Metrik* bzw. *metrischer Tensor* bezeichnet, wobei der Buchstabe η allein der MINKOWSKIschen Metrik vorbehalten ist. Ein Tensor ist damit immer eine Matrix, während eine Matrix nicht automatisch ein Tensor ist. Es handelt sich hier um einen Tensor 2. Stufe. Tensoren 1. Stufe sind Vektoren während man Skalare auch als Tensoren 0. Stufe auffassen kann.

Benutzt man eine andere Metrik (z.B. bei Kugelkoordinaten), verwendet man im allgemeinen den Buchstaben g , geschrieben als g_{ab} bzw. g_{ik} . Die Indexbuchstaben können frei gewählt werden, wir benutzen aber in Zukunft in Anlehnung an LANCZOS die Bezeichnung g_{ik} .

Der Unterschied zwischen der ART und unserem Modell besteht nun darin, daß sowohl das MLE selbst, als auch die Metrik physikalischen Inhalt bekommen haben. Weiterhin werden in der ART die Inkremente dx^i unendlich klein (indefinite Struktur), während sie in diesem Modell die Größe r_0 haben (definite Struktur).

Aufgrund der extremen Kleinheit von r_0 fällt der Unterschied aber nicht ins Gewicht. Wenn wir bisher von der Metrik gesprochen hatten, meinten wir damit immer das metrische Wellenfeld. In der ART ist damit der Ausdruck η_{ab} gemeint, der folgendermaßen definiert ist:

$$\eta_{ab} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (749)$$

Die einzelnen Elemente der Matrix werden dann als $\eta_{00}, \eta_{01}, \eta_{02}, \eta_{03}, \eta_{10}, \eta_{11}, \dots, \eta_{33}$ bezeichnet, wobei die erste Zahl die Zeile, die zweite die Spalte angibt. In diesem Fall sind nur die Elemente $\eta_{00}, \eta_{11}, \eta_{22}$ und η_{33} von Null verschieden.

Es gelten die Gesetze des Rechnens mit Matrizen, wobei die Addition, Subtraktion, Multiplikation, partielle Ableitung (bei Matrizen auch gewöhnliche Ableitung genannt) und die sogenannte kovariante Ableitung definiert sind [30]. Eine Division gibt es nicht. Stattdessen führt man dann eine Multiplikation mit der inversen Matrix η^{ab} durch, wobei gilt: $\eta_{ab} \eta^{ab} \equiv (1)$. Der Ausdruck (1) bezeichnet hier die Einheits-(diagonal-)Matrix $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

Eine andere Schreibweise ist $\eta_{ab} \eta^{bc} = \delta_a^c$. Der Ausdruck auf der rechten Seite ist das KRONECKER-Symbol, das immer dann 1 ergibt, wenn a und c gleich sind. Ansonsten hat es den Wert Null.

Im Abschnitt 4.3.4.3. haben wir uns ja schon einmal mit dem MLE beschäftigt. Dort hatten wir aber Kugelkoordinaten $(x^i) = (t, r, \vartheta, \phi)$ benutzt. Der Grund war, daß der Abstand r bei kleinen Gütewerten einer einfachen linearen Funktion folgt (Bild 27) wodurch sich die Berechnung gegenüber kartesischen Koordinaten wesentlich vereinfacht. Die MINKOWSKISCHE Metrik g_{ik} in Kugelkoordinaten sieht dann folgendermaßen aus:

$$g_{ik} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta) \quad (750)$$

Der Übergang zu kartesischen Koordinaten ist folgendermaßen definiert:

$$ct = \underline{ct} \quad x = r \sin \vartheta \cos \phi \quad y = r \sin \vartheta \sin \phi \quad z = r \cos \vartheta \quad (751)$$

Das Linienelement ausgeschrieben wird dann zu:

$$ds^2 = d(\underline{ct})^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\phi^2 \quad (752)$$

$$ds^2 = d(x^0)^2 - d(x^1)^2 - d(x^2)^2 - d(x^3)^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (753)$$

Hierbei spielt die g_{00} -Komponente der Metrik (diese ist gleich η_{00}) eine ganz besondere Rolle. Physikalisch gesehen entspricht sie dem zeitlichen Anteil und ist identisch mit unserem Bezugssystem, wie wir im vorigen Abschnitt bereits festgestellt haben. Daher ist sie auch entscheidend bei Koordinatentransformationen und bei der LORENTZ-Transformation als Faktor $(-g_{00})^{1/2}$.

In der Matrix (749) und (750) steht jeweils auf Position (0,0) der Faktor 1. Dieser wiederum kennzeichnet ein echtes MINKOWSKISches Linienelement und entspricht genaugenommen dem Nullvektor ct. In der ART spielt der Nullvektor eine bedeutende Rolle, gibt er doch die Oberfläche des Lichtkegels an, der die verschiedenen Arten von Vektoren voneinander trennt. In diesem Modell hatten wir aber zu Anfang eine ganz außergewöhnliche Annahme gemacht, nämlich die, daß die Lichtgeschwindigkeit nur gegenüber dem Subraum konstant (c) ist. Damit

gibt es innerhalb der Metrik, und hier befinden wir uns schließlich, überhaupt keine Nullvektoren, nur zeitartige und raumartige Vektoren, die in der Näherung senkrecht aufeinander stehen. Daher haben wir im Abschnitt 4.3.4.3.3. auch nicht c , sondern die komplexe Ausbreitungsgeschwindigkeit \underline{c} des metrischen Wellenfeldes eingesetzt (252). Mit Ausdruck (257) erhielten wir dann folgenden Ausdruck (jetzt in neuer Notation):

$$ds^2 = -\frac{4i_0^2 dt^2}{1 - (A(\phi) - jB(\phi))^2} - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (754)$$

Hierbei konnten wir den bereits von LANZOS vorausgesagten Vorzeichenwechsel bei der x^0 -Komponente beobachten, der sich aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen ergab. Offenbar haben wir uns hier mit dem Wechsel auf die Signaturkonvention der ART aber keinen guten Dienst erwiesen, denn nun ist die gesamte rechte Seite negativ. Mathematisch gesehen ist dies jedoch irrelevant, so daß wir dabei bleiben wollen.

Hierbei ist g_{00} die (0,0)-Komponente des metrischen Tensors T_{ik} die genauso bezeichnet wird. Bei genauer Betrachtung sehen wir, daß der Ausdruck nicht nur negativ, sondern gleichzeitig komplex ist, wodurch das negative Vorzeichen wieder relativiert wird. Was bedeutet nun aber ein imaginärer Anteil von x^0 ? Nach der vorherrschenden Lehrmeinung ist dies identisch mit einer Drehung des Vektors in den Tangentialraum, der sich an jedem Punkt des Universums aufspannt. Nun hatten wir bereits früher festgestellt, daß ein Beobachter immer nur den Realteil sieht, wogegen sich der Imaginärteil nur indirekt z.B. als Drehung der Polarisationssebene nachweisen läßt. Daher ist es notwendig, Ausdruck (754) so umzuformen, daß tatsächlich nur der Realteil auftritt. Dazu müssen wir zuerst den Betrag und den Phasenwinkel bestimmen. Wir betrachten nur die x^0 -Komponente, die Berechnung ergibt:

$$|(dx^0)^2| = \frac{c^2 dt^2}{\omega_0^2 t^2 \sqrt{(1 - A^2 + B^2)^2 + 4A^2 B^2}} = \frac{c^2 dt^2}{\rho_0^2 \omega_0^2 t^2} \quad (755)$$

$$\arg((x^0)^2) = -\arctan \frac{2AB}{1 - A^2 + B^2} = \arctan \theta \quad (756)$$

Aufgrund der quadratischen Funktion taucht hier auch der doppelte Phasenwinkel θ auf. Betrachtet man sich die Betragsfunktion (755) genauer, so ist hier eigentlich unser nicht-rechtwinkliges Dreieck (Bild 94) schon implizit enthalten. Dies ist eine allgemeine Eigenschaft der Hankelfunktion. Weiterhin lassen sich Übereinstimmungen mit (552) und (587) finden.

Beim Vergleich von $-g_{00}$ aus (755) mit Ausdruck (732), fällt sofort auf, daß beide Komponenten in der Größenordnung stark voneinander abweichen. Während $-g_{00}$ in (732) etwa gleich 1 ist, liegt der Wert in (750) zumindest bei den heutigen Werten von Q_0 extrem nahe bei Null. Offensichtlich haben wir im Abschnitt 4.3.4.3.3. einen Fehler im Ansatz gemacht, was nicht bedeutet, daß die ganze Rechnung umsonst war. So beschreibt (732) die Abhängigkeit der Zeitkoordinate in der Umgebung einer Masse (wenn man (728) einsetzt), während in (754) die Zeitkoordinate des metrischen Wellenfeldes gemeint ist. Dennoch kann die Abweichung nicht so extrem ausfallen, denn wenn M genügend klein gewählt wird, sollten beide Lösungen in etwa das gleiche Ergebnis haben. Auch wissen wir ja, daß sich die Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, so daß wir davon ausgehen können, daß (754) falsch bzw. nur teilweise richtig ist. Wenn man nämlich Ausdruck (733) anstelle von (728) in (732) einsetzt, erhält man ebenfalls einen Wert, der nahe bei 1 liegt, solange die Geschwindigkeit v klein gegenüber c ist.

Gehen wir nun näherungsweise davon aus, daß der Winkel zwischen dem Nullvektor und dem metrischen Vektor $\pi/2$ beträgt, dann können wir die Vermutung aufstellen, daß (754) eigentlich folgende Form hat:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2 \omega_0^2 t^2}\right) c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \quad (757)$$

$$(dx^0)^2 = \left(1 - \frac{1}{\rho_0^2 \omega_0^2 t^2}\right) c^2 dt^2 \approx \left(1 - \frac{c_M^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 \rightarrow \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 \quad (758)$$

Der rechte Ausdruck korrespondiert mit (731) ist also gültig für zeitartige Photonen (g_{00}). Für diese gilt der Kehrwert des Klammerausdrucks. Nun ist aber der Winkel α bekanntlich kein rechter Winkel, so daß (757) und (758) nicht exakt sein können. Andererseits treten in den genannten Ausdrücken dieselben Winkel auf, wie im Bild 94, so daß es durchaus praktikabel erscheint, die dazu angestellten Betrachtungen in die Aufstellung unseres Linienelements einfließen zu lassen.

Auch haben wir festgestellt, daß es für einen in der Metrik gefangenen Beobachter keine echten Nullvektoren gibt, höchstens Beinahe-Nullvektoren. Und genau so einen Vektor hatten wir ja bereits im Abschnitt 5.1. gefunden (478). Es handelt sich um den zeitartigen Vektor \mathbf{c}_γ , der an seinen Eigenschaften gemessen nahe genug an c heranreicht, wenn nur die Güte genügend groß ist ($>10^5$).

Bisher wurde bei der Messung der Lichtgeschwindigkeit immer allgemein von der Lichtgeschwindigkeit c gesprochen. Für den Elektrotechniker stellt sich aber auch die Frage, welche Geschwindigkeit wir eigentlich damit meinen? Die Antwort lautet: Die Phasengeschwindigkeit. Diese ist nur nach der klassischen MAXWELLSchen Theorie für ein verlustfreies Medium gleich c .

Daß dieses klassische Modell nur näherungsweise richtig sein kann, zeigt schon allein die Tatsache des Auftretens der kosmologischen Rotverschiebung, die sich damit nicht erklären läßt. Wenn wir jetzt aber von einer abweichenden Phasengeschwindigkeit ausgehen, die kleiner als c ist, erklärt sich die Rotverschiebung von alleine. So braucht die Amplitude bei einem bestimmten Phasenwinkel eben etwas mehr Zeit als nach der klassischen Theorie, um beim Beobachter anzukommen. Die Phase bummelt hinterher, was zum Auseinanderziehen des gesamten Wellenzuges, also einer Vergrößerung der Wellenlänge führt. Im Prinzip bummelt auch die Wellenfront, nur können wir dies aufgrund des speziellen Relativitätsprinzips nicht feststellen, haben wir doch diese gerade dazu benutzt, um unsere Uhren zu synchronisieren und/oder den Abstand zur Quelle zu bestimmen. Es triumphiert das spezielle Relativitätsprinzip, genau wie es LANZOS vorhergesehen hatte.

Das Ergebnis unserer Betrachtungen ist: wir messen tatsächlich die Phasengeschwindigkeit \mathbf{c}_γ . Aufgrund der derzeit hohen Güte $Q_0 \approx 10^{60}$ können wir aber die geringe Abweichung zu c überhaupt nicht feststellen, da er weit außerhalb der Meßgenauigkeit liegt. Auch werden wir trotzdem genau den Wert c messen, da unsere Meßapparatur aus fermionischer Materie besteht, die sich als solche eigentlich innerhalb des Subraums befindet und *gleichzeitig* durch das metrische Wellenfeld durchdrungen wird. Damit werden sich aber die physikalischen Grundgrößen immer so ändern, daß sich die Abweichung herauskürzt. Auch unser Gehirn arbeitet mit fermionischen Sensoren (Auge) und bildet die Umgebung mit Hilfe von Nullvektoren ab (Licht).

Wenn wir \mathbf{c}_γ in unser Linienelement einsetzen wollen, müssen wir es als Funktion von c darstellen. Der entsprechende Ausdruck ist (479). Wie wir bei den folgenden Betrachtungen festgestellt haben, ist dieser identisch mit der Funktion $\sin \gamma_\gamma / \sin \alpha$. Für zeitartige Photonen benutzen wir praktischerweise den Ausdruck für zeitartige Photonen (625). In diesem Fall (Wellenlänge!) gilt aber der Kehrwert. Bei Neutrinos dagegen gilt (626). Dann haben wir es aber gleichzeitig mit vier verschiedenen Linienelementen zu tun, oder besser, mit drei Linienelementen, denn $\sin \gamma_\gamma$ ist eindeutig der Komponente g_{11} zugeordnet, wobei wir es dem Leser überlassen wollen, inwieweit er ein neutrino-basiertes Linienelement als sinnvoll erachtet. Höchstwahrscheinlich benötigen wir nur ein einziges, welches sowohl die zeitliche Komponente g_{00} (zeitartige Photonen) als auch die räumliche Komponente g_{11} (raumartige Photonen) beschreibt.

Beide Komponenten unterliegen damit den von uns bereits herausgearbeiteten Beziehungen der Rotverschiebung, und zwar sowohl dem räumlichen, zeitlichen und geometrischen Anteil. Wir können daher schreiben :

$$g_{ik} \equiv \text{diag} \left(\frac{\sin^2 \gamma_\gamma}{\sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{t}{\bar{T}}\right)^{-1}, -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} \left(\left(1 + \frac{t}{\bar{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\bar{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \right)^2, -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta \right) \quad (759)$$

Betrachten wir nur Körper im freien Fall, so vereinfacht sich (759) noch einmal:

$$g_{ik} \equiv \text{diag} \left(\frac{\sin^2 \gamma_\gamma}{\sin^2 \alpha} \left(1 + \frac{t}{\bar{T}}\right)^{-1}, -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} \left(1 + \frac{t}{\bar{T}}\right), -r^2, -r^2 \sin^2 \vartheta \right)_{v_M + v_G = 0} \quad (760)$$

Insgesamt haben wir es nun nicht mehr mit einem echten MINKOWSKISchen—dieses gilt nur für den Subraum—sondern nur noch mit einem beinahe-MINKOWSKISchen Linienelement zu tun. Gewöhnlich wird dieser Übergang in der ART mit dem Auftreten von Materie assoziiert (das echte MLE beschreibt einen massefreien leeren Raum), wogegen das Linienelement dieses Modells schon ohne Materie vom echten MLE abweicht. Das bedeutet, in diesem Modell ist der Raum auch ohne Materie gekrümmt, wobei die Krümmung fast ausschließlich durch das metrische Wellenfeld verursacht wird. Damit können wir schon einmal das *Prinzip der minimalen gravitativen Kopplung* ad acta legen denn es macht hier keinen Sinn. Laut d'INVERNO [30] ist es aber ohnehin mit Vorsicht zu genießen.

X. *Prinzip der minimalen gravitativen Kopplung (GILT NICHT!):
Es sollten beim Übergang von der speziellen zur allgemeinen Theorie keine Terme,
die den Krümmungstensor explizit enthalten, hinzugefügt werden.*

Dieses Prinzip wird im allgemeinen dazu benutzt, um eine Grenze zwischen der SRT, die ja für einen leeren Raum aufgestellt wurde, und der ART, diese gilt in einem Raum mit Masseverteilung, zu setzen. Nach dem 1. MACHschen Prinzip ergibt sich die Krümmung des Raumes nur aus der Verteilung der Massen innerhalb des Universums oder kürzer: *Die Materieverteilung bestimmt die Geometrie*. Wenn man diese irgendwie verschiebt, ändern sich auch die Eigenschaften des Raumes. Wenn es aber gar keinen leeren Raum für irgendeinen beliebigen Beobachter gibt (alle befinden sich innerhalb der Metrik), gibt es keinen Grund mehr, diese Unterscheidung aufrecht zu erhalten. Damit fällt auch diese letzte Grenze und wir müssen uns Gedanken machen, wie wir die Gesetzmäßigkeiten der SRT so umformen, daß sie der Existenz des metrischen Wellenfeldes gerecht werden.

Dies haben wir in den vorangegangenen Abschnitten getan. Als Ergebnis erhalten wir dann eine sogenannte "Spezielle ART", die Gesetzmäßigkeiten von SRT und ART vereint. In dieser wird die makroskopische Metrik des Raumes allein durch das metrische Wellenfeld bestimmt, genau, wie es LANZOS vorhergesehen hat, denn die Energiedichte der Metrik liegt um Größenordnungen über der lokaler Materieverteilungen. Damit beeinflusst eine beliebige Masseverteilung nur die lokale Metrik in Form einer infinitesimalen Störung des metrischen Wellenfeldes. Jedoch können diese Störungen durchaus so groß werden, daß sie einen Körper auf eine elliptische oder eine Kreisbahn zwingen. Bei kosmologischen Betrachtungen können wir das Vorhandensein von Materie ganz ignorieren, es handelt sich damit um einen reinen Strahlungskosmos. Damit gelten alle drei MACHschen Prinzipien unter der Voraussetzung, daß wir das metrische Wellenfeld ebenfalls als Materie betrachten (Energie = Materie).

Es gibt noch einen weiteren Unterschied dieses Modells zu den Standardmodellen. Die meisten Autoren gehen bereits in ihrem Ansatz davon aus, daß das Gravitationspotential im Unendlichen verschwindet. In diesem Modell gibt es keinen unendlichen Abstand und das echte Potential nach (718) verschwindet damit keinesfalls. Und gerade dieser nichtverschwindende Anteil erweist sich als äußerst wichtig für die Krümmung des Raumes am Ort des Beobachters.

7.2.2. Das Linienelement als Funktion von Masse, Raum, Zeit und Geschwindigkeit

Wenn auch die Krümmung im kosmologischen Maßstab ausschließlich durch das metrische Wellenfeld bestimmt wird, gibt es ja noch den lokalen Einfluß einer Masseverteilung. Wir benötigen daher eine Funktion, die lokalen Eigenschaften des Raumes nicht nur in Abhängigkeit von der Zeit, vom Abstand und von der Geschwindigkeit beschreibt (734), sondern auch die Abhängigkeit von einer vorhandenen Masseverteilung. Nun müssen wir einen Weg finden, diese Ausdrücke irgendwie zusammenzuführen. Der Grund dafür ist, daß wir das Prinzip der minimalen gravitativen Kopplung aufgegeben haben. Wir müssen daher ein neues Prinzip definieren, das diese Abhängigkeit beschreibt.

Im Abschnitt 7.1.1. haben wir mit Ausdruck (724) bereits eine solche Beziehung gefunden. Betrachten wir uns aber diesen Ausdruck genauer, so erfüllt er bei einer Masse $M=0$ zwar die Anforderungen der ART, nämlich die, daß die Krümmung verschwindet und das Linienelement exakt MINKOWSKISCH wird, nach unserem Modell sollte das jedoch anders sein. Es verbleibt hier noch die Grundkrümmung des Raumes, die durch das metrische Wellenfeld selbst verursacht wird. Wir müssen uns also überlegen, wie eine Beziehung aussehen müßte, die diese zusätzliche Bedingung erfüllt und gleichzeitig Ausdruck (719) im Fall kleiner Massen ergibt (Näherung).

Bei der Untersuchung des speziellen Relativitätsprinzips hatten wir ja schon einmal ein ähnlich gelagertes Problem gefunden. Dieses bestand darin, die Grundkrümmung des Raumes und eine beliebige Relativgeschwindigkeit in einem Ausdruck zu vereinigen. Dieses hatten wir dadurch gelöst, daß wir den metrischen Vektor der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_M zum ebenfalls metrischen Vektor der Ausbreitungsgeschwindigkeit \mathbf{c}_M des metrischen Wellenfeldes addiert hatten, wobei beide exakt in dieselbe Richtung weisen. Nun ergibt sich die Frage, ob wir im Fall des Vorhandenseins einer Masseverteilung nicht ähnlich vorgehen können. Wir müssen also nur eine metrische Geschwindigkeit \mathbf{v}_G finden, deren Größenordnung von der Masse und vom Abstand zum Massezentrum abhängig ist. Diese müssen wir dann zu den beiden schon vorhandenen Geschwindigkeitsvektoren addieren und hätten damit eine Beziehung gefunden, die auch das Vorhandensein der Masseverteilung berücksichtigt. Als Nebenbedingung ergibt sich, daß diese Geschwindigkeit Null werden muß, wenn die Masse M Null ist.

Eine solche Geschwindigkeit gibt es tatsächlich. Wenn man den Näherungsausdruck von (719) gemäß $1-v_G^2/c^2$ aufteilt, erhält man mit (v , M und G sind vom Bezugssystem abhängig):

$$v_G^2 = \frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{r} \quad v_G = \pm \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{r}} \quad (761)$$

den Ausdruck für die Fluchtgeschwindigkeit oder die 1. kosmische Geschwindigkeit. Das ist die Minimalgeschwindigkeit, die ein Körper haben muß, um sich auf einer Kreisbahn mit dem Radius r um einen Körper mit der Masse M zu bewegen, ohne auf die Oberfläche zurückzufallen. Allgemein setzt man für r den Radius des Körpers ein, da der Startpunkt normalerweise auf der Oberfläche des Körpers liegt. In der Umlaufbahn muß die Geschwindigkeit aber nur so groß sein, wie die Lösung von (761) mit dem Radius der Umlaufbahn ergibt.

Und genau diese Geschwindigkeit müssen wir zu den anderen beiden Geschwindigkeiten addieren und erhalten damit den gewünschten Ausdruck. Es gilt $v = \mathbf{c}_M + \mathbf{v}_G + \mathbf{v}_M$. In der Näherung für Geschwindigkeiten $v \ll c$, bei kleinen Krümmungen sowie unter Vernachlässigung des räumlichen Anteils können wir dann schreiben:

$$\sqrt{-g_{00}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{v}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha} \approx + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (762)$$

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{c}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{r}} + v_M \right)^2 \quad (763)$$

Für einen Körper mit fester Position an der Oberfläche gilt $v_M=0$ und folgender Ausdruck:

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{c}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{r}} \right)^2 \quad (764)$$

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} \quad \text{für } M \gg 0 \text{ und/oder } Q_0 \gg 1 \quad (765)$$

Damit ist auch die Bedingung für $M \rightarrow 0$ erfüllt, es verbleibt tatsächlich die Grundkrümmung des metrischen Wellenfelds:

$$-g_{00} \approx 1 - \frac{1}{\rho_0^2 \omega_0^2 t^2} \approx 1 - \frac{1}{\tilde{Q}_0} \quad \text{für } M \rightarrow 0 \quad (766)$$

Für die Komponente g_{11} wäre es günstig, wenn wir $\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}$ durch $\sin \gamma_{\gamma}$ ersetzen könnten. Dafür benutzen wir vorteilhaft die Beziehungen (621) und (623). Es gilt wieder ohne den Navigationsgradienten:

$$\sqrt{-g_{11}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}} = \frac{1}{\frac{v}{c} \cos \alpha - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha}} = \frac{\frac{v}{c} \cos \alpha + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \alpha}}{\frac{v^2}{c^2} - 1} = -\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\sin \gamma_{\gamma}}{\sin \alpha} \quad (767)$$

Hier taucht auch der Umrechnungsfaktor β zwischen raumartiger und zeitartiger Entfernung auf, wie wir ihn mit (280) bereits vorweggenommen hatten. Für die Näherung analog (765) erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$\sqrt{-g_{11}} \approx -\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} \sqrt{1 - \frac{2MG}{rc^2}} = -\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (768)$$

$$g_{11} \approx -\left(1 - \frac{2MG}{rc^2}\right)^{-1} \quad (769)$$

Nach Einsetzen in (760) erhalten wir näherungsweise das SCHWARZSCHILDsche Linienelement als Lösung. Wenn wir wieder die Geschwindigkeiten einsetzen, sehen wir auch hier, warum bei zeitartigen Vektoren der relativistische Dehnungsfaktor β , bei raumartigen Vektoren jedoch der Kehrwert β^{-1} wirksam wird.

Damit können wir die Beziehungen für den Winkel δ und die verschiedenen Winkel γ um die Ausdrücke für den Einfluß der Masse erweitern. Für den Winkel δ gilt allgemein:

$$\delta = \arcsin \left(\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2}} + \frac{v}{c} \right) \sin \alpha \right) \quad (770)$$

und für den Winkel γ je nach Photonentart:

$\gamma_{\gamma} = \arg \underline{c} + \arccos \left(\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} + \frac{v}{c}} \right) \sin \alpha \right) + \frac{\pi}{4}$	Zeitartige Photonen	(771)
$\gamma_{\bar{\gamma}} = -\arg \underline{c} - \arcsin \left(\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} + \frac{v}{c}} \right) \sin \alpha \right) + \frac{\pi}{4}$	Raumartige Photonen	(772)
$\gamma_{\nu} = -\arg \underline{c} + \arcsin \left(\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} + \frac{v}{c}} \right) \cos \alpha \right) - \frac{\pi}{4}$	Neutrinos	(773)
$\gamma_{\bar{\nu}} = \arg \underline{c} - \arccos \left(\left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} + \frac{v}{c}} \right) \cos \alpha \right) - \frac{\pi}{4}$	Antineutrinos	(774)

Das klassische NEWTONSche Gravitationspotential ist dann folgendermaßen definiert:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_0 \omega_0 t} + \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} + \frac{v}{c}} \right)^2 \quad \text{mit } a = -\text{grad } \Phi \quad (775)$$

Als nächstes wollen wir noch einmal die Beziehung für die Fluchtgeschwindigkeit (761) genauer untersuchen. Der Art nach handelt es sich auch um eine Ausbreitungsgeschwindigkeit. Nach Substitution von G durch (695) und von $M = \hbar \omega_D / c^2$ erhalten wir folgende Beziehung:

$$v_G = \sqrt{\frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{r}} = c \sqrt{\frac{\tilde{R}}{r} \frac{\omega_D}{\omega_1}} = c \sqrt{\frac{\tilde{r}_0}{r} \frac{\omega_D}{\tilde{\omega}_0}} = c \sqrt{\frac{\tilde{r}_0}{r} \frac{\omega_0 - \tilde{\omega}_0}{\tilde{\omega}_0}} \quad (776)$$

Hierbei ist ω_D die DEBROGLIE-Kreisfrequenz eines beliebigen Teilchens. Wir hatten ja bereits festgestellt, daß “normale” Teilchen (Fermionen) die Frequenz des metrischen Wellenfelds innerhalb des Körpers absenken. Das bedeutet, die Länge r_0 im Innern des Körpers ist gedehnt (größere Güte—kleinere Ausbreitungsgeschwindigkeit). Außerhalb des Körpers, und diesen Bereich betrachten wir jetzt, liegen die Verhältnisse genau umgekehrt. Hier ist die Länge r_0 komprimiert (kleinere Güte—größere Ausbreitungsgeschwindigkeit). Daher gilt hier das positive Vorzeichen. Wie sieht die Situation nun aber aus, wenn der Körper aus Antimaterie besteht? Nach diesem Modell hätte er dann auch eine negative Masse und die Gebiete der Dehnung und Kompression wären vertauscht. Ausdruck (776) für Antimaterie würde dann folgendermaßen lauten:

$$v_G = -\sqrt{\frac{-2\tilde{M}\tilde{G}}{r}} = -c \sqrt{\frac{\tilde{R} - \omega_D}{r} \frac{\omega_D}{\omega_1}} = -c \sqrt{\frac{\tilde{r}_0 - \omega_D}{r} \frac{\omega_D}{\tilde{\omega}_0}} = -c \sqrt{\frac{\tilde{r}_0}{r} \frac{\tilde{\omega}_0 - \omega_0}{\tilde{\omega}_0}} \quad (777)$$

Für Antimaterie gilt das negative Vorzeichen der Wurzelfunktion. Ausdruck (777) stimmt gut mit der Lehrmeinung überein, daß Antimaterie auch eine negative Energie besitzt. Nur handelt es sich in diesem Modell um eine negative Differenzenergie, was viel leichter zu akzeptieren ist. Daher müssen wir in die Ausdrücke (770-775) das negative Vorzeichen einsetzen, wenn es sich um eine negative Masse handelt. Damit haben wir es auch hier mit einer Symmetriebrechung zwischen “normaler” und Antimaterie zu tun, die nur zum heutigen Zeitpunkt aufgrund des extrem kleinen Werts von c_M nicht ins Gewicht fällt. In der Zeit kurz nach dem Urknall ist aber der Wert von c_M nicht zu vernachlässigen, so daß die Symmetriebrechung wesentlich für die weitere Entwicklung des Universums war.

Zum Schluß wollen wir noch den Einfluß des Geschwindigkeitsanteils v_M untersuchen. Dieser kann im allgemeinen nicht frei gewählt werden, es sei denn, es handelt sich um ein Raumschiff. Wir wollen dazu ein Gedankenexperiment unternehmen. Wir hatten ja bereits festgestellt, daß sich ein Beobachter immer im Mittelpunkt des Universums befindet. Dies ist insofern richtig, wenn es sich um einen leeren Raum handelt (den Beobachter einmal ausgeschlossen). Wie sieht es aber aus, wenn dieser Raum nicht leer ist, also wenn sich der Beobachter im Gravitationsfeld eines Körpers befindet?

Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Der erste Fall ist der, daß sich der Beobachter nicht gegenüber dem Körper bewegt, wie z.B. ein Beobachter auf der Erdoberfläche. Dieser unterliegt dann dem vollen Einfluß des Gravitationsfelds, es besteht eine Anziehungskraft, die identisch ist mit einem niedrigeren Güterwert (= komprimierte Metrik) außerhalb des Körpers. In diesem Fall müssen wir den Wert der Fluchtgeschwindigkeit zur Ausbreitungsgeschwindigkeit c_M des metrischen Wellenfelds addieren. Der Raum ist also stärker gekrümmt, als normal.

Der zweite Fall ist der, daß sich der Körper zwar im Gravitationsfeld eines Körpers, gleichzeitig aber im freien Fall befindet. Dies ist das berühmte Fahrstuhlexperiment [30]. Hierbei gibt es ja bekanntlich bis auf eine geringe Winkelabweichung zum Mittelpunkt der Masse keinen Unterschied zu einem Beobachter, der sich in einem leeren Raum befindet (nur c_M). Der gleiche Fall liegt bei einem Beobachter vor, der sich im Orbit mit der 1. kosmischen Geschwindigkeit bewegt. Auch dieser befindet sich im freien Fall, was man auch mit dem Phänomen "Schwerelosigkeit" identifiziert. In diesem Fall darf für den Beobachter auch nur der Anteil c_M wirksam werden. Dies können wir aber nur erreichen, wenn der Geschwindigkeitsanteil v_M negativ wird. Nun gibt es aber für einen Beobachter im Mittelpunkt des Universums immer nur positive Geschwindigkeiten, diese sind auf den Weltradius hin definiert, der in alle Richtungen gleich weit entfernt ist. Damit heben sich alle Kräfte, die von der dort befindlichen Singularität auf den Beobachter ausgeübt werden, auf, so daß der Beobachter im Mittelpunkt verbleibt.

Nun hatten wir ja schon einmal die Frage aufgeworfen, was eine negative Geschwindigkeit, sollte es eine geben, denn eigentlich bedeuten könnte. Dies ist laut Definition eine Geschwindigkeit vom Weltradius weg, die es nur geben kann, wenn sich der Beobachter nicht im Mittelpunkt des Universums befindet. Daraus können wir den Schluß ziehen, daß ein Beobachter, der sich in einem Gravitationsfeld, nicht aber im freien Fall befindet auch nicht im Mittelpunkt des Universums steht (an diese Stelle tritt dann der Schwerpunkt des Systems Masse-Beobachter). Oder umgekehrt:

XI. Ein Beobachter, der sich im freien Fall befindet, steht immer im Mittelpunkt des Universums. Seine Relativgeschwindigkeit gegenüber der Metrik ist gleich Null.

Bei einem Beobachter im Orbit gilt dies jedoch nur für den radialen, nicht für den tangentialen Anteil der Geschwindigkeit. Für allgemeine Geschwindigkeitsvektoren müssen wir daher den Betrag noch mit dem Cosinus des Winkels zum Radius r multiplizieren. Da sich fast alle Materie im Universum im freien Fall befindet, bewegt sie sich mit der Metrik (konstanter Wellenzahlvektor). Zur besseren Übersicht sind die drei Fälle leerer Raum, Gravitationsfeld und freier Fall noch einmal im Bild 126 dargestellt. Es handelt sich um die Verhältnisse für ein Massesystem, das aus "normaler" Materie besteht.

In dem Fall, daß die gravitierende Masse aus Antimaterie besteht, liegen die Verhältnisse (nach diesem Modell) völlig anders. Jetzt ist die Fluchtgeschwindigkeit negativ, wie wir im Bild 127 erkennen können. Dies bedeutet, daß ein Beobachter (aus Antimaterie) im freien Fall eine positive Geschwindigkeit haben muß, während sich ein frei navigierender Körper aus

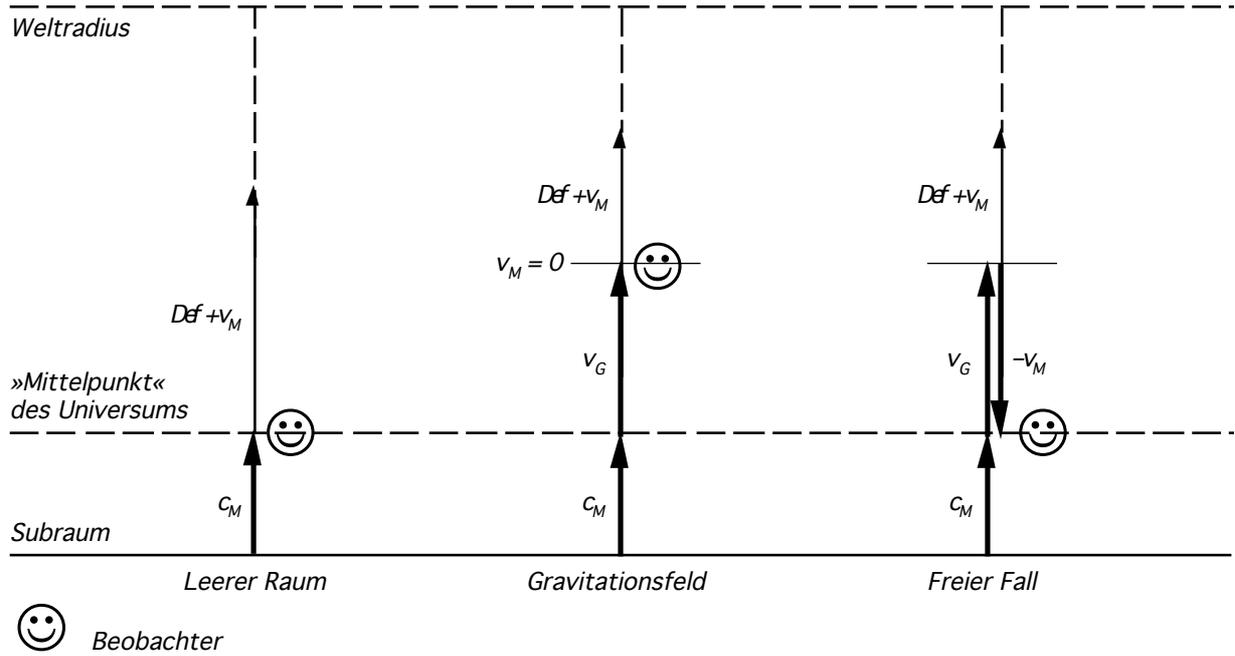


Bild 126
Definition der Geschwindigkeit und des Mittelpunkts des Universums für die Fälle leerer Raum, Körper im Gravitationsfeld und freier Fall für "normale" Materie

Antimaterie mit negativer Geschwindigkeit bewegt. Überlegen wir noch einmal genau. Die Geschwindigkeit c ist definiert als $c = \omega_0 r_0$ wohingegen für eine beliebige Geschwindigkeit v der Ausdruck $v = \omega v r_0$ gilt.

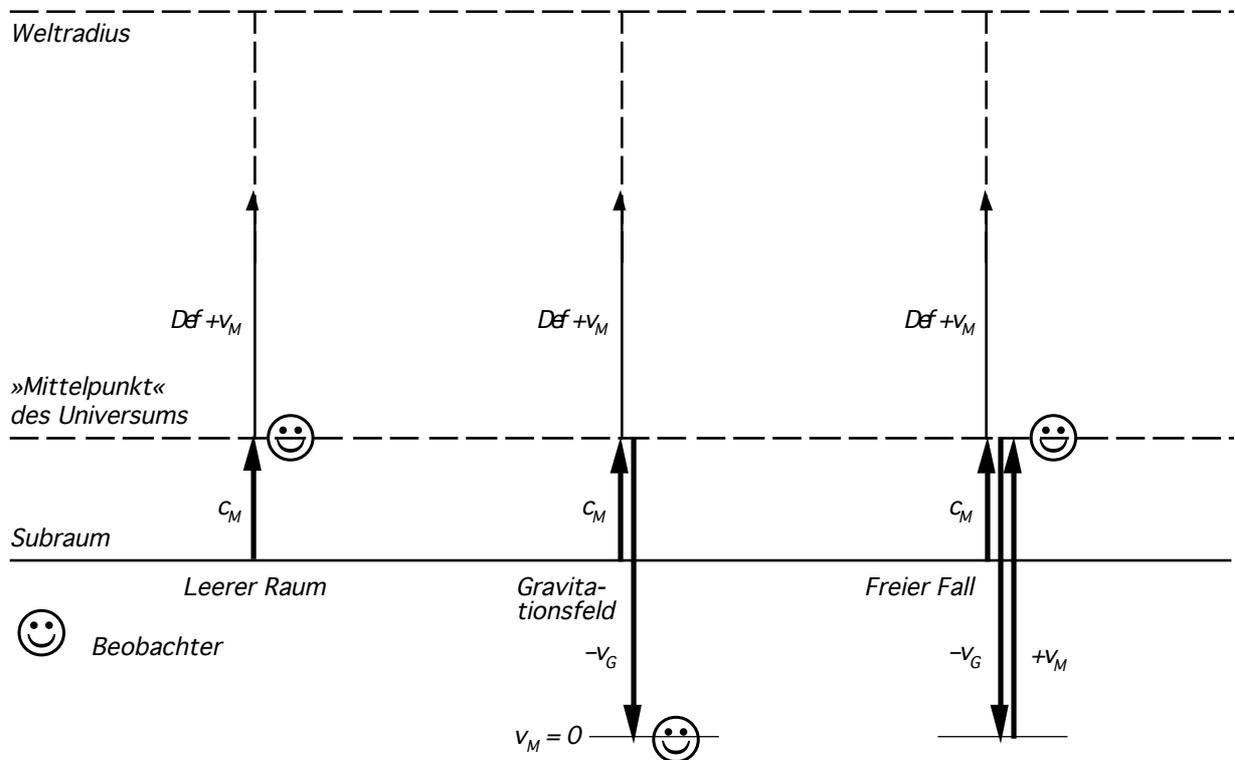


Bild 127
Definition der Geschwindigkeit und des Mittelpunkts des Universums für die Fälle leerer Raum, Körper im Gravitationsfeld und freier Fall für Antimaterie

Damit erhalten wir eine Frequenz ω_v die gleich der Anzahl Linienelemente ist, die ein Körper mit der Geschwindigkeit v innerhalb eines bestimmten Zeitraumes "streift". Nun wissen wir, daß Körper aus Antimaterie eine negative (Differenz-)Energie besitzen, damit wird auch die Differenzfrequenz negativ, was zu dem Resultat führt, daß sich materielle Körper aus Antimaterie mit negativer Geschwindigkeit—entgegengesetzt zu "normalen" Körpern bewegen. Dies ist eine Aussage, die allgemein akzeptiert ist.

Die Summengeschwindigkeit eines Körpers im freien Fall gegenüber der Metrik (sowohl aus Materie als auch aus Antimaterie) ist in beiden Fällen Null. Übrig bleibt dann nur der zeitliche Anteil ct , d.h. fast alle Körper bewegen sich im Mittel auf rein zeitartigen Weltlinien, deren Fortschreiten durch die stetige Zunahme des Phasenwinkels $2\omega_0 t$ bewirkt wird. Eine weitere Schlußfolgerung ist, daß sich zwei Körper, der eine aus Materie, der andere aus Antimaterie, gegenseitig abstoßen müßten.

7.2.3. LORENTZ-Transformation und Addition von Geschwindigkeiten

Mit (759) haben wir das Linienelement dieses Modells aufgestellt. Bevor wir dieses weiter untersuchen, müssen wir uns noch mit einem anderen Problem befassen, das eigentlich in den vorhergehenden Abschnitt gehört—die Transformation und Addition von Geschwindigkeiten. Aus der SRT kennen wir ja eine Beziehung zur Addition von Geschwindigkeiten, die gern als Beispiel dafür herangezogen wird, daß Geschwindigkeiten größer c unmöglich seien. Physikalisch gesehen ist dies aber falsch. In Wirklichkeit sind solche Geschwindigkeiten sehr wohl möglich und keinesfalls verboten. Nach der klassischen EINSTEINschen Theorie können wir diese nur nicht erreichen, da die in der Materie enthaltene Energie $W = Mc^2$ nicht dafür ausreicht. Bei 100-prozentigem Wirkungsgrad erreicht man c genau in dem Augenblick, in dem man seinen gesamten Treibstoff inclusive Antrieb etc. und auch sich selbst, also die gesamte Masse M in Strahlung umgewandelt hat.

Nun haben wir im vorigen Abschnitt das Additionstheorem der Geschwindigkeiten nicht angewandt, sondern vielmehr sorglos alle drei Teilgeschwindigkeiten vektoriell addiert. Dies hat einen bestimmten Grund, der auch nach der klassischen Theorie gilt: Alle drei Geschwindigkeiten sind nämlich gegenüber dem selben Bezugssystem definiert. Das Additionstheorem gilt aber nur dann, wenn die Geschwindigkeit v' gegenüber einem anderen Bezugssystem definiert ist, das sich selbst gegenüber dem Beobachter mit der Geschwindigkeit v bewegt:

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad \text{Geschwindigkeitsaddition klassisch} \quad (778)$$

Gilt diese Beziehung nun auch in unserem Modell? Dies ist eine wichtige Frage, die wir hier und jetzt beantworten müssen. Sie hängt eng zusammen mit dem Koeffizienten der LORENTZ-Transformation $\beta = (-g_{00})^{-1/2}$ (Vorzeichenkonvention SRT). Daher wollen wir uns zunächst mit diesem befassen. Nach [30] ist β gleich dem Cosinus des Winkels ξ , der die Drehung des Koordinatensystems in der (x,t) -Ebene beschreibt, die durch die Geschwindigkeit v verursacht wird:

$$\cos \xi = \frac{1}{\sec \xi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \xi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (779)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit dem klassischen Dehnungsfaktor der SRT und läßt sich als Spezialfall dieses Modells darstellen, wenn der Winkel θ (209) gleich $-\pi/4$ ist, also bei sehr großer Güte Q_0 . Um die oben gestellte Frage zu beantworten, werden wir die Beziehung noch einmal genau herleiten, wobei wir uns eng an [30] anlehnen wollen.

Ausgangspunkt sind zwei Inertialsysteme S und S' (freier Fall), deren Koordinatenursprünge zu Beginn übereinstimmen. In beiden Bezugssystemen werden die Uhren synchronisiert ($t = t' = 0$). Mathematisch beschrieben wird das Problem durch die Koordinatentransformation:

$$S'[t',x',y',z'] = L\{S[t,x,y,z]\} \quad (780)$$

wobei sich das System S' mit der Geschwindigkeit v gegenüber S bewegen soll. Diese Transformation wird auch als LORENTZ-Transformation bezeichnet (L). Senden wir nun vom Ursprung einen Lichtblitz aus, so wird sich dieser mit der Geschwindigkeit c ausbreiten, wobei wir ihn in beiden Systemen unterschiedlich beobachten werden. Da es sich um dasselbe Ereignis handelt, läßt sich das Problem auf die Gleichsetzung der beiden (echten) MINKOWSKISchen Linienelemente zurückführen, wobei wir in diesem Abschnitt immer die Vorzeichenkonvention der SRT verwenden wollen:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 \quad (781)$$

In einem isotropen Raum und wenn die Bewegung von S' nur in x -Richtung erfolgt, gilt $y'=y$ und $z'=z$, was das Problem auf die Beziehung:

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \quad \text{bzw.} \quad r^2 - c^2t^2 = r'^2 - c^2t'^2 \quad (782)$$

reduziert. Im Gegensatz zu [30] wollen wir mit der zweiten Beziehung (Polarkoordinaten) weiterarbeiten, was mathematisch gesehen keinen Unterschied macht. Damit läßt sich das Modell aber besser mit unserem neuen Photonenmodell in Übereinstimmung bringen, wenn die r -Achse mit der r -Achse der Expansionskurve zusammenfällt. Wiederum im Gegensatz zu [30] wollen wir aber die Achsen vertauschen. Keine Angst, wir kommen trotzdem auf dasselbe Ergebnis. Weiterhin führen wir imaginäre Zeitkoordinaten:

$$T = jct \quad T' = jct' \quad (783)$$

ein, die senkrecht auf den anderen schon existierenden Koordinaten der Expansionskurve stehen und einen zusätzlichen Tangentialraum an jedem Punkt aufspannen. Damit haben wir die Frage beantwortet, wo denn die Summe der vielen Geschwindigkeitsvektoren, die wir bisher eingeführt haben, eigentlich hineinzielt. Sie laufen nicht etwa entlang der Expansionskurve, sondern in den Tangentialraum hinein. Daher macht es auch nichts aus, wenn sie sich allzusehr von der Expansionskurve entfernen. Die genauen Verhältnisse ($\alpha=\pi/2$) sind im Bild 128 dargestellt.

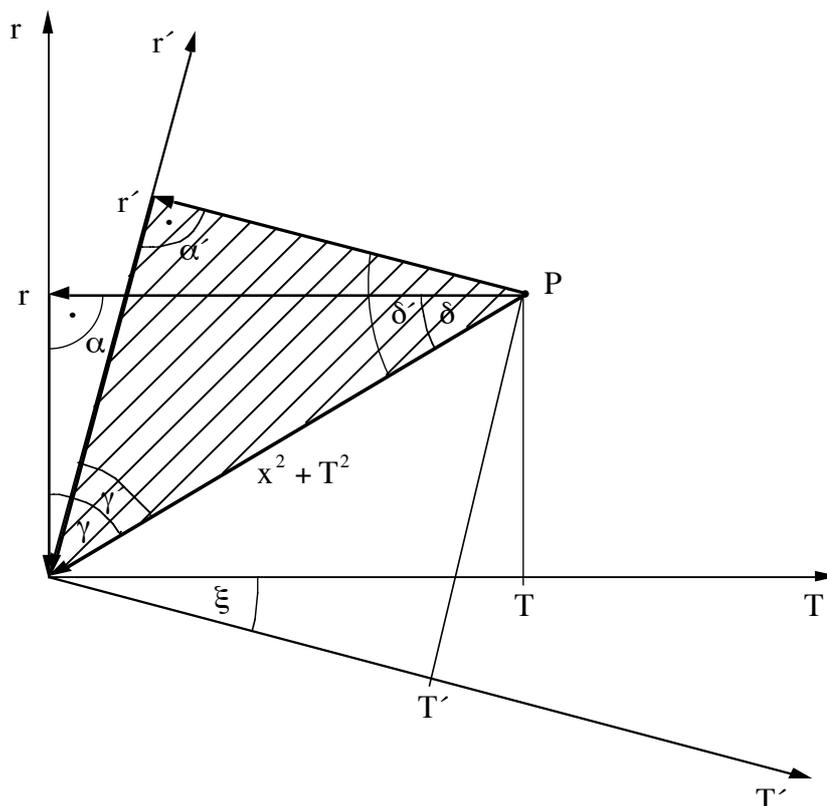


Bild 128
Drehung in der (T,r) -Ebene bei
der LORENTZ-Transformation

Nach Einsetzen von (783) in (782) erhalten wir folgenden Ausdruck:

$$r^2 + T^2 = r'^2 + T'^2 = \rho^2 \quad (784)$$

Für $v=0$ fallen beide Bezugssysteme zusammen und die Winkel sind gleich den Winkeln α , γ und δ aus den vorhergehenden Abschnitten. Damit haben wir den klassischen Fall mit unserem neuen Photonenmodell in Übereinstimmung bringen können. Hierbei entspricht r dem metrischen Vektor c_M , T dem zeitartigen Vektor c_T und ρ dem Nullvektor c . Dieser ist zwangsläufig in beiden Systemen gleich. Wenn wir nun (784) genauer betrachten, so handelt es sich um die Beziehung für den Radius ρ bei einem Kreis und dieser weist auf den Punkt P. Nun lassen wir aber anstelle des Punktes P das Koordinatensystem S' rotieren, wobei sich die Größe von ρ nicht verändert. Hierbei wird der Drehwinkel durch ξ dargestellt.

Nun soll sich der Beobachter B' mitsamt seinem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v gegenüber S bewegen, wobei r den Abstand zwischen S und S' angibt. Daher ist die Geschwindigkeit v' von S' gegenüber dem eigenen Bezugssystem S' und damit auch der Abstand r' des Beobachters B' gegenüber dem Koordinatenursprung von S' gleich Null. Es gilt:

$$r' = 0 \quad r = vt \quad r = -j\frac{v}{c}T \quad (785)$$

Den rechten Ausdruck erhalten wir durch Einsetzen von (783) in den mittleren Ausdruck. Bei einer Drehung des Koordinatensystems gelten nun laut [21] folgende Beziehungen:

$$r' = r \cos \xi + T \sin \xi \quad T' = -r \sin \xi + T \cos \xi \quad (786)$$

$$0 = r \cos \xi + T \sin \xi \quad \text{wegen (785)} \quad (787)$$

Nun ist der Winkel ξ eigentlich negativ. Wenn wir ihn von jetzt an positiv definieren, gilt nach Einsetzen des rechten Ausdrucks (785) für r :

$$0 = -j\frac{v}{c}T \cos \xi - T \sin \xi \quad \text{bzw.} \quad j\frac{v}{c} \cos \xi = \sin \xi \quad (788)$$

$$\tan \xi = j\frac{v}{c} \quad \text{bzw.} \quad \xi = \arctan j\frac{v}{c} = j \arctan \tanh \frac{v}{c} \quad (789)$$

$$\cos \xi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \xi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} = \beta \quad (790)$$

Wenn wir einen Koeffizientenvergleich vornehmen, erhalten wir folgende wichtige Ausdrücke:

$$\cos \xi = \frac{1}{\cos \delta} \quad \xi = j \arctan \tanh \sin \delta = j \arctan \tanh \frac{v}{c} \quad \sin \delta = \frac{v}{c} \quad (791)$$

Die Beziehungen für die LORENTZ-Transformierten können wir schließlich durch Umstellen von (786) und Einsetzen von (785) bestimmen:

$$r' = \cos \xi (r + T \tan \xi) = \beta [r + jct(jv/c)] = \beta(r - vt) \quad (792)$$

$$T' = jct' = \cos \xi (-r \tan \xi + T) = \beta [-r(jv/c) + jct] \quad | : jc \quad (793)$$

$$t' = \beta (t - vr/c^2) \quad (794)$$

und in der Zusammenfassung:

$$t' = \beta (t - vr/c^2), \quad r' = \beta (r - vt), \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \phi' = \phi \quad \text{Klassisch} \quad (795)$$

Nach [30] ergibt sich nun die Summe zweier Geschwindigkeiten aus der Addition der Winkel ξ . Nach dem Additionstheorem der Areafunktionen gilt:

$$j \left(\operatorname{ar} \tanh \frac{v}{c} + \operatorname{ar} \tanh \frac{v'}{c} \right) = j \operatorname{ar} \tanh \frac{\frac{v}{c} + \frac{v'}{c}}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad (796)$$

$$\tan \xi'' = j \frac{v''}{c} = j \frac{\frac{v}{c} + \frac{v'}{c}}{1 + \frac{vv'}{c^2}} \quad \text{wie gehabt} \quad (797)$$

Interessant wird es, wenn der Winkel α nicht $\pi/2$ groß ist, wie in unserem Modell. Betrachten wir dazu zunächst wieder die Ausdrücke für die LORENTZ-Transformation. Wenn wir davon ausgehen, daß es auch hier zu einer Drehung des Koordinatensystems in den Tangentialraum hinein gibt, die durch die Beziehungen (786) beschrieben wird, müssen wir wieder einen Ausdruck für den Winkel ξ suchen, der diese Drehung beschreibt. Zwangsläufig wird sich dieser von (789) unterscheiden. Im Spezialfall $\alpha = \pi/2$ muß er jedoch dieselbe Lösung ergeben. Die Substitution (783) gilt auch in diesem Fall, da wir mit einem rechtwinkligen Koordinatensystem arbeiten wollen.

Aus den in den vorangehenden Abschnitten gemachten Untersuchungen wissen wir, daß

$$\cos \xi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} = \beta_\gamma \approx \beta \quad (798)$$

gelten *muß*. Wenn wir also davon ausgehen, daß dies der Fall ist, und die Komponente g_{00} aus unserem Linienelement (759) einsetzen, erhalten wir für die Winkelfunktionen und den Wert des Winkels ξ folgende Ausdrücke:

$$\cos \xi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_\gamma} = \beta_\gamma \approx \beta \quad (799)$$

$$\sin \xi \equiv j \sqrt{\frac{1}{-g_{00}} - 1} = j \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} - 1} \quad (800)$$

$$\tan \xi \equiv j \sqrt{1 + g_{00}} = j \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma_\gamma}{\sin^2 \alpha}} \approx j \frac{v}{c} \quad (801)$$

$$\xi \equiv j \operatorname{ar} \tanh \sqrt{1 + g_{00}} = j \operatorname{ar} \tanh \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \gamma_\gamma}{\sin^2 \alpha}} \approx j \operatorname{ar} \tanh \frac{v}{c} \quad (802)$$

Zur Bestimmung der LORENTZ-Transformierten gehen wir analog dem klassischen Fall vor:

$$r' = \cos \xi (r + T \tan \xi) = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} (r + jT \sqrt{1 + g_{00}}) = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} (r - ct \sqrt{1 + g_{00}}) \quad (803)$$

$$T' = jct' = \cos\xi(T - r \tan\xi) = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} (jct - jr\sqrt{1+g_{00}}) \quad | : jc \quad (804)$$

$$t' = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \left(t - \frac{r}{c} \sqrt{1+g_{00}} \right) \quad (805)$$

und in der Zusammenfassung:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} \left(t - \frac{r}{c} \sqrt{1+g_{00}} \right), \quad r' = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}} (r - ct\sqrt{1+g_{00}}), \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \phi' = \phi \quad (806)$$

Diese Beziehungen gelten übrigens unabhängig von unserem Modell und wenn wir “unser” g_{00} einsetzen, sogar gleichzeitig für Einflüsse von Geschwindigkeit, Materieverteilung, Entfernung und Zeit, also ganz allgemein (SRT+ART). Im Spezialfall $\alpha=\pi/2$ ergibt (806) die klassische Lösung der LORENTZ-Transformierten. Bei Geschwindigkeiten $v \ll c$ geht die Lösung über in die der GALILEI-Transformation. Damit haben wir eine widerspruchsfreie Lösung gefunden, die die gestellten Anforderungen erfüllt.

Nun wollen wir uns mit dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten befassen. Man kann davon ausgehen, daß sich auch hier wieder die einzelnen Winkel ξ addieren werden. Es gilt damit folgende Beziehung $\xi'' = \xi + \xi'$ bzw.:

$$\xi'' = j \left(\operatorname{ar} \tanh \sqrt{1+g_{00}} + \operatorname{ar} \tanh \sqrt{1+g'_{00}} \right) = j \operatorname{ar} \tanh \frac{\sqrt{1+g_{00}} + \sqrt{1+g'_{00}}}{1 + \sqrt{(1+g_{00})(1+g'_{00})}} \quad (807)$$

$$\sqrt{1+g''_{00}} = \frac{\sqrt{1+g_{00}} + \sqrt{1+g'_{00}}}{1 + \sqrt{(1+g_{00})(1+g'_{00})}} \quad (808)$$

$$-g''_{00} = 1 - \left(\frac{\sqrt{1+g_{00}} + \sqrt{1+g'_{00}}}{1 + \sqrt{(1+g_{00})(1+g'_{00})}} \right)^2 = X^2 \quad (809)$$

$$\sqrt{-g''_{00}} = \frac{v''}{c} \cos \alpha'' + \sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2} \sin^2 \alpha''} = X \quad (810)$$

$$\sqrt{1 - \frac{v''^2}{c^2} \sin^2 \alpha''} = X - \frac{v''}{c} \cos \alpha'' \quad \frac{v''^2}{c^2} - 2(X \cos \alpha'') \frac{v''}{c} + (X^2 - 1) = 0 \quad (811)$$

$$\frac{v''_{1,2}}{c} = X \cos \alpha'' \pm \sqrt{1 - X^2 \sin^2 \alpha''} \quad (812)$$

Das obere Vorzeichen gilt für zeitartige Vektoren

$$\frac{v''_{1,2}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{1+g_{00}} + \sqrt{1+g'_{00}}}{1 + \sqrt{(1+g_{00})(1+g'_{00})}} \right)^2} \cos \alpha'' \pm \sqrt{1 - \left(1 - \left(\frac{\sqrt{1+g_{00}} + \sqrt{1+g'_{00}}}{1 + \sqrt{(1+g_{00})(1+g'_{00})}} \right)^2 \right) \sin^2 \alpha''}$$

(813) ↑

Für $\alpha'' = \pi/2$ ergibt die Lösung (813) den klassischen Ausdruck (778). Im Gegensatz zu (806) gilt (813) jedoch nicht unabhängig von unserem Modell, wohl aber (808). Der Grund liegt darin, daß wir die linke Seite nach v'' aufgelöst haben und diese hängt natürlich von dem Linienelement ab, das man benutzt. Wenn man (808) mit dem Linienelement dieses Modells kombiniert, lassen sich damit auch Probleme der ART lösen. Ein gutes Beispiel dafür ist der Spezialfall beim Dreikörperproblem, wenn alle drei Körper in einer Linie stehen (Opposition oder Konjunktion). Dann addieren sich die Anteile nur dann linear, wenn die Krümmung nicht allzu groß ist.

Auch wenn man es nicht so deutlich sieht, zeigt sich hier ein Problem, das es beim klassischen Fall nicht gibt und das eine ganze Reihe weiterer Fragen aufwirft. So benötigen wir hier von dem mit v bewegten Bezugssystem zusätzlich zur Angabe der Geschwindigkeit v' auch den Winkel α' , der sich aus den Bedingungen im System S' ergibt. Diese sind aber abhängig von der Geschwindigkeit v , mit der sich dieses System gegenüber dem Bezugssystem S bewegt. Dagegen ist der Winkel α bekannt. Zur Berechnung von (813) benötigen wir zusätzlich noch den Winkel α'' . Auch dieser ist uns nicht bekannt.

Bevor wir die verschiedenen Lösungsmöglichkeiten untersuchen wollen, machen wir zunächst noch ein Gedankenexperiment: Wenn wir annehmen, daß sich der Beobachter in S im freien Fall befindet, so steht er im Mittelpunkt des Universums, bewegt sich nicht gegenüber der Metrik und befindet sich gleichzeitig auf der Expansionskurve, an der der Winkel α definiert ist. Der zweite Beobachter soll sich nun im System S' befinden. Wenn er sich gegenüber S mit einer Geschwindigkeit größer als die durch die Abstandsfunktion bestimmte bewegt, so steht er von S aus gesehen im Tangentialraum außerhalb der Expansionskurve. Damit befindet sich jeder Beobachter, der sich nicht im freien Fall befindet immer im Tangentialraum. Nun kommen wir zu einer wichtigen Frage:

Wo befindet sich der Beobachter in S' von sich aus gesehen?

Diese Frage können wir nicht so ohne weiteres beantworten. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die eng mit der Definition des Winkels α' verbunden sind:

1. *Der Winkel α ist für alle Beobachter gleich und nur eine Funktion der Zeit.*

In diesem Fall würden sich alle Beobachter auf dem selben Punkt der Expansionskurve befinden. Dies wäre der klassische Fall des echten MINKOWSKIschen Linienelements. Unterschiedliche Geschwindigkeiten haben dann nur eine unterschiedliche Drehung der verschiedenen Koordinatensysteme zur Folge. Dieser Fall widerspricht offensichtlich der Beziehung (734) nach der die Güte und damit α vom Abstand abhängig sind. Status: abgelehnt.

2. *Der Winkel α ist nur vom Abstand (und von der Zeit) abhängig.*

Dann würde sich der Beobachter in S' und damit jeder Beobachter von sich aus gesehen immer auf der Expansionskurve befinden. Dies widerspricht aber der oben gemachten Aussage, daß sich ein Beobachter nicht im freien Fall immer im Tangentialraum befindet. Wenn beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein sollen, müßte sich ein Beobachter von sich aus gesehen immer im freien Fall befinden, was nicht stimmt (Bedingungen an der Erdoberfläche). Auch könnte man behaupten, daß wir damit ein absolutes Bezugssystem einführen würden. Da es aber für jeden Beobachter ein eigenes "absolutes" Bezugssystem gibt, das nicht mit den anderen identisch ist, wird das spezielle Relativitätsprinzip nicht verletzt. Status: nicht unmöglich aber nicht sehr wahrscheinlich.

3. *Der Winkel α ist von der Zeit, dem Abstand und der Geschwindigkeit abhängig.*

Dann würde ein Beobachter auch von sich aus gesehen nur dann auf der Expansionskurve stehen, wenn er sich im freien Fall befindet. In allen anderen Fällen befände er sich im Tangentialraum. Dieser Fall erscheint am wahrscheinlichsten. Dann müßte sich aber eine Funktion finden lassen, nach der zumindest die Güte

auch von der Geschwindigkeit abhängig ist. Da die Güte (Phasenwinkel) aber auch die Größe des Winkels α bestimmt, würde damit auch dieser von der Geschwindigkeit abhängen. Daraus resultiert aber eine weitere Frage: Ergibt sich der Wert von α aus den Bedingungen vor oder nach der Addition der anderen Geschwindigkeitskomponenten? Zumindest ist es einzusehen, daß ein Beobachter auch die Größe von r_0 verkürzt sieht, da bei Bewegung mit der Geschwindigkeit v alle Abstände um den Faktor $\approx \beta^{-1}$ verkürzt beobachtet werden. Da der Wert von r_0 über die Beziehung $r_0 = r_1 Q_0$ definiert ist, ändert sich damit auch Q_0 . Gegen eine Festlegung von α vor Addition der anderen Komponenten spricht vor allem, daß diese dann nicht mehr gleichberechtigt wären. Dies ist aber tatsächlich der Fall, denn man kann zwar die Anteile \mathbf{v}_G und \mathbf{v}_M dadurch aufheben, indem man sich mit negativer Geschwindigkeit bewegt, nicht aber den Anteil \mathbf{c}_M . Letzterer ragt sogar von sich aus in den Tangentialraum, auch wenn man sich nicht gegenüber der Metrik bewegt. Status: sehr wahrscheinlich.

Wir wollen also die dritte Möglichkeit favorisieren. Dazu benötigen wir aber eine Funktion, die die Abhängigkeit von Q_0' von der Geschwindigkeit darstellt. Diese müßte bestimmte Bedingungen erfüllen. So müßte in der Näherung bei großem Ausgangs- Q_0 Beziehung (597) gelten. Wenn die Geschwindigkeit gleich c ist, müßte man als Ergebnis eine Güte von 1 erhalten und es müßte eine gewisse Unsymmetrie bei kleinen Ausgangsgüten geben ($Q_0(c)$ nur ≈ 1). Eine solche Funktion hatten wir ja im Abschnitt 6.1.2.1. bereits mit (596) gefunden, wenn auch bei einem System ohne Expansion. Wenn wir die Gültigkeit der gesuchten Beziehung aber auf einen Zeitraum dt beschränken — bei kleinen Güten wird jedwedes Bezugssystem ohnehin nach kurzer Zeit ungültig — dann kann man (596) auch im Falle einer Metrik mit Expansion einsetzen, denn für den Zeitraum dt spielt die Expansion keine Rolle.

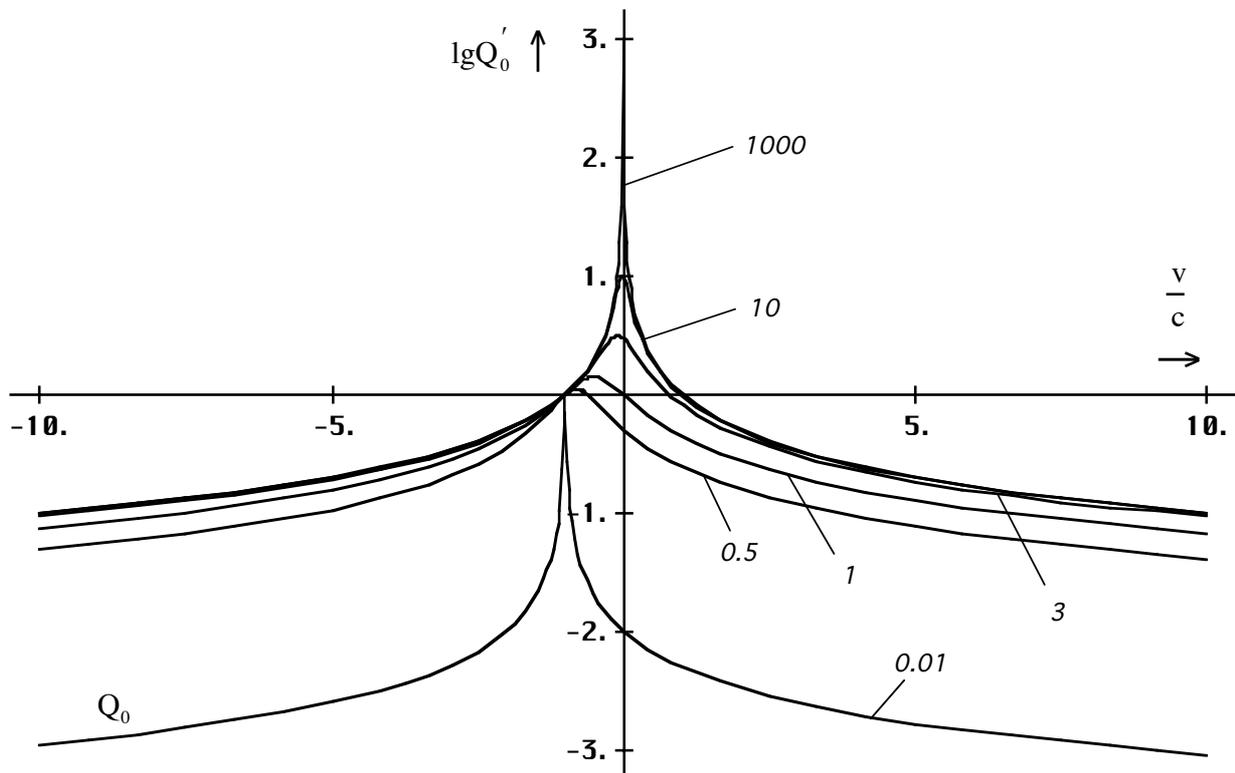


Bild 129
Verlauf der für das System S' relevanten Güte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gegenüber dem System S (Metrik) für $Q_0 \leq 10^3$.

Da Q_0' aber zusätzlich von der Entfernung und der Zeit abhängig sein soll, müssen wir in (596) noch den Navigationsgradienten einbauen. Es gilt:

$$\tilde{Q}'_0 = \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2 + \tilde{Q}_0^2 \frac{v^2}{c^2}}} \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad \text{Geschwindigkeit gegen Metrik} \quad (814)$$

Das heißt, am "Rande des Universums" wird die Güte gleich Null. Wenn wir also die Ausgangsgüte Q'_0 für das System S' bestimmt haben, können wir damit problemlos alle anderen dazugehörigen Werte, einschließlich des Winkels α' bestimmen. Der logarithmische Verlauf von (814) für verschiedene Ausgangsgüten ist in Bild 129 dargestellt.

Wie sieht es nun aber mit dem Winkel α'' aus? Rein mathematisch gesehen benötigen wir diesen nicht unbedingt zur Lösung von (813), da α'' auch irgendwie von v'' abhängt. Jedoch gibt es dann keine explizite Lösung. Um die genauen Verhältnisse bei der Addition von Geschwindigkeiten nach (813) zu beschreiben, ist im Bild 130 die Wirkung unterschiedlicher Winkel $\alpha^{(n)}$ auf die Geschwindigkeitsaddition vektoriell dargestellt.

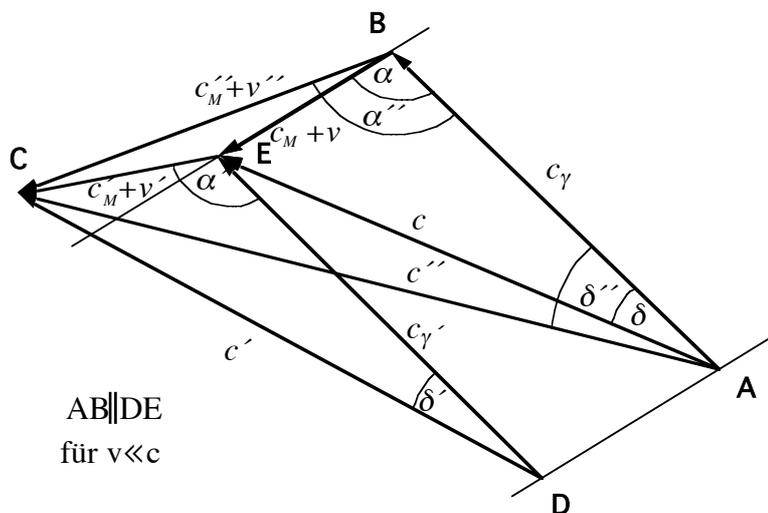


Bild 130
Wirkung unterschiedlicher Winkel α auf die Addition von Geschwindigkeitsvektoren (Prinzipdarstellung)

Eingangsgrößen sind hier die Vektoren BE und EC sowie die Winkel α und α' . Gesucht ist der Vektor BC und der dazugehörige Winkel α'' . Bild 130 beschreibt aber bloß die Wirkung der unterschiedlichen Winkel α auf die Geschwindigkeitsaddition im Subraum. Die Drehung der Koordinatensysteme S' und S'' , verursacht durch den Anteil $\tan \xi$, ist hier nicht berücksichtigt, die Strecke BC entspricht daher nicht der tatsächlichen Geschwindigkeit v'' , die vom System S aus beobachtet wird. Daher kann Bild 130 auch nicht zur Bestimmung dieser Geschwindigkeit mit Hilfe trigonometrischer Beziehungen verwendet werden. Dasselbe gilt auch für den Winkel α'' . Um diesen zu bestimmen, gibt es mehrere Möglichkeiten. Eine davon besteht darin, den Wert von α'' durch mehrfache Anwendung von (814) zu ermitteln indem man beim zweiten Durchlauf Q'_0 und v' als Eingangsgrößen einsetzt. Auf diese Weise erhält man zuerst den Wert Q_0'' mit dessen Hilfe man dann alle anderen damit verknüpften Werte bestimmen kann, einschließlich α'' . Das ganze funktioniert auch, wenn man die Beobachter vertauscht, allerdings nur unter der Bedingung, daß die Güte tatsächlich von der Geschwindigkeit abhängig ist.

Ein Problem, das wir bisher nicht betrachtet haben, ergibt sich aber bei Anwendung von (814). So ist in (814) die Geschwindigkeit gegenüber der Metrik definiert. Nun beziehen sich jedoch alle relativistischen Beziehungen immer auf die Tatsache, daß die Lichtgeschwindigkeit konstant c ist. Da wir in den ersten Abschnitten die Annahme gemacht haben, daß die Lichtgeschwindigkeit in diesem Modell zwar auch konstant c ist, jedoch nicht gegenüber der Metrik, sondern gegenüber dem Subraum, ergibt sich hier ein Widerspruch bezüglich v .

Wenn wir irgendwo den Ausdruck v für die Geschwindigkeit eingesetzt haben, so ist diese damit immer bezogen auf den Subraum. Da man in der SRT aber keinen Subraum kennt, versteht man daher unter der Geschwindigkeit immer die Geschwindigkeit gegenüber einem Bezugssystem, das meist (aber nicht immer) als ruhend angenommen wird. Dies wird im unserem allgemeinen (wenn keine Rotation ins Spiel kommt) mit dem freien Fall assoziiert.

Nach unserem Modell ist der freie Fall jedoch immer dann gegeben, wenn sich ein Beobachter/Körper/Teilchen nicht gegenüber der Metrik bewegt. Nun bewegt sich dieser Beobachter im freien Fall nach diesem Modell aber immer noch gegenüber dem Subraum (\mathbf{c}_M), weshalb wir in allen Fällen bis auf Bild 119 zu einer gegenüber der Metrik definierten Geschwindigkeit (nur diese läßt sich messen) den Anteil $\mathbf{c}_M(v=0)$ addiert haben, was zu der Verschiebung der Funktionen in negativer v -Richtung, wie man sie z.B. in den Bildern 107-110 erkennen kann, führt.

Nun kann man natürlich auch mit der Geschwindigkeit gegenüber dem Subraum rechnen. Dann müßte (814) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\tilde{Q}'_0 = \frac{\tilde{Q}_0}{\sqrt{\left(1 + \frac{v - \tilde{c}_M}{c}\right)^2 + \tilde{Q}_0^2 \frac{(v - \tilde{c}_M)^2}{c^2}}} \left(\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Geschwindigkeit} \\ \text{gegen Subraum} \end{array} \quad (815)$$

In beiden Fällen gibt es aber noch einen weiteren wesentlichen Umstand zu berücksichtigen. Berechnet man z.B. die relativistische Massenzunahme mit Hilfe des relativistischen Dehnungsfaktor $\beta_{\tilde{\gamma}}$, wobei die Geschwindigkeit auf den Subraum bezogen ist, so benötigt man neben v als weitere Eingangsgröße auch die Ruhmasse m_0 . Nach der SRT ist diese als diejenige Masse definiert, die ein Körper besitzt, wenn er sich nicht gegenüber dem Bezugssystem bewegt. In diesem Fall ist jedoch dieses Bezugssystem der Subraum und der Körper kann sich gar nicht relativ dazu in Ruhe befinden, da sich die Metrik, selbst wenn der Körper in Ruhe zur Metrik verharret, immer noch mit der Geschwindigkeit \mathbf{c}_M gegenüber dem Subraum bewegt. Und dieser Anteil kann auch nicht durch eine negative Geschwindigkeit ausgeglichen werden, da sich der Körper dann gleichzeitig auch im Mittelpunkt des Universums befindet, und damit nur positive Geschwindigkeiten in Richtung auf den Weltradius definiert sind.

Bei kleinen Ausgangsgütern kann dieser Anteil \mathbf{c}_M eine nicht mehr zu vernachlässigende Größenordnung annehmen, so daß $\beta_{\tilde{\gamma}}$ schon bei $v=0$ gegenüber der Metrik einen von 1 stark abweichenden Wert annimmt. Setzt man nun den „klassischen“, gemäß der SRT definierten, d.h. bei einer Geschwindigkeit von Null gegenüber der Metrik bestimmten Wert ein, so erhält man ein falsches Ergebnis, denn bei $v=0$ müßte ja die relativistische Masse gleich m_0 sein. Dies ist dann aber nicht gegeben. Wenn auch bei Normalbedingungen dieser Unterschied erst ab der 30. Stelle hinter dem Komma in Erscheinung tritt, können wir ihn nicht vernachlässigen.

Um diesen Widerspruch aufzulösen, müssen wir die Größen Ruhmasse, Ruhlänge, Ruhezeitabschnitt etc. neu definieren. Den bei einer Geschwindigkeit von Null gegenüber dem Subraum gültigen Wert wollen wir von nun an als AR-Ruhmasse/-länge/-zeitabschnitt etc. bezeichnen und, da wir dafür schon mehrfach die Bezeichnungen m_0 , x_0 , t_0 ... verwendet haben, diese Bezeichnungen beibehalten. Den „klassischen“ Wert bei einer Geschwindigkeit von Null gegenüber der Metrik dagegen bezeichnen wir von nun an als SR-Ruhmasse/-länge/-zeitraum und verwenden dafür die Variablen m_* , x_* , t_* ... etc. Während wir die SR-Ruhmasse/-länge/... nicht neu definieren müssen, gilt für die AR-Ruhmasse/-länge/... folgende Definition:

Die AR-Ruhmasse/-länge/... etc. ist gleich der Masse/Länge/... etc. bei einer Gravitationsfeldstärke (Gravitationspotential $-g_{00}$) von 1.

Dies wären die Bedingungen in einem echten MINKOWSKISchen Raum. Man könnte daher die AR-Ruhmasse/... auch als die MINKOWSKISche Ruhmasse/... bezeichnen. Allerdings ist diese nicht identisch mit der Ruhmasse/... zum Zeitpunkt $T \rightarrow \infty$, da dann die kosmologische Rotverschiebung, verursacht durch die Expansion der Metrik, nicht berücksichtigt wäre. Sowohl AR- als auch SR-Ruhmasse/... bleiben damit weiterhin bezugssystemabhängige Größen.

Aufgrund der zwei Definitionsmöglichkeiten der Geschwindigkeit v und der beiden Ruhmassen/-längen... ergeben sich damit vier unterschiedliche Kombinationsmöglichkeiten

bei der Berechnung der relativistischen Masse/Länge etc. Wir wollen dies am Beispiel der relativistischen Massenzunahme genauer betrachten. Ausgehend von (612) und (655) gilt:

$$m = m_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(v - \tilde{c}_M)} \quad \begin{array}{l} \text{v-Subraum} \\ \text{AR-Ruhmasse} \end{array} \quad (816)$$

Gemäß (612) ist ja \mathbf{c}_M schon in $\gamma_{\tilde{\gamma}}$ enthalten. Daher müssen wir diesen Anteil abziehen. Der Funktionsverlauf von β_x ($x=\gamma, \tilde{\gamma}, v, \bar{v}$) zeichnet sich dadurch aus, daß alle Graphen bei $v=0$ durch den Punkt 1 gehen und es keine Verschiebung in v -Richtung gibt. Definieren wir nun die Geschwindigkeit gegenüber der Metrik, was der Normalfall ist, so müssen wir (816) folgendermaßen abändern:

$$m = m_0 \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(v)} \quad \begin{array}{l} \text{v-Metrik} \\ \text{AR-Ruhmasse} \end{array} \quad (817)$$

Wenn nicht extra angegeben, basieren alle Formeln und grafischen Darstellungen in dieser Arbeit auf dieser Kombination. Beispiele sind in den Bildern 107...110, in Bild 113 und 114 dargestellt. Wie sieht es nun aber aus, wenn man nicht mit der AR-Ruhmasse, die ja nur ein gedachter Wert ist, sondern mit der SR-Ruhmasse arbeiten will, die man tatsächlich messen kann? Gibt es eine Beziehung, mit deren Hilfe man beide ineinander umrechnen kann? Dies ist in der Tat der Fall, es gibt sogar insgesamt vier Beziehungen:

$$\begin{aligned} m_0 &= m_* \frac{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(0)}{\sin \alpha} = m_* \frac{\sin \tilde{\gamma}_{\tilde{\gamma}}}{\sin \alpha} && \begin{array}{l} \text{Masse} \\ \text{raumartig} \end{array} \\ x_0 &= x_* \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(0)} = x_* \frac{\sin \alpha}{\sin \tilde{\gamma}_{\tilde{\gamma}}} && \begin{array}{l} \text{Länge} \\ \text{zeitartig} \end{array} \\ \lambda_0 &= \lambda_* \frac{-\cos \alpha}{\sin \gamma_v(0)} = \lambda_* \frac{-\cos \alpha}{\sin \tilde{\gamma}_v} && \begin{array}{l} \text{Wellenlänge} \\ \text{Neutrino} \end{array} \\ \lambda_0 &= \lambda_* \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma_{\tilde{v}}(0)} = \lambda_* \frac{\cos \alpha}{\sin \tilde{\gamma}_{\tilde{v}}} && \begin{array}{l} \text{Wellenlänge} \\ \text{Antineutrino} \end{array} \end{aligned} \quad (818)$$

Hierbei ist die Geschwindigkeit wieder bezogen auf die Metrik. Bei den Neutrinos kann man erkennen, daß der Unterschied zwischen beiden Wellenlängen bei Normalbedingungen (Q_0) enorm ist. Setzt man jetzt den ersten Ausdruck von (818) in (816) und (817) ein, so erhält man die fehlenden zwei Kombinationen:

$$m = m_* \frac{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(-\tilde{c}_M)}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(v - \tilde{c}_M)} \quad \begin{array}{l} \text{v-Subraum} \\ \text{SR-Ruhmasse} \end{array} \quad (819)$$

$$m = m_* \frac{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(0)}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}(v)} = m_* \frac{\sin \tilde{\gamma}_{\tilde{\gamma}}}{\sin \gamma_{\tilde{\gamma}}} \quad \begin{array}{l} \text{v-Metrik} \\ \text{SR-Ruhmasse} \end{array} \quad (820)$$

Man sieht, die Ausdrücke $\sin \alpha$ kürzen sich heraus, da die Vektoren \mathbf{c}_M und \mathbf{v}_M in die gleiche Richtung weisen und sich der Winkel α immer aus dem Bezugssystem (\mathbf{c}_M) ableitet. Dasselbe gilt übrigens auch bei den zeitartigen Ausdrücken und bei den Neutrinos, auch wenn hier der Kehrwert wirksam wird. Bei den Neutrinos kürzt sich anstelle $\sin \alpha$ der Wert $\cos \alpha$ einschließlich des Vorzeichens heraus. Man kann daher vereinfachend sagen, man muß nur den Ausdruck $\sin \alpha$ bzw. $\pm \cos \alpha$ durch den entsprechenden $\sin \gamma_x$ ($x=\gamma, \tilde{\gamma}, v, \bar{v}$) ersetzen, wenn man anstelle des AR-Ruhewertes den SR-Ruhewert benutzt. Dies gilt übrigens auch für Ausdrücke, die differenziert oder integriert werden bzw. wurden, wie z.B. die Tensorausdrücke am Ende der Arbeit, da es sich sowohl bei α als auch bei γ um Konstanten handelt.

Alle diese Beziehungen gelten übrigens unabhängig davon, ob die Güte Q_0' von der Geschwindigkeit abhängt oder nicht. Bei einer Kombination dieser Abhängigkeit mit der Bestimmung von $\beta_{\tilde{\gamma}}$ ist es empfehlenswert, mit Ausdruck (820) zu rechnen, weshalb dieser Kombination eine besondere Bedeutung zukommt. Daher habe ich im Bild 131 noch einmal den Verlauf von $\beta_{\tilde{\gamma}}$ für bestimmte Gütewerte $Q_0 \leq 10^3$ dargestellt, um den Unterschied zu Bild 108 genauer herauszuarbeiten. Bei größeren Güten sieht man ohnehin keinen Unterschied (identisch mit Bild 105). Physikalisch gesehen handelt es sich jedoch um dasselbe Phänomen. Die unterschiedlichen Verläufe werden nur durch die abweichende Definition von Geschwindigkeit und Ruhmasse verursacht.

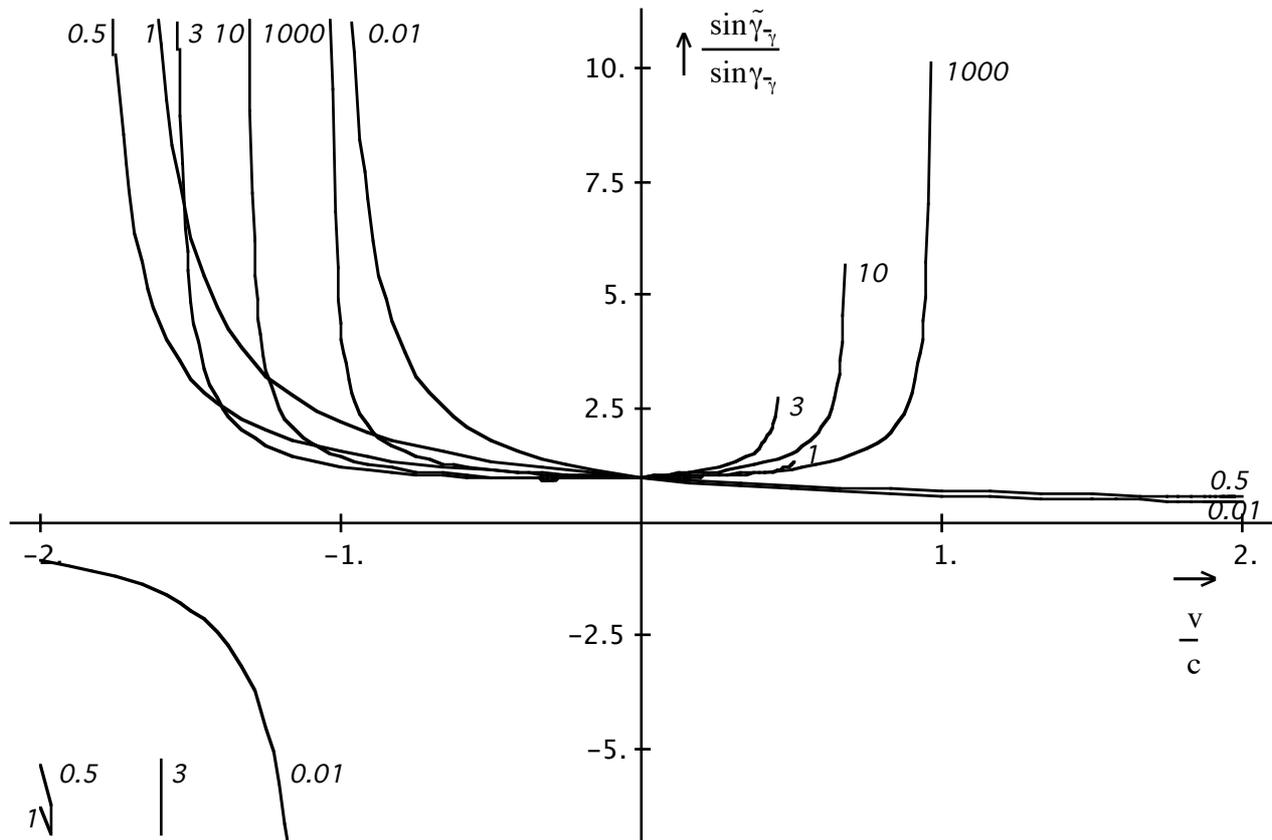


Bild 131
Verlauf der relativistischen Massenzunahme in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gegenüber der Metrik unter Verwendung der SR-Ruhmasse für Gütewerte $Q_0 \leq 10^3$.

Da wir nun auch dieses Problem gelöst haben, bleibt noch eine weitere Frage offen: Wie ist der Geschwindigkeitsanteil v_G , der durch die gravitative Wirkung eines in der Nähe befindlichen massebehafteten Körpers verursacht wird, einzuordnen? Dieser Anteil ist eindeutig dem metrischen Anteil c_M zuzuordnen, da sich die Eigenschaften des Raums außerhalb dieses Körpers tatsächlich so ändern, als hätte dieser eine niedrigere Güte. Dies gilt unabhängig davon, daß dieser Anteil zumindest zeitweise (bis zum Aufschlag) durch eine negative Geschwindigkeit ausgeglichen werden kann. Rekapitulieren wir noch einmal. Wir hatten ja gesagt, daß ein Teil der MLE's im Innern des Körpers durch die raumfordernde Wirkung der Teilchen, aus denen dieser besteht, quasi hinausgedrückt werden, wodurch das metrische Gitter außerhalb zusammengepreßt wird, was zu einem kleineren Wert der PLANCKschen Elementarlänge r_0 führt. Dies sind aber genau die Eigenschaften eines Raumabschnitts mit kleinerer Güte.

Wenn die Güte tatsächlich von der Geschwindigkeit abhängt, ergibt sich noch ein letzter, weiterer Effekt. Bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit v gegenüber dem Bezugssystem S und legt man den Mittelpunkt des Bezugssystems S' in den Mittelpunkt dieses Körpers, so muß die Geschwindigkeit von S' gegenüber dem Subraum gleich groß sein, unabhängig davon, von welchem Bezugssystem man diese betrachtet. Hat die Geschwindigkeit gegenüber S einen Wert von v , so hat die Geschwindigkeit v' von S' gegenüber der Metrik jetzt nicht etwa den Wert Null, wie man denken könnte, auch wenn man für S' jetzt den Wert

Q_0' annimmt. Vielmehr hat sie einen von Null verschiedenen Wert. Dies basiert auf Beobachtungen und auf der Tatsache, daß c_M nie größer als $0,851661c$ sein kann. Ein weiterer Grund liegt darin, daß sich S' nicht mehr im Mittelpunkt des Universums befindet. Man kann also sagen, nur ein Körper im freien Fall, der sich im Mittelpunkt des Universums befindet, bewegt sich nicht gegenüber der Metrik. Das bedeutet weiterhin, der Wert Q_0 , den man an einer beliebigen Stelle mißt, gilt überall. Er stellt so etwas wie ein universelles Bezugssystem dar. Das Relativitätsprinzip wird aber dennoch nicht verletzt, da es eine quasi unendliche Anzahl dieser "universellen" Bezugssysteme gibt, wobei keines davon ausgezeichnet ist.

Das heißt, beschleunige ich einen Körper, der sich anfangs in Ruhe zur Metrik (System S) befunden hat, auf eine Geschwindigkeit v gegenüber der Metrik, so wird er sich auch in seinem eigenen Bezugssystem mit einer bestimmten Geschwindigkeit gegenüber der Metrik bewegen.

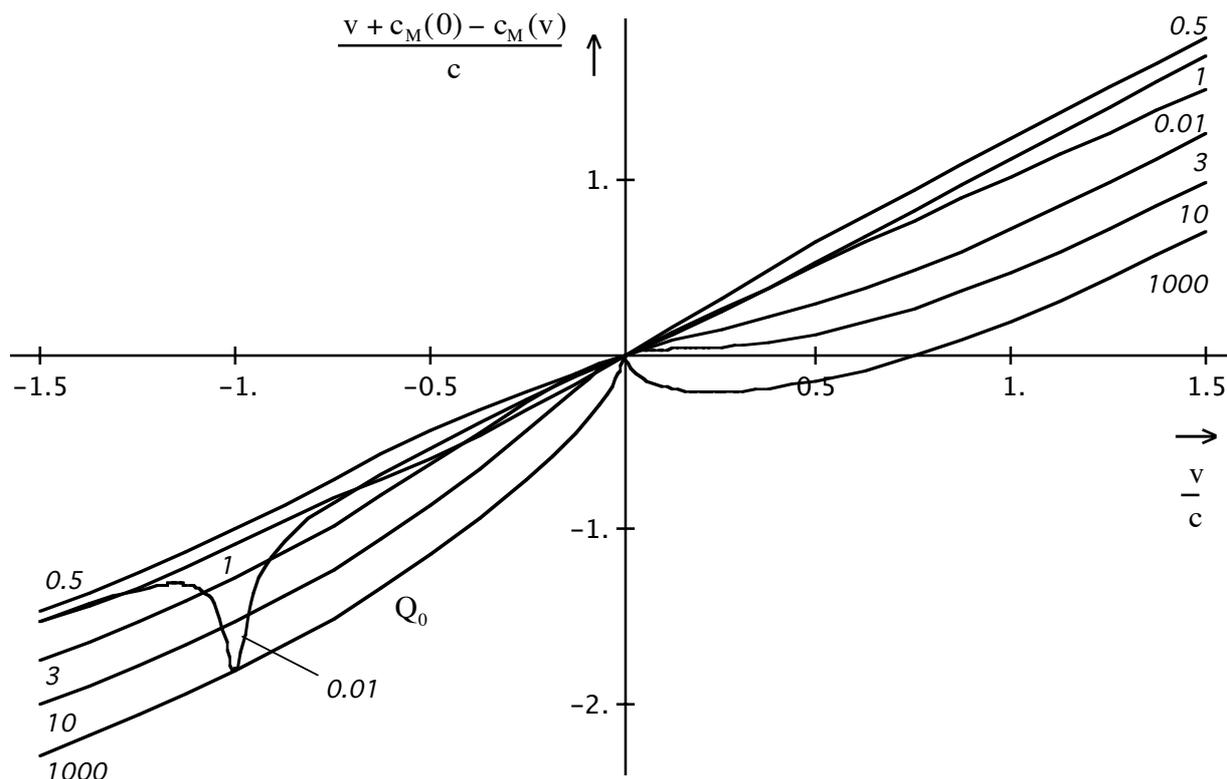


Bild 132

Mitnahmeeffekt bei Beschleunigung: Verlauf der Differenzgeschwindigkeit zur Metrik in S' in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v gegenüber der Metrik in S für Gütewerte $Q_0 \leq 10^3$

Die Tatsache, daß er in seinem eigenen System eine niedrigere Güte mißt, bedeutet dann aber auch, daß die Geschwindigkeit c_M' größer ist als c_M in S, wobei die Geschwindigkeit gegenüber dem Subraum konstant bleibt ($c_M + v = c_M' + v'$). Bei der Beschleunigung nimmt der Körper sozusagen einen Teil der Metrik mit, er beschleunigt diese. Daher möchte ich diesen Effekt auch als Mitnahmeeffekt bezeichnen. Dieser wird durch die Wechselwirkung zwischen Körper und Metrik, der durch die raumartigen Photonen vermittelt wird, verursacht. Die Metrik setzt dem Körper bei der Beschleunigung einen bestimmten Widerstand entgegen (träge Masse). Im Gegenzug reißt der Körper bei Überwindung dieses Widerstands (Kraft) einen Teil der Metrik mit und beschleunigt diese ihrerseits (c_M').

Bei Beschleunigung des Körpers ändert sich also die Differenzgeschwindigkeit $v + c_M(0) - c_M(v)$. Im Bild 132 ist der Verlauf der Differenzgeschwindigkeit bei bestimmten Anfangsbedingungen dargestellt. Hierbei ist die Geschwindigkeit v gegenüber der Metrik definiert und man sieht, die Differenz kann sogar negativ werden. Bei den meisten Berechnungen kann man dies aber getrost ignorieren. Man muß nur wissen, daß die Geschwindigkeit gegenüber dem Subraum konstant ist.

Ich will hier eine mögliche vierte Alternative nicht unter den Tisch kehren, die besagt, daß dieses Modell falsch ist . Vielleicht habe ich auch etwas übersehen...

7.2.4. Prinzip der maximalen gravitativen Kopplung

Wir haben gesehen, daß es im Grunde keine grundsätzlichen Widersprüche mit der Idee der allgemeinen Relativität gibt, wenn wir dieses Modell betrachten. Auch haben wir gesehen, daß und warum wir es mit einer Reihe zusätzlicher Probleme zu tun bekommen, wenn wir das Prinzip der minimalen gravitativen Kopplung verlassen.

Nun gibt es eine Vielzahl anderer Modelle, die bereits im Ansatz nicht mit den in diesem Modell gemachten Aussagen vereinbar sind. Dies sind vor allem diejenigen, welche von einem Verschwinden des Gravitations-»potentials« im Unendlichen ausgehen. Das gilt jedoch nicht für die von EINSTEIN gemachten Aussagen, denn diese sind so allgemein gehalten, daß sie auch auf einen reinen Strahlungskosmos anwendbar sind und um diesen handelt es sich hier. Wenn wir also die z.B. die Krümmung des Raumes berechnen wollen, müssen wir nur die entsprechenden Werte des metrischen Wellenfelds als Ausgangsgrößen einsetzen.

Bei einer minimalen gravitativen Kopplung gilt: Die Masse bestimmt die Geometrie, die Geometrie aber nicht die Masse. Es herrscht so etwas wie "freie Marktwirtschaft", die Gesetzmäßigkeiten der SRT sind unabhängig von denen der ART und daher benötigen wir hier auch keine solche Beziehung. Nun haben wir aber den umgekehrten Fall vorliegen: Die Geometrie (r_0) bestimmt die Masse, die Zeit, die Energie und die Wellenlänge etc.

Nun könnte man meinen, es gäbe doch auch die umgekehrte Abhängigkeit, nämlich die, daß die Masse auch die (lokale) Geometrie bestimmt. Allerdings ist die Masse ja durch die Beziehung $M = \hbar \omega_D / c^2$ bestimmt, wobei sowohl \hbar als auch ω_D wiederum vom Bezugssystem (r_0) abhängen. Die Masse ist also schon irgendwie im Energie-Impuls-Tensor des metrischen Wellenfeldes enthalten, woraus sich ergibt, daß die Feldgleichungen der ART automatisch erfüllt sind, eine Tatsache, auf die d'INVERNO bereits in [30] hingewiesen hat. Das bedeutet, nicht die Masse bestimmt die Geometrie, sondern nur das Vorhandensein von Teilchen innerhalb der Metrik, wobei die Metrik (das metrische Wellenfeld) diktiert, wieviel Masse diese Teilchen haben.

Alle Größen scheinen also irgendwie miteinander verkoppelt. Daher möchte ich dieses neue Prinzip auch als *Prinzip der maximalen gravitativen Kopplung* bezeichnen. Im Abschnitt 6.2.7. hatten wir mit IX. bereits etwas ähnliches formuliert. Hier noch etwas ausführlicher:

XII. Prinzip der maximalen gravitativen Kopplung: Alle physikalischen Größen wie Raum, Zeit, Masse, Energie, Wellenlänge etc. bilden ein kanonisches Ensemble, wobei die genauen Werte nur durch den Phasenwinkel der metrischen Wellenfunktion (Güte) bestimmt sind. Das Fortschreiten des Phasenwinkels ist gleichbedeutend mit dem Fortschreiten der Zeit (ticks). Das Vorhandensein von fermionischen Teilchen bzw. Teilchenkonzentrationen als raumfordernde Störung des metrischen Wellenfelds sowie dessen Existenz ist Ursache für die gravitativen Effekte. Die Grenze zwischen spezieller und allgemeiner Relativitätstheorie ist aufgehoben.

7.2.5. Metrische Funktionen

Nachdem wir das Linienelement für dieses Modell aufgestellt und auch weitergehende Betrachtungen über die Winkel im Dreieck sowie über deren physikalische Bedeutung und Abhängigkeiten von den einzelnen Koordinaten angestellt haben, ist es angebracht, gewisse Werte zu berechnen, die in der SRT von großer Bedeutung sind. Grundlage dafür ist immer der

metrische Tensor bzw. das Linienelement, die physikalisch gesehen beide dasselbe Phänomen beschreiben.

7.2.5.1. Der metrische Zusammenhang

Einer dieser "gewissen Werte" ist der RIEMANNsche Krümmungstensor. Um diesen zu berechnen, benötigen wir eine Funktion, die auch als der metrische Zusammenhang Γ_{bc}^a bezeichnet wird. Nach [30] ist dieser folgendermaßen definiert:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{db} - \partial_d g_{bc}) \quad (821)$$

Hierbei ist g^{ad} gleich der Komponente g_{ad} der inversen Matrix g^{ab} und ∂_b gleich dem partiellen Differentialoperator $\partial/\partial b$. Der Rest bleibt für den Leser mit "normaler" Ingenieurausbildung zunächst unverständlich. Leider wird in der Literatur meist auch nicht weiter darauf eingegangen.

Da wir aber die Werte unseres Linienelements bestimmen wollen, kommen wir um eine genaue Berechnung von (821) nicht herum. Der einfachste Weg, einen Ausdruck genau zu verstehen, besteht darin, zu versuchen, die Berechnung zu automatisieren. Dann macht man gewöhnlich auch keine Fehler, es sei denn, die Formel ist falsch.

Als Werkzeug dafür benutzen wir wieder das Programm »Mathematica« das u.a. auch in der Lage ist, die partielle Ableitung (D[f(x),x]) zu berechnen. Als Eingangswerte haben wir es zunächst mit der Matrix des metrischen Tensors zu tun, die wir der Variable Mx zuweisen. Weiterhin benötigen wir die inverse Matrix, die wir mit der eingebauten Funktion Inverse[Mx] berechnen können und noch eine Funktion Di, mit deren Hilfe wir anhand des Index auf die Koordinate schließen können, nach der differenziert werden soll. Für das echte MINKOWSKISCHE Linienelement erhalten wir dann:

$$\mathbf{Mx} = \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, -1, 0, 0\}, \{0, 0, -1, 0\}, \{0, 0, 0, -1\}\}; \quad (822)$$

$$\mathbf{Inx} = \text{Inverse}[\mathbf{Mx}]; \quad (823)$$

$$\mathbf{Di} = \text{Function}[\text{Part}[\{\text{ct}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}, \# + 1]]; \quad (824)$$

Um auf die einzelnen Komponenten von Mx bzw. Inx zugreifen zu können, definieren wir noch eine Funktion MPart[Mx,a,b], wobei die einzelnen Koeffizienten jeweils den Wert $0 \leq a \leq 3$ haben können (Part[{x},n] ist in »Mathematica« implementiert).

Die Funktion des metrischen Zusammenhangs selbst wollen wir mit MGamma[a,b,c,Mx] bezeichnen. Damit liegen die Werte a, b, c und Mx von vorneherein als Eingangsgrößen fest.

Was ist aber mit der Komponente d? Diese ist erst einmal keine Eingangsgröße. Ihr Wert ergibt sich aus der EINSTEINSchen Summationskonvention, die besagt, daß über doppelt (oder mehrfach) auftretende Indizes immer summiert wird, wobei sich der Wertebereich aus den Eingangsgrößen ergibt (hier 0...3). D.h. wir müssen (821) insgesamt viermal berechnen, wobei wir den Wert von d, beginnend bei Null, jedesmal um Eins erhöhen und die Ergebnisse anschließend addieren. In »Mathematica«-Schreibweise sieht das dann so aus:

$$\mathbf{MPart} = \text{Function}[\text{Part}[\text{Part}[\#1, \#2 + 1], \#3 + 1]]; \quad (825)$$

$$\mathbf{MGamma} = \text{Function}[\text{For}[\mathbf{Mg} = 0; \mathbf{n} = 0, \mathbf{n} < 4, \mathbf{n} ++, \quad (826)$$

$$\mathbf{Mg} += (1/2 (\mathbf{MPart}[\text{Inverse}[\#4], \#1, \mathbf{n}]) (\mathbf{D}[\mathbf{MPart}[\#4, \mathbf{n}, \#3], \mathbf{Di}[\#2]] + \mathbf{D}[\mathbf{MPart}[\#4, \mathbf{n}, \#2], \mathbf{Di}[\#3]] - \mathbf{D}[\mathbf{MPart}[\#4, \#2, \#3], \mathbf{Di}[\mathbf{n}]]))]); \text{Simplify}[\mathbf{Mg}];$$

Die Funktion Simplify[x] dient nur dazu, das Ergebnis zu vereinfachen (Zusammenfassen gleicher Ausdrücke). Damit haben wir diese Funktion eindeutig definiert und können an die Berechnung gehen. Insgesamt gibt es 64 mögliche Lösungen, wobei im allgemeinen nur ein Teil davon von Null verschieden sein wird. Da $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ gilt, dies läßt sich direkt aus (821)

ableiten, gibt es aber nur 16 unabhängige Lösungen (bb=bb). Bevor wir jedoch die Lösungen unseres Linienelements bestimmen, ist es erst einmal angebracht, die Lösungen des MINKOWSKIschen Linienelements zu berechnen.

Mit (822) erhalten wir als Lösung(en) $\Gamma_{bc}^a = 0$, d.h. alle Zusammenhänge verschwinden. Dies ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden des RIEMANNschen Krümmungstensors, wie wir noch sehen werden, oder allgemeiner gesagt, beim MINKOWSKIschen Linienelement ist die Krümmung gleich Null. Wir haben es dann mit einer ebenen oder flachen Metrik zu tun.

Diese Aussage stimmt gut mit den Angaben in [30] überein, unser Programm scheint also richtig zu sein. Wie sieht es aber bei Kugelkoordinaten aus? Diese Frage ist von großer Wichtigkeit, da wir auch bei unserem Linienelement mit Kugelkoordinaten arbeiten.

In [30] heißt es dazu: »...In einem allgemeinen Koordinatensystem werden jedoch die Zusammenhangskomponenten nicht notwendigerweise verschwinden. Zum Beispiel finden wir in sphärischen Koordinaten, daß Γ_{bc}^a die nichtverschwindenden Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r; & \Gamma_{33}^1 &= r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}; & \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (8.5 [30])$$

Anmerkung: $\theta \rightarrow \vartheta$

hat. Berechnen wir aber den RIEMANNschen Krümmungstensor, so finden wir wiederum $R^a_{bcd} = 0$, wie von dem Theorem (§6.11 [30]) gefordert.« Dies erscheint einleuchtend, stimmt aber leider nicht. In [30] ist nämlich ein Druckfehler enthalten. Setzen wir anstelle von (822) und (824) die entsprechenden sphärischen Ausgangswerte

$$\begin{aligned} \mathbf{Mx} &= \{\{1, 0, 0, 0\}, \{0, -1, 0, 0\}, \{0, 0, -r^2, 0\}, \{0, 0, 0, -(r^2 * \sin[\theta]^2)\}\}; \\ \mathbf{Di} &= \text{Function}[\text{Part}[\{\text{ct}, r, \theta, \phi\}, \# + 1]]; \end{aligned} \quad (827)$$

ein, so erhalten wir bis auf die Komponente Γ_{33}^1 dieselben Ergebnisse, wie (8.5 [30]). Bei Γ_{33}^1 fehlt das negative Vorzeichen. Mit den exakten Werten:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}; & \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (828)$$

verschwindet der RIEMANNsche Krümmungstensor tatsächlich. Zuvor müssen wir ihn jedoch zuerst berechnen. Dies werden wir im nächsten Abschnitt tun.

7.2.5.2. Der RIEMANNsche Krümmungstensor

Dieser wird allgemein mit dem Symbol R^a_{bcd} bezeichnet. Es handelt sich also um eine 4⁴-Matrix mit insgesamt 256 Komponenten. Wir übernehmen wieder die Definition der einzelnen Komponenten aus [30] und hoffen, daß sie richtig ist:

$$R^a_{bcd} = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ec}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ed}^a \quad (829)$$

Die Funktion zur Bestimmung einer einzelnen Komponente des RIEMANNschen Krümmungstensors bezeichnen wir mit RAbcd[a,b,c,d,Mx], wobei das große A auf einen hochgestellten Index hinweisen soll (RAbcd≠Rabcd).

Damit sind die Werte a, b, c, d und Mx Eingangsgrößen, summiert wird jetzt über e. Bitte summieren Sie aber nur die beiden letzten Produkte, da nur hier e enthalten ist. Ich hätte mir vier Wochen unnötige Arbeit und Sucherei ersparen können, wenn ich dies von Anfang an berücksichtigt hätte. Weiterhin müssen wir aufpassen, daß wir für die Schleifenvariablen nicht die selben Symbole verwenden und erhalten als »Mathematica«-Programm:

```
RAbcd=Function[For[RA=0;m=0,m<4,m++,RA+=
MGamma[m,#2,#4,#5] MGamma[#1,m,#3,#5]-
MGamma[m,#2,#3,#5] MGamma[#1,m,#4,#5]];
Simplify[RA+D[MGamma[#1,#2,#4,#5],Di[#3]]-
D[MGamma[#1,#2,#3,#5],Di[#4]]];
```

 (830)

Beim echten MINKOWSKISchen Linienelement mit kartesischen und Kugelkoordinaten sind alle Lösungen Null. Nach [30] müssen die Lösungen die Beziehung $R^a{}_{bcd} = -R^a{}_{bac}$ erfüllen, was in der Tat der Fall ist (trivial). Das Programm scheint also richtig zu sein.

Der RIEMANN-Tensor verschwindet, wie sieht es aber mit dem RICCI-Tensor R_{ab} oder der Krümmungsskalar R aus? Um diese zu berechnen, betrachten wir zunächst noch den gesenkten Tensor R_{abcd} . Nach [30] erhalten wir ihn mit Hilfe folgender Beziehung:

$$R_{abcd} = g_{aa} R^a{}_{bcd} \quad (831)$$

es gelten folgende Vertauschungsregeln:

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc} = R_{badc} \quad R_{abcd} = R_{cdab} \quad (832)$$

Damit wird es schwieriger, die abhängigen Komponenten auszusortieren. Ausdruck (831) läßt sich in folgendes einfaches Programm umwandeln:

```
Rabcd=Function[MPart[#5,#1,#1] RAbcd[#1,#2,#3,#4,#5]];
```

 (833)

Eine Summation findet hier nicht statt. Bei kartesischen Koordinaten sind alle Ergebnisse gleich Null, ebenso bei Kugelkoordinaten. Die Bedingungen (832) sind trivial erfüllt. Damit verschwindet auch R_{abcd} . Wir können daher darangehen, den RICCI-Tensor zu berechnen.

7.2.5.3. Der RICCI-Tensor

Dieser wird mit dem Symbol R_{ab} bezeichnet. Es handelt sich damit um eine 4²-Matrix mit insgesamt 16 Komponenten. Nach der Definition in [30] gilt:

$$R_{ab} = R^c{}_{bcd} = g^{cd} R_{dacb} \quad (6.83 [30])$$

Auch dieser Ausdruck kann so nicht stimmen. Nun habe ich zwar eine zweite Quelle gefunden, leider wird aber gerade dort der mittlere Teil, der von immenser Bedeutung ist, anders berechnet und zwar mit Hilfe der KRONECKER-Delta-Funktion, die sich einerseits leicht programmieren läßt, andererseits jedoch wenig hilfreich ist, da D'INVERNO keinerlei genauere Angaben darüber macht, ob und inwieweit summiert werden muß. Wir wollen daher den anderen Weg gehen und R_{ab} ohne Zuhilfenahme von R_{abcd} berechnen. Meiner Meinung nach müßte Ausdruck (6.83 [30]) richtig lauten:

$$R_{ab} = R^c{}_{acb} = g^{cd} R_{dacb} \quad (834)$$

Gehen wir also von (834) aus und definieren die Funktion Rab[a,b,Mx] zu:

$$\mathbf{RaB}=\mathbf{Function}[\mathbf{For}[\mathbf{Ri}=\mathbf{0};\mathbf{n1}=\mathbf{0},\mathbf{n1}<\mathbf{4},\mathbf{n1}++,\mathbf{Ri}+=\mathbf{RABcd}[\mathbf{n1},\mathbf{\#1},\mathbf{n1},\mathbf{\#2},\mathbf{\#3}]]; \quad (835)$$

$$\mathbf{Simplify}[\mathbf{Ri}];$$

In beiden Fällen ist das Ergebnis für alle Komponenten wieder Null. Bleibt zum Schluß noch die skalare Krümmung $R = g^{ab}R_{ab}$ die auch RICCI-Skalar genannt wird. Hier stimmt die Definition in [30] wieder. In »Mathematica« ergibt sich der Wert zu:

$$\mathbf{RaB}=\mathbf{Function}[\mathbf{MPart}[\mathbf{Inx},\mathbf{\#2},\mathbf{\#2}] \mathbf{Rab}[\mathbf{\#1},\mathbf{\#2},\mathbf{\#3}]]; \quad (836)$$

$$\mathbf{Rr}=\mathbf{Function}[\mathbf{For}[\mathbf{R1}=\mathbf{0};\mathbf{n2}=\mathbf{0},\mathbf{n2}<\mathbf{4},\mathbf{n2}++,\mathbf{R1}+=\mathbf{RaB}[\mathbf{n2},\mathbf{n2},\mathbf{\#}]]; \mathbf{Simplify}[\mathbf{R1}]]; \quad (837)$$

RaB ist der gehobene Tensor $R_a^b = g^{bb}R_{ab}$. Der Wert der skalaren Krümmung für das echte MINKOWSKISCHE Linienelement in kartesischen und Kugelkoordinaten ist gleich Null.

7.2.5.4. Lösungen für dieses Modell ohne Navigationsgradient

Nehmen wir nun einen Beobachter, der sich im Freien Fall und im Punkt (T, 0, 0, 0) befindet. Damit gilt $r = 0$. Wenn wir den augenblicklichen Zustand betrachten, können wir auch $t = 0$ setzen. Damit wird der Navigationsgradient gleich Eins und kann vernachlässigt werden.

Physikalisch gesehen betrachten wir den Beobachter in seinem Bezugssystem. Dann ist der metrische Tensor folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{Mx}=\{\{\{\mathbf{Sin}[\mathbf{GammaPQU}[\mathbf{0},\mathbf{0}]]/\mathbf{Sin}[\mathbf{AlphaQ}[\mathbf{Q}]]\}^2, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \quad (838)$$

$$\{\mathbf{0}, -\{\mathbf{Sin}[\mathbf{GammaPQU}[\mathbf{0},\mathbf{0}]]/\mathbf{Sin}[\mathbf{AlphaQ}[\mathbf{Q}]]\}^2/(\mathbf{1}-\mathbf{RhoQ}[\mathbf{Q}]^2)^2, \mathbf{0}, \mathbf{0}\},$$

$$\{\mathbf{0}, \mathbf{0}, -\mathbf{r}^2, \mathbf{0}\}, \{\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, -(\mathbf{r}^2*\mathbf{Sin}[\mathbf{theta}]^2)\}\};$$

$$\mathbf{Inx}=\mathbf{Inverse}[\mathbf{Mx}]; \quad (839)$$

Aus Gründen der Vereinfachung rechnen wir nur mit dem Winkel $\gamma_{\bar{\gamma}}$. Daher müssen wir g_{11} noch mit β^2 multiplizieren. Da der Winkel α vom Bezugssystem abhängig und damit eine Konstante ist, dürfen wir die Funktion AlphaQ nicht weiter ausdefinieren. Das gleiche gilt auch für RhoQ (c_M), das ebenfalls vom Bezugssystem abhängt.

Dann erhalten wir für die Zusammenhänge Γ_{bc}^a folgende von Null verschiedene unabhängige Lösungen:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= -r \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \\ \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}; & \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (840)$$

Es sind also nur Γ_{22}^1 und Γ_{33}^1 betroffen. Alle anderen Lösungen gleichen denen des MINKOWSKISCHEN Linienelements. Als nächstes wollen wir die von Null verschiedenen Lösungen für den RIEMANNschen Krümmungstensor R^a_{bcd} angeben:

$$R^2_{323} = -R^2_{332} = \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \right) \quad R^3_{223} = -R^3_{232} = - \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \right)$$

Damit erfüllen alle Lösungen die Forderung $R^a_{bcd} = -R^a_{bdc}$. Interessant ist besonders der Klammerausdruck, der der Differenz $1-g_{11}$ entspricht. Er tritt in allen Ausdrücken auf und läßt sich basierend auf (762) auf folgende Näherung zurückführen:

$$1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{r}}}{\sin^2 \alpha} = 1 - g_{11} \approx \left(\frac{1}{\tilde{Q}_0} + \frac{v^2}{c^2} + \frac{2\tilde{M}\tilde{G}}{rc^2} \right) \quad (841)$$

Daher werden wir ab hier keine Näherungslösungen explizit angeben. Für die Berechnung des gesenkten Tensors R_{abcd} benutzen wir die Formel (833) sowie die Eingangswerte (838) und (839). Wir erhalten nur eine einzige unabhängige, von Null verschiedene Komponente. Diese lautet:

$$R_{2323} = -R_{2332} = -R_{3223} = R_{3232} = -r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) \quad (842)$$

Für den RICCI-Tensor R_{ab} erhalten wir folgende Lösung:

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) \end{bmatrix} \quad (843)$$

Setzt man die heutigen Werte ein, so gehen alle Komponenten gegen Null, was sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmt. Zum Schluß noch die skalare Krümmung. Diese ergibt sich zu:

$$R = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Skalare Krümmung} \quad (844)$$

Interessanterweise hebt sich der Faktor 2 in (847) mit dem Faktor 1/2 in (0.25) auf. Auch hier strebt die Krümmung gegen Null, wenn man die aktuellen Werte einsetzt. Wenn r jedoch sehr klein ist, d.h. gegen den Wert r_0 strebt, verschwindet die Krümmung nicht mehr, sondern steigt sehr schnell an. Dies sieht man sehr gut, wenn man in (847) die Näherung für den Klammerausdruck einsetzt:

$$R \approx -\frac{2}{r^2 \tilde{Q}_0} \quad \text{Skalare Krümmung Näherung} \quad (845)$$

Wenn wir einen bestimmten Abstand r im mikroskopischen Bereich annehmen, so hängt dieser ebenfalls von Q_0 , d.h. von unserem Bezugssystem ab. Es gilt: $r \sim Q_0$ und damit $R \sim Q_0^{-3}$. Damit haben wir die Krümmung für mikroskopische Abmessungen beschrieben. Wenn man sich aber sehr weit vom Koordinatenursprung entfernt und in die Nähe des Weltradius gelangt, sollte die Krümmung ebenfalls zunehmen, auch ändert sich diese mit der Zeit, was sich aus den bisherigen Beziehungen nicht ableiten läßt. Dazu müssen wir den Navigationsgradienten mit in unsere Betrachtungen einbeziehen.

7.2.5.5. Lösungen für dieses Modell mit Navigationsgradient

Wir betrachten wieder nur die Lösung für einen Probekörper im freien Fall zum Zeitpunkt $T+t$, im Abstand r vom Koordinatenursprung ohne Anwesenheit von Materie (Vakuumlösung). Die folgenden Ausdrücke gelten damit lokal, nicht jedoch über die gesamte Entfernung. Dann müßten wir wieder nach r integrieren und erhalten nur eine implizite Lösung wie bei der Gravitations»konstante«. Da sich der Probekörper im freien Fall befindet, bewegt er sich nicht gegenüber der Metrik. Wäre dies anders, so wäre die Lösung noch komplizierter, da der Abstand r dann zusätzlich von der Zeit und vom Weg abhängig ist. Eine solche Lösung wäre

mathematisch gesehen nicht unmöglich, wir wollen sie hier jedoch nicht weiter verfolgen, da sie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde.

Eine weitere Möglichkeit wäre die Einbeziehung von Punktmassen bzw. Masseverteilungen, wenn sich der Körper nicht im freien Fall befindet. Hier müßten wir anstelle von v die Summe $c_M + v_G$ einsetzen und die Lösung würde wiederum viel komplizierter (der Winkel γ_γ müßte mit in die Ableitungen einbezogen werden), so daß wir auch diesen Fall hier nicht weiter untersuchen wollen. Vielmehr könnte dies Gegenstand einer eigenständigen Arbeit sein, die zu einem späteren Zeitpunkt veröffentlicht wird.

Beginnen wir also, indem wir zunächst wieder den metrischen Tensor Mx und die dazu inverse Matrix Inx definieren. Als Vorlage nehmen wir Ausdruck (759). Da es jetzt jedoch eine Überkreuz-Abhängigkeit zwischen r und t gibt, müssen wir jetzt die Lichtgeschwindigkeit c aus der 00-Koordinate entfernen und stattdessen in die Metrik selbst aufnehmen:

$$\begin{aligned} Mx &= \{ \{ (c * \sin[\text{GammaPQU}[Q,0]] / \sin[\text{AlphaQ}[Q]])^2 / (1+t/T), 0, 0, 0 \}, \\ & \{ 0, -(\sin[\text{GammaPQU}[Q,0]] / \sin[\text{AlphaQ}[Q]])^2 / (1-\text{RhoQ}[Q]^2)^2 * \\ & ((1+t/T)^{(1/2)} - (2r/R)^{(2/3)})^2, 0, 0 \}, \\ & \{ 0, 0, -r^2, 0 \}, \{ 0, 0, 0, -(r^2 * \sin[\text{theta}]^2) \} \}; \end{aligned} \quad (846)$$

$$Inx = \text{Inverse}[Mx]; \quad (847)$$

Aus Performancegründen ist es jetzt angebracht, Ausdruck (847) nur einmal berechnen zu lassen und dann durch eine feste Definition zu ersetzen. Ansonsten wird der Ausdruck bei jedem Aufruf neu berechnet und die Rechenzeit für die Bestimmung der skalaren Krümmung kann dann schon mal 24h betragen. Wir ersetzen also (847) durch:

$$\begin{aligned} Inx &= \{ \{ (1/c * \sin[\text{AlphaQ}[Q]] / \sin[\text{GammaPQU}[Q, 0]])^2 * (1+t/T), 0, 0, 0 \}, \\ & \{ 0, -(\sin[\text{AlphaQ}[Q]] / \sin[\text{GammaPQU}[Q,0]])^2 * (1-\text{RhoQ}[Q]^2)^2 / \\ & ((1+t/T)^{(1/2)} - (2r/R)^{(2/3)})^2, 0, 0 \}, \\ & \{ 0, 0, -r^{(-2)}, 0 \}, \{ 0, 0, 0, -(1/(r^2 * \sin[\text{theta}]^2)) \} \}; \end{aligned} \quad (848)$$

Damit ändert sich auch unsere Funktion Di , die den Parameter angibt, nach dem differenziert werden soll:

$$Di = \text{Function}[\text{Part}\{\{t,r,\text{theta},\text{phi}\}, \# + 1\}]; \quad (849)$$

Auch sollte man die Funktion `Simplify` so früh wie möglich anwenden. Leider ist diese nicht allmächtig, so daß man nicht umhinkommt, von Hand nachzuvereinfachen. Bei den folgenden Berechnungen wird ja bei der Differentiation die Kettenregel mehrfach angewandt und diese hat die Eigenschaft, die Ergebnisse in ihrer Komplexität stark anwachsen zu lassen. Da die Differentiation hier automatisch erfolgt, ist jegliches menschliches Versagen von vorneherein ausgeschlossen. Sollten dennoch Fehler auftreten, so sind diese auf die manuelle Vereinfachung zurückzuführen.

Als erstes wollen wir wieder die unabhängigen metrischen Zusammenhänge berechnen. Zur Vereinfachung der *Darstellung* werden wir folgende Substitutionen vornehmen:

$$t = \left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad r = \left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}_{\text{makroskopisch}} \quad r = \left(\frac{2r - \tilde{r}_0}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}_{\text{exakt}} \quad (850)$$

Letzterer Ausdruck ergibt sich direkt aus (236). Zur Berechnung der Lösungen können wir aber mit dem linken Ausdruck arbeiten und nur dann substituieren, wenn wir uns in solchen Bereichen bewegen, die in ihren Abmessungen an r_0 herankommen und bei allen stark entarteten Zuständen. Die Gültigkeit der nachfolgenden Lösungen wird dadurch nicht eingeschränkt, da r_0 eine bezugssystemabhängige Konstante ist. Für die metrischen Zusammenhänge erhalten wir dann:

$$\left. \begin{aligned}
 \Gamma_{00}^0 &= -H; & \Gamma_{11}^0 &= \frac{\beta^4}{\tilde{R}c} t(t-r) \\
 \Gamma_{01}^1 &= \tilde{H} \frac{1}{t(t-r)}; & \Gamma_{11}^1 &= -\frac{2}{3} \Gamma^{-1} \frac{r}{t-r} \\
 \Gamma_{22}^1 &= -r \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha}; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \vartheta \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha} \\
 \Gamma_{12}^2 &= r^{-1}; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\
 \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}; & \Gamma_{23}^3 &= \cot \vartheta
 \end{aligned} \right\} \quad (851)$$

Beachten Sie unbedingt die Kursivschreibung. Aus Sicherheitsgründen sind aber in allen Ausdrücken die kursiven Parameter t und r immer in einem eigenen Teilausdruck zusammengefaßt, so daß ein Verwecheln mit t und r nicht möglich ist. Weiterhin profitieren wir von nachfolgenden Beziehungen:

$$\tilde{H} = \frac{1}{2\tilde{T}} \quad H = \frac{1}{2(\tilde{T}+t)} \quad \tilde{R} = 2c\tilde{T} \quad R = 2c(\tilde{T}+t) \quad (852)$$

sowie von (767). Der Ausdruck β ist der klassische relativistische Dehnungsfaktor $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$, wobei wir für v die Ausbreitungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds c_M einsetzen. Im Normalfall liegt der Wert extrem nahe bei Eins. Für $t=0$ (heute) wird auch t kursiv zu Eins und es gilt $r(0)=0$. Dann geht Lösung (851) über in (840), was ein Anzeichen dafür ist, daß wir richtig gerechnet haben.

Zur weiteren Einsparung von Rechenzeit können wir auch die Zusammenhänge als Funktion definieren. Das dazugehörige »Mathematica«-Programm sieht dann so aus:

```

MGamma=Function[Which
{#1,#2,#3}=={0,0,0},-1/(2(T+t)),
{#1,#2,#3}=={0,1,1},(1+t/T)^(1/2)*((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3))/
(2*T*c^2*(1-RhoQ[Q]^2)^2),
{#1,#2,#3}=={1,0,1},1/(2T)/((1+t/T)^(1/2)*((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3))),
{#1,#2,#3}=={1,1,0},1/(2T)/((1+t/T)^(1/2)*((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3))),
{#1,#2,#3}=={1,1,1},-2/(3r)*(2r/R)^(2/3)/((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3)),
{#1,#2,#3}=={1,2,2},-r/(((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3))^2)*
(Sin[AlphaQ[Q]]/Sin[GammaPQV[Q,0]])^2*(1-RhoQ[Q]^2)^2,
{#1,#2,#3}=={1,3,3},-r*Sin[theta]^2/(((1+t/T)^(1/2)-(2r/R)^(2/3))^2)*
(Sin[AlphaQ[Q]]/Sin[GammaPQV[Q,0]])^2*(1-RhoQ[Q]^2)^2,
{#1,#2,#3}=={2,1,2},1/r,
{#1,#2,#3}=={2,2,1},1/r,
{#1,#2,#3}=={2,3,3},-Cos[theta]*Sin[theta],
{#1,#2,#3}=={3,1,3},1/r,
{#1,#2,#3}=={3,2,3},Cos[theta]/Sin[theta],
{#1,#2,#3}=={3,3,1},1/r,
{#1,#2,#3}=={3,3,2},Cos[theta]/Sin[theta],
True,0]];

```

Die Nummer (853) gehört natürlich nicht dazu. Die Formel mit (826) überprüft. Als nächstes können wir somit herangehen, die unabhängigen Lösungen für den RIEMANNschen Krümmungstensor R^a_{bcd} zu bestimmen. Zur besseren Kontrolle und weil ich mir schon mal die Mühe gemacht habe wollen wir alle abhängigen und unabhängigen Lösungen ($\neq 0$) darstellen:

$$\begin{aligned}
R^0_{212} &= -\frac{\tilde{H}r}{c^2} \frac{t}{t-r} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} & R^0_{221} &= \frac{\tilde{H}r}{c^2} \frac{t}{t-r} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} \\
R^0_{313} &= -\frac{\tilde{H}r}{c^2} \sin^2 \vartheta \frac{t}{t-r} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} & R^0_{331} &= \frac{\tilde{H}r}{c^2} \sin^2 \vartheta \frac{t}{t-r} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_\gamma} \\
R^l_{220} &= -\tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} & R^l_{202} &= \tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \\
R^l_{212} &= -\frac{2}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} & R^l_{221} &= \frac{2}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \\
R^l_{330} &= -\tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} & R^l_{303} &= \tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \\
R^l_{313} &= -\frac{2}{3} \sin^2 \vartheta \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} & R^l_{331} &= \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \\
R^2_{012} &= -\tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R^2_{021} &= \tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} \\
R^2_{102} &= -\tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R^2_{120} &= \tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} \\
R^2_{121} &= -\frac{2}{3} r^{-2} \frac{r}{t-r} & R^2_{112} &= \frac{2}{3} r^{-2} \frac{r}{t-r} \\
R^2_{332} &= -\left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}\right) \sin^2 \vartheta & R^2_{323} &= \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}\right) \sin^2 \vartheta \\
R^3_{013} &= -\tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R^3_{031} &= \tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} \\
R^3_{103} &= -\tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R^3_{130} &= \tilde{H}r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} \\
R^3_{131} &= -\frac{2}{3} r^{-2} \frac{r}{t-r} & R^3_{113} &= \frac{2}{3} r^{-2} \frac{r}{t-r} \\
R^3_{223} &= -\left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}\right) & R^3_{232} &= \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}\right)
\end{aligned}$$

Alle restlichen Komponenten sind Null. Die Lösungen erfüllen wiederum die Forderung $R^a_{bcd} = -R^a_{bcd}$, wenn es auch mehr geworden sind. Dies ist nicht verwunderlich, denn g_{11} ist ja sowohl von der Zeit t , als auch vom Abstand r abhängig.

Für den gesenkten RIEMANNschen Krümmungs-Tensor R_{abcd} erhalten wir folgende von Null verschiedene Lösungen:

$R_{0212} = -\tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{0221} = \tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{1202} = -\tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{1220} = \tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{2021} = -\tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{2012} = \tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{2120} = -\tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{2102} = \tilde{H}r \frac{1}{t(t-r)}$

$R_{0313} = -\tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{0331} = \tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{1303} = -\tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{1330} = \tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{3031} = -\tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{3013} = \tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$
$R_{3130} = -\tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$	$R_{3103} = \tilde{H}r \sin^2 \vartheta \frac{1}{t(t-r)}$

$R_{1221} = -\frac{2}{3} \frac{r}{t-r}$	$R_{1212} = \frac{2}{3} \frac{r}{t-r}$
$R_{2112} = -\frac{2}{3} \frac{r}{t-r}$	$R_{2121} = \frac{2}{3} \frac{r}{t-r}$

$R_{1331} = -\frac{2}{3} \frac{r}{t-r} \sin^2 \vartheta$	$R_{1313} = \frac{2}{3} \frac{r}{t-r} \sin^2 \vartheta$
$R_{3113} = -\frac{2}{3} \frac{r}{t-r} \sin^2 \vartheta$	$R_{3131} = \frac{2}{3} \frac{r}{t-r} \sin^2 \vartheta$

$R_{2323} = -r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha} \right)$	$R_{2332} = r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha} \right)$
$R_{3232} = -r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha} \right)$	$R_{3223} = r^2 \sin^2 \vartheta \left(1 - \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{v}}}{\sin^2 \alpha} \right)$

Die zusammengehörigen Komponenten wurden der besseren Übersicht wegen zusammengefaßt. So kann man erkennen, daß die Bedingung (832) erfüllt ist. Interessant ist vor allem, daß ein Teil der Lösungen Geschwindigkeiten (Fluchtgeschwindigkeit Hr) sind, die ohne Zweifel auch eine physikalische Bedeutung haben.

Für den RICCI-Tensor R_{ab} erhalten wir jetzt folgende Lösungen, die sich leider nicht mehr in Matrixform darstellen lassen, es sei denn im Querformat:

$$\begin{aligned}
 R_{01} &= \frac{1}{\tilde{T}} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R_{10} &= \frac{1}{\tilde{T}} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & R_{11} &= -\frac{4}{3} r^{-2} \frac{r}{t-r} \\
 R_{22} &= \left(1 - \left(\frac{1}{(t-r)^2} + \frac{2}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \right) \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) & & & & \text{RICCI-Tensor} & (854) \\
 R_{33} &= \left(1 - \left(\frac{1}{(t-r)^2} + \frac{2}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \right) \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) \sin^2 \vartheta
 \end{aligned}$$

Der Rest ist gleich Null. Setzt man die heutigen Werte ein, so gehen wieder alle Komponenten gegen Null. Die Metrik verhält sich damit annähernd MINKOWSKI'sch, genau, wie es LANZOS vorhergesehen hat. Für die skalare Krümmung gilt:

$$R = -\frac{2}{r^2} \left(1 - \left(\frac{1}{(t-r)^2} + \frac{4}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \right) \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}}{\sin^2 \alpha} \right) \quad \text{Skalare Krümmung} \quad (855)$$

Im Bild 133 ist der Verlauf der skalaren Krümmung für verschiedene Ausgangsgüten Q_0 unter Anwendung des vollständigen Ausdrucks (850) dargestellt. Es handelt sich hier nur um relative Werte im Vergleich zum Weltradius, d.h. man kann zwar auf den Verlauf der Krümmung schließen, die Werte sind aber nicht miteinander vergleichbar.

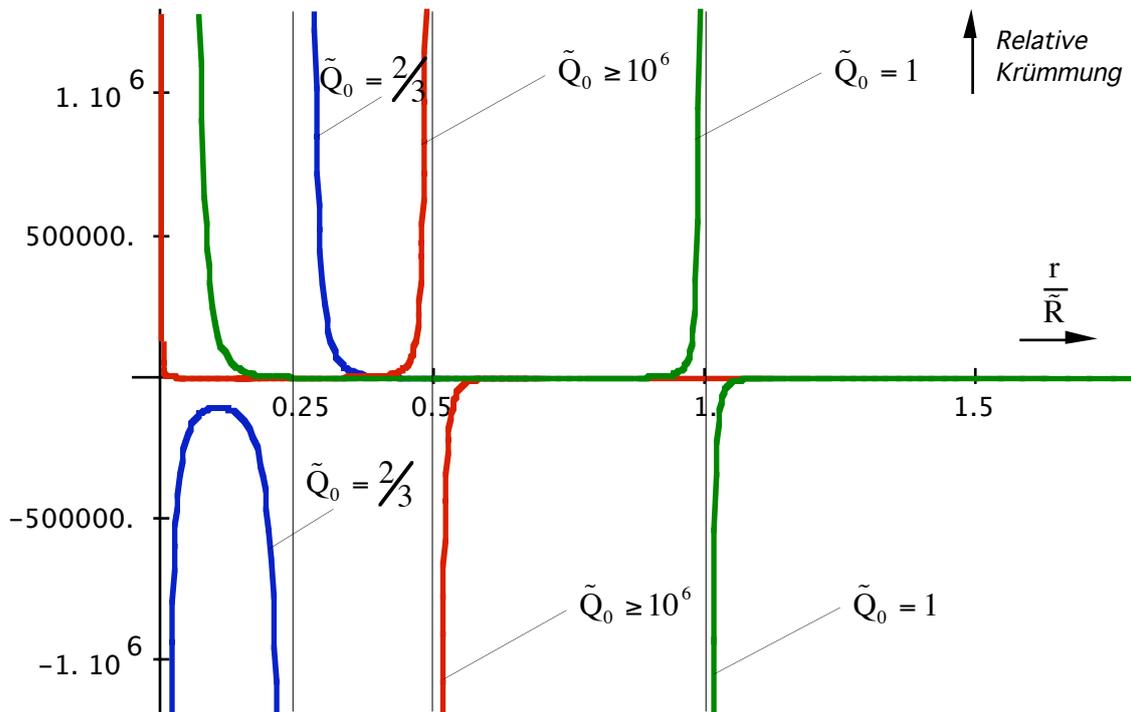


Bild 133
Relative skalare Krümmung für
verschiedene Ausgangsgütwerte

Interessant ist vor allem der Verlauf für eine Ausgangsgüte $>10^6$, was dem Standardfall eines Beobachters in einem Raum verschwindender Krümmung (heute) entspricht. Man erkennt hier wieder den Anstieg im mikroskopischen Bereich, den wir schon im vorigen Abschnitt beobachten konnten. Im Gegensatz dazu steigt die Krümmung aber auch an, wenn wir uns dem

halben Weltradius nähern. Zur besseren Übersicht ist im Bild 134 noch einmal der Verlauf für $Q_0 > 10^6$ einzeln dargestellt und zwar für positive (raumartige) und negative (zeitartige Entfernungen). Prinzipiell tritt hier kein Unterschied auf, nur eine kleine Unsymmetrie um den Punkt Null herum.

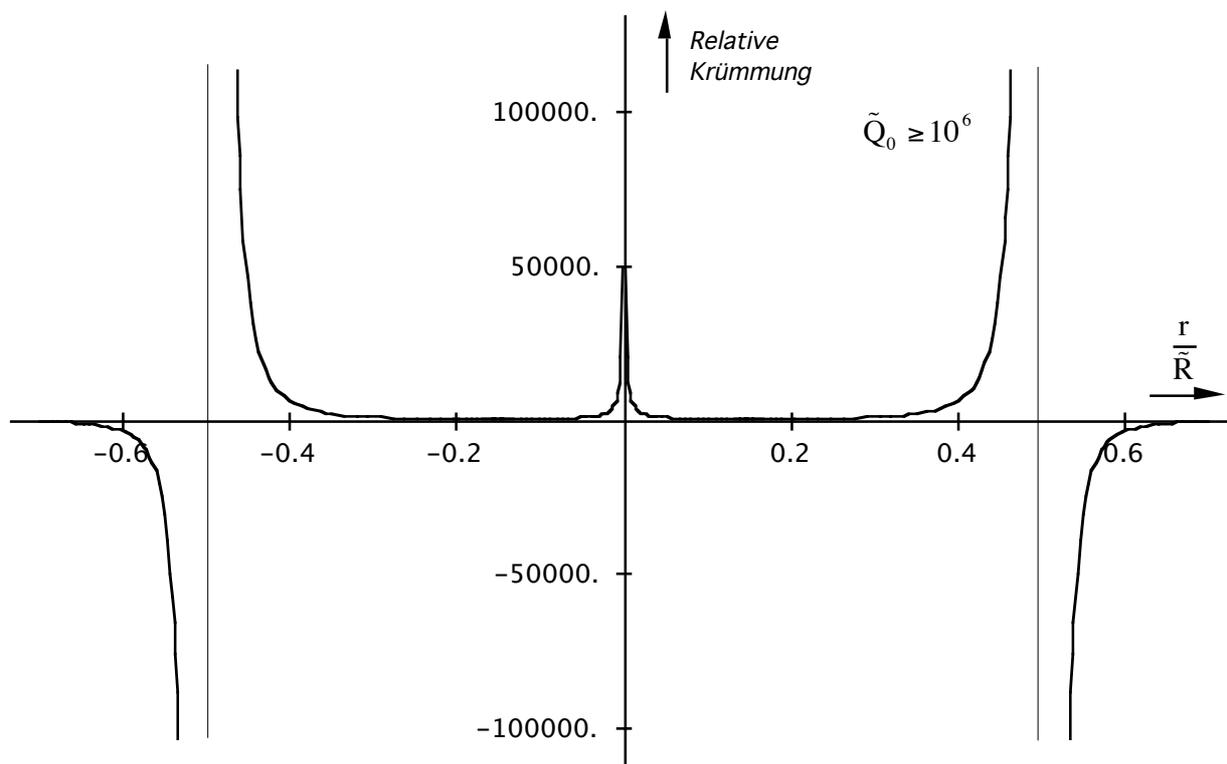


Bild 134
Relative skalare Krümmung für
den Standardfall $Q_0 > 10^6$

Die Krümmung innerhalb der “Grenzen” des Universums ist positiv, d.h. der Raum ist geschlossen und zwar sowohl mikroskopisch als auch makroskopisch gesehen. An beiden Enden befindet sich eine Singularität. Außerhalb ist der Raum offen, sofern es ein “außerhalb” überhaupt geben sollte.

Interessant wird es, wenn die Ausgangsgüte geringer wird, z.B. wenn wir den Ursprung unseres Bezugssystems in einen Bereich hoher Krümmung legen oder wenn wir einfach auf der Zeitskala zurückgehen zu einem Zeitpunkt kurz nach dem Urknall. Jetzt verschiebt sich die makroskopische Singularität von $R/2$ zum Punkt R bei einer Güte von $Q_0=1$, dies entspricht den Bedingungen direkt am SCHWARZSCHILD-Radius, was gut mit unserer Vorhersage übereinstimmt, daß zu diesem Zeitpunkt ein Phasensprung auftritt. Dieser muß, um vollständig zu sein, das gesamte Universum umfassen.

Geht man noch weiter zurück, so stößt man auf ein offenes Universum mit negativer Krümmung. Die Singularität liegt im gewählten Fall $Q_0=2/3$ im Punkt $R/4$, jedoch nur für positive (raumartige) Entfernungen. Hier tritt also eine nicht vernachlässigbare Unsymmetrie auf. Der genaue Verlauf ist im Bild 135 dargestellt wiederum unter Benutzung des exakten Ausdrucks von (850). Welche genauen physikalischen Schlußfolgerungen man daraus ableiten kann, möchte ich dem Leser überlassen. Auf jeden Fall glaube ich, daß es eine Menge davon geben wird, entspricht doch der letztgenannte Fall den Bedingungen innerhalb des SCHWARZSCHILD-Radius eines schwarzen Lochs.

Zum Schluß wollen wir noch die Determinante der Metrik angeben, da sie häufig verwendet wird und zwar in der Form $(-g)^{1/2}$. Dazu benutzen wir die eingebaute Funktion $\text{Det}[Mx]$. Es gilt:

$$\sqrt{-g} = cr^2 \sin^2 \vartheta \frac{t-r}{t} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_{\varphi}} \quad \text{Determinante} \quad (856)$$

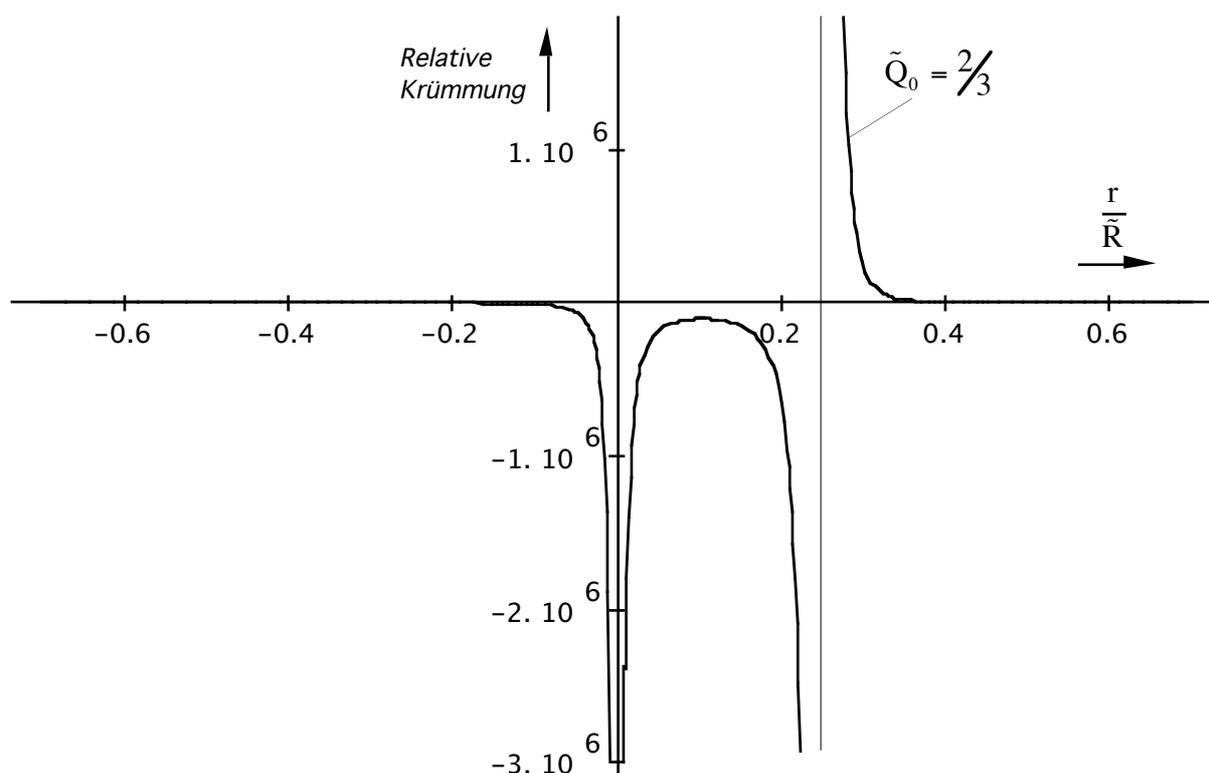


Bild 135
Relative skalare Krümmung
für den Fall $Q_0 = 2/3$

Damit haben wir alle Grundlagen geschaffen, um den Energie-Impuls-Tensor des Vakuums, der auf diesem Modell basiert, zu berechnen.

7.2.6. Der Energie-Impuls-Tensor

Wir berechnen zunächst den gesenkten Tensor T_{ik} und zwar wieder für einen Körper im freien Fall, d.h. die Vakuumlösung. Zur Berechnung können wir die berühmte EINSTEINSche Gleichung (0.25) verwenden, die allgemein gilt. Ausdruck (0.25) bedeutet gleichzeitig, daß die sogenannte kosmologische Konstante λ gleich Null ist. Als Eingangsgrößen benötigen wir die Metrik und die davon abgeleiteten Funktionen RICCI-Tensor und die skalare Krümmung.

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = T_{ik} \quad (0.25)$$

Zur Berechnung benutzen wir wieder das Programm »Mathematica« und folgendes Script:

```
Rr00=-2/r^2*(1-(1/(tt-rr)^2+4/3*rr/(tt-rr)^3)*Sin[AI]^2/Sin[GaGa]^2*beta^-4);

Mx={{c^2*Sin[GaGa]^2/Sin[AI]^2/tt^2, 0, 0, 0},
{0, -Sin[GaGa]^2/Sin[AI]^2*beta^4*(tt-rr)^2, 0, 0},
{0, 0, -r^2, 0}, {0, 0, 0, -(r^2*Sin[theta]^2)}}; (857)

Rik={{0,1/(T*r)/(tt*(tt-rr)),0,0},{1/(T*r)/(tt*(tt-rr)),-4/(3*r^2)*rr/(tt-rr),0,0},
{0,0,(1-(1/(tt-rr)^2+2/3*rr/(tt-rr)^3)*Sin[AI]^2/Sin[GaGa]^2*beta^-4),0},
{0,0,0,(1-(1/(tt-rr)^2+2/3*rr/(tt-rr)^3)*
Sin[AI]^2/Sin[GaGa]^2*beta^-4)*Sin[theta]^2}};
```

Die Berechnung selbst erfolgt durch Ausführen der folgenden Zeile:

```
Simplify[Rik-1/2*Rr00*Mx] (858)
```

Da es sich um die Multiplikation mit einem Skalar handelt, steht hier der Stern und nicht der Punkt (* kann auch weggelassen werden). Nach Vereinfachung von Hand erhalten wir folgende von Null verschiedene Komponenten:

$$\begin{aligned}
 T_{00} &= -\frac{1}{\beta^4} \frac{c^2}{r^2} \left(\left(\frac{1}{(t-r)^2} + \frac{4}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \right) - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}} \right) \frac{1}{t^2} \\
 T_{01} &= -\frac{1}{\bar{T}} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} & T_{10} &= -\frac{1}{\bar{T}} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} \\
 T_{11} &= \frac{1}{r^2} \left(1 - (t-r)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}} \right) \\
 T_{22} &= \frac{2}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} & T_{33} &= \frac{2}{3} \sin^2 \vartheta \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\bar{\gamma}}}{\sin^2 \alpha}
 \end{aligned} \tag{859}$$

Bitte beachten Sie wieder die kursiven Variablen, die im vorigen Abschnitt (852) definiert sind. Da jetzt keine Differentiation mehr erfolgt, können wir von jetzt an mit diesen weiterarbeiten. Eine Betrachtung der Maßeinheiten führt zu dem interessanten Ergebnis, daß wir es hier weder mit energetischen noch mit Impulseinheiten zu tun haben. Dies ist so richtig, denn der Energie-Impuls-Tensor heißt nicht deswegen so, weil er Energie oder Impuls auf irgendeine Art und Weise *beschreibt*, sondern weil er sich u.a. aus der Energie- und Impulsverteilung im Raum *ergibt*. In der Tat sind alle diese Informationen in den Komponenten enthalten, einschließlich dem evtl. Vorhandensein einer oder mehrerer Masseverteilungen, der Masse des Probekörpers, dessen Impuls, Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung. Letztere allerdings nicht in (859), da diese Komponenten nur für einen Körper im freien Fall gelten. Damit rechnet sich dann auch das Vorhandensein einer evtl. Masseverteilung heraus (Äquivalenzprinzip).

Wollten wir alle diese Werte mit in die Betrachtung einbeziehen, müßten wir, beginnend vom Linienelement—jetzt gilt zusätzlich $r=f(t,s)$ und $\sin \gamma_{\bar{\gamma}}=f(v,r,m)$ —alle Ausdrücke neu berechnen. Durch die mehrfachen Ableitungen erscheinen dann zusätzlich Ausdrücke wie die Beschleunigung a , das Integral über den Weg s und der Weg s selbst in den Ergebnissen. Aufgrund der Wegabhängigkeit und der unendlich vielen Möglichkeiten der Materieanordnung läßt sich daher keine allgemeingültige Lösung angeben, so daß man alle Tensoren und Skalare für jedes Problem neu ermitteln muß. Auf keinen Fall werden die Lösungen einfach sein, selbst die Vakuumlösung im freien Fall ist ja schon kompliziert genug.

Mathematisch gesehen haben wir aber alle Grundlagen gelegt, um zu einer expliziten Lösung zu gelangen, es sei denn, wir müssen zum Schluß über einen größeren Abstand r integrieren, um zu einem nicht-lokalen Ergebnis zu gelangen. Dann gibt es keine explizite Lösung, wie wir schon gesehen haben. Glücklicherweise spielt dieser Fall keine Rolle, wenn wir nur Körper betrachten, die sich im freien Fall befinden. Diese bewegen sich nämlich nicht gegenüber der Metrik und die Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor ist bekannt.

Nun jedoch zurück zum Energie-Impuls-Tensor. Als nächstes werden wir den inversen Tensor T^{ik} berechnen, den wir zur Bestimmung der Geometrie G^{ik} benötigen. Kommen Sie nun bitte nicht auf die Idee, den inversen Tensor direkt mit Hilfe der »Mathematica«-Funktion `Inverse[Tik]` zu berechnen. Sie erhalten zwar noch ein Ergebnis, doch ist dieses so kompliziert, daß man es in dieser Form nicht verwenden kann. Die Vereinfachung mit Hilfe von `Simplify[Inverse[Tik]]` versagt schließlich infolge von Speichermangel. Selbst bei einer Speicherzuteilung von 27MB (Mac) verabschiedet sich der Kernel am Ende.

Die Lösung sieht folgendermaßen aus: Man errechnet erst allgemein den inversen Tensor unter Ausnutzung der Tatsache, daß einerseits ein Großteil der Komponenten Null ist, und andererseits $T_{01}=T_{10}$ gilt. Nach anschließender Vereinfachung schieben wir die Komponentendefinitionen hinterher, indem wir sie erst dann definieren. Wir machen folgenden Ansatz:

$$\begin{aligned} \mathbf{MPart} &= \text{Function}[\text{Part}[\text{Part}[\#1, \#2+1], \#3+1]]; \\ \mathbf{Tik1} &= \{\{t_{00}, t_{01}, 0, 0\}, \{t_{01}, t_{11}, 0, 0\}, \{0, 0, t_{22}, 0\}, \{0, 0, 0, t_{33}\}\}; \end{aligned} \quad (860)$$

$$\mathbf{Tik2} = \text{Simplify}[\text{Inverse}[\mathbf{Tik1}]] \quad (861)$$

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{t_{11}}{2}, \frac{t_{01}}{2}, 0, 0 \right\}, \\ &\left\{ \frac{t_{01}}{2}, \frac{t_{00}}{2}, 0, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \frac{1}{t_{22}}, 0 \right\}, \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{t_{33}} \right\} \end{aligned}$$

Das Ergebnis habe ich einmal im Originalformat (Courier) dargestellt, da es sich nur um eine Zwischenlösung handelt, die für sich selbst spricht. Auf jeden Fall ist sie nicht allzu kompliziert. Jetzt schieben wir die Komponentendefinitionen unter:

$$\begin{aligned} t_{00} &= c^2 / (tt^2 r^2) * (1 - (1 / (tt - rr)^2 + 4/3 * rr / (tt - rr)^3) * beta^4 * \\ &\text{Sin}[\alpha]^2 / \text{Sin}[\gamma]^2) * \text{Sin}[\gamma]^2 / \text{Sin}[\alpha]^2; \\ t_{01} &= -1 / T * r^2 - 1 / (tt * (tt - rr)); \\ t_{11} &= 1 / r^2 * (1 - (tt - rr)^2 * beta^4 * \text{Sin}[\gamma]^2 / \text{Sin}[\alpha]^2); \end{aligned} \quad (862)$$

Auf T_{10} , T_{22} und T_{33} können wir verzichten, da wir das Ergebnis gleich hinschreiben können. Die anderen Komponenten erhalten wir durch Ausführung von:

$$\text{Simplify}[\mathbf{MPart}[\mathbf{Tik2}, i, k]] \quad (863)$$

Die Ergebnisse müssen wieder von Hand vereinfacht werden und sind ziemlich komplex. Zur Vereinfachung der Darstellung und Vermeidung von Fehlern nehmen wir nochmals eine Substitution vor und zwar folgendermaßen:

$$A^2 = \frac{1}{(t-r)^2} \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \quad B^2 = \frac{4}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{\gamma}}}{\sin^2 \alpha} \quad (864)$$

Die von Null verschiedenen Komponenten des inversen Energie-Impuls-Tensors T^{ik} lauten dann:

$$T^{00} = \tilde{T}^2 \frac{1 - A^2}{A^2} \frac{t^2 (t-r)^2}{1 + \frac{1}{\beta^4 r^3} \frac{(1 - A^2)((1 - A^2) - B^2)}{A^4}} \quad (865)$$

$$T^{01} = -r \tilde{T} \frac{t (t-r)}{1 + \frac{1}{\beta^4 r^3} \frac{(1 - A^2)((1 - A^2) - B^2)}{A^4}} \quad (866)$$

$$T^{11} = -\frac{\tilde{R}^2}{4} \frac{\frac{1}{\beta^4} \frac{(1 - A^2)((1 - A^2) - B^2)}{A^2}}{1 + \frac{1}{\beta^4 r^3} \frac{(1 - A^2)((1 - A^2) - B^2)}{A^4}} \quad (867)$$

$$T^{10} = T^{01} \quad T^{22} = \frac{2}{B^2} \quad T^{33} = \frac{2}{B^2} \sin^{-2} \vartheta \quad (868)$$

Wie man sieht, sind die Komponenten des inversen Energie-Impuls-Tensors doch schon recht komplex. Bei der Berechnung der Geometrie G_{ik} werden sie sich aber wieder vereinfachen. Interessant ist noch die Betrachtung der Komponenten T^{ok} . Für eine MINKOWSKI-Welt gilt nämlich:

$$\partial_k T^{ok} = 0 \quad (869)$$

Dieser Ausdruck wird allgemein [30] als der Energieerhaltungssatz interpretiert. Es läßt sich leicht zeigen, daß Ausdruck (869) für dieses Modell NICHT gilt. Ist dies vielleicht ein fundamentaler Fehler dieses Modells? Dies ist nicht der Fall, denn laut [5] ist der Energieerhaltungssatz »nur ein empirischer Satz, er könnte daher für uns heute unbekannte physikalische Erscheinungen verletzt sein.« Es gibt also keinen eindeutigen Beweis für seine universelle Gültigkeit und in der Tat scheint es sich z.B. bei der kosmologischen Rotverschiebung um einen Effekt zu handeln, durch den der Energieerhaltungssatz verletzt wird. Hier wird ja quasi Energie vernichtet und zwar durch die Zunahme der Wellenlänge der kosmischen Hintergrundstrahlung.

Nun könnte man den Satz so abändern, daß Energie zwar vernichtet, jedoch nicht wieder aus dem Nichts erzeugt werden kann. Bezieht man aber den Urimpuls in die Betrachtung mit ein, so müßten wir auch diese abgeschwächte Form ablehnen. Der Urimpuls ergibt sich ja nach diesem Modell aus der Eigenlösung (Anfangswert = 0) der entsprechenden Differentialgleichung. Hinzu kommt noch, daß dieses Modell auch imaginäre Energien bzw. Massen zuläßt. Damit wäre es möglich, daß Energie zeitweise "verschwindet" (inaktiviert würde), um später wieder "aufzutauchen". Ein Beispiel wäre hier die schwache Wechselwirkung in Form des Neutrinoeinfangs.

Insgesamt kann man sagen, daß sich aus der Verletzung des Energieerhaltungssatzes keine Argumente ableiten lassen, dieses Modell zu verwerfen.

7.2.7. Lösung der Feldgleichungen der Relativitätstheorie

7.2.7.1. Die Kopplungskonstante

Nachdem wir alle Voruntersuchungen abgeschlossen und den Energie-Impuls-Tensor des Vakuums für Probekörper im freien Fall bestimmt haben, bleibt schließlich nur übrig, die dazugehörige Geometrie G_{ik} zu berechnen. Nach [30] ergibt sich diese zu:

$$G^{ik} = \kappa T^{ik} \quad (870)$$

Hierbei ist κ ein Proportionalitätsfaktor, der auch als Kopplungskonstante der ART bezeichnet wird und nicht mit der spezifischen Leitfähigkeit des Subraums κ_0 verwechselt werden darf. Sein Wert ergibt sich aus dem NEWTONschen Grenzfall, der natürlich auch für dieses Modell erfüllt sein muß. Bevor wir hier aber einfach einsetzen, wollen wir uns noch einmal mit der Begründung von (870) befassen, wie sie in [30] ab S. 189 dargestellt ist.

Man geht zunächst davon aus, daß der Energie-Impuls-Tensor in MINKOWSKI-Koordinaten die Erhaltungsgleichungen:

$$\partial_k T^{ik} = 0 \quad (871)$$

erfüllt. Nun haben wir es aber weder mit MINKOWSKI-Koordinaten zu tun, noch ist (871) erfüllt, wie wir gerade im vorigen Abschnitt gesehen haben. Jetzt geht D'INVERNO davon aus, daß das Prinzip der *minimalen* gravitativen Kopplung die allgemein-relativistische Verallgemeinerung:

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \quad (872)$$

(kovariante Ableitung) nahelegt. Weiterhin soll der EINSTEIN-Tensor aufgrund der kontrahierten BIANCHI-Identität verschwinden:

$$\nabla_k G_i^k \equiv 0 \quad \text{daraus folgt} \quad \nabla_k G^{ik} \equiv 0 \quad (873)$$

Die Bedingung (873) ist tatsächlich erfüllt, wie sich aus den Eigenschaften des RIEMANNschen Krümmungstensors im Abschnitt 7.2.5.5. unter Anwendung von

$$\nabla_a R_{debc} + \nabla_c R_{deab} + \nabla_b R_{deca} \equiv 0 \quad ([30] 6.82)$$

leicht nachweisen läßt. Aus (872) und (873) schließt D'INVERNO darauf, daß beide Tensoren zueinander proportional sein müssen. Das Problem scheint nun darin zu liegen, daß sich D'INVERNO bei der Ableitung von (872) auf das Prinzip der *minimalen* gravitativen Kopplung beruft, das wir gerade für unser Modell als ungültig deklariert haben. Stattdessen haben wir es durch das Prinzip der *maximalen* gravitativen Kopplung ersetzt, das als solches noch viel stärker die Proportionalität der beiden Tensoren fordert. Dies ist gleichbedeutend mit der Aussage: "Die Materie bestimmt die Geometrie", so daß es in dieser Hinsicht keine Probleme geben sollte.

Eine Frage bleibt jedoch gegenüber der klassischen Auslegung offen, bzw. sie ergibt sich zusätzlich aus dem Prinzip der *maximalen* gravitativen Kopplung. Während man nach der klassischen Theorie die Kopplungskonstante gleich nach der Bestimmung anhand des NEWTONschen Grenzfalls (\rightarrow [30]) hinschreiben kann, haben wir nach diesem Modell zwei Optionen zur Auswahl:

$$\kappa = 8\pi \frac{G}{c^2} \quad \text{oder} \quad \kappa = 8\pi \frac{\tilde{G}}{c^2} \quad (874)$$

Hierbei fällt die Auswahl nicht unbedingt leicht, da ja die (lokale) Gravitationskonstante nach diesem Modell auch wieder eine Funktion von Raum und Zeit ist. Durch folgendes Gedankenexperiment kommen wir aber auf die richtige Lösung: Wenn das Prinzip der *maximalen* gravitativen Kopplung wirklich so sehr viel stärker ist, muß die Proportionalität (870) immer und überall gewährleistet sein, ansonsten wäre der NEWTONsche Grenzfall nur im Punkt $r=0$ erfüllt. Da der Energie-Impuls-Tensor aber schon eine raum-zeitliche Abhängigkeit enthält, bleibt als einzige Option nur der rechte Ausdruck (874) übrig. Es gilt daher nach Einsetzen von (700):

$$\kappa = \frac{8\pi \tilde{R} \tilde{Q}_0}{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}_1} = \frac{8\pi \tilde{R}}{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}} = \frac{8\pi \tilde{c} \tilde{r}_0^2}{\tilde{h}} \quad (875)$$

Da Ausdruck (875) bezugssystemabhängige Größen (\tilde{R} , \tilde{r}_0 , \tilde{h}) enthält, hängt die Geometrie jetzt zusätzlich vom Bezugssystem ab, ein Faktum, das sich eigentlich von selbst ergibt, wenn man die Grenze zwischen SRT und ART aufhebt. Betrachtet man einen Körper von einem anderen Bezugssystem aus, so wird man nicht nur die Zustandsvariablen des Körpers selbst anders beobachten, sondern auch die Geometrie des Raumes darum, da dieser jetzt über eine Struktur verfügt. In der klassischen Relativitätstheorie geht man ja davon aus, daß das Universum mit Ausnahme von Materie und Strahlung von »NICHTS« erfüllt ist. Und ein »NICHTS« verändert sich nicht deswegen, wenn man es von einem anderen Bezugssystem betrachtet. Wir können daher schreiben:

XIII. Die Materie und das Bezugssystem bestimmt die Geometrie.

Wir wollen jetzt fortfahren und die zum Energie-Impuls-Tensor gehörige Geometrie berechnen. Die Geometrie G_{ik} wird auch als EINSTEIN-Tensor bezeichnet.

7.2.7.2. Die Geometrie des Vakuums

Nachdem wir den inversen Energie-Impuls-Tensor und den Kopplungsfaktor bestimmt haben, müssen wir nur das Produkt aus beiden bilden, um die (inverse) Geometrie G^{ik} zu bestimmen. Da dies mathematisch gesehen trivial ist, sollen die Ergebnisse nicht extra dargestellt werden.

Nun suchen wir aber eigentlich nicht nach der inversen Geometrie G^{ik} , was immer das sein soll, sondern nach der Geometrie G_{ik} . Außerdem haben wir gesehen, daß schon der inverse Energie-Impuls-Tensor aus sehr komplexen Ausdrücken besteht. Versuchen wir jetzt, aus der inversen Geometrie die normale Geometrie zu berechnen (durch Anwendung der Funktion $\text{Inverse}[\text{GIK}]$), so stoßen wir wieder an die Grenzen des Programms »Mathematica«. Diese äußern sich darin, daß die Rechenzeit ins Unermeßliche ansteigt. Das Ergebnis habe ich gar nicht erst abgewartet, sondern mir stattdessen Gedanken gemacht, ob die Berechnung von G_{ik} nicht auch einfacher und vor allem schneller vonstatten gehen kann. Ausdruck (870) in Kombination mit $\text{Inverse}[\text{GIK}]$ ist zu diesem Zweck nämlich nicht besonders gut geeignet. Durch eine ähnliche Vorgehensweise wie im vorigen Abschnitt läßt sich nun zeigen, daß man G_{ik} direkt aus T_{ik} berechnen kann. Für symmetrische Tensoren gilt dann:

$$G_{ik} = \frac{1}{\kappa} T_{ik} \quad (876)$$

Wie es bei unsymmetrischen Tensoren und allgemeinen Matrizen aussieht, brauchen wir hier nicht zu untersuchen, da T_{ik} immer symmetrisch ist. Für die Geometrie erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} G_{00} &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\tilde{h}\tilde{\omega}_0}{\tilde{r}_0} \frac{1}{\beta^4 t^2} \left(\left(\frac{1}{(t-r)^2} + \frac{4}{3} \frac{r}{(t-r)^3} \right) - \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}} \right) \frac{1}{r^2} && \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] \\ G_{0l} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\tilde{h}}{\tilde{R}\tilde{r}_0^2} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} && \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \right] \\ G_{l0} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{\tilde{h}}{\tilde{R}\tilde{r}_0^2} r^{-1} \frac{1}{t(t-r)} && \left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^3} \right] \\ G_{ll} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}}{\tilde{R}} \frac{1}{r^2} \left(1 - (t-r)^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}} \right) && \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ G_{22} &= \frac{1}{12\pi} \frac{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}}{\tilde{R}} \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}}{\sin^2 \alpha} && \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right] \\ G_{33} &= \frac{1}{12\pi} \frac{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}}{\tilde{R}} \sin^2 \vartheta \frac{r}{(t-r)^3} \frac{\sin^2 \gamma_{\tilde{r}}}{\sin^2 \alpha} && \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}} \right] \end{aligned} \quad (877)$$

Hierbei haben wir alle möglichen Umformungen aus den ersten Abschnitten angewandt. Dargestellt sind auch die Maßeinheiten, damit man sich zumindest annähernd vorstellen kann, welchen physikalischen Inhalt die einzelnen Komponenten haben. Dieser Sachverhalt ist auch ein Grund dafür, daß die Arbeit an dieser Stelle nicht weiter fortgeführt werden kann. Man kann zwar alles mögliche ausrechnen, das genügt aber nicht allein, zumal wir doch schon ein ganzes Stück vom Standardmodell abgekommen sind.

Interessant an (877) sind vor allem die Komponenten G_{00} (Druck) und G_{ll} (Dichte). Bei letzterem kann es sich nur um die Dichte des leeren Gravitationsfeldes ohne Materie handeln. Leider sind alle interessierenden Komponenten vom Abstand r abhängig. Wir wollen probehalber einmal die Dichte für das gesamte Universum berechnen ($r = R/2$). Dann erhalten wir:

$$G_{11}(\tilde{R}/2) = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_0 \kappa_0 \tilde{h}}{\tilde{R}^3} = 1,443 \cdot 10^{-29} \text{ kg dm}^{-3} \quad (878)$$

Dieser Wert liegt um 3 Größenordnungen oberhalb der im Abschnitt 4.6.4.2.5. bestimmten Materiedichte mit einem Wert von $1,845 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3}$, was als Beweis dafür gelten mag, daß wir es mit einem strahlungsdominierten Universum zu tun haben oder anders gesagt, die Materie ist nur von lokalem Einfluß und spielt keine Rolle bei Prozessen, die das gesamte Universum umfassen. Daher macht es auch keinen Sinn, weiter nach "versteckten" Massen zu suchen.

7.2.7.3. Das 3-Schichten-Modell der Metrik

Betrachten wir noch einmal die Ausdrücke von (877) so sehen wir, daß sie gleichzeitig (teilweise versteckt) Größen des Subraumes (μ_0 , κ_0 , c), des metrischen Wellenfeldes (ω_0 , r_0), der Quantentheorie (\hbar) und Größen des Makrokosmos (T , R) enthalten. Hierbei gehören alle mit einer Tilde (\sim) gekennzeichneten Größen einschließlich \hbar zum selben kanonischen Ensemble, das wir auch als Bezugssystem bezeichnen. Alle diese Größen haben Einfluß auf die Geometrie des Universums. Andererseits beschreibt (877) nur die obere "Schicht", die makroskopische Metrik, das ist der Raum oder besser die Raumzeit, in der wir leben.

Zur besseren Verständlichkeit ist im Bild 136 noch einmal der grundlegende Aufbau der Metrik dargestellt, die aus drei übereinanderliegenden Schichten (Layern) besteht. Daher möchte ich dieses Modell als das 3-Schichten-Modell der Metrik bezeichnen.

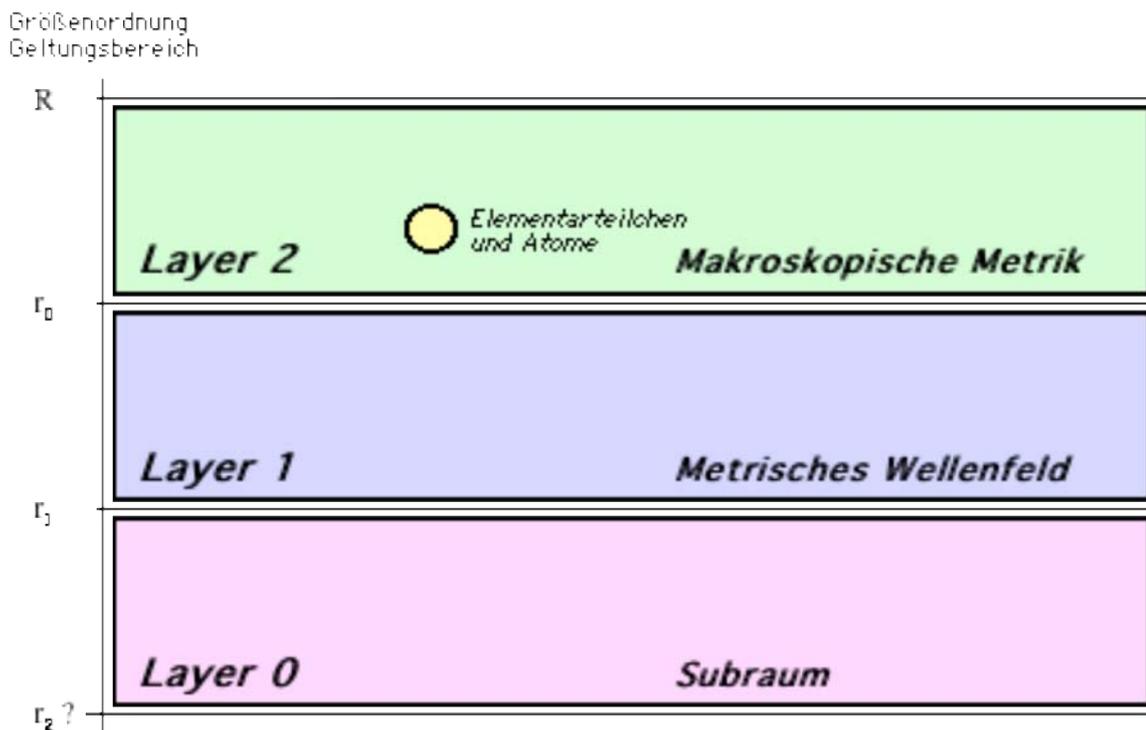


Bild 136
Das 3-Schichten-Modell der Metrik

Am linken Rand ist die Größenordnung der einzelnen Schichten aufgetragen, wobei der Maßstab logarithmisch ist. Daher ist es möglich, daß der Subraum auch eine untere Grenze und eine Struktur besitzt. Leider können wir dieses nur vermuten. Das einzige, das wir über den Subraum wissen, ist, daß er über die physikalischen Eigenschaften μ_0 , ϵ_0 , Z_0 und c verfügt. D.h. die Lichtgeschwindigkeit gegenüber dem Subraum ist immer konstant c .

Darüber befindet sich das metrische Wellenfeld, das durch die Beziehungen in den ersten Abschnitten beschrieben wird. Den oberen Abschluß bildet die PLANCKsche Elementarlänge r_0 .

Alle Vorgänge, die in Bereichen größerer Abmessungen als r_0 ablaufen, werden durch die makroskopische Metrik g_{ik} beschrieben. Der Vollständigkeit halber ist auch noch die Lage der Atome und Elementarteilchen innerhalb dieser makroskopischen Metrik dargestellt. Da diese jedoch eigenständige kugelsymmetrische Lösungen der Feldgleichungen darstellen, treten sie hier nur am Rande als Störungen auf, durch die die gravitativen Effekte verursacht werden.

Je tiefer man nun geht, um so größer wird die Feldenergie, die durch Quanteneffekte gegenüber der darüberliegenden Schicht verdeckt wird. Ein solcher Quanteneffekt ist z.B. der Spin des MLE, der die Energie des metrischen Wellenfelds gegenüber der makroskopischen Metrik kompensiert ($T = 0K$). Dieser Aufbau stellt einen wesentlichen Vorteil gegenüber anderen Modellen dar, erlaubt er doch auch die Existenz von Gebieten mit negativer (Differenz-)Energie, was z.B. LANCZOS sonst als unphysikalisch ablehnt. Auch würde dadurch die Frage geklärt, woher die Energie zur Erzeugung virtueller Teilchen-Antiteilchenpaare kommt. Diese "borgt" sich das Universum von der darunterliegenden Schicht.

Interessant wird die ganze Sache, wenn man die Betrachtung auf den darunterliegenden Subraum ausdehnt. Sollte dieser auch über eigene Energie verfügen, so müßte die Dichte noch wesentlich über der des metrischen Wellenfelds liegen und zwar in der Größenordnung des Urimpulses. Dies würde wiederum erklären, woher dessen Energie stammen könnte. Ähnlich den Vorgängen bei der (Quanten-)Paarerzeugung (virtuell oder real) wäre es dann denkbar, daß es analoge Effekte innerhalb des Subraums gibt, bei denen es zur Paarerzeugung ganzer Universen kommen kann. In dieser Hinsicht hoffe ich nur, daß wir nicht in einem virtuellen Universum leben...*Quantum theory is very strange.*

7.3. Ebene Gravitationswellen

D'INVERNO weist in [30] auf die Möglichkeit der Existenz ebenfrontiger Gravitationswellen hin. Nun könnten wir, aufbauend auf den Beziehungen dieses Modells, versuchen eine solche Wellenfunktion zu definieren, zumal D'INVERNO einen brauchbaren Ansatz dafür präsentiert. Allerdings bin ich der Meinung, daß eine solche Wellenfunktion nicht den Gegebenheiten entsprechen würde, da wir ja schon eine metrische Wellenfunktion gefunden haben. Eine solche Vorgehensweise wäre in etwa vergleichbar mit dem Versuch, eine Wellenfunktion für die Hüllkurve eines amplitudenmodulierten Rundfunksignals zu definieren, wenn wir die Wellenfunktion der Trägerwelle bereits kennen. Hier ist es viel angebrachter, die Transportfunktion (Wellenfunktion) der Trägerwelle zuzuordnen und die Hüllkurve nur als Funktion ihrer selbst zu betrachten. Und genauso verhält es sich mit der makroskopischen Metrik. Diese kann mit der Hüllkurve verglichen werden, während der Transport durch das metrische Wellenfeld erfolgt.

Dennoch sollten wir die Ausführungen von D'INVERNO nicht ganz zurückweisen, denn sie enthalten immer noch eine Menge interessanter Information. Auch sind sie nicht grundweg als falsch anzusehen.

Ausgehend von der linearisierten Form der Feldgleichungen und mit Hilfe der Variationsrechnung kommt D'INVERNO zu dem Schluß, daß diese Wellen aus zwei unabhängigen Komponenten (h_{22} und h_{23}) bestehen müßten, die transversalen Charakter haben und deren Polarisierungsebenen im Winkel von 45° zueinander orientiert sind.

Des weiteren sollte die Amplitude der h_{23} -Komponente um den Faktor $1/\sqrt{2}$ kleiner sein als die der ersteren. Ich möchte hier nicht in Einzelheiten gehen (diese können Sie in [30] nachlesen), sondern nur untersuchen, inwieweit sich unser Modell als kompatibel zu den dort gemachten Aussagen erweist. Im Bild 1 haben wir ja schon einmal die kristalline Struktur des metrischen Wellenfelds dargestellt, so wie es von LANCZOS vorhergesagt wurde. Wenn wir hier nach unabhängigen Komponenten suchen, die die oben genannten Bedingungen erfüllen, so finden wir die in den Bildern 137 und 138 dargestellten Teilsysteme, die in der Tat im Winkel von 45° in allen drei räumlichen Dimensionen zueinander verdreht sind und auch die geometrischen "Abmessungen" sind richtig. Bei dem metrischen Wellenfeld dieses Modells könnte es sich also tatsächlich um die legendären Gravitationswellen handeln.

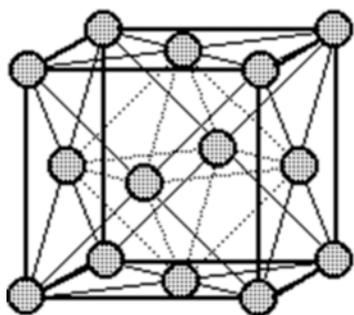


Bild 137
 h_{22} -Komponente einer oszillierenden ebenfrontigen Gravitationswelle (+ Polarisation)

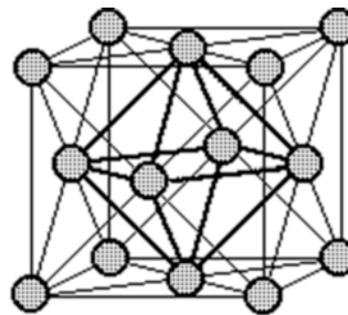


Bild 138
 h_{23} -Komponente einer oszillierenden ebenfrontigen Gravitationswelle (x Polarisation)

Auch vermeidet unser Modell einige Ungereimtheiten, die von D'INVERNO angesprochen werden. Eine davon ist das Problem bei kollidierenden ebenfrontigen Gravitationsstoßwellen. Hier kommt D'INVERNO nämlich zu dem Schluß, daß diese dann nicht länger ebenfrontig bleiben, ja daß es sogar zur Bildung intrinsischer Singularitäten kommen muß, die nie nachgewiesen wurden. Alles in allem ist das Problem mathematisch und physikalisch schwer faßbar.

Dieser Nachteil wird in unserem Modell vermieden. Der Grund liegt darin, daß das metrische Wellenfeld den Raum selbst bildet, überall und immer vorhanden und noch dazu isotrop ist. Daher kann es gar nicht zur „Kollision“ zweier Wellen kommen und das Problem ist gar kein echtes. Damit macht auch die Suche nach Gravitations(stoß)wellen keinen Sinn. Und wir können auch eine weitere Aussage von D'INVERNO relativieren. Auf S. 373 schreibt er nämlich: »Obwohl solche Lösungen—als unendlich ausgedehnte Objekte—höchst unphysikalisch sind, so hofft man doch, daß sie einige Eigenschaften realer Wellen von isolierten Quellen in der Fernzone beschreiben...« Nun ist die Ausdehnung zwar nicht unendlich, sondern nur beinahe unendlich. Wenn aber ein Körnchen Wahrheit an diesem Modell ist, so wären solche Wellen dann keinesfalls unphysikalisch.

7.4. Experimentelle Tests

Zu jeder ordentlichen Theorie gehört normalerweise die Überprüfung anhand experimenteller Tests. Nun ist es bei kosmologischen Problemen nicht immer leicht, meist sogar unmöglich, überhaupt Experimente durchzuführen. Somit bleibt am Ende nur der Standard-Set, bestehend aus folgenden Komponenten:

1. Die Periheldrehung des Merkur
2. Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld
3. Die gravitative Rotverschiebung
4. Die Laufzeitverzögerung des Lichts
5. Das Eötvös-Experiment

Diese sind alle ausführlich in [30] beschrieben. Die genaue Überprüfung können wir uns in diesem Fall aber ersparen. Der Grund liegt darin, daß wir in unserem Modell zu Beziehungen bzw. Aussagen gekommen sind, die in der *Näherung* mit denen der klassischen EINSTEINschen Theorie übereinstimmen. Da die Meßergebnisse der oben angeführten Experimente aber teilweise recht ungenau sind, werden wir daher automatisch zu dem Ergebnis kommen, daß unser Modell richtig ist (sein kann), genau wie das klassische EINSTEINsche Modell. Teilweise reicht die Meßgenauigkeit noch nicht einmal dazu aus. Da nur maximal eines von beiden Modellen richtig sein kann (minimal keines), handelt es sich daher um keinen exakten Beweis. Die einzigen Experimente bzw. Messungen, die vielleicht einen Beweis erbringen könnten, wären:

6. *Nachweis und Bestimmung des Wertes der spezifischen Leitfähigkeit des Vakuums durch Messung anhand quantenphysikalischer Effekte (z.B. Supraleitfähigkeit, Verhältnis zwischen Gravitation und starker Wechselwirkung)*

- Status: nicht erfolgt. Erfolgchance: gering, da Wert zu extrem.*
7. *Bestimmung des exakten Wertes der Elektronenladung als Funktion von q_0 aufgrund quantenelektrodynamischer Betrachtungen unter Ansatz der genauen Krümmungs-funktion. Siehe Abschnitt 6.2.2. Das Ergebnis weicht aber immer noch geringfügig ab, möglicherweise müssen die QED-Abweichungen dauerhaft akzeptiert werden.*
 8. *Bestimmung des Wertes des HUBBLE-Parameters anhand lokal meßbarer Größen. Siehe Abschnitt 7.5.*
 9. *Bestimmung des Wertes des des HUBBLE-Parameters anhand der genauen Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung. Siehe Abschnitt 7.5.3.*
 10. *Verifizierung des mit Hilfe dieses Modells berechneten Wertes des HUBBLE-Parameters mit Hilfe genauer astronomischer Messungen. Der im Abschnitt 4.3.4.4.6. bestimmte Wert ist schon recht akzeptabel. Im Abschnitt 7.5.5. wird ein Vergleich mit neueren Meßwerten vorgenommen.*

Vielleicht erfolgt der Nachweis aber auch auf einem ganz anderen Gebiet.

7.5. Beziehungen zwischen dem HUBBLE-Parameter und lokal meßbaren Größen

7.5.1. EDDINGTONS Zahlen und die Einheit der physikalischen Welt

In [32] wurde aus Anlaß des damaligen 100. Geburtstages von A. S. EDDINGTON ein Artikel veröffentlicht, in dem seine Bemühungen gewürdigt wurden, eine einheitlich gebaute Physik zu entwickeln. So ging EDDINGTON davon aus, daß sich „alle Strukturen (und die ihnen entsprechenden Operatoren) auf einen einzigen »Operanden«, nämlich das Universum“ beziehen lassen. Denn aus den Grundkonstanten der Physik lassen sich dimensionslose Zahlen bilden, von denen einige direkt das Verhältnis von Mikro- und Makrokosmos betreffen. Uns interessiert hier vor allem die von ihm angegebene Größe

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_e m_p} \quad (879)$$

Selbstverständlich hatte EDDINGTON seinerzeit ϵ_0 und den Faktor 4π unterschlagen, „da diese ja gleich Eins sind“. Wir setzen es hier aber der Vollständigkeit halber ein, da wir sonst auf ein falsches Ergebnis kommen. Ausdruck (879) gibt das Verhältnis von elektrischer und gravitativer Anziehung zwischen einem Elektron und einem Proton, also bei einem Wasserstoffatom, an. Es handelt sich um eine dimensionslose Zahl mit dem Wert $2,26903 \cdot 10^{39}$ bzw. $2,85135 \cdot 10^{40}$, wenn man den Faktor 4π wegläßt. Nun liegt die Vermutung nahe, daß C irgendwie mit einer dimensionslosen Zahl aus diesem Modell korrespondiert. Anbieten würde sich hier die Güte $Q_0 \approx 7,5419 \cdot 10^{60}$, die gleich dem Phasenwinkel der Wellenfunktion der Metrik und mit dem Bezugssystem identisch ist. Um zu testen, ob eine solche Beziehung möglich ist, gehen wir zunächst wie bei der Untersuchung der Feinstrukturkonstante vor, wir ersetzen die Elektronenladung e durch die Ladung des MLE q_0 , sowie die Elektronenmasse m_e und die Protonenmasse m_p durch die Masse des MLE m_0 unter Anwendung von (29), (31), (36) und (37):

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{q_0^2}{m_0^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \frac{\hbar G}{Z_0 \hbar c} = \frac{1}{4\pi} \quad (880)$$

Genau wie bei der Feinstrukturkonstante erhalten wir auch hier nur den geometrischen Faktor $1/4\pi$ als Ergebnis und wir können daher davon ausgehen, daß C tatsächlich für unsere Zwecke geeignet ist. Da Elektronenladung und –masse in der Näherung bei $Q_0=1$ gleich Ladung und Masse des MLE sind und dieser und C dann ebenfalls gleich Eins sein müßte (in Wirklichkeit ist dies bei $Q_0=2/3$ der Fall), lassen wir den Faktor $1/4\pi$ zukünftig weg und betrachten den Wert

$$C = \frac{1}{\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_e m_p} = 2,85135 \cdot 10^{40} \quad (881)$$

Dieser entspricht in etwa $Q_0^{2/3}$, wie ein Vergleich mit dem astronomischen Wert[] zeigt:

$$C^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_e m_p} \right)^{\frac{3}{2}} = 4,81478 \cdot 10^{60} \quad [7,5419 \cdot 10^{60}] \quad (882)$$

Mit Hilfe von $H = \frac{\omega_0}{Q_0}$ (54) läßt sich nun der HUBBLE-Parameter berechnen:

$$H(C^{\frac{3}{2}}) = 118,885 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad [75,9] \quad (883)$$

Offenbar stimmt der linke Wert nicht mit den astronomischen Beobachtungen überein. Vielleicht gibt es aber einen konstanten Faktor, mit dem wir Ausdruck (882) multiplizieren müssen, um auf ein besser passendes Ergebnis zu kommen. Bei einem konstanten Faktor (wir hatten ja bereits 4π weggelassen) kann der Ausdruck immer noch in der gedachten Art verwendet werden, wenn es sich um einen konstanten Faktor handelt. Bei der Bestimmung von H für den konstante Wellenzahlvektor hatten wir auch festgestellt, daß der HUBBLE-Parameter H_1 für das gesamte Universum ($R/2$) genau $3/2$ mal größer ist wie der lokale Wert H_0 . Versuchen wir es daher mit $2/3$:

$$\frac{3}{2} C^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_e m_p} \right)^{\frac{3}{2}} = 7,222169 \cdot 10^{60} \quad [7,5419 \cdot 10^{60}] \quad (884)$$

$$H_0 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{c^5}{G \hbar}} \left(\frac{\epsilon_0 G m_e m_p}{e^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 79,2566 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1} \quad [75,9] \quad (885)$$

Das Ergebnis stimmt jetzt sehr gut mit dem im Abschnitt 4.3.4.4.6. bestimmten Wert ($75,9 \text{ kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$) überein. Diese Übereinstimmung kann jedoch purer Zufall sein. Wir müssen daher untersuchen, ob die zeitliche Änderung bzw. die Änderung mit Q_0 der in (884) verwendeten Werte konsistent mit der Änderung von H_0 ist. Wir kombinieren daher (884) mit (29) und (54) unter Berücksichtigung der folgenden Abhängigkeiten:

$$H_0 = \frac{2}{3} \omega_0 \left(\frac{\epsilon_0 G m_e m_p}{e^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad Q_0 \sim T^{\frac{1}{2}} \quad H_0 \sim Q_0^{-2} \quad G \sim Q_0^3 \quad \omega_0 \sim \hbar \sim e^2 \sim Q_0^{-1} \quad m_x \sim Q_0^{-\frac{5}{2}} \quad (886)$$

Setzt man nun diese Abhängigkeiten in den linken Ausdruck ein, so erhält man folgendes:

$$H_0 \sim Q_0^{-\frac{5}{2}} \quad \text{Ist nach Ausdruck (886)} \quad H_0 \sim Q_0^{-\frac{4}{2}} \quad \text{Soll wegen} \quad H_0 = \frac{1}{2T} \quad (887)$$

Noch einmal zur Information: T ist das lokale Weltalter, eine Zeitkonstante dieses Modells, und nicht zu verwechseln mit dem Gesamtweltalter $2T$. Wie ist aber nun diese Abweichung zu interpretieren? Am einfachsten wäre, zu argumentieren, daß es sich tatsächlich um einen Zufall handelt, wenn der linke Wert von (885) mit den Beobachtungen übereinstimmt. So einfach wollen wir es uns aber nicht machen. Wenden wir uns daher noch einmal der Vermutung EDDINGTONS, daß sich „alle Strukturen (und die ihnen entsprechenden Operatoren) auf einen einzigen »Operanden«, nämlich das Universum“ (als ganzes) beziehen, zu. Wie wäre es, wenn Ausdruck (886) tatsächlich die Eigenschaften des Universums als ganzem beschreiben würde?

Im Verlaufe dieser Arbeit haben wir die Abhängigkeiten der verschiedensten Größen von Q_0 herausgearbeitet. Und im Abschnitt 4.5.2. hatten wir festgestellt, daß die Expansionsge-

schwindigkeit für Entfernungen größer $0,01R$ nicht durch H_0r , sondern durch H_1R gegeben ist, wobei H je nach Entfernung Werte zwischen $1/(2T)$ und $3/(4T)$ annimmt (330). Für das Universum als ganzes (Entfernung $R/2$) gilt dann $H=3/(4T)$. Dies ergibt sich aus der Forderung, daß für solche Entfernungen die Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor zur Anwendung kommt. Nun erklärt sich auch der überhöhte Wert von (883) und warum wir ihn ausgerechnet mit $3/2$ multiplizieren mußten. Dies allein könnte schon als Augenscheinsbeweis gelten. Weiter gilt aber:

$\frac{r_0}{2} \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Lokale Metrik	$\frac{R}{2} \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Universum als ganzes
$x \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Materielle Körper	$\lambda \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Wellenlängen
$a_0 \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Atomare Abstände	$r_e \sim Q_0^{\frac{3}{2}}$	Elektronenradius

Wie man sieht, expandieren alle Größen außer der lokalen Metrik, die auch die Entfernungen zwischen mittels Gravitation gekoppelter Körper im lokalen Bereich ($<0,01R$) bestimmt, nach derselben Funktion des Universums als ganzem. Dies kann auch nicht anders sein. Würden nämlich wirklich alle Größen einschließlich der lokalen Metrik nach derselben Funktion expandieren, wäre überhaupt keine Expansion feststellbar. Hier zeigt sich eine Schwachstelle aller sogenannten Standardmodelle: Sie arbeiten alle mit einer linearen Metrik (oder sogar mit einem Flickenteppich als Metrik) und bei einer solchen dürfte eigentlich überhaupt keine Expansion nachzuweisen sein. Daher kann das Universum nur über eine nichtlineare Metrik verfügen, wie sie in dieser Arbeit beschrieben ist. Berechnen wir nun die Expansionsgeschwindigkeit sowohl lokal als auch für das Universum insgesamt, so erhalten wir:

$$v = H_0 r = \tilde{H}_0 \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{-\frac{4}{2}} \tilde{r} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{\frac{2}{2}} = \tilde{v} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{-\frac{2}{2}} \sim Q_0^{-1} \sim t^{-2} \quad (888)$$

$$v = H_1 \frac{R}{2} = \tilde{H}_1 \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{-\frac{5}{2}} \frac{\tilde{R}}{2} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{\frac{3}{2}} = \tilde{v} \left(\frac{Q_0}{\tilde{Q}_0} \right)^{-\frac{2}{2}} \sim Q_0^{-1} \sim t^{-2} \quad (889)$$

Es läßt sich zeigen, daß dies für beliebige Entfernungen zwischen $r_0/2$ und $R/2$ gilt. Die Expansionsgeschwindigkeit ändert sich also nach derselben Funktion, egal wie weit das betrachtete Gebiet entfernt ist. Dadurch bleibt die strukturelle Integrität des Universums intakt. Der Widerspruch ist gelöst.

Damit haben wir nachgewiesen, daß Ausdruck (886) nach diesem Modell tatsächlich zur Bestimmung sowohl von H_1 (Universum als ganzes) als auch von H_0 geeignet ist, wobei letzterer Wert immer $2/3$ von H_1 beträgt.

Müssen wir uns Sorgen um unser Metermaß machen? Die Antwort lautet Nein. Da das Meter derzeit anhand der Lichtgeschwindigkeit und einem an atomaren Maßstäben orientierten Zeitnormal definiert ist und diese alle dem Universum als ganzem folgen, gilt dasselbe auch für das Metermaß. Es soll aber immer noch Spezialisten geben, die mit Meilen rechnen...

Nun haben wir eine Möglichkeit gefunden, H_0 mit Hilfe lokal meßbarer Größen zu bestimmen. Diese basiert auf dem Wasserstoffatom. Die Frage ist, gibt es noch eine zweite? In der Tat. Aus (888) kann man entnehmen, daß sich die Elementarlänge r_0 und der Elektronenradius r_e nach unterschiedlichen Funktionen von Q_0 ändern. Damit müßte sich Q_0 ebenfalls bestimmen lassen und damit auch H_0 . Unter Anwendung von (3), (27) und (687) gilt:

$$\frac{3 r_e^3}{2 r_0^3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{e^2 Z_0}{m_e} \sqrt{\frac{c}{G\hbar}} \right)^3 = 7,95178 \cdot 10^{60} \quad [7,5419 \cdot 10^{60}] \quad (890)$$

Dies wiederum entspricht einem Wert von H_0 :

$$H_0 = \frac{2}{3} \frac{32\pi^2 \epsilon_0 G h m_e^3}{\mu_0^2 e^6} = 71,9845 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad [75,9] \quad (891)$$

Dieser Wert basiert nur auf dem Elektron und der Metrik und ist proportional $Q_0^{-5/2}$. Damit ist auch er zur Bestimmung von Q_0 und H_0 geeignet. Interessanterweise weicht der soeben ermittelte Wert von dem ersten ab und zwar um 10,102%, was dem mittleren QED-Korrekturfaktor entspricht. Offensichtlich treten hier wieder die üblichen QED-spezifischen Ungenauigkeiten auf, die sich aus der logarithmischen Periodizität des Universums ergeben.

Auch dieser Wert paßt zu dem in dieser Arbeit mit Hilfe der Ausbreitungsfunktion—diese ist kompatibel mit der Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor—bestimmten Wert und läßt sich auch mit den astronomischen Meßwerten im nächsten Abschnitt vereinbaren. Auch wenn wir zwei voneinander abweichende Ergebnisse erhalten haben, können wir H_0 jetzt schon genauer angeben als die Astronomen. Aber das ist noch nicht genug. Wenn wir beide Werte, der erste liegt bei etwa 10^{40} , r_e/r_0 bei etwa 10^{20} , kombinieren, kommen wir auf eine besonders einfache Beziehung:

$$Q_0 = \frac{3 r_e}{2 r_0} \frac{1}{\epsilon_0 G} \frac{e^2}{m_e m_p} \quad \text{mit} \quad r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, \quad \frac{1}{r_0} = \sqrt{\frac{c^3}{G\hbar}} \quad (892)$$

$$Q_0 = \frac{3}{8\pi} \frac{e^4}{\epsilon_0^2 m_e^2 m_p} \frac{1}{\sqrt{G^3 \hbar c}} \quad \text{mit} \quad H_0 = \frac{\omega_0}{Q_0} = \frac{1}{Q_0} \sqrt{\frac{c^5}{G\hbar}} \quad (893)$$

$$H_0 = \frac{8}{3} \pi \frac{G}{\mu_0 Z_0} \frac{m_e^2 m_p}{e^4} = 76,7544 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad [75,9] \quad (894)$$

$$H_1 = 4\pi \frac{G}{\mu_0 Z_0} \frac{m_e^2 m_p}{e^4} = 115,132 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (895)$$

Hier wurde sogar der Faktor 4π berücksichtigt, den wir in (881) weggelassen hatten. Die Ausdrücke sind wieder proportional $Q_0^{-5/2}$ und enthalten überraschenderweise nicht das PLANCKsche Wirkungsquantum (keine QED-Abweichung?). Im Zähler befinden sich nur mechanische, im Nenner nur elektrische Größen. Der Geltungsbereich liegt bei $Q_0 \geq 10^3$, also ab der Zeit kurz nach dem Urknall. Da die Ausdrücke außerdem eine Art Mittelwert zwischen den beiden anderen Beziehungen bilden und gleichzeitig die Verhältnisse im Atom und im Vakuum berücksichtigt sind, würde ich sie als exakt bezeichnen. Ob das stimmt, werden wir sehen. Zum Vergleich noch einmal alle drei Resultate in Tabellenform:

Ausdruck	Q_0	H_0	H_0	H_1	H_1	QED		V
	[1]	[s ⁻¹]	[kms ⁻¹ Mpc ⁻¹]	[s ⁻¹]	[kms ⁻¹ Mpc ⁻¹]	Korrekturfaktor	?	
(884)	$7,2222 \cdot 10^{60}$	$2,569 \cdot 10^{-18}$	79,257	$3,853 \cdot 10^{-18}$	118,885	1,10102	ξ^3	$\bar{\gamma}$
(892)	$7,4576 \cdot 10^{60}$	$2,487 \cdot 10^{-18}$	76,544	$3,731 \cdot 10^{-18}$	115,132	1,06626	ξ^2	H
(890)	$7,9518 \cdot 10^{60}$	$2,333 \cdot 10^{-18}$	71,985	$3,499 \cdot 10^{-18}$	107,977	1,00000	ξ^0	γ

Tabelle 7
HUBBLE-Parameter als Funktion
lokaler Größen (Übersicht)

7.5.2. Entfernungsvektoren

Durch die in jüngster Zeit erfolgten Fortschritte auf technischem Gebiet gelingt es den Astronomen, immer weiter ins Universum zu schauen und damit auch immer weiter zurück in

Abstand (r_K blau dargestellt). Damit ergibt sich auch die Definition der *raumartigen Entfernung* (r_R grün dargestellt). Diese ist der kürzeste Weg zwischen dem Beobachter oder besser dem Reisenden und dem Objekt. Sie ist eine gedachte Linie und fällt zusammen mit der Koordinate r des Koordinatensystems. Lokal ist sie gleich dem raumartigen Vektor der Metrik.

Auf diesem Weg kann das Ziel aber nicht im freien Fall erreicht werden, wie eine Analogie aus der Seefahrt nahelegt—der Unterschied zwischen Breitenkreis- und Großkreisentfernung. Wenn Start und Ziel auf gleicher Breite liegen und wenn dies nicht gerade der Äquator ist, ist die Großkreisentfernung immer kleiner als die Breitenkreisentfernung. Bei der Großkreisnavigation muß der Kapitän aber ständig den Kurs ändern, also beschleunigen, während er auf dem Breitenkreis theoretisch ohne Beschleunigung, also im freien Fall weiterfahren könnte, wenn der Wasserwiderstand gleich Null wäre. Der Reisende hat damit die Möglichkeit, die Entfernung zu beeinflussen und zwar mittels Navigation. Zur besseren Übersicht noch einmal die Definitionen:

1. Der *Nullvektor* r_N ist der Weg, den ein Lichtstrahl zurücklegt, wobei die Geschwindigkeit gegenüber dem Subraum konstant c beträgt. Im lokalen Bereich ist er gleich der geometrischen Summe aus raumartigem und zeitartigem Vektor.
2. Die *zeitartige Entfernung* r_T ist der Weg, den ein Lichtstrahl, ausgehend von der Quelle, zurückgelegt hat, wenn er beim Beobachter angekommen ist. Im lokalen Bereich entspricht sie dem zeitartigen Vektor der Metrik. Beobachtet wird jedoch eigentlich der Nullvektor r_N .
3. Der *Abstand* r_K ist die Entfernung zwischen zwei Objekten im freien Fall. Der Vektor verläuft entlang der Feldlinien des Gravitationsfelds und ändert sich gemäß der Abstandsfunktion bei konstantem Wellenzahlvektor. Er korrespondiert mit dem Nullvektor r_N der Metrik.
4. Die *raumartige Entfernung* r_R ist der kürzeste Vektor zwischen einem Reisenden und seinem Ziel. Es handelt sich um eine gedachte Linie. Sie ist identisch mit der Koordinate r des Koordinatensystems. Im lokalen Bereich entspricht sie dem raumartigen Vektor der Metrik. Will man entlang dieser Linie reisen, ist dauernde Navigation (Beschleunigung) erforderlich.

Kommen wir aber noch einmal auf die *zeitartige Entfernung* zu sprechen. Dies ist die Entfernung, die der Astronom bestimmt, wenn er die eingehenden Licht- bzw. Radiosignale (Nullvektoren) analysiert. Sie unterliegen einer Rotverschiebung gemäß der Ausbreitungsfunktion aus Abschnitt 4.3.5.4.3. bzw. 5.3.2. Die *zeitartige Entfernung* ist beschränkt auf die maximale *zeitartige Entfernung*, die sich aus dem Gesamtweltalter $2T$ ergibt. Es gilt $r_{T\max} = R = 2cT$. Im Verlaufe der Arbeit hatten wir festgestellt, daß die maximale *raumartige Entfernung* nur die Hälfte davon beträgt: $r_{R\max} = R/2 = cT$. Weiterhin hatten wir dargestellt, daß es uns aufgrund der Bemühungen von EINSTEIN möglich ist, beide Entfernungen ineinander umzurechnen und zwar gemäß (280):

$$r_T = -\frac{r_R}{\sqrt{1 - \frac{4r_R^2}{R^2}}} \qquad r_R = -\frac{r_T}{\sqrt{1 + \frac{4r_T^2}{R^2}}} \qquad (280)$$

Betrachtet man sich nun die beiden Ausdrücke, so erkennt man, daß diese am „Rande“ des Universums versagen. Der linke Ausdruck ergibt eine negative unendliche *zeitartige Entfernung* für $R/2$, der rechte Ausdruck eine *raumartige Entfernung* von $0,447214R = 0,894427cT$ für $-R/2$. Eigentlich sollte sich aber ein Wert von $0,5R = cT$ ergeben. Im Abschnitt 4.3.5.3 wiederum hatten wir festgestellt, daß die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds zum Zeitpunkt $0,748514 t_1$ auch nur bei $0,851661c$ liegt und nicht bei c . Damit hätte die maximale *raumartige Entfernung* eigentlich auch nur einen Wert von $0,851661cT$ und nicht $0,894427cT$ bzw. cT . Sind die EINSTEINSchen Ausdrücke deswegen nutzlos? Ich sage nein.

Der Grund für die Abweichung liegt darin, daß der „Rand“ des Universums nicht einfach ein Rand ist, sondern der Natur nach ein SCHWARZSCHILD-Radius und dahinter befindet sich eine Singularität. Wie wir im Abschnitt 4.3.5.3. festgestellt hatten, beträgt die maximale Ausbrei-

tungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds in der Tat $0,851661c$ und zwar zum Zeitpunkt $0,748514t_1$. Gleichzeitig hatten wir festgestellt, daß das metrische Wellenfeld davor auch schon existierte und sich mit einer geringeren Geschwindigkeit ausgebreitet hatte. Was ist eigentlich mit diesem Teil des Universums geschehen? Es müßte auf jeden Fall von dem späteren, sich schneller ausbreitenden Anteil irgendwie „überholt“ worden sein.

Andererseits wissen wir, daß die physikalischen Verhältnisse in diesem Teil von denen des anderen abweichen und zwar dahingehend, daß der ältere Anteil räumlich geschlossen, der jüngere räumlich offen ist ($Q_0 > 1$). Das bedeutet, der Teil des Universums, in dem wir uns befinden, ist nicht das ganze Universum. Es gibt einen kleinen Teil, der für uns weder zugänglich, noch beobachtbar ist. In Anlehnung an eine bekannte SF-Serie möchte ich diesen daher als Hyperraum bezeichnen. Im Bild 141 habe ich einmal versucht, darzustellen, wie sich die Verhältnisse am „Rande“ des Universums darstellen.

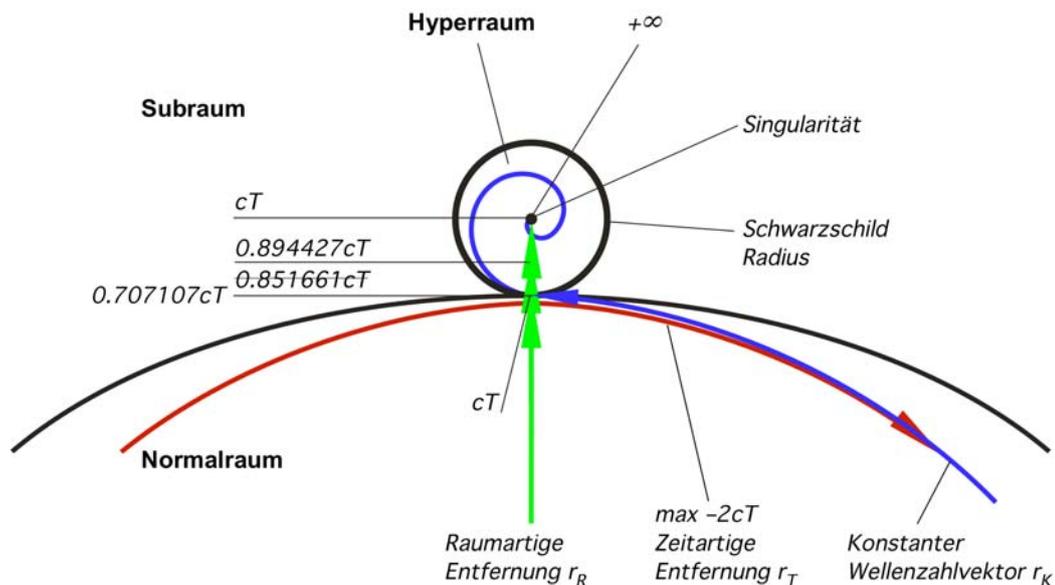


Bild 141
Verhältnisse am Rande des Universums

Beim zeitartigen Vektor ist folgendes zu beachten: Dieser kann sowohl ein eingehender (negative Entfernung), als auch ein ausgehender Vektor (positive Entfernung) sein. Ein Beobachter hat es immer mit einem eingehenden Vektor zu tun, dessen Länge auf $-2cT$ beschränkt ist. Das Licht hat dann das gesamte Universum durchgemessen und ist wieder an seinem Ausgangspunkt, einer raumartigen Singularität (Ereignishorizont) angekommen. Der am weitesten entfernte Ausgangspunkt eines eingehenden zeitartigen Vektors befindet sich im Anstand $-cT$. Die maximale Länge eines ausgehenden zeitartigen Vektors dagegen ist unbeschränkt, da er in die Zukunft verweist. Er unterliegt allerdings ebenfalls der parametrischen Dämpfung. Man kann keine Signale zurück in der Zeit aussenden.

Aus diesem Grund kann man mit dem Fernrohr auch niemals gleichzeitig bis zum Zeitpunkt $-T$ (von heute gerechnet) und bis zu einer Entfernung $-R/2$ zurückschauen, denn die älteren Signale haben uns schon längst passiert. Was wir sehen, sind alles jüngere Signale, maximal halb so alt wie das Universum. Räumlich können wir damit bis zum „Rand“ $-cT$ zurücksehen, zeitlich nicht (siehe auch Bild 69). Eine Ausnahme bilden die Signale direkt vom Urknall $-2T$. Diese haben ihren Ausgangspunkt wieder erreicht und sind als kosmische Hintergrundstrahlung zu beobachten, allerdings mit extremer Rotverschiebung. Bei dem Bild, das diese erzeugen handelt es sich damit tatsächlich um die Sicht vom Punkt des Beobachters zum Zeitpunkt $-2T$, allerdings seitenverkehrt in allen vier Dimensionen (aus einem ausgehenden zeitartigen Vektor wird ein eingehender). Der Bereich zwischen $-2T$ und $-T$ ist zwar auch zugänglich, jedoch stammen diese Signale aus Bereichen am entgegengesetzten Ende, mit einem geringeren Abstand als $-R/2$, wobei uns das Signal „hinterherum“ auf einem Umweg erreicht. Hierbei gilt, je älter das Signal, umso näher die Quelle.

Bezüglich der raumartigen Vektoren befindet sich ein Beobachter im freien Fall auf einer raumartigen Singularität, auch wenn er nichts davon merkt. Dies äußert sich dahingehend, daß für ihn keine negativen Entfernungen definiert sind. Als Vergleich mag hier der Nordpol

herhalten. Wenn man sich auf diesem befindet, führen alle Wege nach Süden, der einzelne merkt aber nichts davon. Die maximal mögliche räumliche Entfernung wäre damit $-cT$. Damit wären zeitartige Vektoren aus der Vergangenheit und raumartige Vektoren in etwa gleich lang.

Dahingehend ist das Ergebnis des linken Ausdrucks von (280), das wir für eine *zeitartige Entfernung* von $-cT$ erhalten, nämlich $-\infty$, eigentlich nicht falsch. Da dieser Abstand direkt an einen SCHWARZSCHILD-Radius grenzt, kann uns von dort kein Licht erreichen. Allerdings ergibt der Ausdruck ein falsches Ergebnis für eine Entfernung von $-0,851661 cT$. Und genauso verhält es sich mit dem rechten Ausdruck von (280).

Beide Ausdrücke sind damit nur bedingt für die Berechnung von Problemen, die das Universum als ganzes betreffen, geeignet. Dennoch reichen sie für die Berechnung astronomischer Daten vollkommen aus, da bisher nur Objekte mit einem Bruchteil des Abstands $-cT$ beobachtet werden können. Für weitergehende Betrachtungen benötigen wir aber den korrekten Ausdruck, der sich aus Abschnitt 6.1.2.1.2. ergibt:

$$r_T = \frac{r_R}{\frac{2r_R}{R} \cos\alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{2r_R}{R}\right)^2 \sin^2\alpha}} \quad r_R = -\frac{r_T}{\sqrt{1 + \left(\frac{2r_T}{R}\right)^2 - \frac{4r_T}{R} \cos\alpha}} \quad (896)$$

Der Winkel α ist gegeben durch (482) in Verbindung mit (206). Die Ausdrücke sollen hier nicht noch einmal dargestellt werden aber der Verlauf als Funktion von Q_0 .

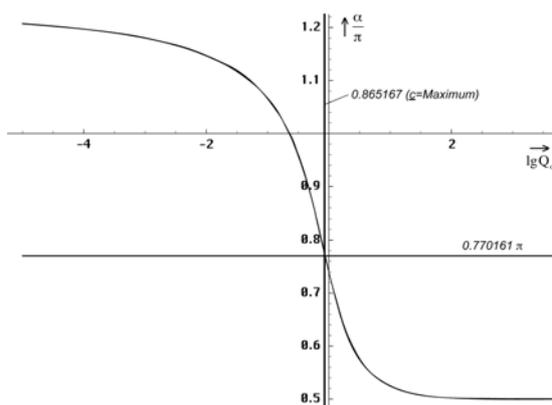


Bild 142
Winkel α als Funktion von Q_0

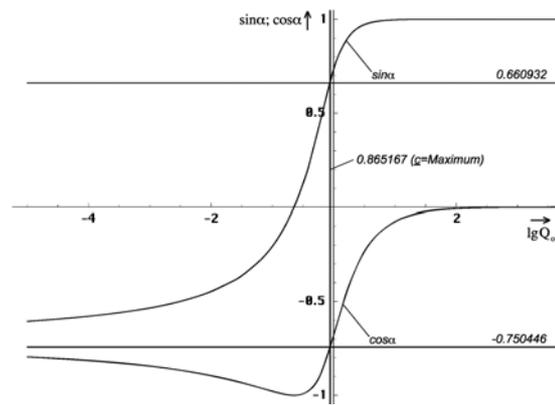


Bild 143
Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Funktion von Q_0

Wie man sieht, sind beide Winkelfunktionen ab einem Wert von $Q_0 > 10^2$ gleich Eins bzw. Null, so daß (896) mit (280) zusammenfällt. Dieser Wert wird aber erst fast direkt am SCHWARZSCHILD-Radius unterschritten, so daß (280) als Näherung beinahe für das gesamte Universum verwendet werden kann. Für den Punkt mit der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit, die sogenannte Wellenfront erhalten wir mit Hilfe von (53) einen Wert $Q_0 = 0,865167$ und für $\alpha = 2,41953$. Er liegt damit innerhalb des SCHWARZSCHILD-Radius ($Q_0 = 1$) und kann nicht beobachtet werden.

Für einen Winkel $\alpha = \pi/2$ in Ausdruck (896) rechts erhalten wir für die *raumartige Entfernung* einen Wert $r_R(-cT) = cT/\sqrt{2}$, wie im Bild 141 dargestellt. Dieser Wert ist allerdings etwas niedriger, als die maximal mögliche *raumartige Entfernung* $r_{Rmax} = 0,851661 cT$, was darauf hindeutet, daß sich die Wellenfront auf einer gekrümmten Bahn bewegt bzw. bewegt hat. Der Wert für r_T , den wir eingesetzt haben ist jedoch nicht exakt und gilt nur „fast am Rand“. Direkt am SCHWARZSCHILD-Radius gilt $Q_0 = 1$ und der Winkel α hat einen anderen Wert. Das genaue Verhalten der Entfernungsvektoren ist im Bild 144 und 145 dargestellt.

Wie sieht es nun aber mit dem *Abstand bei konstantem Wellenzahlvektor* aus? Aus Bild 140 geht hervor, daß dieser bei kleinen Entfernungen (annähernd) gleich den anderen beiden

Vektoren sein muß. Direkt am SCHWARZSCHILD-Radius sollte er nach unserem Modell genau cT betragen. Wenn wir nach einer Umrechnungsfunktion suchen, zeigt sich, daß (280), die wir beinahe schon verwerfen wollten, dafür hervorragend geeignet ist, jedoch mit r_K anstatt r_T :

$$r_K = \frac{r_R}{\sqrt{1 - \frac{4r_R^2}{R^2}}} \quad r_R = \frac{r_K}{\sqrt{1 + \frac{4r_K^2}{R^2}}} \quad (897)$$

Beide Ausdrücke sind nur positiv definiert und gelten sogar exakt. Für r_K und r_T gilt:

$$r_T = -r_K \left(\frac{2r_K}{R} \cos \alpha + \sqrt{1 + \left(\frac{2r_K}{R} \right)^2 \cos^2 \alpha} \right) \quad r_T = -r_K \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (898)$$

$$r_K = -\frac{r_T}{\sqrt{1 - \frac{4r_T}{R} \cos \alpha}} \quad r_K = -r_T \quad \text{für} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \quad (899)$$

Wenn der Winkel $\alpha \approx \pi/2$ ist, also fast im gesamten Universum, fällt der konstante Wellenzahlvektor mit dem (negativen) zeitartigen Entfernungsvektor zusammen. Daher erscheint es auch, daß sich mit den klassischen Beziehungen der SRT eine Umrechnung von raumartigen in zeitartige Koordinaten vornehmen läßt. Die SRT beschreibt ja nichts anderes als Beobachtungsphänomene von bewegten Körpern mittels Photonen. Gleichzeitig sehen wir hier aber auch, warum die SRT bei starken Gravitationsfeldern (z.B. schwarzen Löchern) und damit auch am Rande des Universums versagt, denn hier klaffen die Vektoren auseinander und zwar alle.

Und noch etwas erkennt man: Durch das Zusammenfallen des konstanten Wellenzahlvektors mit dem zeitartigen Entfernungsvektor breitet sich natürlich auch die Gravitation auf demselben Weg aus wie die Photonen, nämlich als Nullvektor, d. h. mit Lichtgeschwindigkeit. Anders wäre auch kein echtes R^4 -Koordinatensystem möglich. Damit haben wir eine widerspruchsfreie Lösung gefunden. Unsere Vermutung (897) war richtig. Im Nahbereich und auch noch weit darüber hinaus fallen sogar alle drei Vektoren zusammen. Bei 400 Mpc Entfernung z.B. liegt die Abweichung zwischen r_R und r_T nur bei 2% und damit weit unter dem Beobachtungsfehler.

Wir wollen jetzt versuchen, darzustellen, wie sich die drei Entfernungsvektoren im allgemeinen und speziell am „Rand“ des Universums verhalten. Aus Gründen der Erkennbarkeit wollen wir die Entfernungsgrößen als Funktion der Güte Q_0 darstellen. Dazu benötigen wir allerdings eine Funktion, mit der sich die *raumartige Entfernung* als Funktion der Güte berechnen läßt. Die umgekehrte Funktion $Q_0(r_K)$ hatten wir ja bereits mit (606) gefunden (Alle bisher in dieser Arbeit vorkommen Funktionen basieren immer auf $r=r_K$). Wenn wir die Zeit t vernachlässigen, gilt:

$$Q_0 = \tilde{Q}_0 \left(1 - \left(\frac{2\tilde{r}_K}{\tilde{R}} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad Q_0 = \tilde{Q}_0 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{4\tilde{r}_R^2}{\tilde{R}^2 - 4\tilde{r}_R^2}} \right) \quad (900)$$

$$\tilde{r}_R = \frac{\tilde{R}}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{Q}_0}{\tilde{Q}_0 - Q_0} \right)^3}} \quad \tilde{Q}_0 \gg 1 \quad (901)$$

Eingesetzt in (896) und (897) unter Berücksichtigung des Winkels α nach (482) und (206) mit $2\omega_0 t = Q_0$ erhalten wir den im Bild 144 und 145 dargestellten Verlauf.

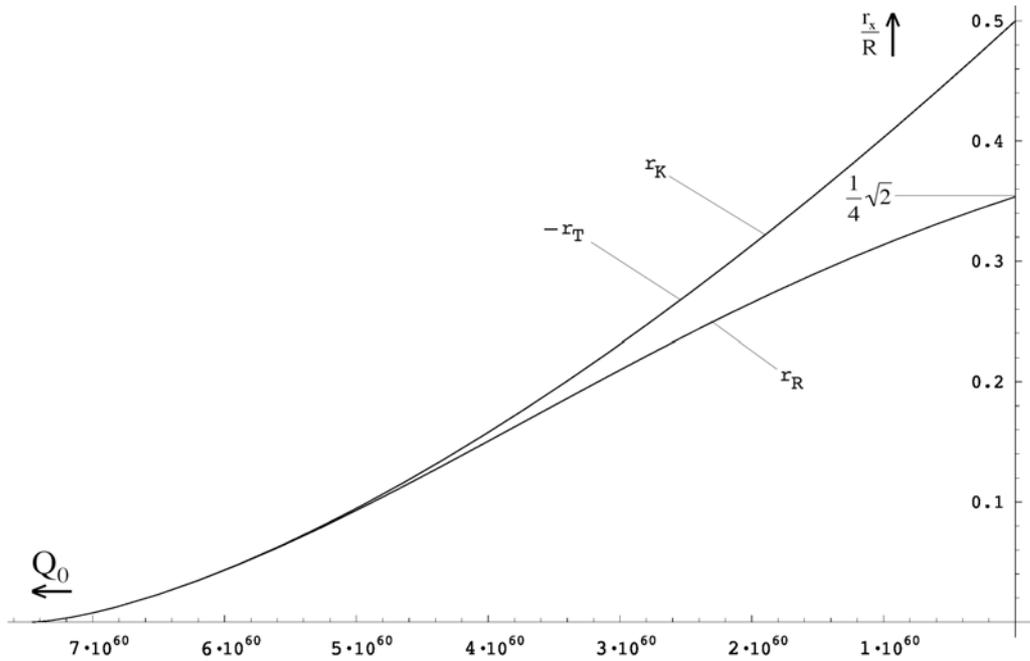


Bild 144
Länge der Entfernungsvektoren r_R , r_K und r_T als Funktion des Phasenwinkels (Güte Q_0) am Ort der Signalquelle

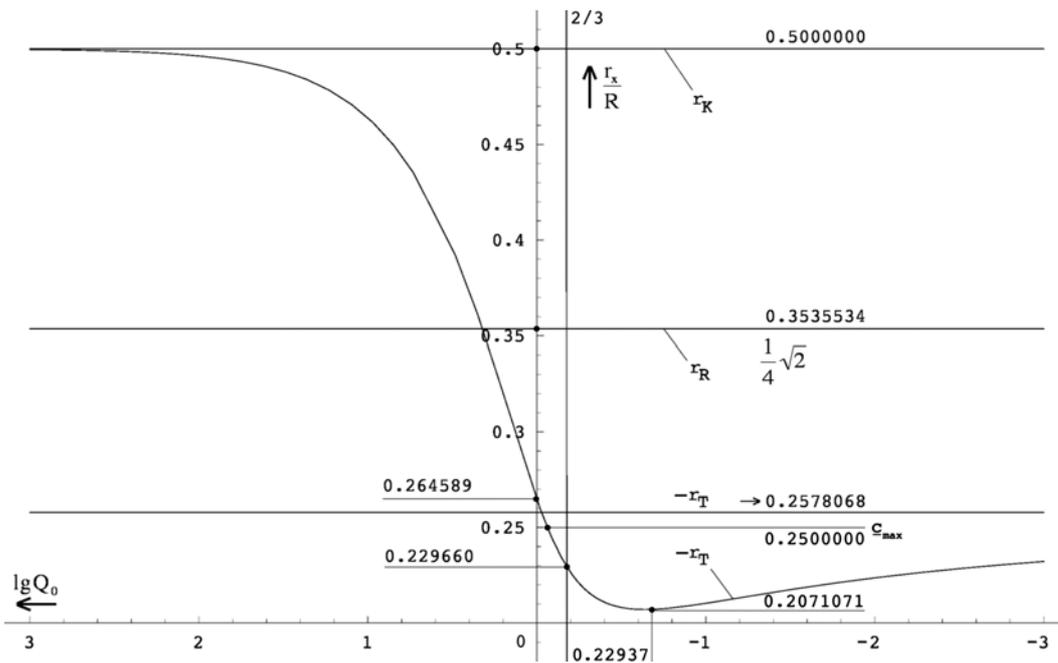


Bild 145
Verlauf der Entfernungsvektoren r_R , r_K und r_T am SCHWARZSCHILD-Radius ($Q_0=10^0$)

Während alle Vektoren im großen Maßstab genau so verlaufen, wie erwartet, weicht der zeitartige Vektor kurz vor dem SCHWARZSCHILD-Radius ab und nimmt einen anderen Verlauf. Interessanterweise wird nur der zeitartige Vektor durch die Singularität beeinflusst. Dies ist auch kein Wunder, handelt es sich doch um eine zeitliche Singularität (keine Werte $t < 0$ definiert). Hierbei ist zu beachten, daß es sich beim Licht eigentlich um einen Nullvektor handelt und dieser verfügt sowohl über einen raumartigen, als auch über einen zeitartigen Anteil. Wenn nur der zeitartige Vektor beeinflusst wird, bedeutet dies, daß sich zwar die Wellenlänge ändert, nicht aber die Ausbreitungsgeschwindigkeit c , ein bekanntes Phänomen. Der Nullvektor hat aber eigentlich nur gegenüber dem Subraum den Wert c . Daher mißt ein

Beobachter, der sich nicht gegenüber der Metrik bewegt (freier Fall), immer den zeitartigen Vektor. Die Differenz ist jedoch unter Normalbedingungen (Q_0) gar nicht meßbar, da sie viel zu gering ist.

Am SCHWARZSCHILD-Radius verkürzt sich die zeitartige Entfernung lokal auf $-0,264589R$ und sinkt auf $-0,25R$ im Punkt der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik, der Wellenfront. Dieser Punkt ist gleichzeitig ein Wendepunkt. Schließlich erreicht r_T ein Minimum von $-0,2071071R$, steigt dann wieder an und strebt gegen einen Wert von $-0,2578068R$. Auch nach der SRT müßte es an einer Singularität zu einer Verkürzung kommen, jedoch unbegrenzt bis auf einen Wert von Null. Allerdings hatte EINSTEIN seinerzeit nicht damit gerechnet, daß sich der rechte Winkel α ändern könnte. Das gleiche Verhalten wie im Abstand $R/2$ wäre auch am SCHWARZSCHILD-Radius eines schwarzen Lochs zu beobachten, wenn man dort Messungen vornehmen könnte.

7.5.3. Bestimmung des Hubble-Parameters mit Hilfe der Temperatur der CMBR

Im Abschnitt 4.6.4.2.6. hatten wir ja mit (405) bereits eine Beziehung zwischen dem Phasenwinkel/Güte der Metrik Q_0 und der daraus resultierenden Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung aufgestellt. Mit dem im Abschnitt 4.3.5.4.6. astronomisch bestimmten Wert des HUBBLE-Parameters von $75,9 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$ und dem daraus resultierenden Wert $Q_0 = 7,5419 \cdot 10^{60}$ ergibt sich eine Temperatur von $3,0477\text{K}$ für die kosmische Hintergrundstrahlung. Da ich zuerst mit einer Näherung von $2\sqrt{2}$ für den Proportionalitätsfaktor des WIENSchen Verschiebungsgesetzes gearbeitet hatte und aufgrund von Rundungsfehlern basieren alle Darstellungen und Berechnungen ab Abschnitt 4.6.4.2.3. allerdings auf einer Temperatur von $3,03256\text{K}$. Dies entspräche einem Wert von $H_0 = 75,14 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$, liegt innerhalb der Toleranz von H_0 und fällt in der Grafik nicht auf. Daher habe ich es bei dem Wert $3,03256\text{K}$ belassen, bis zu diesem Abschnitt.

Interessanterweise stimmt dieser Wert recht gut mit dem bereits 1896 von GUILLAUME und EDDINGTON vorhergesagten Wert von $3,18\text{K}$ ($=82,63 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$) überein. Beide gingen damals davon aus, daß sich (umgerechnet) im Durchschnitt in der 10pc -Umgebung eines Sterns 2000 Sterne mit der Magnitude 1^m befinden. Die von diesen Sternen emittierte Energie führt im Endergebnis zu einer Energiedichte, die einer Strahlungstemperatur von $3,18\text{K}$ entspricht. Einzelheiten können in [39] nachgelesen werden.

Allerdings enthielt die Berechnung einen wesentlichen Fehler. Man ging seinerzeit davon aus, daß die angenommene mittlere Sterndichte überall im ganzen Universum vorhanden sein sollte, da die Existenz externer Galaxien erst 1924 allgemein akzeptiert bzw. bekannt war.

Glücklicherweise sind wir heute in einer besseren Lage. So müssen wir die Strahlungstemperatur nicht mehr berechnen, sondern können sie ganz genau messen. Die mit Hilfe des COBE-Satelliten bestimmte mittlere Strahlungstemperatur liegt bei $2,7250 \pm 0,002\text{K}$ (Wikipedia). Nun ist es natürlich kein Problem, durch Umstellen von (405) die dazugehörigen Werte Q_0 und H_0 zu bestimmen. Dabei ist allerdings zu beachten, daß weder ω_1 noch \hbar_1 durch lokal meßbare Größen genau definiert sind. Vielmehr hängen sie selbst von Q_0 bzw. H_0 ab, den Werten, die wir eigentlich bestimmen wollen. Wir kennen jedoch die Werte \hbar und ω_0 . Es gilt $\omega_1 = Q_0 \omega_0$ und $\hbar_1 = Q_0 \hbar$:

$$T_k = \frac{1}{2,821439372} \frac{\hbar_1 \omega_1}{6k} Q_0^{-\frac{5}{2}} = 0,0590715038 \frac{\hbar \omega_0}{k} Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad \omega_1 = \frac{\kappa_0}{\varepsilon_0} \quad (902)$$

$$Q_0 = 2,009918917 \left(\frac{\hbar \omega_1}{24kT_k} \right)^2 \approx 2 \left(\frac{\hbar \omega_1}{24kT_k} \right)^2 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c^5}{G\hbar}} \quad (903)$$

$$Q_0 = 0,0034894426 \left(\frac{\hbar \omega_1}{kT_k} \right)^2 \approx \frac{1}{286,6} \left(\frac{\hbar \omega_1}{kT_k} \right)^2 \quad H_0 = \frac{\omega_0}{Q_0} \quad (904)$$

$$H_0 = 0,497532508 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{24kT_k} \right)^{-2} \quad H_0 = 286,579 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{kT_k} \right)^{-2} \quad (905)$$

Die Näherungsformeln mit $24kT_k$ basieren auf der Näherung $2\sqrt{2}$ für den Proportionalitätsfaktor des WIENSchen Verschiebungsgesetzes. Setzen wir nun obengenannten gemessenen Wert $2,7250\text{K}$ ein, so erhalten wir für Q_0 einen Wert von $9,4340 \cdot 10^{60}$, dies entspricht einem Wert $H_0 = 60,675 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Dieser Wert entspricht am ehesten unserer Lösung (890), ist aber etwas zu niedrig, da neueste Untersuchungen ergeben haben, daß H_0 irgendwo zwischen 71 und $75 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ liegt (FREEDMAN, KIENZLER 72). Es kann aber sein, daß die CMBR-Temperatur, aus welchen Gründen auch immer, einfach nur niedriger ist, als sie eigentlich sein sollte. Möglicherweise gibt es ja neben der Expansion und der kosmologischen Rotverschiebung noch andere Effekte, die zu einer zusätzlichen Abkühlung führen. Als eine Möglichkeit soll hier nur [40.1] angeführt werden. Eine weitere Ursache für die Abweichung könnten die Nichtlinearitäten kurz nach der Einkopplung sein (siehe Abschnitt 5.3.1).

Wert	Q_0	H_0	H_0	Temperatur CMBR	Absolute Abweichung	Relative Abweichung
	[1]	[s ⁻¹]	[kms ⁻¹ Mpc ⁻¹]	[K]	[K]	[%]
(884)	$7,2222 \cdot 10^{60}$	$2,569 \cdot 10^{-18}$	79,257	3,1145	+0,1463	+4,929
(892)	$7,4576 \cdot 10^{60}$	$2,487 \cdot 10^{-18}$	76,544	3,0649	+0,0968	+3,260
(TAB1)	$7,5419 \cdot 10^{60}$	$2,460 \cdot 10^{-18}$	75,900	3,0477	+0,0796	+2,681
(890)	$7,9518 \cdot 10^{60}$	$2,333 \cdot 10^{-18}$	71,985	2,9681	$\pm 0,0000$	$\pm 0,000$
(COBE)	$9,4340 \cdot 10^{60}$	$1,966 \cdot 10^{-18}$	60,675	2,7250	-0,2431	-8,232

Tabelle 8
Berechnete und gemessene CMBR-Temperatur im Vergleich mit den im Abschnitt 7.5.1. bestimmten Werten des HUBBLE-Parameters

Zum Schluß wollen wir feststellen, wie groß denn die Abweichung von unserer berechneten Temperatur (890) tatsächlich ist. Wenn wir (890) in (902) einsetzen, erhalten wir eine Solltemperatur von $2,96813\text{K}$. Die gemessene Temperatur ist damit um $0,243129\text{K}$ niedriger als die berechnete. Für die Lösung (892) wäre eine Temperatur von $3,0649\text{K}$ erforderlich, für (884) gar $3,1145\text{K}$, was beide als weniger real erscheinen läßt. Wir können daher davon ausgehen, daß Lösung (890) mit $71,985 \text{kms}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ am wahrscheinlichsten ist.

In Tabelle 8 sind noch einmal alle Werte, auch die in früheren Abschnitten verwendeten, zusammengefaßt. Die Antwort auf die Frage, warum die gemessene Temperatur der CMBR um $0,243129\text{K}$ kleiner ist als berechnet, bleibt am Ende offen. Ein Delta von nur $0,243129\text{K}$ bei dieser großen Zeitspanne und einer so hohen Ausgangstemperatur kann aber bereits als voller Erfolg gewertet werden. Man kann daher sagen, das Modell sagt die Temperatur ziemlich genau voraus. Für die Bestimmung des genauen Wertes des HUBBLE-Parameters ist dieses Verfahren aber nicht geeignet.

7.5.4. Das Supernova-Kosmologie-Projekt

Eine weitere Möglichkeit, zu bestimmen, welche der drei Lösungen die richtige ist, ist der Vergleich mit neuesten astronomischen Beobachtungen. Das wichtigste Projekt in letzter Zeit war das Supernova-Kosmologie-Projekt. Beobachtet wurde eine Reihe von Typ Ia Supernovae, die über die besondere Eigenschaft verfügen, alle in etwa die gleiche Helligkeit zu haben, so daß sie als Standardkerze benutzt werden können. Ziel der Untersuchungen [45] war die Bestimmung des HUBBLE-Parameters und natürlich, festzustellen, welches der bis heute aufgestellten Weltmodelle der Wirklichkeit am nächsten kommt. Die Untersuchung hat allerdings mehr Verwirrung gestiftet, als daß sie zu vernünftigen Ergebnissen geführt hat, wie

wir noch sehen werden. Grund ist jedoch nicht die Untersuchung selbst, sondern das Fehlen eines korrekten Weltmodells, wie ich es mit dieser Arbeit zu schaffen beabsichtige.

Bevor wir weiter in die Einzelheiten gehen, zuerst noch ein Abschnitt, der sich mit den Grundgrößen der Beobachtung befaßt und an Physiker, Astronomen und Techniker gerichtet ist, die bekanntermaßen mit unterschiedlichen Maßeinheiten arbeiten und daher einander schwer verstehen können.

7.5.4.1. Meßgrößen und Umrechnungen

Da wir uns nur mit einem konkreten Projekt befassen wollen, sollen nur die Größen erläutert werden, die speziell für das Supernova-Kosmologie-Projekt relevant sind. In Wirklichkeit gibt es in Physik, Astronomie und Radioastronomie noch eine große Anzahl weiterer Größen. Wenn es interessiert, dem empfehle ich [44], auf dem auch die hier gemachten Angaben basieren.

Zuerst einmal wurden bei dem Projekt astronomische Objekte, Supernovae des Typs Ia beobachtet, die dem Beobachter als punktförmige Objekte erscheinen und eine gewisse Helligkeit haben. Die gemessenen Helligkeiten wurden der Rotverschiebung z (307) gegenübergestellt und mit den von den verschiedensten Weltmodellen vorhergesagten Helligkeiten verglichen. Was verstehen wir nun aber unter Helligkeit?

In der Astronomie gibt es gleich vier Arten davon, einmal die scheinbare Helligkeit, die bolometrische Helligkeit, die absolute und die absolute bolometrische Helligkeit. Angegeben wird sie in Größenklassen $[m, m_b, M, M_b]$. Es handelt sich um eine logarithmische Maßeinheit, die historisch definiert ist. Bei den bolometrischen Helligkeiten wird der gesamte Frequenzbereich entsprechend dem STEFAN-BOLTZMANNschen Strahlungsgesetz berücksichtigt, es handelt sich um den Logarithmus des Quotienten zweier Werte Leistung durch Fläche $[\text{Wm}^{-2}]$, die der Physiker als POYNTING-Vektor \mathbf{S} bezeichnet. In der Astronomie heißt dieser Wert Fluß F , in der Technik Feldstärke S . Bei den nicht-bolometrischen Werten ist die Maßeinheit $[\text{Wm}^{-2}\text{Hz}^{-1}]$ üblich. Die Meßwerte sind dann von Frequenz und Bandbreite abhängig. Für uns sind aber nur die bolometrischen Werte von Interesse. Ein weiterer wichtiger Wert ist die (bolometrische) Leuchtkraft L . In der Physik und in der Technik wird sie als Leistung P bzw. Pegel p bezeichnet. Maßeinheit ist das Watt $[\text{W}]$ bzw. das Dezibel $[\text{dB}]$. Somit können wir definieren:

$$M_b = -2,51 \lg \frac{F}{F_0} = -2,51 \lg \frac{L/4\pi r^2}{L_0/4\pi r^2} = -2,51 \lg \frac{L}{L_0} \quad \text{Helligkeit} \quad (906)$$

Wie bei logarithmischen Maßeinheiten üblich, benötigt man immer eine Bezugsgröße F_0 bzw. L_0 . Die Werte wurden [42] und [44] entnommen und lauten folgendermaßen:

$$F_0 = 2,51 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \quad L_0 = 3,09 \cdot 10^{28} \text{W} \quad (907)$$

Ein Stern mit der Leuchtkraft L_0 hat genau 0 Größenklassen (geschrieben 0^M). Die absolute Helligkeit (Fluß) ist in einer Entfernung von 10pc von der Quelle definiert, hat für uns aber keine Bedeutung. Aber auch in der Technik gibt es so ein logarithmisches Maß, das dB (Dezibel):

$$S = P = 10 \lg \frac{S}{S_0} \text{ dB} = 10 \lg \frac{P/4\pi r^2}{P_0/4\pi r^2} \text{ dB} = 10 \lg \frac{P}{P_0} \text{ dB} \quad \text{Feldstärke/Pegel} \quad (908)$$

Eine weitere, seltener verwendete logarithmische Maßeinheit ist das Neper $p[\text{Np}] = \ln(P/P_0)$. Die ursprüngliche Definition von P_0 stammt aus der Fernmeldetechnik und war definiert als eine Leistung $P = 1 \text{mW}$ an 600Ω . Dieser Wert wird aber in der Funktechnik und damit auch in der Radioastronomie nicht verwendet, da man es dort im allgemeinen mit viel kleineren Größen zu tun hat. Daher verwendet man folgende Bezugswerte:

$$S_0 = 1 \text{pWm}^{-2} = 10^{-12} \text{Wm}^{-2} \quad P_0 = 1 \text{pW} = 10^{-12} \text{W} \quad (909)$$

Um eine Verwechslung mit der historischen Definition zu vermeiden, schreibt man statt dB meist die Maßeinheit dBpWm^{-2} oder dBpW bzw. $\text{dBpWm}^{-2}\text{Hz}^{-1}$ oder dBpWHz^{-1} , wenn nicht das gesamte Spektrum erfaßt wird. Die Leistung P am Eingang eines Empfängers bei Anpassung ergibt sich einfach aus dem POYNTING-Vektor S , der wirksamen Fläche A der verwendeten Antenne und dem Antennengewinn G :

$$P[\text{dBpW}] = S[\text{dBpWm}^{-2}] + 10\lg A[\text{m}^2] + G[\text{dB}] \quad (910)$$

Da es sich beim Dezibel ebenfalls um ein logarithmisches Maß handelt, ist eine einfache Umrechnung in die astronomischen Einheiten möglich. Für $P[\text{dBpW}]$, $M_b[M]$, $S[\text{dBpWm}^{-2}]$, $m_b[m]$, $L[W]$, $F[\text{Wm}^{-2}]$ gilt:

$$P = 404,9 - 4M_b \quad M_b = 101,225 - 0,25P \quad \begin{array}{l} \text{Leistung} \\ \text{Absolute bolom. Helligkeit} \end{array} \quad (911)$$

$$S = 44 - 4m_b \quad m_b = 11 - 0,25S \quad \begin{array}{l} \text{Poynting-Vektor} \\ \text{Scheinbare bolom. Helligkeit} \end{array} \quad (912)$$

$$P = 120 + 10\lg L \quad L = 10^{0,1P-12} \quad \begin{array}{l} \text{Leistung} \\ \text{Leuchtkraft} \end{array} \quad (913)$$

$$S = 120 + 10\lg F \quad F = 10^{0,1S-12} \quad \begin{array}{l} \text{Poynting-Vektor} \\ \text{Fluß} \end{array} \quad (914)$$

$$L = 10^{28,5-0,4M_b} \quad M_b = 71,225 - 2,5L \quad \begin{array}{l} \text{Leuchtkraft} \\ \text{Absolute bolom. Helligkeit} \end{array} \quad (915)$$

$$F = 10^{-7,6-0,4m_b} \quad m_b = 19 - 2,5\lg F \quad \begin{array}{l} \text{Fluß} \\ \text{Scheinbare bolom. Helligkeit} \end{array} \quad (916)$$

Alle Unklarheiten sollten damit beseitigt sein, so daß wir uns den Ergebnissen des Supernova-Kosmologie-Projekts zuwenden können.

7.5.4.2. Ergebnisse des Supernova-Kosmologie-Projekts

Die Ergebnisse des Projekts wurden von PERLMUTTER ausführlich in [45] veröffentlicht. Zum besseren Verständnis, was eine Supernova des Typs Ia denn eigentlich ist, empfehle ich die Arbeit von HERRMANN [42]. Das wichtigste ist, eine SN Ia hat eine maximale absolute Helligkeit, die sich aus ihrem Aufbau ergibt. Ist der Stern größer, so entwickelt sich eine Supernova anderen Typs, den man an seinen Charakteristika erkennen kann. Daher kann man eine SN Ia als Standardkerze verwenden, wobei die Helligkeit allerdings etwas kleiner als die maximale ist, denn nicht alle SN Ia erreichen die maximale Helligkeit.

Die scheinbare bolometrische Helligkeit beim Beobachter wurde von PERLMUTTER in einem Diagramm den zugehörigen Rotverschiebungen z gegenübergestellt. Auch HERRMANN [42] und HEBBEKER [43] verwenden die gleiche Grafik, wobei in [43] noch einmal ausführlich auf das von allen verwendete Standard-Big-Bang-Modell, das auf der klassischen EINSTEINSchen Evolutionsgleichung mit und ohne kosmologischer Konstante basiert, eingegangen wird.

Die Beobachtungen ergaben nun, daß weiter entfernte (ältere) SN Ia etwas dunkler erscheinen, als sie beim Standardmodell ohne kosmologische Konstante ($\Lambda=0$) eigentlich sein sollten, der Fall $\Lambda=0$ paßt also nicht zu den Beobachtungen. Die Möglichkeit, daß SN Ia früher andere Eigenschaften gehabt haben könnten, wird von allen Autoren und auch von mir ausgeschlossen.

Vielmehr wird die Abweichung so interpretiert, daß Λ einen von Null abweichenden Wert haben müßte, was bedeutet, daß die Expansionsrate des Universums, also der HUBBLE-Parameter, zum heutigen Zeitpunkt nicht abnimmt, wie bisher immer angenommen, sondern im Gegenteil zunimmt. Die beobachteten SNe wären damit weiter entfernt, als sich aus der gemessenen Rotverschiebung z ergibt. Damit wäre die geringere Helligkeit erklärt. Dies führt allerdings zu Unstimmigkeiten mit anderen Beobachtungen. Um diese zu vermeiden, wird ein kompliziertes Konstrukt verwendet, das extrem genaue Abstimmungen zum Zeitpunkt $T=0$ und auch danach erfordert und ziemlich unwahrscheinlich zu sein scheint, da niemand genau sagen kann, auf welchem physikalischen Phänomen dieser Effekt denn basieren soll.

Während sich PERLMUTTER mit dem Hinweis auf die Möglichkeit $\Lambda \neq 0$ begnügt, fordern HERRMANN und HEBBEKER gar die Existenz „dunkler Materie“ mit bisher noch nicht bekannten Eigenschaften und eines Effekts mit dem Namen „Quintessenz“, die Ursache für die zunehmende Expansionsrate sein sollen, quasi eine Art Antigravitation. Ich für meinen Teil halte diese Hypothese allerdings für abwegig, da sich die Abweichung auch einfacher erklären läßt, nur unter Zuhilfenahme bekannter physikalischer Gesetze (Ockham's Rasiermesser). Nur muß man dann eben den Mut haben, ein alternatives Modell zu verwenden. Das Standard-Big-Bang-Modell hat ja schon lange versagt, auch in anderen Punkten. Leider scheint die allgemeine Meinung in letzter Zeit immer mehr in Richtung „dunkler Materie“ und „Quintessenz“ zu tendieren, was als Kriterium dafür angesehen werden kann, daß die Verfechter des Standardmodells mit der Theorie am Ende sind.

Wenn aber der HUBBLE-Parameter weiterhin abnehmen und sich die beobachteten Objekte in der korrekten Entfernung befinden sollen, bleibt als einzige Erklärung nur die Möglichkeit, daß die Photonen bei ihrer Ausbreitung einer zusätzlichen Dämpfung unterliegen, die bisher nicht bekannt war. Und genau dies ist eine wesentliche Eigenschaft des hier vorliegenden Modells¹.

Im Abschnitt 4.3.4.4. hatten wir die Ausbreitungsfunktion für ein verlustbehaftetes Medium mit Expansion und überlagerter Welle aufgestellt. Abweichend von der Ausbreitungsfunktion für ein verlustfreies Medium ist dort das Dämpfungsmaß α von Null verschieden und hat den Wert $1/R$. Wir werden daher versuchen, die beobachteten Helligkeiten von SN Ia mit Hilfe dieser Funktion vorherzusagen. Für die grafische Darstellung benötigen wir die Funktion $m_b(z)$. Ausgehend von (906) erhalten wir dann für die scheinbare Helligkeit m_b :

$$m_b = -2,5 \lg \frac{F}{F_0} = -2,5 \lg \frac{L_{Ia}}{4\pi r^2 \cdot 2,51 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2}} \quad (917)$$

Dabei stellen wir fest, daß uns der Wert L_{Ia} , die Leuchtkraft (Leistung) der Standardkerze Supernova Ia fehlt. Und in der Tat, weder in [42], [43], [44] oder [45] ist ein solcher angegeben. Glücklicherweise war mir der Kollege Wolfgang Hillebrandt vom Max-Planck-Institut für Astrophysik (MPA) Garching hierbei behilflich. Nach seinen Angaben hat die maximale Leuchtkraft einer SN Ia einen Wert von etwa 10^{36} W . Das ist die Obergrenze. Wenn wir diese in (917) einsetzen, fehlt immer noch die Entfernung r . Da wir die Angelegenheit ausgehend von der Quelle zum Beobachter hin betrachten, erhalten wir diese mit Hilfe von (309a) ohne Korrekturterm. Es gilt:

$$m_b = -2,5 \lg \frac{10^{36} \text{ m}^2}{4\pi r^2 \cdot 2,51 \cdot 10^{-8}} = -2,5 \lg \left(\frac{1}{\tilde{R}^2} \frac{10^{44} \text{ m}^2}{2,51 \pi} \frac{1}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \right) \quad (918)$$

$$m_b = -2,5 \lg \left(\frac{\tilde{H}_0^2 10^{44} \text{ m}^2}{c^2 2,51 \pi} \frac{1}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \right) = -2,5 \lg \left(1,41103 \cdot 10^{26} \text{ s}^2 \frac{\tilde{H}_0^2}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \right) \quad (919)$$

Das ist die Funktion $m_b(z)$ ohne Berücksichtigung der zusätzlichen Dämpfung. Da auch die z -Achse einen logarithmischen Maßstab haben muß, setzen wir anstelle von z den Wert 10^w mit $-2 \leq w \leq 0$ ein. Nun hat PERLMUTTER in [45] zwar alle Meßwerte veröffentlicht, da ich aber über kein Verfahren verfüge, diese so schön, einschließlich der Toleranzgrenzen, darzustellen, habe ich mich entschieden, den Vergleich mit (919) durch Überlagerung beider Grafiken vorzunehmen.

In Bild 146 sind die mit Hilfe von (919) berechneten relativen Helligkeiten im Vergleich mit den Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts dargestellt. Ebenfalls zu sehen sind die von PERLMUTTER für verschiedene Einstellungen des Standard-Big-Bang-Modells berechneten Verläufe. Die Überlagerungsmarken (+) befinden sich an allen Ecken außer links oben.

¹ Natürlich gab es auch schon vorher Modelle (z.B. Tired Light), die mit einer zusätzlichen Dämpfung arbeiten. Sie sind aber alle gescheitert, da sie die Dämpfung allein auf die Teilcheneigenschaften der Photonen zurückführen wollten. Ursache sind aber die Welleneigenschaften. Dennoch erscheint die Tired-Light-Hypothese wesentlich plausibler, als die Annahme der Existenz von dunkler Materie und Quintessenz.

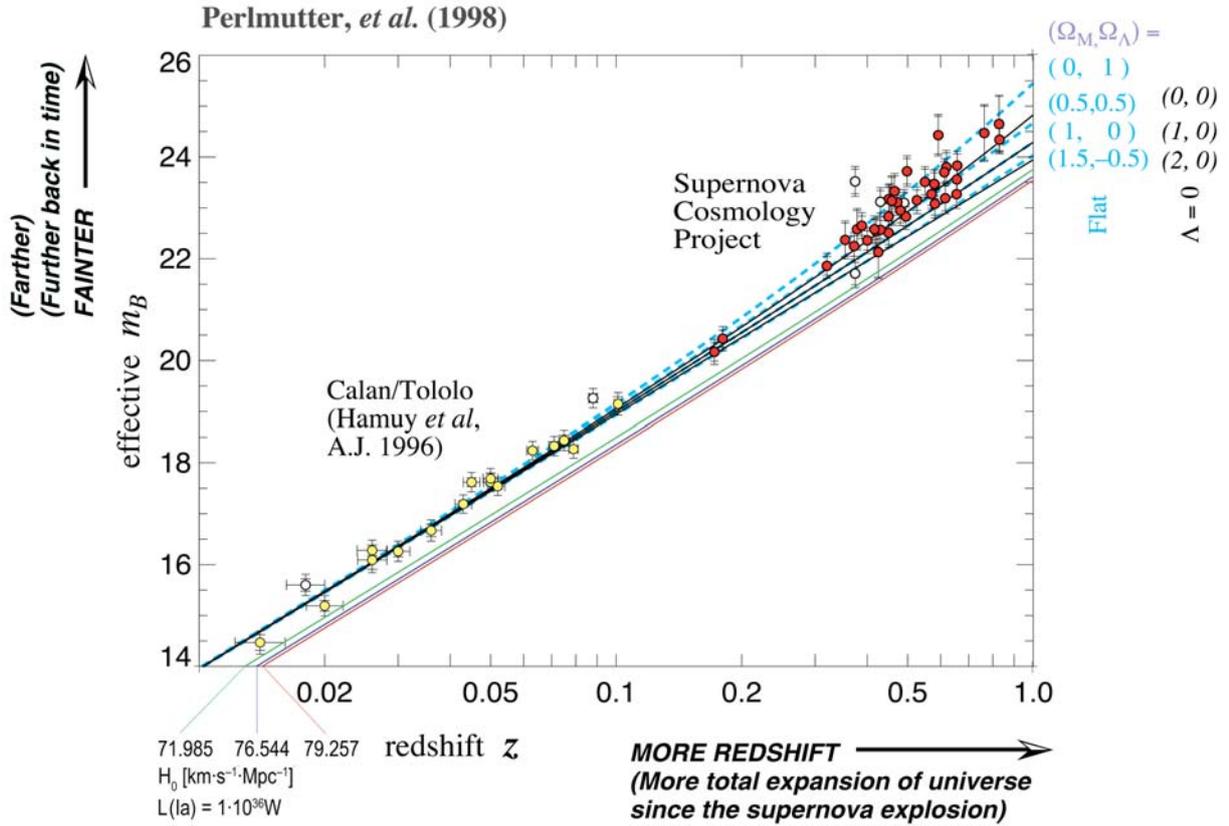


Bild 146

Berechnete scheinbare bolometrische Helligkeit für die drei Werte des HUBBLE-Parameters im Vergleich mit den Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts (Standardkerze = Maximum)

In der Darstellung fällt auf, daß die drei Helligkeitsfunktionen (ohne Berücksichtigung der parametrischen Dämpfung) nach diesem Modell unterhalb der beobachteten Werte liegen, also zu hell berechnet werden. Dies ist auch kein Wunder, haben wir doch den Maximalwert als Standardkerze angenommen. Bild 146 zeigt auch, daß wiederum Lösung (890) mit 71,985 km·s⁻¹·Mpc⁻¹ für den HUBBLE-Parameter der Realität am nächsten kommt, da sie sich am äußersten Rand des Fehlertoleranzkorridors befindet. Wir verwenden daher diesen Wert für die weiteren Betrachtungen. Den tatsächlichen Wert der Standardkerze, bei dem es sich um den statistischen Mittelwert aller SN Ia handelt, bestimmen wir numerisch mit Hilfe von (890) für einen Wert am unteren Ende der z -Achse zu $L_{Ia} = 6,1097 \cdot 10^{35} \text{W}$. Wir setzen in (919) ein und erhalten:

$$m_b = -2,5 \lg \left(\frac{\tilde{H}_0^2}{c^2} \frac{6,11 \cdot 10^{35} \text{m}^2}{2,51 \cdot 10^{-8} \pi} \frac{1}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \right) = -2,5 \lg \frac{4,6916 \cdot 10^{-10}}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \quad (920)$$

$$m_b = -2,5 \lg 4,6916 \cdot 10^{-10} + 2 \cdot 2,5 \lg ((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1) = 23,32 + 5 \lg ((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1) \quad (921)$$

Wir benötigen auch noch die Funktion $m_b(z)$ mit parametrischer Dämpfung. Hierbei müssen wir den Faktor $e^{-r/R} = 10^{-r/R \lg e}$ aus der Ausbreitungsfunktion (305) berücksichtigen. Es gilt:

$$m_b = -2,5 \lg \left(\frac{\tilde{H}_0^2}{c^2} \frac{6,11 \cdot 10^{35} \text{m}^2}{2,51 \cdot 10^{-8} \pi} \frac{e^{-\frac{r}{R}}}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} \right) = -2,5 \lg \left(\frac{4,6916 \cdot 10^{-10}}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} e^{-\frac{1}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right)} \right) \quad (922)$$

$$m_b = -2,5 \lg \left(\frac{4,6916 \cdot 10^{-10}}{((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1)^2} 10^{-\frac{1}{2} \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \lg e} \right) \quad (923)$$

$$m_b = 23,32 + 5 \lg ((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1) + 0,5429 \left((z+1)^{\frac{4}{3}} - 1 \right) \quad \text{Mit param. Dämpfung} \quad (924)$$

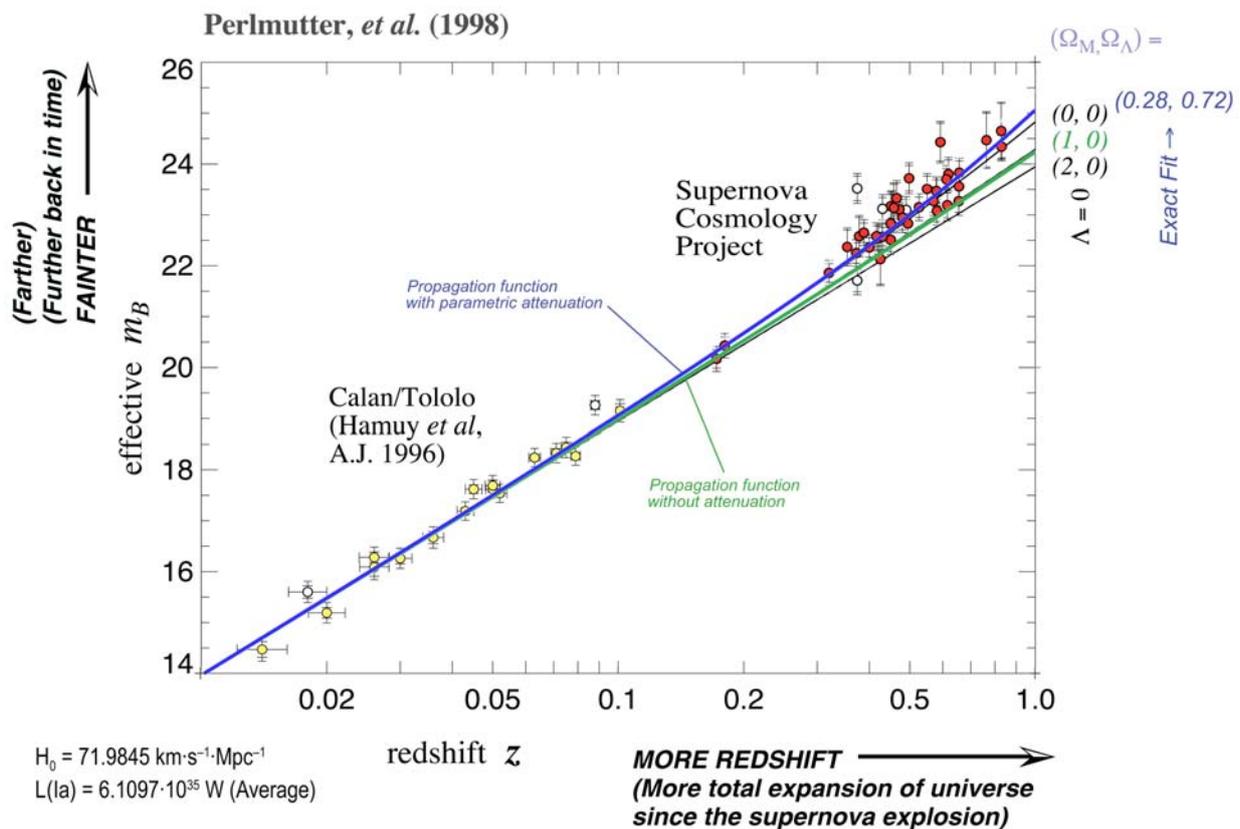


Bild 147

Berechnete scheinbare bolometrische Helligkeit für Lösung (890) des HUBBLE-Parameters im Vergleich mit den Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts (Standardkerze = Mittelwert)

Bild 147 zeigt die Graphen der Ausdrücke (921) und (924) im Vergleich mit den Meßwerten des Supernova-Kosmologie-Projekts für Lösung (890) des HUBBLE-Parameters. Die dünnen schwarzen Linien zeigen die Erwartungswerte des Standardmodells für $\Lambda=0$ bei einer Massenergiedichte $\Omega_M=0, 1$ und 2 . Das ist einmal ein leeres Universum (0), ein Universum mit „normaler“ Energiedichte (1) und ein Universum mit doppelter Energiedichte (2). Hierbei deckt sich die Standard-BB-Lösung für das „normale“ Universum mit der Ausbreitungsfunktion für ein verlustfreies Medium (921). Das ist ebenfalls kein Wunder, denn beide haben den Exponenten $4/3$ in (309a) gemeinsam. Dieser Fall wird aber durch die Beobachtungen nicht bestätigt, ebensowenig ein leeres Universum. Für $\Lambda=0$ wäre sogar ein Universum mit negativer Massenergiedichte (gefüllt mit Antimaterie) erforderlich. Für die optimale Übereinstimmung muß man schon EINSTEINS Fazit „Die Einführung der kosmologischen Konstante war die größte Dummheit, die ich gemacht habe“ erfolgreich ignorieren. Nach [45] liegt die beste Übereinstimmung dann bei $\Omega_M=0,28$ und $\Omega_\Lambda=0,72$. Dabei muß die Summe beider Werte über die Zeit gesehen immer Eins ergeben. Der Wert Ω_Λ ist die sogenannte „Dunkle Energiedichte“, die allerdings mit unserem metrischen Wellenfeld identisch sein könnte (OK = absolut dunkel).

Wie gesagt, das ganze klingt doch eher unwahrscheinlich, zumal dieser optimale Verlauf „zufälligerweise“ exakt durch unsere Funktion (924) beschrieben wird (blaue Kurve in Bild 147), und das ganze nur mit Hilfe bekannter physikalischer Objekte und Beziehungen. Es paßt!

XIV. Die Beobachtungswerte des Supernova-Kosmologie-Projekts werden exakt durch die Ausbreitungsfunktion (305) unter Berücksichtigung der geometrischen und parametrischen Dämpfung (284) beschrieben. Die Annahme der Existenz irgendwelcher neuer exotischer Materiearten oder unbekannter physikalischer Effekte ist dafür nicht erforderlich.

Es gibt weder dunkle Materie, Quintessenz noch zunehmende Expansion!

Die einzige dunkle Materie gibt es in den Köpfen, das mußte mal gesagt werden. Da in der Wissenschaft aber immer neue, noch eindeutigeren Beweise benötigt werden, habe ich mit Hilfe von (921) und (924) die Erwartungswerte der scheinbaren Helligkeiten für SNe Ia, die noch weiter entfernt sind als die im Rahmen des Supernova-Kosmologie-Projekts beobachteten, berechnet und im Bild 148 dargestellt. Bestimmt ergibt sich ja in der näheren oder fernerer Zukunft die Möglichkeit, ein solches Objekt zu beobachten.

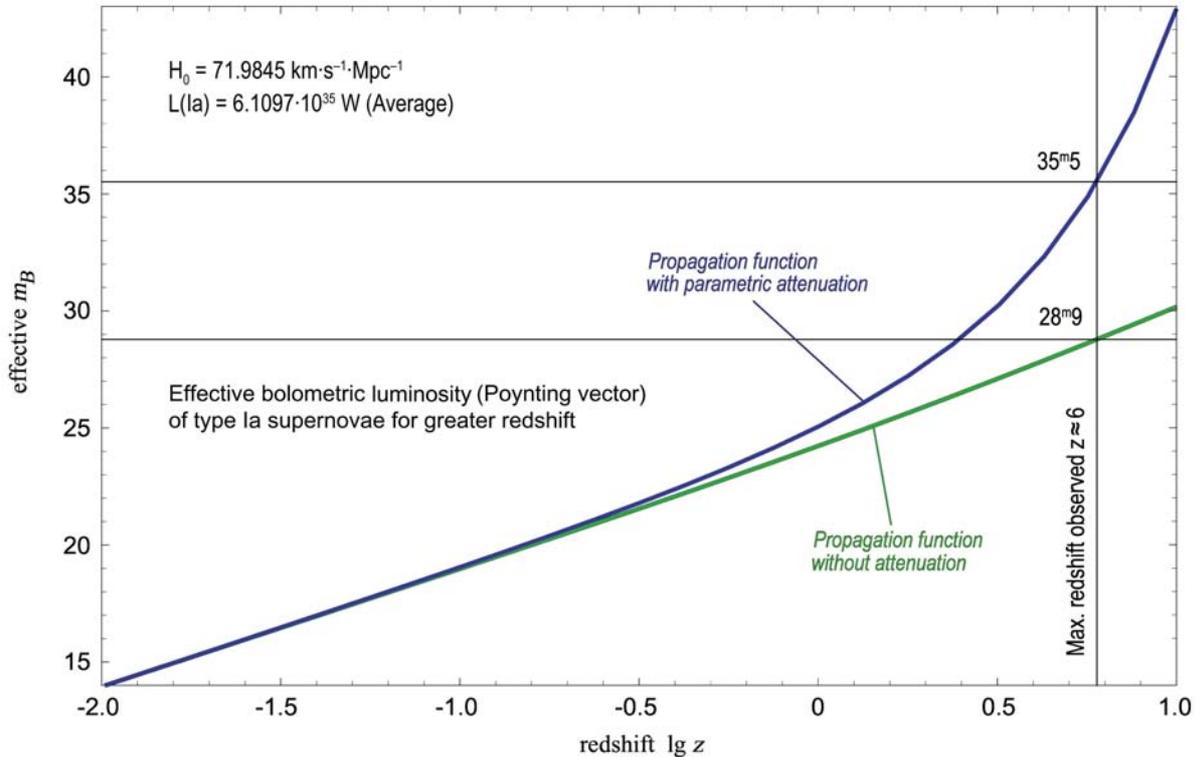


Bild 148
Berechnete scheinbare bolometrische Helligkeit für
Lösung (890) des HUBBLE-Parameters für weiter entfernte SNe Ia

Die einzig wahre Quintessenz ist die, daß das vorliegende Modell durch die Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts bestätigt wird. Der aktuelle Wert des HUBBLE-Parameters beträgt damit exakt $71,985 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$. Dies entspricht Lösung (890).

7.5.5. Die Bedeutung der zweiten und dritten Lösung

Nachdem wir im Abschnitt 7.5.1. versucht hatten, den HUBBLE-Parameter mit Hilfe lokal meßbarer Naturkonstanten zu berechnen, haben wir mit (884), (890) und (892) nicht nur eine, sondern gleich drei Lösungen mit voneinander abweichenden Werten erhalten. In den vorangegangenen Abschnitten konnten wir Ausdruck (890) als den am besten mit den Beobachtungen übereinstimmenden verifizieren. Wenn man ihn als den exakten Wert für H_0 annimmt, stellt sich die Frage nach der Bedeutung der zweiten und dritten Lösung. Auch gibt es ja eigentlich nur ein metrisches Wellenfeld mit nur einer metrischen Wellenfunktion und diese hat auch nur maximal einen aktuellen Phasenwinkel, d.h. es gibt nur einen Wert Q_0 .

Da der Unterschied zwischen Lösung (884) und (890) nur 10,102% beträgt, was in etwa der Wirkung der verschiedenen Korrekturfaktoren der Feinstrukturkonstante in der QED entspricht, könnte man annehmen, daß es sich dabei um ein weiteres QED-Phänomen handelt. Dies würde aber der obengenannten Annahme widersprechen, denn dann wäre die Genauigkeit des mit (890) berechneten Wertes H_0 nicht mehr garantiert; in der QED erhält man nämlich nie ein exaktes Ergebnis. Nun wäre es aber möglich, daß auch den anderen beiden Ergebnissen eine bestimmte physikalische Bedeutung zukommt, daß dabei dem Unterschied zwischen den drei Ergebnissen eine noch unbekanntes Gesetzmäßigkeit innewohnt. Diese wiederum wäre

dann nicht Teil, sondern die Lösung des Problems. Zu diesem Zweck wollen wir die drei Resultate genauer analysieren.

Wenn man alle drei Werte durch einander dividiert, findet man heraus, daß sich die Abweichung durch einen Faktor ξ erklären läßt, der einmal in der nullten, einmal in der ersten und einmal in der dritten Potenz auftritt (siehe Tabelle 7). So gesehen wäre dann auch noch eine vierte Lösung möglich, die wir hier aber als „unecht“ aussortieren wollen, da wir dazu die Wurzel aus (890) mit dem Quadrat von (884) multiplizieren müßten, während (892) als das Produkt beider Ausdrücke eine Art geometrisches Mittel darstellt. Der Faktor ξ läßt sich bestimmen, indem man z.B. den Quotienten von (884) und (892) bildet. Man erhält:

$$\xi = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{q_0} \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = 1,0326001 \quad \xi^2 = 1,0662629 \quad \xi^3 = 1,1010232 \quad (925)$$

$$\frac{1}{\xi^2} = \delta = \frac{h}{m_p r_e c} = 0,9378550 \quad (926)$$

Da in (925) nur Quotienten von Größen auftreten, die sich zeitlich nach der selben Funktion ändern ist der Wert ξ bezugssystemunabhängig. Interessanterweise ist der Ausdruck δ (926) in der QED bereits eingeführt. Er beschreibt die Verhältnisse im Wasserstoffatom. Betrachten wir Lösung (890), die durch astronomische Beobachtungen und anhand der Temperatur der CMBR, also durch Beobachtung zeitartiger Photonen bestätigt wurde, so sieht man, daß dort nur Größen des Elektrons und des freien Raums enthalten sind. Aus diesem Grund kann man annehmen, daß Ausdruck (890) nicht nur die Lösung für zeitartige Photonen, sondern auch für das Elektron darstellt, das zur Gruppe der Leptonen gehört, denn auch die Elektronen sollten sich ja ausdehnen.

Betrachtet man Bild 96 genauer, so sieht man, daß der zeitartige Vektor \underline{c}_t bei den raumartigen Photonen dem der zeitartigen Photonen entgegengerichtet ist und damit einen anderen Wert hat, da der metrische Vektor gleich groß und der Nullvektor konstant c ist. Dies führt dann auch zu einer abweichenden Expansionsrate. Wir vermuten daher, daß Lösung (884) und/oder (892) den HUBBLE-Parameter und damit die Expansionsrate für raumartige Photonen beschreiben.

Im Gegensatz zu Lösung (890) ist in (884) und (892) die Protonenmasse enthalten. Daher kann man annehmen, daß eine von beiden Lösungen für freie, die andere für im Atomkern gebundene Protonen gültig ist, da beide mittels raumartiger Photonen mit der Metrik interagieren.

Als weiterer Unterschied enthält Ausdruck (884) das PLANCKsche Wirkungsquantum, Ausdruck (892) nicht. Lösung (884) wäre damit gültig für raumartige Photonen und das freie Proton. Aufgrund der Abwesenheit von \hbar (keine Quanteneffekte), wegen (926) und da es sich um ein geometrisches Mittel handelt, würde ich Lösung (892) den ganzen Atomen zuordnen, d.h. für Atome und für alle makroskopischen Körper gibt es eine eigene Expansionsrate.

Im Abschnitt 7.5.1. hatten wir weiterhin festgestellt, daß alle Wellenlängen, auch die der DEBROGLIE-Materiewellen, der Expansionsrate des Universums im ganzen folgen (888), es gilt $\lambda \sim Q^{3/2}$. Nun liegt aber der Bezugspunkt der zeitartigen Photonen bei $Q=1/2$, der der raumartigen Photonen dagegen bei $Q=2/3$, wobei sich beide Punkte an der Peripherie des Universums befinden, der Beobachter dagegen im Zentrum (gilt überall für jeden beliebigen Beobachter).

Nun wird die Expansion des Universums als ganzes durch die Expansionsrate (Expansionsgeschwindigkeit plus Ausbreitungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds) an seiner Peripherie bestimmt, da dort die größten Werte erreicht werden. Interessanterweise ist diese bei $Q=2/3$ aber geringfügig größer, als bei $Q=1/2$, wie man im Bild 22 mit etwas gutem Willen erkennen kann, was zu der höheren Expansionsrate für raumartige Photonen führt. Auf dieser Basis läßt sich der Wert ξ^3 , die Abweichung zwischen (884) und (890), relativ einfach berechnen:

$$\xi^3 = \left(\frac{Q_{2/3}}{Q_{1/2}} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2/3}{1/2} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,1006424 \quad \Delta = -4 \cdot 10^{-4} \quad (927)$$

Die Differenz zu ξ^3 (926) beträgt nur $-4 \cdot 10^{-4}$, wofür man in der QED schon das Gleichheitszeichen setzen darf. Auch der Wert δ läßt sich ähnlich (927) ableiten, wobei die Abweichung mit $+5 \cdot 10^{-3}$ allerdings etwas größer ausfällt:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{Q_{2/3}}{Q_{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2/3}{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4}{3} = 0,942809 \quad \Delta = +5 \cdot 10^{-3} \quad (928)$$

Dann müßte es aber doch einen geringen Unterschied zwischen Teilchen und Antiteilchen geben, der sich z.B. im mittleren Durchmesser oder der Masse äußert. Im Gegensatz zur unterschiedlichen Expansionsrate, für die die Differenz zwischen 1/2 und 2/3 am Rande des Universums verantwortlich ist, handelt es sich bei diesen aber um lokale Größen, die von dem wesentlich höheren Wert ($\approx 10^{60}$) des Phasenwinkels/Güte Q_0 am Ort des Beobachters abhängig sind. D.h. der kleinere Durchmesser und die höhere Masse am Bezugspunkt werden um einen Wert 10^{30} verkleinert beobachtet. Und da wird die geringe Differenz zwischen 1/2 und 2/3 plötzlich unnachweisbar klein.

Aufgrund der Expansionsraten nähern sich die Werte von Teilchen und Antiteilchen aber immer mehr an, so daß sie zum Zeitpunkt $T=\infty$ zusammenfallen. Der Kerngedanke dabei ist, daß der Träger des Effekts das Proton ist. Im Proton ist eine unbekannt „Information“, eine Energiedifferenz enthalten, die zu den abweichenden Ergebnissen führt¹. Daher kann man davon ausgehen, daß die Ausdrücke, in denen die Protonenmasse enthalten ist, auf keinen Fall das korrekte Resultat (890) ergeben. Wie in der QED üblich, müssen sie dazu mit einem Korrekturfaktor beauftragt werden.

Läßt man diesen weg, so erhält man auf jeden Fall nur ein für Protonen gültiges Ergebnis. Es gibt aber noch viel mehr Elementarteilchen. Wenn Lösung (890) für zeitartige Photonen und Elektronen gilt, wie sieht es dann mit den anderen Leptonen aus? Zu den Leptonen gehören außer dem Elektron auch noch alle Neutrinoarten, das Myon und das Tauon, sowie alle dazugehörigen Anti-Teilchen.

Im Abschnitt 5.3.1. hatten wir festgestellt, daß auch die Neutrinos ihren Bezugspunkt bei $Q=1/2$ haben, nicht aber die Antineutrinos mit $Q=2/3$. Da auch die raumartigen Photonen als Anti-Teilchen (nicht Antiteilchen!) der zeitartigen Photonen ihren Bezugspunkt bei $Q=2/3$ haben, selbst aber bereits Lösung (884) zugeordnet wurden, kann man davon ausgehen, daß Lösung (890) für zeitartige Photonen und alle Leptonen gilt, Lösung (884) für raumartige Photonen, das Proton und alle Antileptonen.

Was für das Proton gilt, gilt dann aber auch für das Neutron und alle Baryonen und Mesonen, also für alle Hadronen. Lösung (884) gilt damit für raumartige Photonen, alle Hadronen und alle Antileptonen. Wie sieht es dann aber mit den Antihadronen aus? Aus Symmetriegründen müßte für diese Lösung (890) gelten, was zu dem Schluß führt, daß diese anders als „normale“ Hadronen mittels zeitartiger Photonen mit der Metrik und mittels raumartiger Photonen untereinander wechselwirken. Da sie sich aber als echte Antiteilchen entgegen der normalen Zeitrichtung bewegen, ist dies kein Widerspruch.

Aufgrund der umgekehrten Verhältnisse würde sich für Anti-Atome und aus Antimaterie bestehende makroskopische Körper aber ein anderes geometrisches Mittel ergeben, wofür sich anstelle (892) die 4. mögliche Lösung anbieten würde, die wir weiter oben noch ausgeschlossen hatten. Diese soll hier nicht extra dargestellt werden, schließlich kann sie mit Hilfe von ξ sehr einfach bestimmt werden. Für die Expansionsrate selbst gilt, wie auch im makroskopischen Maßstab der HUBBLE-Parameter H_1 (890) multipliziert mit dem mittleren Durchmesser des Teilchens. In Tabelle 9 sind die zugehörigen Werte und die Gültigkeit dargestellt:

¹ Im Gegensatz zum Elektron besteht das Proton und alle anderen Hadronen aus mehreren Quarks, so daß sie durch deren Bindungsenergie eine höhere Masse haben als die Quarks alleine, falls dies möglich wäre.

Lösung	\dot{r}/r	Gültig für
	$[\text{s}^{-1}]$	Teilchenart
$H_1(890) \cdot \xi^3$	$3,853 \cdot 10^{-18}$	Raumartige Photonen, Hadronen, Anti-Leptonen
$H_1(890) \cdot \xi^2$	$3,731 \cdot 10^{-18}$	Maroskopische Körper aus Materie, Atome
$H_1(890) \cdot \xi^1$	$3,613 \cdot 10^{-18}$	Makroskopische Körper aus Antimaterie, Antiatome
$H_1(890) \cdot \xi^0$	$3,499 \cdot 10^{-18}$	Zeitartige Photonen, Antihadronen, Leptonen

Tabelle 9
Expansionsraten der Teilchen

Nun fällt allerdings auf, daß die Expansionsraten der Teilchen/Antiteilchen bei den Leptonen gegenüber den Hadronen vertauscht sind. Das liegt daran, daß diese direkt mit der Metrik interagieren und nicht mittels raumartiger bzw. zeitartiger Photonen, wie die Hadronen. Für die Myonen und Tauonen möchte ich allerdings nicht die Hand ins Feuer legen. Auch stellt Tabelle 9 nur eine mögliche Interpretationsmöglichkeit dar und sollte daher auch nur als Vorschlag angesehen werden.

Der Wert ξ tritt in Form von $\delta = \xi^{-2}$ auch als Korrekturfaktor in der QED auf und zwar immer dann, wenn bei einer Wechselwirkung mindestens ein Proton in der Nähe ist. Wenn wir z.B. die Wechselwirkung eines Photons mit einem Elektron in der Elektronenhülle eines Atoms betrachten, kommt die Feinstrukturkonstante zur Anwendung. Sehen wir doch einmal, was passiert, wenn wir die Feinstrukturkonstante mit δ multiplizieren:

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{q_0^2} \quad \text{ohne Korrekturfaktor} \quad \alpha_k = \frac{\xi^{-2}}{4\pi} \frac{e^2}{q_0^2} \quad \text{mit Korrekturfaktor } \delta \quad (929)$$

Setzt man (925) in (929) ein, so sieht man, daß sich die Ladungen herauskürzen. Übrig bleibt nur das Verhältnis zwischen Elektronen- und Protonenmasse multipliziert mit einem geometrischen Faktor 4π :

$$\alpha_k = 4\pi \frac{m_e}{m_p} = 6,84386 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{146} \quad \text{mit Korrekturfaktor } \delta \quad (930)$$

Dieses Verhältnis zweier Massen ist wichtig bei energetischen Betrachtungen, bei denen der Impuls $p=mv$ verwendet wird. Ausdruck (930) ist auch der Ausgangspunkt der Betrachtung einer elektromagnetischen Wechselwirkung eines Photons mit dem Elektron im Wasserstoffatom. Der Term δ^{-1} gilt damit nur für das Wasserstoffatom ${}^1\text{H}$ und stellt für sich genommen die Korrektur zwischen einem reinen, gedachten System aus Proton und Elektron und den tatsächlichen Verhältnissen im Wasserstoffatom dar. In allen anderen Fällen, bei schwereren Kernen und in höheren Energiezuständen kommen noch zusätzliche Korrekturterme hinzu (die genauen relativistischen Korrekturen, die Korrektur der kinetischen Energie und die Spin-Bahn-Wechselwirkung).

7.6. Schlußbetrachtung

Ich möchte diese Arbeit an diesem Punkt beenden, da ich die mir am Anfang gestellte Aufgabe, den genauen Wert des HUBBLE-Parameters zu bestimmen, erfüllt habe. Nebenbei ist ein neuartiges Modell des Universums entstanden, das nicht im Widerspruch zu bereits gesicherten Erkenntnissen steht und ohne „Brimborium“ wie etwa dunkle Materie und neuartige, bisher unbekannte und nicht gesicherte Effekte auskommt. Das Modell konnte anhand 8 von 10 Tests genau verifiziert werden, wobei allerdings 5 davon automatisch erfüllt sind, aufgrund der großen Ähnlichkeit mit dem Modell EINSTEINS. Der aktuelle Wert des HUBBLE-Parameters beträgt exakt:

$$H_0 = \frac{2}{3} \frac{32\pi^2 \epsilon_0 G h m_e^3}{\mu_0^2 e^6} = 2,33283 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \quad \text{oder} \quad (931)$$

$$H_0 = 71,9845 \text{ kms}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$$

Bei einem Test mit Hilfe der Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung gab es eine geringe Abweichung von 0,2431K nach unten beim beobachteten Wert. Diese ist mit hoher Wahrscheinlichkeit auf andere Wechselwirkungen zurückzuführen, so daß man auch diesen Punkt als erfüllt mit geringer Abweichung ansehen kann. Das Problem wird in [46] noch ausführlicher betrachtet.

Offen ist noch die technische Bestimmung des Werts der spezifischen Leitfähigkeit des Subraums (Supraleitung), die sich aufgrund des extrem hohen Werts wohl auch in fernerer Zukunft nicht wird durchführen lassen. Immerhin kann dieser Wert aufgrund anderer Beziehungen genau bestimmt werden:

$$\kappa_0 = \frac{3}{8} \frac{e^6 c}{4\pi\epsilon_0^2 G^2 h^2 m_c^2} = 1,30605 \cdot 10^{93} \text{ Sm}^{-1} \quad (932)$$

Dies ist die einzige wesentlich neue Eigenschaft des Subraums. In Tabelle 10 sind noch einmal die wichtigsten Grundgrößen bezogen auf den neu bestimmten Wert des HUBBLE-Parameters zusammengefaßt, denn dieser bestimmt die meisten anderen Größen. Um eine fehlerlose Überprüfung zu gewährleisten, befindet sich im Anhang auch noch ein »Mathematica«-Programm, in dem diese Größen und ihre Beziehungen zueinander definiert sind. Denn ändert man nur einen einzigen Wert der mehrmals vorkommt, kann es leicht passieren, daß einer davon übersehen wird. Dann erhält man seltsame, abweichende Ergebnisse und die Suche geht los.

Ich hoffe, daß in der vorliegenden Arbeit doch einige neue Gedanken enthalten waren und bitte daher um eine rege Diskussion. Weiterhin bitte ich um Verständnis, daß ich die Betrachtung nicht auf alle Gebiete, z.B. schwarze Löcher, Entstehung der Sterne/Planeten etc. ausgedehnt habe, wie es sonst üblich ist. Im Zweifelsfall schließe ich mich hier der klassischen Lehrmeinung an. Diese Arbeit enthält auch Abschnitte, mit denen Sie vielleicht nicht einverstanden sein werden. Dennoch bitte ich den Leser, deswegen nicht alles zu verwerfen.

ENDE

8. Literaturverzeichnis

- [1] **H.-J. Treder** (Herausgeber), Gravitationstheorie und Theorie der Elementarteilchen, Wiederabdruck ausgewählter Beiträge des Einstein-Symposiums 1965 in Berlin
Cornelius Lanczos †, *Dublin, Irland*,
»Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur«,
Akademieverlag, Berlin (O) 1979, S. 24 ff.
- [2] **Georg Dautcourt**, Relativistische Astrophysik,
Akademieverlag, Berlin (O) 1972
- [3] **Michail Wolkenstein**, Entropie und Information,
Akademieverlag, Berlin (O) 1990
- [4] **Gernot Neugebauer**, Relativistische Thermodynamik,
Akademieverlag, Berlin (O) 1980
- [5] **Brockhaus ABC Physik**,
F.A. Brockhaus-Verlag Leipzig 1972
- [6] **Braginski/Polnarjow**, Der Schwerkraft auf der Spur,
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1989
- [7] **Ch. Spiering**, Auf der Suche nach der Urkraft,
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1986
- [8] **I.D. Nowikow**, Evolution des Universums,
BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1982
- [9] **Felix Klein**, Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion,
Berlin 1933
- [10] **W. Maak**, Fastperiodische Funktionen,
Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Bd. 61
Springer-Verlag 1967
- [11] **H.M. Srivastava** and **Per W. Karlsson**, Multiple Gaussian Hypergeometric Series,
Chichester 1985
- [12] **Harold Exton**, q Hypergeometric Functions and Applications,
Chichester 1983
- [13] **Harold Exton**, Handbook of Hypergeometric Integrals,
Theory, Application Tables, Computer programs
Chichester 1978
- [14] **Harold Exton**, Multiple Hypergeometric Functions and Applications,
Chichester 1976
- [15] **A.M. Mathai/R.K. Saxena**, Generalized Hypergeometric Functions with
Applications in Statistics &. Physical Sciences, Chichester 1976
- [16] **Wilhelm Maak**, Zur hypergeometrischen Differentialgleichung über Banachalgebren,
Seminarbericht 30 (Burmans) Göttingen 1971
- [17] **Slater/Lucy/Joan**, Generalized Hypergeometric Functions,
Cambridge 1966

- [18] **Felix Klein**, Über die hypergeometrische Funktion,
Göttingen 1894
- [19] **Herbert Buchholz**, Die konfluente hypergeometrische Funktion
mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung,
Ergebnisse der angewandten Mathematik, Berlin 1953
- [20] **Vorlesungsmitschriften** »Theoretische Elektrotechnik«
Ingenieurhochschule für Seefahrt (Hochschule für Seefahrt)
Warnemünde/Wustrow
- [21] **Bartsch, Hans-Jochen**, Mathematische Formeln
Fachbuchverlag Leipzig, 16. Auflage 1977
- [22] **Bronstein†/Semendjajew**, Taschenbuch der Mathematik
BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1979
- [23] **Sieber/Sebastian**, Spezielle Funktionen,
Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte,
Band 12, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig 1977
- [24] **Weller/Winkler**, Elektrodynamik, Mathematisch-Naturwissenschaftliche
Bibliothek, Band 69, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1979
- [25] **Vorlesungsmitschriften** »Analoge Systeme«
Ingenieurhochschule für Seefahrt (Hochschule für Seefahrt)
Warnemünde/Wustrow
- [26] **Prof. Dr. sc. techn. Dr. techn. h.c. Eugen Philippow**, TH Ilmenau
Taschenbuch der Elektrotechnik, Band 2, Grundlagen der Informationstechnik
Verlag Technik Berlin, 1. Auflage 1977
- [27] **Prof. Dr. Christian Weißmantel et al.** Hrsg.
Kleine Enzyklopädie Atom Struktur der Materie
VEB Bibliographisches Institut Leipzig, 1. Auflage 1970
- [28] **Abramowitz, Milton / Stegun, Irene**
Pocketbook of Mathematical Functions
Bearb. v. Danos, Michael / Rafelski, Johann. 1984, 468 S.
ISBN 3-87144-818-4
- [29] **Nanstiel, Erik**
A New Hypothesis on the Mechanism for Gravity
Published on CompuServe Cosmology-Forum. File name: Gravity.pdf
created 16.10.1998, file available.
- [30] **Ray d'Inverno**
Einführung in die Relativitätstheorie
VCH Verlagsgesellschaft mbH, D69451 Weinheim 1995
ISBN 3-527-29073-7
- [31] **Richard L. Amoroso, Geoffrey Hunter, Menas Kafatos, Jean-Pierre Vigiér**
Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale
Kluwer Academic Publishers Dordrecht/Boston/London 2002
ISBN 1-4020-0885-6
- [32] **Dr. H.-H. v. Borzeszkowski, Dr. R. Wahsner**
Einstein-Laboratorium für Theoretische Physik der AdW der DDR, Potsdam
Eddingtons Zahlen und die Einheit der physikalischen Welt
Wissenschaft und Fortschritt Heft 12/1982 S. 452 ISSN 0510-6966

- [33] **Eddington, A. S.**
Raum, Zeit und Schwere, Ein Umriß der allgemeinen Relativitätstheorie;
übers. u. hrsg. von W. Gordon; Braunschweig 1923
- [34] **Eddington, A. S.**
Naturwissenschaft auf neuen Bahnen;
übers. u. hrsg. v. W. Westphal, Braunschweig 1935
- [35] **Eddington, A. S.**
Philosophie der Naturwissenschaft; Bern 1949
- [36] **Eddington, A. S.**
Fundamental Theory; Cambridge 1948
- [37] **Dirac, P. A. M.**
The Cosmological Constants; Nature 139 (1937), S. 323
- [38] **Treder, H. J.**
Eddingtons Zahlen, Einsteins Kriterium und Rydbergs rationelles Dimensionssystem
Astron. Nachr. 302 (1981), 3, S. 115
- [39] **André Koch Torres Assis* & Marcos Cesar Danhoni Neves****
* Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, 13083-970, Campinas-SP, Brasil
**Departamento de Física, Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo, 5790, 87020-900, Maringá-PR, Brasil
History of 2.7 K Temperature Prior to Penzias and Wilson
http://www.dfi.uem.br/~macedane/history_of_2.7k.html
- [40] **Richard L. Amoroso**, Noetic Advanced Studies Institute, Orinda, CA, USA;
Geoffrey Hunter, Dept. of Chemistry, York University, Toronto, Canada;
Menas Kafatos, Inst. for Comput. Sciences & Inf., George Mason University, Fairfax, VA, USA
Jean-Pierre Vigié, Dept. of Physics, Université Pierre et Marie Curie, Paris, France
Gravitation and Cosmology: From the Hubble Radius to the Planck Scale
Proceedings of a Symposium in Honour of the 80th Birthday of Jean-Pierre Vigié
edited by FUNDAMENTAL THEORIES OF PHYSICS 126
September 2002 Hardbound 557 pp. ISBN 1-4020-0885-6
- [40.1] **Sisirroy* & S.Datta****, Physics & Applied Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, Calcutta 700035,
India, *sisir@isical.ac.in, **res9428@isical.ac.in published in [40]
Multiple scattering theory in Wolf's mechanism and implications in QSO redshift
Abstract. The theory of Correlation-induced spectral changes is becoming popular over the past decade and it has established its possibility in the field of QSO redshift. A brief review of its development including multiple scattering, no blueshift condition, effect on spectral width and the correlation between shift and width of a spectral line is presented.
- [41] **Ottmar Marti**
Institut für Experimentelle Physik, Universität Ulm
Strahlungsgesetze
<http://www.wex.physik.uni-ulm.de/lehre/gk4-2005/node13.html#1474>
- [42] **Marcus Herrmann**
RWTH Aachen
Promotionsvortrag
www.itm.rwth-aachen.de/Downloadarea/Dissertationen/MarcusHerrmannPromotionsvortrag.pdf

- [43] **Thomas Hebbeker**
RWTH Aachen
Die Entwicklung des Universums
www.physik.rwth-aachen.de/~hebbeker/Sternwarte.pdf
- [44] **Huette**
Ruhr-Uni Bochum
(3) Meßgrößen: Helligkeiten, Farben, Temperaturen
Abstract: Wir blicken zum Himmel und sehen Sterne:. Was unterscheidet sie? Helligkeit und Farbe ...
www.astro.ruhr-uni-bochum.de/huette/astronomie1_v2/kap3.pdf
- [45] **Saul Perlmutter et. al.**
Lawrence Berkeley Laboratory 50-232, University of California, Berkeley, CA 94720
High Redshift Supernova Search, Home Page of the Supernova Cosmology Project
Abstract:... the high-redshift supernovae discovered by the Supernova Cosmology Project... Supernovae: First
Cosmology Results and Bounds on q_0 (Perlmutter et al.)
www-supernova.lbl.gov/public/
- [46] **Gerd Pommerenke**
Ist der Verlauf der Planckschen Strahlungsfunktion das Resultat der Existenz einer
oberen Grenzfrequenz des Vakuums?
Siehe Anhang

9. Abbildungsverzeichnis

Bild 1	Kubisch-flächenzentriertes Raumgitter	15
Bild 2	MINKOWSKI'sche Linienelemente Abmessungen und Kopplung untereinander.....	17
Bild 3	Magnetische Feldstärke in einer und in mehreren Leiterschleifen.....	18
Bild 4	Anordnung der MLE an einer Feldlinie in x-Richtung bei kubisch flächenzentriertem Gitter.....	20
Bild 5	Verlauf der magnetischen Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius r.....	20
Bild 6	Ersatzschaltung eines statischen MLE.....	24
Bild 7	Verlauf von Ladung und Induktion mit Kennzeichnung der Bahnpunkte	24
Bild 8	Bahnverlauf in der xy-Ebene	24
Bild 9	Idealisierte und tatsächliche Bahn des MLE in dreidimensionaler Darstellung	25
Bild 10	Ersatzschaltung mit Reihenwiderstand	27
Bild 11	Ersatzschaltung mit Parallelwiderstand.....	27
Bild 12	Spannungen und Ströme am Schwingkreis	29
Bild 13	Verlauf von magnetischem Fluß sowie der Näherungs- und Hüllkurvenfunktion (127) über einen längeren Zeitraum.....	37
Bild 14	Verlauf von Fluß und Ladung sowie der Näherungs- und Hüllkurvenfunktion (127) in der Nähe der Singularität.....	38
Bild 15	Übertragungsfunktionen (Zeitbereich) für magnetischen Fluß und Ladung (C=0).....	41
Bild 16	Frequenzgangsorkurve.....	42
Bild 17	BODE-Diagramm: Frequenzgang $A(\omega)$ und Phasengang $B(\omega)$ des Systems	43
Bild 18	Verlauf von Phasenwinkel, $\cos \phi$ und des Ausdrucks θ	43
Bild 19	Gruppen- und Phasenlaufzeit.....	44
Bild 20	Frequenzgang für die Übertragung zum benachbarten MLE	45
Bild 21	Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit (lineare Zeitskala).....	53
Bild 22	Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmische Zeitskala)	54
Bild 23	Phasenmaß und Dämpfungsmaß in Abhängigkeit von der Zeit (lineare Skala)	55
Bild 24	Phasenmaß und Dämpfungsmaß in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmisch).....	56
Bild 25	Bahnkurve für große Werte von t in Abhängigkeit von der Zeit.....	57
Bild 26	Bahnkurve in der Nähe der Singularität in Abhängigkeit von der Zeit.....	58
Bild 27	Radius r als absoluter Abstand vom Zentrum in Abhängigkeit von der Zeit für kleine Werte von t	58
Bild 28	Ortskurve des Feldwellenwiderstands	59
Bild 29	Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit (logarithmisch)	60
Bild 30	Verlauf von λ_0 exakt logarithmischer Maßstab.....	64
Bild 31	Verlauf von λ_0 exakt und Näherung sowie r_0 linearer Maßstab	64
Bild 32	Umwandlung der Ersatzschaltung des MLE in einen Tieflpaß unter Berücksichtigung der zusätzlichen Kopplungsverluste	68
Bild 33	Leitungsersatzschaltung mit Parallelleitwert.....	68
Bild 34	Ausbreitungsgeschwindigkeit der Metrik und einer überlagerten elektromagnetischen Welle.....	72
Bild 35	Entfernung in Abhängigkeit von der Rotverschiebung für elliptische Modelle ($q=1$).....	79
Bild 36	Der HERTZ'sche Dipol.....	80
Bild 37	Wellenzahlvektor als Funktion des Abstands für $t=0$	83
Bild 38	Zeitliche Abhängigkeit des Wellenzahlvektors für verschiedene Abstände r.....	83
Bild 39	Zeitliche Abhängigkeit eines gegebenen Abstands r (erste Lösung)	85
Bild 40	Zeitliche Abhängigkeit eines gegebenen Abstands r (zweite Lösung)	85
Bild 41	Verhältnis von zweiter und erster Lösung bei $t=0$	86
Bild 42	Zeitlicher Verlauf der ersten Lösung in der Nähe von $t=0$ für verschiedene Abstände r.....	87
Bild 43	Anstieg beider Lösungen in der Nähe von $t=0$ als Funktion des Abstands r	87
Bild 44	HUBBLE-Parameter als Funktion des Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.	88
Bild 45	Verzögerungsfaktor als Funktion des Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.	89
Bild 46	Expansionsgeschwindigkeit als Funktion des Abstands für $t=0$, die Werte $r>0,5R$ sind extrapoliert.	89
Bild 47	Anzahl MLE's in Abhängigkeit vom Radius	92
Bild 48	Entropie in Abhängigkeit vom Radius	93
Bild 49	Zeitliche Abhängigkeit der Entropie für $r=\text{const}$ (linearer Maßstab).....	94
Bild 50	Verschiedene Näherungslösungen für das PLANCK'sche Wirkungsquantum größerer Maßstab.....	98
Bild 51	Verschiedene Näherungslösungen für das PLANCK'sche Wirkungsquantum kleinerer Maßstab	98
Bild 52	PLANCK'sches Wirkungsquantum als Funktion des Abstands für $t=0$	99
Bild 53	PLANCK'sches Wirkungsquantum als Funktion der Zeit für $r=\text{const}$	100
Bild 54	PLANCK'sches Wirkungsquantum als Funktion der Zeit bei konstantem Wellenzahlvektor	100

Bild 55	PLANCKsches Wirkungsquantum bei konstantem Wellenzahlvektor für verschiedene Anfangsentfernungen (Zeit gerechnet von heute).....	101
Bild 56	Geschwindigkeit der Wellenfront am Gesamtweltradius K	103
Bild 57	Quantenuniversum und Gravitationsuniversum.....	103
Bild 58	Energie des MINKOWSKI'schen Linienelements zeitliche Abhängigkeit	105
Bild 59	Energie des MINKOWSKI'schen Linienelements räumliche Abhängigkeit bis zum Partikelhorizont... ..	105
Bild 60	Energie des MINKOWSKI'schen Linienelements räumliche Abhängigkeit am Partikelhorizont	106
Bild 61	Energie des MINKOWSKI'schen Linienelements räumliche Abhängigkeit bis zum Ereignishorizont... ..	106
Bild 62	Quadrat der Besselfunktion 1. Ordnung während der ersten Periode	107
Bild 63	Verlustleistung des MINKOWSKI'schen Linienelements während des ersten Maximums	107
Bild 64	Verlustleistung des MINKOWSKI'schen Linienelements während des zweiten Maximums	108
Bild 65	Kontinuierliches Spektrum (erstes Maximum)	109
Bild 66	Kontinuierliches Spektrum (zweites Maximum)	109
Bild 67	Intensität der kosmischen Hintergrundstrahlung mit Approximation	111
Bild 68	PLANCK'sche Strahlungsformel und Approximation.....	113
Bild 69	Weltmodell mit Verlauf raumartiger und zeitartiger Vektoren	114
Bild 70	Zeitliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte vom Zeitpunkt der Einkopplung an betrachtet ...	120
Bild 71	Zeitliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte vom Beginn des Gravitationsuniversums an betrachtet.....	120
Bild 72	Räumliche Abhängigkeit der mittleren Materiedichte zum Zeitpunkt T (heute).....	121
Bild 73	Masse-Rotverschiebung am Beispiel des Protons.....	122
Bild 74	Aufbau der Metrik in der Umgebung eines Teilchens frei nach NANSTIEL	123
Bild 75	Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung (linear)	124
Bild 76	Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung vom Zeitpunkt der Einkopplung an betrachtet	124
Bild 77	Zeitliche Abhängigkeit der Strahlungstemperatur der kosmologischen Hintergrundstrahlung vom Beginn des Gravitationsuniversums an betrachtet.....	125
Bild 78	Zeitliche Abhängigkeit der elektromagnetischen Feldstärke des metrischen Wellenfeldes exakt und Näherung.....	127
Bild 79	Zeitliche Abhängigkeit der Energiedichte des metrischen Wellenfeldes exakt und Näherung	129
Bild 80	Erste zeitliche Ableitung der Energiedichte des metrischen Wellenfeldes.....	130
Bild 81	Zeitlicher Verlauf des Energiestromdichtevektors und ohmsche Verluste des metrischen Wellenfeldes	130
Bild 82	Integrale von Energiedichte und der dielektrischen Verluste des metrischen Wellenfeldes.....	132
Bild 83	Durch das metrische Wellenfeld bestimmter Anteil am Bosonen-/Fermionen-Verhältnis als Funktion der Zeit ohne Berücksichtigung der Fermionenvervielfachung.....	133
Bild 84	Zeitlicher Verlauf des POYNTING-Vektors des Urimpulses am Punkt $r=0$	136
Bild 85	Normierte Spektralfunktion der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke des Urimpulses (linearer Maßstab)	137
Bild 86	Normierte Spektralfunktion der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke des Urimpulses (logarithmischer Maßstab)	138
Bild 87	Energetisches Spektrum der elektrischen bzw. magnetischen Feldstärke des Urimpulses	139
Bild 88	Quadratischer Mittelwert aus energetischer und mittlerer zeitlicher Amplitudendichte (E- und H-Feld) des Urimpulses	139
Bild 89	Ausdehnungsgeschwindigkeit von Urimpuls und MINKOWSKI'schem Linienelement Nr. 1	141
Bild 90	Ausdehnung von Urimpuls und MINKOWSKI'schem Linienelement Nr. 1 als Funktion der Zeit	141
Bild 91	Mittlere Energiedichte des Urimpulses	142
Bild 92	Leistungsdichte Fermionenerzeugung beim Urimpuls	143
Bild 93	Erweitertes Photonenmodell	145
Bild 94	Vektorielle Geschwindigkeitsaddition bei Photonen in der Nähe der Singularität	147
Bild 95	Verlauf der einzelnen Geschwindigkeitsanteile (absoluter Betrag) für Photon und Neutrino in der Nähe der Singularität	148
Bild 96	Komplementäres Dreieck und Winkel als Zweitlösung der quadratischen Gleichungen bei entgegengesetztem Geschwindigkeitsvektor c_γ	149
Bild 97	Verlauf der Funktion $\sin\gamma$ des Schnittwinkels mit der Metrik für zeitartige (normale) und raumartige Photonen in der Nähe der Singularität.....	149
Bild 98	Vektorielle Geschwindigkeitsaddition bei Neutrinos in der Nähe der Singularität.....	150
Bild 99	Verlauf der Funktion $\sin\gamma$ des Schnittwinkels mit der Metrik für Neutrinos und Antineutrinos in der Nähe der Singularität	152
Bild 100	Rotverschiebung von Photonen exakt und Näherung	154
Bild 101	Rotverschiebung von Neutrinos exakt und Näherung	155
Bild 102	Photonenzirkel, Varianz der Eigenschaften der Photonenarten bei Änderung von Q und v	157
Bild 103	Relativistischer Dehnungsfaktor β und Güte als Funktion der Geschwindigkeit.....	171

Bild 104	Wirkung des relativistischen Dehnungsfaktors β	176
Bild 105	Relativistischer Dehnungsfaktor β_γ für zeit- und raumartige Photonen im Vergleich mit der klassischen EINSTEINschen Lösung ($Q_0 > 10^5$)	177
Bild 106	Relativistischer Dehnungsfaktor β_ν für Neutrinos und Antineutrinos im Vergleich mit der hypothetischen klassischen Lösung ($Q_0 > 10^5$).....	178
Bild 107	Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für zeitartige Photonen bei kleinen Gütewerten	179
Bild 108	Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für raumartige Photonen	179
Bild 109	Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für Neutrinos	180
Bild 110	Relativistischer Dehnungsfaktor $\beta_\alpha(v)$ für Antineutrinos.....	181
Bild 111	Exakter Verlauf und Näherung für die maximale Überhöhung von β beim zeit- und raumartigen Photon	181
Bild 112	Verhältnis zwischen k-Faktor und relativistischem Dehnungsfaktor β klassische und Modelllösung $Q_0 > 10^5$	185
Bild 113	Relativistische Dopplerverschiebung (Wellenlänge) der zeitartigen Photonen und Neutrinos bei einer Güte von $Q < 10^5$	186
Bild 114	Relativistische Dopplerverschiebung (Wellenlänge) der Antineutrinos bei einer Güte von $Q < 10^5$	186
Bild 115	Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MLE im Phasenraum des Elektrons.....	194
Bild 116	Verhältnis zwischen der Länge des konstanten Wellenzahlvektors r_K und der Länge des Nullvektors r_N als Funktion von Q_0	196
Bild 117	Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MLE im Phasenraum des Elektrons (größerer Maßstab).....	196
Bild 118	Verhältnis von Elektronenladung und Ladung des MINKOWSKIischen Linienelements als Funktion der Zeit/Güte nach (675).....	199
Bild 119	Phasenwinkel ϕ des Beobachters als Funktion der Geschwindigkeit $v = v_M$	200
Bild 120	Phasenwinkel ϕ des Beobachters als Funktion der Geschwindigkeit $v = v_M + c_M$	201
Bild 121	Verhältnis von Elektronenladung zur Ladung des MINKOWSKIischen Linienelements als Funktion von Güte und Geschwindigkeit $v = v_M + c_M$	201
Bild 122	Zeitlicher Verlauf der Gravitationskonstante am Punkt $r=0$ (linearer Maßstab)	205
Bild 123	Zeitlicher Verlauf der Gravitationskonstante lokales Weltalter (logarithmischer Maßstab).....	206
Bild 124	Räumliche Abhängigkeit der Gravitationskonstante zum Zeitpunkt T (linearer Maßstab)	207
Bild 125	Zeitlicher Verlauf der lokalen Gravitationskonstante im Abstand r bei konstantem Wellenzahlvektor.....	208
Bild 126	Definition der Geschwindigkeit und des Mittelpunkts des Universums für die Fälle leerer Raum, Körper im Gravitationsfeld und freier Fall für "normale" Materie.....	229
Bild 127	Definition der Geschwindigkeit und des Mittelpunkts des Universums für die Fälle leerer Raum, Körper im Gravitationsfeld und freier Fall für Antimaterie	229
Bild 128	Drehung in der (T,r)-Ebene bei der LORENTZ-Transformation	231
Bild 129	Verlauf der für das System S' relevanten Güte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gegenüber dem System S (Metrik) für $Q_0 \leq 10^3$	236
Bild 130	Wirkung unterschiedlicher Winkel α auf die Addition von Geschwindigkeitsvektoren (Prinzipdarstellung).....	237
Bild 131	Verlauf der relativistischen Massenzunahme in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gegenüber der Metrik unter Verwendung der SR-Ruhmasse für Gütewerte $Q_0 \leq 10^3$	240
Bild 132	Mitnahmeeffekt bei Beschleunigung: Verlauf der Differenzgeschwindigkeit zur Metrik in S' in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v gegenüber der Metrik in S für Gütewerte $Q_0 \leq 10^3$	241
Bild 133	Relative skalare Krümmung für verschiedene Ausgangsgütewerte	252
Bild 134	Relative skalare Krümmung für den Standardfall $Q_0 > 10^6$	253
Bild 135	Relative skalare Krümmung für den Fall $Q_0 = 2/3$	254
Bild 136	Das 3-Schichten-Modell der Metrik	260
Bild 137	h_{22} -Komponente einer oszillierenden ebenfrontigen Gravitationswelle (+ Polarisation)	262
Bild 138	h_{23} -Komponente einer oszillierenden ebenfrontigen Gravitationswelle (\times Polarisation).....	262
Bild 139	Entfernungsvektoren bei einem Objekt am Rande des Universums (schematisiert).....	267
Bild 140	Entfernungsvektoren bei einem Objekt im Nahbereich des Beobachters (schematisiert).....	267
Bild 141	Verhältnisse am Rande des Universums.....	269
Bild 142	Winkel α als Funktion von Q_0	270
Bild 143	Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ als Funktion von Q_0	270
Bild 144	Länge der Entfernungsvektoren r_R , r_K und r_T als Funktion des Phasenwinkels (Güte Q_0) am Ort der Signalquelle.....	272
Bild 145	Verlauf der Entfernungsvektoren r_R , r_K und r_T am SCHWARZSCHILD-Radius ($Q_0 = 10^0$).....	272
Bild 146	Berechnete scheinbare bolom. Helligkeit für die drei Werte des HUBBLE-Parameters im Vergleich mit den Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts (Standardkerze=Maximum).....	278

Bild 147 Berechnete scheinbare bolom. Helligkeit für Lösung (890) des HUBBLE-Parameters im Vergleich mit den Beobachtungen des Supernova-Kosmologie-Projekts (Standardkerze=Mittelwert)279

Bild 148 Berechnete scheinbare bolometrische Helligkeit für Lösung (890) des HUBBLE-Parameters für weiter entfernte SNe Ia.....280

Tabelle 1 Einige quasistellare Radioquellen78

Tabelle 2 Universelle Naturkonstanten.....81

Tabelle 3 Frequenzen der kosmischen Hintergrundstrahlung116

Tabelle 4 Feldstärke und Energiedichte der kosmischen Hintergrundstrahlung.....119

Tabelle 5 Beziehungen zwischen den Grundgrößen des Raums und des Mikro- und Makrokosmos.....172

Tabelle 6 Feldgrößen des elektrischen, magnetischen und Gravitationsfelds im Vergleich217

Tabelle 7 HUBBLE-Parameter als Funktion lokaler Größen (Übersicht)266

Tabelle 8 Berechnete und gemessene CMBR-Temperatur im Vergleich mit den im Abschnitt 7.5.1. bestimmten Werten des HUBBLE-Parameters274

Tabelle 9 Expansionsraten der Teilchen283

Tabelle 10 Aktuelle Werte der Universellen Naturkonstanten für Lösung (890)292

Konstante	Symbol	C	Wert	Maßeinheit
Lichtgeschwindigkeit	c	◦	$2,99792458 \cdot 10^8$	m s ⁻¹
Induktionskonstante	μ_0	•	$4\pi \cdot 10^{-7}$	Vs A ⁻¹ m ⁻¹
Influenzkonstante	ϵ_0	•	$8,854187817 \cdot 10^{-12}$	As V ⁻¹ m ⁻¹
Leitfähigkeitskonstante	κ_0	•	$1,30605 \cdot 10^{93}$	A V ⁻¹ m ⁻¹
Boltzmannkonstante	k	•	$1,380658 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹
Plancksches Init.quantum	\hbar_1	•	$8,38572 \cdot 10^{26}$	J s
Plancksches Wirk.quantum	\hbar		$1,05457266 \cdot 10^{-34}$	J s
Gravitationskonstante (Init.)	G ₁		$1,32722 \cdot 10^{-193}$	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Gravitationskonstante (Nwt.)	G		$6,6732 \cdot 10^{-11}$	m ³ kg ⁻¹ s ⁻²
Poynting-Vektor Metrik (Init.)	S ₁		$4,417142 \cdot 10^{426}$	W m ⁻²
Poynting-Vektor Metrik	S ₀		$1,38938 \cdot 10^{122}$	W m ⁻²
Feinstrukturkonstante	α		$7,2973530 \cdot 10^{-3}$	1
Güte/Phase Metrik (g ₀₀ ⁻¹)	Q ₀		$7,95178 \cdot 10^{60}$	1
Plancksche Masse	m ₀		$2,17661 \cdot 10^{-8}$	kg
Plancksche Energie	W ₀		$1,95624 \cdot 10^9$	J
Plancksche Länge	r ₀		$1,61612 \cdot 10^{-35}$	m
Plancksche Zeiteinheit	t ₀		$2,6954 \cdot 10^{-44}$	s
Kreisfrequenz Metrik	ω_0		$1,85501 \cdot 10^{43}$	s ⁻¹
Wellenwiderstand Vakuum	Z ₀	◦	$376,73 \approx 2\pi \cdot 60$	Ω
Grenzfrequenz Subraum	ω_1	◦	$1,47506 \cdot 10^{104}$	s ⁻¹
Kleinste Zeiteinheit Vakuum	t ₁	◦	$3,38969 \cdot 10^{-105}$	s
Kleinste Länge Vakuum	r ₁	◦	$2,0324 \cdot 10^{-96}$	m
Hubbleparameter	H ₀		71,9854	km s ⁻¹ Mpc ⁻¹
Hubbleparameter	(ω_{-1})		$2,33283 \cdot 10^{-18}$	s ⁻¹
Gesamtweltalter	2T		$1,35839 \cdot 10^{10}$	a
Lokales Weltalter	T		$6,79193 \cdot 10^9$	a
Lokales Weltalter	(t ₋₁)		$2,14332 \cdot 10^{17}$	s
Weltradius (r _k)	R/2		2,08234	Gpc
Weltradius (r _k)	(r ₋₁)		$6,42552 \cdot 10^{26}$	m

Tabelle 10: Aktuelle Werte der Universellen Naturkonstanten für Lösung (890)

Definitions of Fundamental Constants depending on Q_0

For use with Mathematica

(*Units*)

```
km=1000;
Mpc=3.08572*10^19 km;
minute=60;
hour=60 minute;
day=24*hour;
year=365.24219879*day;
```

(*Basic expressions*)

```
ep0=8.854187817*10^-12;
my0=4 Pi 10^-7;
k=1.380658*10^-23;
G=6.6732*10^-11;
hg=1.05457266*10^-34;
qe=1.60217733*10^-19;
me=9.1093897*10^-31;
mp=1.6726231*10^-27;
mn=1.6749286*10^-27;
ma=1.66057*10^-27;
```

```
(*Permittivity of vacuum*)
(*Permeability of vacuum*)
(*Boltzmann constant*)
(*Gravity constant Bruker*)
(*Planck constant slashed*)
(*Elementary charge*)
(*Electron rest mass*)
(*Proton rest mass*)
(*Neutron rest mass*)
(*Atomic mass unit*)
```

(*Composed expressions*)

```
c=1/Sqrt[my0 ep0];
Z0=Sqrt[my0/ep0];
qn=Sqrt[hg/Z0];
Q884=3/2*(qe^2/ep0/G/me/mp)^(3/2);
Q892=3/8/Pi*qe^4/(ep0^2*me^2*mp*Sqrt[G^3*hg*c]);
Q890=3/2*(1/4/Pi*qe^2*Z0/me*Sqrt[c/G/hg])^3;
Q0=Q890;
Om1=ka0/ep0;
Om0=Sqrt[c^5/G/hg];
H0=Om0/Q0;
H1=3/2*H0;
r1=1/(ka0 Z0);
r0=Q0 r1;
R=Q0^2 r1;
t1=1/(2 Om1);
t0=1/(2 Om0);
T=1/(2 H0);
TT=2T/year;
ka0=c^3/(my0 G hg H0);
G1=G/Q0^3;
h=hg*2*Pi;
h1=hg*Q0;
alpha=1/(4 Pi)*qe^2/qn^2;
m0=Sqrt[hg c/G];
W0=Sqrt[hg c^5/G];
S1=h1 Om1^2/r1^2;
S0=S1/Q0^5;
```

```
(*Speed of light*)
(*Field wave impedance of vacuum*)
(*Planck charge*)
(*Phase angle/Q-factor Solution 884*)
(*Phase angle/Q-factor Solution 892*)
(*Phase angle/Q-factor Solution 890*)
(*Phase angle/Q-factor MAIN SWITCH*)
(*Cutoff frequency of subspace*)
(*Planck's frequency*)
(*Hubble parameter local*)
(*Hubble parameter whole universe*)
(*Planck's length subspace*)
(*Planck's length vacuum*)
(*World radius*)
(*Planck time subspace*)
(*Planck time vacuum*)
(*World time constant*)
(*The Age*)
(*Conductivity of vacuum*)
(*Gravity constant initial*)
(*Planck constant unslashed*)
(*Planck constant initial slashed*)
(*Fine structure constant*)
(*Planck mass*)
(*Planck energy*)
(*Poynting vector metric initial*)
(*Poynting vector metric actual*)
```


10. Kurzzeichen

*	
·	Kennzeichnung der ersten zeitlichen Ableitung
··	Kennzeichnung der zweiten zeitlichen Ableitung
∧	Kennzeichnung eines Spitzenwerts
*	Kennzeichnung eines konjugiert komplexen Wertes
~	Kennzeichnung einer bezugssystemabhängigen Größe (Konstante) ohne Kennzeichnung handelt es sich um eine Variable
A	
a	Beschleunigung
a_0	Bohrscher Wasserstoffradius
a_i	Faktor i
A	Faktor, Amplitude
$A(\omega)$	Amplitudengang
α	Winkel, Dämpfungsmaß
$\alpha_\gamma, \alpha_{\bar{\gamma}}, \alpha_\nu, \alpha_{\bar{\nu}}$	Winkel im metrischen Dreieck
B	
B	Induktion
B_0	Induktion im MLE
B	Faktor
$B(\omega)$	Phasengang
β	Winkel, Phasenmaß, relativistischer Dehnungsfaktor $(1-v^2/c^2)^{-1/2}$
β_0	Phasenmaß des metrischen Wellenfelds
C	
c	Lichtgeschwindigkeit (konstant gegenüber dem Subraum)
$\underline{c}, \underline{\underline{c}}$	Komplexe Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
c_M	Ausbreitungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds
C	Kapazität
C_0	Kapazität des Kugelkondensators im MLE
CMBR	Kosmische Hintergrundstrahlung
D	
D	Elektrische Ladungsdichte (Influenz)
δ	Phasenwinkel MLE, Winkel
δ'_k	KRONECKER-Symbol
∂	Partieller Differentialoperator
∂_b	Partieller Differentialoperator $\partial/\partial b$
E	
E, <u>E</u>	Elektrische Feldstärke
E_0	Elektrische Feldstärke im MLE
e	Elektronenladung, EULERSche Konstante (2,71828...)
e_r	Einheitsvektor an r
ε	Winkel
ε_0	Dielektrizitätskonstante des Subraums (Vakuum)
η	Faktor
η_{ab}	MINKOWSKISCHE Metrik (math.)

F

f	Funktion
F	Funktion
F, \mathbf{F}	Kraft
F_g, \mathbf{F}_g	Gravitationskraft
F_m, \mathbf{F}_m	LORENTZ-Kraft
F_z, \mathbf{F}_z	Zentrifugalkraft
${}_0F_1$	Hypergeometrische Funktion
ϕ	$2\omega_0 t - \gamma r$, elektrisches Potential
φ	Schnittwinkel des metr. Geschwindigkeitsvektors mit der x-Achse
φ_0	Magnetischer Fluß im MLE (Augenblickswert)
φ_i	Initialwert von φ_0
Φ	NEWTONsches Gravitationspotential
$\Phi(\omega)$	Phasenverschiebung bei Wellenausbreitung

G

g	Fallbeschleunigung
g_{ik}, g^{ik}	Metrik (mathematisches Objekt)
G	Gravitationskonstante (nicht fest)
G_0	Spezifischer Leitwert pro Meter
G_1	Gravitationskonstante bei $Q_0=1$
$\gamma_\gamma, \gamma_{\bar{\gamma}}, \gamma_n, \gamma_{\bar{\gamma}}$	Winkel im metrischen Dreieck
$\underline{\gamma}$	Komplexes Ausbreitungsmaß
Γ	Gammafunktion
Γ_{bc}^a	Metrischer Zusammenhang

H

h_{ik}, h^{ik}	Vierervektoren
H, H_0, H_1	HUBBLE-Parameter
$H_n^{(1)}(x)$	Hankelfunktion n-ter Ordnung $J_n(x) + jY_n(x)$
$H_n^{(2)}(x)$	Konj. komplexe Hankelfunktion n-ter Ordnung $J_n(x) - jY_n(x)$
$\mathbf{H}, \underline{\mathbf{H}}$	Magnetische Feldstärke
\mathbf{H}_0	Magnetische Feldstärke im MLE
\hbar	PLANCKsches Wirkungsquantum (nicht fest)
\hbar_1	PLANCKsches Wirkungsquantum bei $Q_0=1$
\hbar_i	PLANCKsches Wirkungsquantum Initialwert

I

i	Elektrischer Strom (Augenblickswert)
i_0	Elektrischer Strom im MLE (Augenblickswert)
i_1, i_2, i_3	Teilströme im MLE-Modell
I	Elektrischer Strom
$\text{Im}(x)$	Imaginärteil

J

j	Imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$
J_0	Massenträgheitsmoment des MLE
$J_0(x)$	Besselfunktion 0-ter Ordnung
$J_n(x)$	Besselfunktion n-ter Ordnung

K

k	BOLTZMANN-Konstante
---	---------------------

κ	Kopplungskonstante der ART
κ_0	Spezifische Leitfähigkeit des Subraums
κ_{OR}	Spezifische Leitfähigkeit der Metrik (Vakuuum)
L	
l	Länge
L	Induktivität
L	Drehimpuls
L_0	Induktivität des MLE
$L(x)$	Lagrangesche Funktion
$\mathcal{L}(x)$	Laplace-Transformierte
lg	\log_{10}
ln	\log_e
lx	LAMBERTs W-Funktion $lx(xe^x) = 1$ (ProductLog)
λ	Wellenlänge
$\Lambda, \mathbf{\Lambda}$	Wellenzahlvektor
M	
m	Faktor, Masse
m_*	SR-Ruhmasse
m_0	Masse des MLE, AR-Ruhmasse
m_e	Elektronenmasse
m_p	Protonenmasse
M	Masse
MLE	MINKOWSKIsches Linienelement (physikalisches Objekt)
μ	Induktionskonstante allgemein ($\mu_0\mu_r$)
μ_0	Induktionskonstante des Subraums (Vakuuum)
N	
n	Anzahl, Faktor
ν	Neutrino, Frequenz
O	
$0_0(x)$	Gegen Null strebende Reihe
$0_2(x)$	Gegen Null strebende Reihe
Ω	Relative Frequenz $\omega/(2\omega_1)$ bzw. $\omega/(2\omega_0)$
P	
p	Laplace-Operator
P	Leistung, Punkt
P_0	Verlustleistung des MLE
P_ν	Verlustleistung allgemein
π	Verhältnis von Umfang und Durchmesser am Kreis (3,1415...)
ψ	Magnetisches Potential
Ψ	Produkt MG
$\Psi(\omega)$	Durch Amplitudengang bedingter Anteil am Dämpfungsfaktor α
Q	
q	Ladung (Augenblickswert)
q_0	Ladung des Kugelkondensators im MLE
Q_0	Güte und Phasenwinkel ($2\omega_0 t$) im MLE
QED	Quantenelektrodynamik
QM	Quadratisches Mittel

R

r	Radius absolut
r'	Radius nach Substitution
r	Radius relativ $\left(\frac{2r}{\tilde{R}}\right)^{\frac{2}{3}}$
r_0	PLANCKsche Elementarlänge (Radius)
r_1	PLANCKsche Elementarlänge für $Q_0=1$ (Subraumkonstante)
r_C	Radius des Kugelkondensators im MLE
r_e	Elektronenradius nach klassischer Auffassung
R	Weltradius $2cT$
R	Skalare Krümmung
R_0	Parallelwiderstand im MLE-Modell
R_{0R}	Reihenwiderstand im MLE-Modell
R_s	SCHWARZSCHILD-Radius
R_{ik}, R^{ik}	RICCI-Tensor
R^{aa}_{bcd}, R_{abcd}	RIEMANNscher Krümmungstensor
$\text{Re}(x)$	Realteil
ρ	Dichte
$\rho_0(x)$	Funktion (209)

S

s	Weg
S	Entropie, elektr. Stromdichte
S, S_b	Entropie
\mathbf{S}, \mathbf{S}_k	Leistungsdichte (POYNTING-Vektor)
$\sigma(t)$	DIRAC-Impuls
σ_i	Eigenwerte

T

t	Zeit absolut (im Bezugssystem)
t	Zeit relativ $\left(1 + \frac{t}{\tilde{T}}\right)^{\frac{1}{2}}$
t_1	Periode der Schwingung des MLE bei $Q_0=1$
T	Lokales Weltalter, Gesamtweltalter = $2T$
T_{Ph}	Phasenlaufzeit
T_{Gr}	Gruppenlaufzeit
T_ω	Periodendauer der Funktion $\sin \omega$
T, T_b	Temperatur
τ, τ_0, τ_1	Zeitkonstanten
θ	Winkelfunktion (209)
ϑ	Winkel im Koordinatensystem

U

u	Spannung (Augenblickswert)
u_0	Spannung im MLE-Modell (Augenblickswert)
U	Spannung
U	Gravitationspotential (neue Definition)

V

v	Geschwindigkeit
v_M	Geschwindigkeit gegenüber der Metrik

v_{Ph}	Phasengeschwindigkeit
v_{Gr}	Gruppengeschwindigkeit
V	Verstimmung (Schwingkreis), magnetische Ursprung

W

w	Energiedichte
W	Energie
W_0	Energie des MLE
ω	Kreisfrequenz allgemein
ω_0	Kreisfrequenz des MLE
ω_1	Kreisfrequenz des MLE bei $Q_0=1$
ω_D	DEBROGLIE-Kreisfrequenz Materie
ω_e	Emissions-Kreisfrequenz CMBR
ω_s	Immissions-Kreisfrequenz CMBR
ω_k	Kreisfrequenz CMBR heute
ω_T	Thermisches Maximum CMBR

X

x	Weg
ξ	Drehwinkel bei der LORENTZ-Transformation, Korrekturfaktor
Ξ	Magnetische Ladungsdichte (Dauermagnet)
$\Xi(r,t)$	Rotverschiebung bei Wellenausbreitung

Y

y	Weg
Y_0	Besselfunktion 0-ter Ordnung (von NEUMANNsche Funktion)
Y_n	Besselfunktion n-ter Ordnung (von NEUMANNsche Funktion)

Z

z	Weg, Faktor, Rotverschiebung
Z	Wellenwiderstand
Z_0	Wellenwiderstand des Vakuums ($\approx 2\pi \cdot 60 \Omega$)
Z_F	Feldwellenwiderstand komplex

11. Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Arbeit selbständig angefertigt und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen verwendet habe. Beim Abschnitt 3.1.2. handelt es sich um ein Originalzitat [1]. Abdruck, Vervielfältigung und Veröffentlichung dieses Teils sind nur mit Zustimmung des Verlages gestattet. Der Abdruck von Bild 74 erfolgt mit freundlicher Genehmigung des Autors [29]. Die Grafik entspricht nicht dem Originalzustand und wurde ergänzt.

Bei Veröffentlichungen dieser Arbeit in deutscher Sprache ist eine Transskription nach den Regeln der neuen Rechtschreibung (ab 1999) nicht statthaft.

*Ist der Verlauf der Planckschen
Strahlungsfunktion das Resultat der Existenz
einer oberen Grenzfrequenz des Vakuums?*

Autor: Dipl. Ing. Gerd Pommerenke • Augsburg 2005

E-Mail-Adresse: GerdPommerenke@arcor.de

Titel der deutschen Originalausgabe:

Ist der Verlauf der Planckschen Strahlungsfunktion das Resultat der Existenz einer oberen
Grenzfrequenz des Vakuums?

2. Ausgabe Augsburg 2006

1. Grundlagen

In [1] wurde ein Modell veröffentlicht, das die Expansion des Universums als Folge der Existenz eines metrischen Wellenfelds definiert. Die Zeitfunktion basiert auf der Hankelfunktion, die sich wiederum aus der Summe zweier Besselfunktionen (J_0 und Y_0) zusammensetzt. Die besonderen Eigenschaften der Besselfunktionen führen zu einer Zunahme der Wellenlänge, die durch den Abstand zwischen zwei Nulldurchgängen definiert ist. Das Modell führt damit zu einer Quantisierung des Universums in einzelne Linienelemente mit besonderen physikalischen Eigenschaften. Ein einzelnes Linienelement kann durch das Modell eines verlustbehafteten Schwingkreises mit Parallelwiderstand beschrieben werden. Eine besondere Eigenschaft des Modells besteht darin, daß die Güte Q dieses Schwingkreises identisch mit dem Phasenwinkel $2\omega_0 t$ o.g. Besselfunktion ist. Es gilt $Q_0 = 2\omega_0 t$. Der Wert ω_0 entspricht hierbei der PLANCKSchen Frequenz.

Es wurde eine spezielle Lösung der MAXWELLSchen Gleichungen für die Hankelfunktion mit überlagerter Störfunktion gefunden, die die Wellenausbreitung im Vakuum beschreibt und die Expansion mit einschließt. Diese spezielle Lösung verfügt über eine eigene Ausbreitungsgeschwindigkeit gegenüber dem leeren Raum (Subraum), die zum derzeitigen Zeitpunkt fast Null ist. Hauptidee des Modells ist, daß sich diese Ausbreitungsgeschwindigkeit geometrisch zu der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer überlagerten Welle addiert, wobei die Gesamtgeschwindigkeit gegenüber dem Subraum immer exakt c beträgt. Damit läßt sich die kosmologische Rotverschiebung genau beschreiben.

Eine Schlußfolgerung aus dem Modell ist die Existenz einer oberen Grenzfrequenz des Vakuums, die bisher nicht nachgewiesen werden konnte, da ihr Wert um Größenordnungen über dem technisch machbaren liegt. Eine andere Schlußfolgerung aus dem Modell ist die Vermutung, daß jedes Photon reell oder/und virtuell mit einem Ursprung bei $Q_0 = 1/2$ verbunden ist. Das ist die Frequenz, bei der die bei der Bildung der metrischen Wellenfunktion überschüssige Energie in ebendiese als überlagerte Welle eingekoppelt wurde, wo sie bis heute als kosmische Hintergrundstrahlung beobachtet werden kann. Weiterhin konnte festgestellt werden, daß die Bandbreite im unteren Frequenzbereich exakt der eines Schwingkreises mit der Güte $1/2$ entspricht, was mit den Bedingungen zum Zeitpunkt der Einkopplung übereinstimmt.

Da die kosmische Hintergrundstrahlung exakt der PLANCKSchen Strahlungsformel gehorcht, muß dies aufgrund der Ununterscheidbarkeit einzelner Photonen für jeden beliebigen schwarzen Strahler gelten. Daraus ergibt sich die Vermutung, daß der Abfall im oberen Frequenzbereich Ursache der Existenz einer oberen Grenzfrequenz des Vakuums sein müßte. In [1] wurde bereits ein einfacher Versuch einer Approximation vorgenommen, wobei mehrere Werte des zeitabhängigen Frequenzgangs $A(\omega) \cdot \cos\phi$ mit der Ausgangsfunktion multipliziert wurden, was zu einer, gemessen am einfachen Verfahren, guten Übereinstimmung führte. Ziel dieses Artikels ist es, das Verfahren noch weiter zu verbessern, um präzisere Aussagen machen zu können. Zu beachten ist bei dem Modell, daß mit wenigen Ausnahmen (c , μ_0 , ϵ_0 , κ_0 , k) die meisten fundamentalen Naturkonstanten zeit- und bezugssystemabhängig (\sim) sind. Und es gibt eine von Null verschiedene Leitfähigkeit des Subraums κ_0 .

2. WIENSches Verschiebungsgesetz und Ausgangsfunktion

Bei der Betrachtung des WIENSchen Verschiebungsgesetzes fällt ins Auge, daß die Verschiebung genau an der unteren Flanke der PLANCKSchen Strahlungsformel geschieht, die in diesem Teil mit der Flanke eines Schwingkreises der Güte $1/2$ zusammenfällt. Wenn wir das WIENSche Verschiebungsgesetz (902)¹ genauer betrachten, so fällt hier vor allem der Faktor 2,821439372 ins Auge. Beim Schwingkreis der Güte $1/2$ wäre hierfür eher der Faktor $2\sqrt{2}$ zutreffend, wobei die 2 von der Ausgangsfrequenz $2\omega_1$ stammt, der Ausdruck $\sqrt{2}$ entsteht durch die Drehung des Koordinatensystems um $\pi/4$.

¹ Dreistellige Numerierungen beziehen sich immer auf [1]

Nun ist die Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes bei starken Gravitationsfeldern bisher nicht nachgewiesen und weder die PLANCKsche Strahlungsformel noch das WIENSche Verschiebungsgesetz enthalten ja irgendeine Information darüber, wie sich die Temperatur ändert, wenn sie sich ändert. Nach [1] gilt:

$$T_k = \frac{1}{2,821439372} \frac{\hbar_1 \omega_1}{6k} Q_0^{-\frac{5}{2}} = 0,0590715038 \frac{\hbar \omega_0}{k} Q_0^{-\frac{1}{2}} \quad \omega_1 = \frac{\kappa_0}{\epsilon_0} \quad (902)$$

Die Berechnung ergibt einen Wert, der 0,2431K über der tatsächlich gemessenen Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung (2,7250K) liegt. Im Abschnitt 5.3.1. von [1] erkennt man, daß Nichtlinearitäten in der Verschiebung auftreten, wenn die Güte nahe bei 1 liegt. Diese könnten eine Ursache für diese Abweichung sein.

Bei einer Recherche habe ich im Internet [2] eine ausführliche Ableitung des WIENSchen Verschiebungsgesetzes gefunden. Den Wert des Proportionalitätsfaktors erhält man durch die Bestimmung des Maximums in der PLANCKschen Strahlungsformel. Wir gehen von (382) aus:

$$dS_k = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar \omega^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \mathbf{e}_s d\omega \quad \text{PLANCKsche Strahlungsformel} \quad (382)$$

$$dS_k = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k^3 T^3}{\hbar^2 c^2} \left(\frac{\hbar \omega}{kT} \right)^3 \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} \mathbf{e}_s d\omega \quad x = \frac{\hbar \omega}{kT} \quad d\omega = \frac{kT}{\hbar} dx \quad (1)$$

$$dS_k = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 c^2} \frac{x^3}{e^x - 1} \mathbf{e}_s dx \quad \frac{d}{dx} \frac{x^3}{e^x - 1} = 0 \quad (2)$$

$$3 \frac{x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \quad (3)$$

$$3x^2(e^x - 1) - x^3 e^x = 0 \quad x^3 e^x = 3x^2(e^x - 1) \quad (4)$$

$$e^x(x - 3) = -3 \quad y = x - 3 \quad x = 3 + y \quad (5)$$

$$ye^{y+3} = ye^y e^3 = -3 \quad ye^y = -3e^{-3} \quad (6)$$

$$x = 3 + \text{lx}(-3e^{-3}) = 2,821439372 \quad \text{lx}(xe^x) = 1 \quad (7)$$

lx ist LAMBERTs W-Funktion (ProductLog[]). Nach Einsetzen in den mittleren Ausdruck von (1) erhalten wir schließlich das WIENSche Verschiebungsgesetz:

$$\hbar \omega_{\max} = 2,821439372 kT \quad \text{WIENSches Verschiebungsgesetz} \quad (8)$$

Wenn es uns nun gelingt, das gleiche auch für die Ausgangsfunktion bei $Q=1/2$ durchzuführen, und kämen wir dabei auf dasselbe Ergebnis, hätten wir die Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes bei starken Gravitationsfeldern bewiesen. Zunächst müssen wir jedoch die Ausgangsfunktion in eine für die weitere Bearbeitung geeignete Form bringen. Wir gehen von (380) aus und substituieren:

$$P_v = \frac{P_s}{1 + v^2 Q^2} \quad v = \frac{\omega}{\omega_s} - \frac{\omega_s}{\omega} \quad \omega_s = 2\omega_1 \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_s} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_1} \quad (9)$$

Der Ausdruck stammt aus der Elektrotechnik und beschreibt die Verlustleistung P_v eines Schwingkreises der Güte Q bei der Frequenz ω (siehe [3]), v ist die Verstimmung. Die Güte

ist bekannt und beträgt $Q=1/2$ bei $\omega_s=2\omega_1$. Der rechte Ausdruck ergibt sich direkt aus dem Abtasttheorem. Die Grenzfrequenz des Subraums ω_1 ist der Wert ω_0 bei $Q=1$. Nach Einsetzen erhalten wir die folgenden Ausdrücke:

$$v = \Omega - \Omega^{-1} \quad v^2 = \Omega^2 + \Omega^{-2} - 2 \quad v^2 Q^2 = \frac{1}{4} \Omega^2 + \frac{1}{4} \Omega^{-2} - \frac{1}{2} \quad (10)$$

$$P_v = \frac{P_s}{\frac{1}{4} \Omega^2 + \frac{1}{4} \Omega^{-2} + \frac{1}{2}} \cdot \frac{4\Omega^2}{4\Omega^2} = 4P_s \frac{\Omega^2}{\Omega^4 + 2\Omega^2 + 1} = 4P_s \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad (11)$$

Dieser Ausdruck ist ja mehrfach in [1] aufgetreten, u.a. auch bei der Gruppenlaufzeit T_{Gr} (152), die wir allerdings für eine Frequenz ω_1 bestimmt hatten. Für eine Frequenz $2\omega_1$ gilt für T_{Gr} und die Energie W_v :

$$T_{Gr} = \frac{dB(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{\omega_1} \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad W_v = \frac{1}{6} P_s T_{Gr} = \frac{2}{3} \frac{P_s}{\omega_1} \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad (12)$$

Der Faktor $1/6$ stammt von der Aufspaltung der Energie auf 6 Linienelemente (MLE) bei der Einkopplung. Er kommt häufig in thermodynamischen Beziehungen vor, was nicht verwundert. Die Gesamtenergie der CMBR bei Einkopplung ergibt sich damit als das Produkt aus Verlustleistung und Gruppenlaufzeit, das ist die mittlere Zeit, die sich die Welle innerhalb des MLE aufhält. Dies aber nur nebenbei. Mit Hilfe von (11) erhalten wir:

$$P_v = 4b P_s \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad P_v = 512b \hbar_1 \omega_1^2 \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \quad (13)$$

b ist ein Faktor, den wir später bestimmen wollen. Setzen wir ihn zuerst gleich Eins. Den Wert von P_s haben wir mit Hilfe von (394) bestimmt, wobei wir die Werte zum Zeitpunkt $Q=1/2$ eingesetzt haben. Interessanterweise ist der HUBBLE-Parameter H_0 zum Zeitpunkt $t_{0,5}$ größer als ω_1 und ω_0 . Für ein einzelnes Linienelement gilt:

$$\omega_{0,5} = \frac{\omega_1}{Q_{0,5}} = \frac{\omega_1}{\frac{1}{2}} = 2\omega_1 \quad H_{0,5} = \frac{\omega_1}{Q_{0,5}^2} = \frac{\omega_1}{\frac{1}{4}} = 4\omega_1 \quad (14)$$

$$P_s = \frac{\hat{h}_i}{4\pi t_{0,5}^2 Q_{0,5}^4} = \frac{\hat{h}_i}{2\pi} \frac{2^5}{4t_{0,5}^2} = 32\hat{h}_i H_{0,5}^2 = 128\hat{h}_i \omega_1^2 \quad \frac{\hat{h}_i}{2\pi} = \hbar_1 = \frac{\hbar_{0,5}}{2} \quad (15)$$

Ausdruck (13) ist sehr gut für die Beschreibung der Verhältnisse an der Signalquelle geeignet. Hier macht die Leistung mehr Sinn als der POYNTING-Vektor \mathbf{S}_k . Für einen Vergleich mit (382) benötigen wir aber gerade einen Ausdruck für \mathbf{S}_k , quasi eine Art PLANCKsches Strahlungsgesetz für technische Signale mit der Bandbreite $2\omega_1/Q_{0,5}=4\omega_1$. Dieses würde dann in etwa so aussehen:

$$d\mathbf{S}_k = 4bA \left(\frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right)^2 \mathbf{e}_s d\Omega \quad (16)$$

Den Faktor A bestimmen wir durch Koeffizientenvergleich mit (3). Wir gehen davon aus, das WIENSche Verschiebungsgesetz (8) würde gelten und substituieren folgendermaßen:

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k^4 T^4}{\hbar^3 c^2} \quad c = \omega_1 Q^{-1} r_1 Q \quad (17)$$

In den Ausdruck $k^4 T^4$ setzen wir die Frequenz $2\sqrt{2}\omega_1$ als Ausgangsfrequenz ein. Dies ist von Vorteil, wie wir noch sehen werden. Bei dieser Frequenz handelt es sich allerdings nicht um

eine metrische ($\omega_x \sim Q^{-1}$), sondern um eine überlagerte Frequenz ($\omega \sim Q^{-3/2}$). Bei der Rotverschiebung des Ausgangssignals wird ebenfalls nicht der Faktor 2,821439372, sondern $2\sqrt{2}$ wirksam. Daher gilt:

$$k^4 T^4 = \frac{(2\sqrt{2})^4}{(2\sqrt{2})^4} \hbar_1^4 Q^{-4} \omega_1^4 Q^{-6} = \hbar_1^4 \omega_1^4 Q^{-10} \quad Q^{-10} = \frac{Q^{-8}}{Q^2} \quad (18)$$

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar_1^4 \omega_1^4 Q^{-8}}{\hbar_1^3 Q^{-3} \omega_1^2 Q^{-2} r_1^2 Q^4} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar^4 \omega_0^4}{\hbar^3 \omega_0^2 r_1^2 Q^4} = \frac{1}{\pi} \frac{\hbar \omega_0^2}{4\pi R^2} \quad (19)$$

$$4A = \frac{4}{\pi} \frac{\hbar \omega_0^2}{4\pi r_0^2 Q^2} = \frac{4}{\pi} \frac{\hbar \omega_0^2}{4\pi R^2} \quad R \text{ für } Q \gg 1 \quad (20)$$

$$dS_k = \frac{4b}{\pi} \frac{\hbar \omega_0^2}{4\pi R^2} \left(\frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right)^2 \mathbf{e}_s d\Omega \quad R \text{ für } Q \gg 1 \quad (21)$$

Dies ergibt allerdings nur den Ausdruck ohne Berücksichtigung der Rotverschiebung. Die tatsächlichen Werte zum Zeitpunkt der Einkopplung bestimmen wir wieder, indem wir die Werte zum Zeitpunkt $Q=1/2$ einsetzen. Es gilt:

$$A = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\hbar_1^4 \omega_1^4 Q^{-8}}{\hbar_1^3 Q^{-3} \omega_1^2 Q^{-2} r_1^2 Q^4} = \frac{2^{8-3-2+4}}{4\pi^2} \frac{\hbar_1^4 \omega_1^4}{\hbar_1^3 \omega_1^2 r_1^2} = \frac{128}{\pi} \frac{\hbar \omega_1^2}{4\pi r_1^2} \quad (22)$$

$$4A = \frac{512}{\pi} \frac{\hbar \omega_1^2}{4\pi r_1^2} \quad dS_k = \frac{512b}{\pi} \frac{\hbar \omega_1^2}{4\pi r_1^2} Q^{-7} \left(\frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right)^2 \mathbf{e}_s d\Omega \quad (23)$$

b wird zu einem späteren Zeitpunkt bestimmt. Man sieht, der POYNTING-Vektor ist gleich dem Quotienten einer Leistung P_k bzw. P_s und der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius R (Weltradius), exakt nach Definition. Läßt man die Fläche weg, müßte man direkt die Sendeleistung P_v erhalten. Ein Vergleich mit (13) zeigt, daß beide Werte zwar dieselbe Größenordnung haben, sich aber durch einen Faktor $1/\pi$ unterscheiden. Dies ist auch kein Wunder, beschreibt Ausdruck (13) doch die Verhältnisse in einem einzelnen Linienelement (MLE), Ausdruck (24) die für den gesamten Rauminhalt einer Kugel mit dem Radius $r_1/2 = r_{0.5}$. Innerhalb einer Kugel mit dem Durchmesser πr_0 befinden sich aber genau π Linienelemente und die Gitterkonstante ist gleich πr_0 , was den Faktor $1/\pi$ erklären würde. In obengenannten Ausdrücken ist die parametrische Dämpfung von $1Np/R$ nicht enthalten, die bei der Ausbreitung im Raum auftritt. Diese muß ggf. extra berücksichtigt werden.

Nun haben wir die wesentlichen Voraussetzungen geschaffen und können den nächsten Schritt wagen, den Nachweis der Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes bei starken Gravitationsfeldern. Grundidee war ja, daß sich die Plancksche Strahlungsformel (382) durch Anwendung der Grenzfrequenz der Metrik (302) auf die Funktion der Verlustleistung P_v eines Schwingkreises der Güte $Q=1/2$ (13) ergeben soll. Wir gehen analog (2) vor, indem wir die erste Ableitung des Klammerausdrucks (23) gleich Null setzen. Eine Substitution wie in (1) ist nicht mehr notwendig, da der Ausdruck bereits korrekt ist. Es gilt:

$$\frac{d}{d\Omega} \left(\frac{\Omega}{1+\Omega^2} \right)^2 = \frac{2\Omega}{(1+\Omega^2)^2} - \frac{4\Omega^3}{(1+\Omega^2)^3} = \frac{2\Omega(1-\Omega^2)}{(1+\Omega^2)^3} = 0 \quad (24)$$

$$2\Omega(1-\Omega^2) = 0 \quad \Omega_1 = 0 \quad \text{Minimum} \quad \Omega_{2,3} = \pm 1 \quad \text{Maximum} \quad (25)$$

Die erste Lösung ist trivial, die zweite und dritte sind identisch, wenn man negative Frequenzen zuläßt (eingehender und ausgehender Vektor). Nun müssen wir nur noch eine

Substitution für Ω finden, bei der (382) und (23) im unteren Bereich zur Deckung kommen. Dies wäre dann das Verschiebungsgesetz für das Ausgangssignal (22). Da der Anstieg beider Funktionen im unteren Bereich gleich groß ist, gibt es theoretisch eine unendliche Anzahl von Überlagerungen, wobei nur eine davon sinnvoll ist. Als weiteres Kriterium führen wir daher ein, daß beide Maxima bei derselben Frequenz angesiedelt sein sollen. Das Verschiebungsgesetz für das Ausgangssignal würde dann folgendermaßen lauten:

$$\hbar\omega_{\max} = a kT \quad \text{Verschiebungsgesetz Ausgangssignal} \quad (26)$$

wobei wir den Faktor a noch bestimmen müssen. Wie sich zeigt, müssen wir auch die Ausgangsfunktion selbst noch mit einem bestimmten Faktor b multiplizieren, um eine Deckung zu erreichen. Die 4 hatten wir ja bereits herausgezogen. Wir setzen für a nacheinander den Wert $2\sqrt{2}$ und $2,821439372$ ein und bestimmen b numerisch mit Hilfe der Beziehung und der Funktion FindRoot[] mit Hilfe der Substitution $2x=ay$:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^3}{e^{\frac{a}{2}} - 1} - 4b \left(\frac{\frac{y}{2}}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}\right)^2 = 0 \quad y = 10^{-5} \quad \begin{array}{ll} b \rightarrow 2 & \text{für } a = 2\sqrt{2} \\ b \rightarrow 2,009918917 & \text{für } a = 2,821439372 \end{array} \quad (27)$$

In beiden Fällen liegen die Maxima exakt übereinander. Der untere Wert a ist gleich dem Faktor aus (903). Daher scheint es, daß bei Bezügen bis auf den Ursprung jeder Welle bei $2\omega_1$, multipliziert mit $\sqrt{2}$, das durch die Drehung des Koordinatensystems um $\pi/4$ bedingt ist, eher die Näherungslösungen mit dem Faktor $2\sqrt{2}$ gelten. Bei niedrigeren Frequenzen gilt dann aber wieder der Faktor $2,821439372$ des WIENSchen Verschiebungsgesetzes.

Zum genauen Nachweis der Gültigkeit des WIENSchen Verschiebungsgesetzes beim Vorhandensein starker Gravitationsfelder reicht dieser Ansatz jedoch nicht aus. Wir müssen auch nachweisen, daß sich das Maximum der PLANCKschen Strahlungsfunktion exakt gemäß dem WIENSchen Verschiebungsgesetz verhält, d.h. die Approximation und die Zielfunktion müssen exakt zur Deckung kommen. Da der Unterschied zwischen einem Faktor $2\sqrt{2}$ und $2,821439372$ immerhin 0,5% beträgt, werden wir die Untersuchung mit beiden Werten durchführen. Dargestellt sind nur die Beziehungen für $b=2\sqrt{2}$. Nun können wir darangehen, die einzelnen Beziehungen aufzustellen:

$$\hbar\omega_{\max} = 2\sqrt{2} kT \quad \text{Verschiebungsgesetz Ausgangssignal} \quad (28)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{\hbar\omega}{kT_k} = \frac{x}{a} = \frac{y}{2} \quad y = \frac{\omega}{\omega_1} \quad b = 2 \quad (29)$$

Damit haben wir unsere Ausgangsfunktion gefunden. In y lautet sie folgendermaßen:

$$dS_k = \frac{16}{\pi} \frac{\hbar\omega_0^2}{4\pi R^2} \left(\frac{\frac{y}{2}}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}\right)^2 \mathbf{e}_s dy \quad R \text{ für } Q \gg 1 \quad (30)$$

Uns interessiert aber nicht der absolute Wert, sondern nur der relative Pegel:

$$dS_1 = 8 \left(\frac{\frac{y}{2}}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2}\right)^2 dy \quad (31)$$

Die Approximation wollen wir mit dS_2 bezeichnen. Für die Zielfunktion dS_3 erhalten wir:

$$dS_3 = \frac{\left(2,821439\frac{y}{2}\right)^3}{e^{2,821439\frac{y}{2}} - 1} dy \quad (32)$$

Im Bild 1 ist der Verlauf der Ausgangsfunktion und der PLANCKschen Kurve dargestellt.

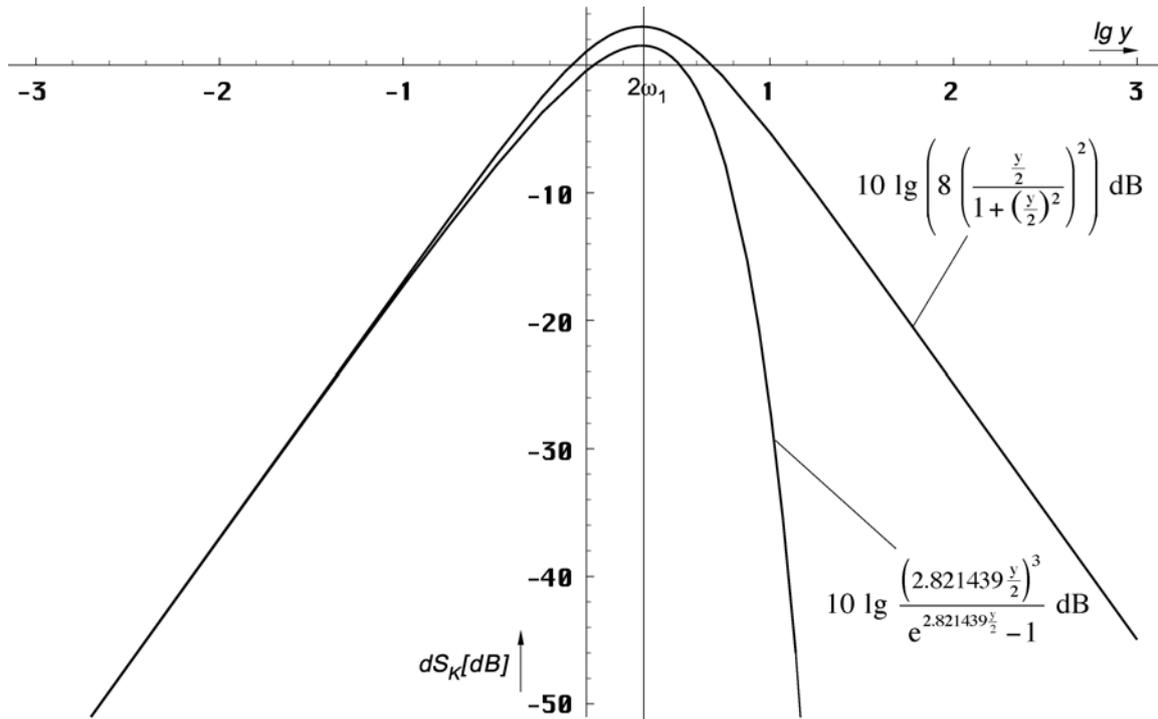


Bild 1
Plancksche Strahlungsformel und Ausgangsfunktion
in der Überlagerung (logarithmisch, relativer Pegel)

3. Lösung und Auswertung

In diesen Beziehungen ist natürlich keine Verschiebungsinformation $y(Q)$ enthalten. Da es sich bei dem betrachteten System um ein Minimalphasensystem handelt, müssen wir nun die Ausgangsfunktion dS_1 mit dem Produkt $A(\omega) \cdot \cos\phi$ (Frequenzgang) multiplizieren. $A(\omega)$ ist der Amplitudengang, der Ausdruck $\cos\phi$ steht für den Wirkanteil (Realteil), denn nur dieser wird übertragen. Das Ergebnis ist unsere Approximation dS_2 . Der Frequenzgang gilt aber nur für ein einzelnes Linienelement, das von dem Signal in der Zeit r_0/c durchmessen wird. Dabei ist r_0 gleich der PLANCKSchen Länge und identisch mit der Wellenlänge o.g. metrischer Wellenfunktion. D.h. man muß die Multiplikation mit dem Frequenzgang beliebig oft durchführen, solange, bis sich das Ergebnis (fast) nicht mehr ändert.

Dabei nimmt aber sowohl die Frequenz der Ausgangsfunktion als auch die Grenzfrequenz (Frequenzgang) stetig ab. Daher ist es angebracht, anstatt die Lage der Ausgangsfunktion andauernd zu verschieben, dies erst ganz am Ende beim Ergebnis dS_2 (Approximation) vorzunehmen (Frequenz und Amplitude). Für den Nachweis unserer Hypothese ist diese letzte Verschiebung allerdings nicht von Belang, so daß wir sie hier nicht vornehmen werden.

Ein weiteres Problem gibt es beim Amplitudengang $A(\omega)$ und beim Phasenwinkel ϕ . Da sich auch die Grenzfrequenz $\omega_0 = f(Q, \omega_1)$ und die Frequenz ω nach unterschiedlichen Funktionen ändern, bereitet es Schwierigkeiten, einen brauchbaren Algorithmus aufzustellen. Wir nutzen daher die Tatsache, daß es keinen Unterschied macht, ob man bei gleichbleibender Grenzfrequenz die Frequenz der Eingangsfunktion verringert oder bei gleichbleibender Eingangsfrequenz die Grenzfrequenz nach oben verschiebt. Wir wählen diesen zweiten Weg incl. der Verschiebung der Approximation am Ende der Berechnung. Dies umso mehr, da wir es ansonsten mit zwei zeitabhängigen Größen (Eingangsfrequenz und Grenzfrequenz) zu tun hätten. Für die Approximation gilt:

$$dS_2(y) = 8 \left(\frac{\frac{y}{2}}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \right)^2 \int_{\frac{1}{2}}^{Q_0} A(Q) \cos\phi(Q) dQ dy \quad (33)$$

Der Wert $Q_0=7,9518 \cdot 10^{60}$ ist der aktuelle Wert der Güte und des Phasenwinkels der metrischen Wellenfunktion. Er bestimmt damit die obere Grenze der Multiplikation bzw. Summation. Ausdruck (33) sieht für den Leser vielleicht etwas merkwürdig aus. Es handelt sich um ein Produktintegral, d.h. anstatt zu summieren, muß man multiplizieren. Glücklicherweise läßt sich der Frequenzgang als e-Funktion darstellen, so daß sich das Produkt in eine Summe verwandelt. Wir müssen dann nur den Exponenten ganz normal integrieren. Den Frequenzgang inclusive Phasenkorrektur erhalten wir mit Hilfe der komplexen Übertragungsfunktion (150) zu:

$$A(\omega) \cdot \cos \phi = e^{\Psi(\omega)} \quad \text{Frequenzgang eines Linielements} \quad (34)$$

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \Omega^2 \right) - \frac{\Omega^2}{1 + \Omega^2} + \ln \cos \left(\arctan \Omega - \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} \right) \quad (302)$$

Als nächstes substituieren wir Ω durch y mit Hilfe von (29):

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2 \right) - \frac{\left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} + \ln \cos \left(\arctan \frac{y}{2} \frac{1}{\xi} - \frac{\frac{y}{2} \frac{1}{\xi}}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} \right) \quad (35)$$

Der Wert ω im Zähler von y stellt die jeweilige Frequenz der kosmischen Hintergrundstrahlung dar, für die wir gerade die Amplitude bestimmen wollen. Er ist identisch mit dem ω in der PLANCKSchen Strahlungsformel. Dabei handelt es sich um eine überlagerte Frequenz, die in der Näherung proportional $Q^{-3/2}$ ist. Anstelle des Werts ω_1 im Nenner müßte beim Frequenzgang eigentlich die PLANCKSche Frequenz ω_0 stehen, das ist auch die Grenzfrequenz bei der Übertragung von einem Linielement auf ein anderes. Bei einer Güte $Q=1$ ist ω_0 aber genau gleich ω_1 , wobei ω_0 sich mit der Zeit ändert, ω_1 aber durch Größen des Subraums fest definiert ist und daher einen unveränderlichen Wert hat. Es gilt $\omega_0 = \omega_1/Q$. Die Frequenz ω_0 ist exakt proportional Q^{-1} , was bedeutet, daß auch y zeitabhängig und proportional $Q^{-1/2}$ ist.

Nun wollen wir aber den Wert ω einfrieren, zumindest bis zum Ende der Berechnung, was zur Folge hat, daß wir y durch eine zusätzliche Funktion ξ dividieren müssen, die proportional $Q^{1/2}$ ist. Es gilt $\xi = cQ^{1/2}$ und

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2 \right) - \frac{\left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} + \ln \cos \left(\arctan \frac{y}{2} \frac{1}{\xi} - \frac{\frac{y}{2} \frac{1}{\xi}}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} \right) \quad (36)$$

Der Faktor c ergibt sich aus den Ausgangsbedingungen bei $Q=1/2$ (Resonanzfrequenz $2\omega_1$, Grenzfrequenz ω_1) zu $c=4$:

$$y = \frac{\omega}{\omega_0} \sim \frac{2^{-3/2}}{2^{1/2}} = \frac{1}{4} \quad \xi = 4\sqrt{Q} \quad \text{Näherung} \quad (37)$$

Zusammen mit der 2 von $y/2$ kommen wir damit auf genau denselben Faktor 8 wie bei der Ausgangsfunktion (31). Die Approximation dS_2 berechnet sich dann folgendermaßen:

$$dS_2(y) = 8 \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2 e^{\int_{1/2}^{Q_0} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2 \right) - \frac{\left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} + \ln \cos \left(\arctan \frac{y}{2} \frac{1}{\xi} - \frac{\frac{y}{2} \frac{1}{\xi}}{1 + \left(\frac{y}{2} \frac{1}{\xi} \right)^2} \right) dQ} dy \quad (38)$$

Für die Bestimmung des Integrals genügt allerdings ein Wert von 10^3 als obere Grenze. Darüber hinaus ändert es sich kaum noch. Bei den nachfolgenden Darstellungen wurde daher mit einer oberen Grenze von $3 \cdot 10^3$ gearbeitet. Das Integral läßt sich nur numerisch bestimmen und zwar mit Hilfe der Funktion $NIntegrate[f(Q), \{Q, 1/2, 3 \times 10^3\}]$. Der Quotient aus $y/2$ und

ξ Ausdruck (37) beschreibt aber die Abhängigkeit $y(Q)$ nur in der Näherung. Es gibt auch noch eine exakte Lösung. Nach [1] (209), (299) und (509) gilt:

$$\xi = \frac{a}{b} \frac{1}{Q} \frac{R(Q)}{R(\tilde{Q})} \sqrt{\frac{\beta_\gamma^4 - 1}{\tilde{\beta}_\gamma^4 - 1}} \quad \text{mit } \tilde{Q} = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad (39)$$

$$R(Q) = 3r_1 Q^{\frac{1}{2}} \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} \quad \text{mit } \rho_0 = \sqrt[4]{(1 - A^2 + B^2)^2 + (2AB)^2} \quad (40)$$

$$A = \frac{J_0(Q)J_2(Q) + Y_0(Q)Y_2(Q)}{J_0^2(Q) + Y_0^2(Q)} \quad B = \frac{J_2(Q)Y_0(Q) - J_0(Q)Y_2(Q)}{J_0^2(Q) + Y_0^2(Q)} \quad (41)$$

Der Faktor b ergibt sich aus der Forderung, daß die exakte Funktion ξ und ihre Näherung bei größeren Werten von Q gleich groß sein sollen. Den Faktor a werden wir wieder später bestimmen. Die Funktionen in (41) sind Besselfunktionen. Problematisch in (40) und (45) ist das Integral, daß sich ebenfalls nur numerisch bestimmen läßt. Um die numerische Berechnung eines Integrals innerhalb der numerischen Berechnung eines anderen Integrals zu vermeiden, ist es angebracht, den Integranden durch eine Interpolationsfunktion (BRQ1) zu ersetzen und zwar inclusive des Faktors b . Der Wert r_1 kürzt sich wegen (39) heraus. Wir wählen Stützstellen mit logarithmischem Abstand:

```
brq = {{0, 0}}; For[x = (-8); i = 0, x < 5, (++i), x += .01;
AppendTo[brq, {10^x, N[BRQP[10^x]/BGN/(2.5*10^x)]];]
BRQ1 = Interpolation[brq];
```

(42)

Die Funktion BRQP ist gleich dem Produkt aus Q , Wurzelausdruck und Integral im Nenner von (45). Der Wert BGN ist gleich dem Startwert desselben Produkts bei $Q=1/2$. Das komplette Programm finden Sie im Anhang. Der Faktor b ergibt sich zu 2,5(0703). Nach (211), (482) und (623) gilt weiter:

$$\beta_\gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_\gamma} \quad \gamma_\gamma = \arg \underline{c} + \arccos\left(\frac{c_M}{c} \sin \alpha\right) + \frac{\pi}{4} \quad (43)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arg \underline{c} = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2} \arg((1 - A^2 + B^2) + j2AB) \quad c_M = |\underline{c}| \quad (44)$$

$$\xi = \frac{3}{0,56408} \frac{a}{b} Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\beta_\gamma^4 - 1} \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} = \frac{3}{2} \sqrt{2} Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\beta_\gamma^4 - 1} \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} \quad (45)$$

\underline{c} ist die komplexe Ausbreitungsgeschwindigkeit des metrischen Wellenfelds. Als nächstes wollen wir einen Vergleich der beiden Funktionen $Q^{1/2}$ und BRQ1 vornehmen (Bild 2):

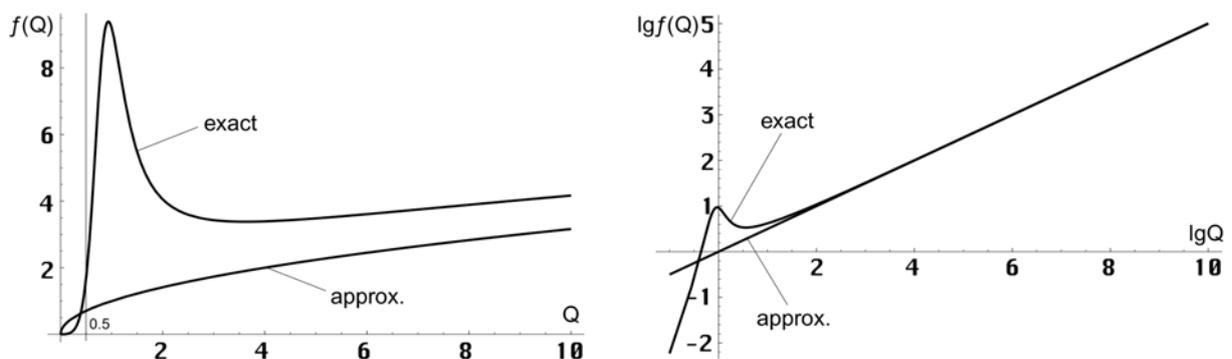


Bild 2
Funktion BRQ1 exakt und Näherung

Aufgrund der Forderung, daß das Ergebnis beider Funktionen bei $Q \gg 1$ gleich sein muß, wählen wir den Faktor a zu $\sqrt{\pi}$. Hierbei ist zu anmerken, daß der exakte Wert eigentlich bei $\sqrt{3,5}$ liegt. Da wir am Ende aber ohnehin keine exakte Übereinstimmung im Verlauf beider Funktionen finden werden, sollte diese kleine „Mogelei“ in den Ausgangsbedingungen erlaubt sein. Der Wert $\sqrt{\pi}$ führt nämlich zu dem Ergebnis mit der geringsten Abweichung, so daß wir folgende endgültige Beziehung für ξ erhalten:

$$\xi = \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} \left(Q^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\beta_\gamma^4 - 1} \int_0^Q \frac{dQ}{\rho_0} \right) \quad c = \frac{3}{2} \sqrt{2\pi} = 3,756 \quad (46)$$

Für $\sqrt{3,5}$ würde sich ein Wert $c=4$ ergeben. Der Klammerausdruck entspricht dem Faktor $Q^{1/2}$ in der Näherung. Damit haben wir alle Voraussetzungen erfüllt und können den Verlauf der Approximation (38) im Vergleich mit der Zielfunktion (32) darstellen und zwar sowohl für die Näherung als auch für die exakte Funktion ξ . Wir verwenden einen logarithmischen Maßstab und die Einheit Dezibel [dB].

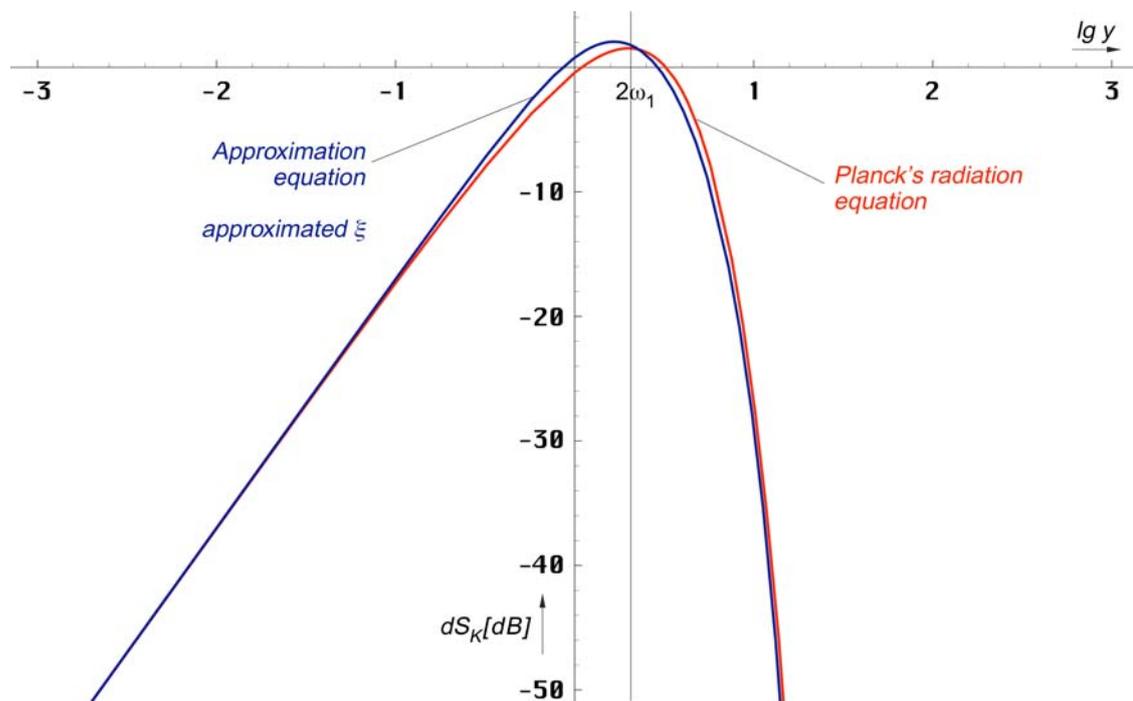


Bild 3
PLANCKs Strahlungsformel und Approximation
mit Näherung für die Funktion ξ (relativer Pegel)

Im Bild 3 ist der Verlauf der Approximation unter Verwendung der Näherung (37) für die Funktion ξ dargestellt ($c=4$). Man erkennt, daß beide Kurven nicht exakt übereinander liegen. Die maximale Abweichung in der Amplitude im Bereich der beiden Maxima liegt bei $-1,2\text{dB}$ (-25%), was relativ gesehen nicht sehr viel ist. Das Maximum ist in der Frequenz um $12,4\%$ nach unten verschoben. Alles in allem ähnelt die Funktion dem in [1] im Abschnitt 4.6.4.2.3. dargestellten Verlauf, der durch die Multiplikation der Ausgangsfunktion mit nur 4 ausgewählten Werten des Frequenzgangs bestimmt wurde. Es gibt aber Unterschiede im abfallenden Ast bei den hohen Frequenzen.

Der Verlauf der Abweichung (Logarithmus des Quotienten aus Approximation und der PLANCKschen Strahlungsformel) als Funktion von y ist im Bild 5 dargestellt. Man sieht, ab ca. $10\omega_1$ nimmt die relative Abweichung zwischen beiden Funktionen stark zu. Da der absolute Pegel in diesem Bereich aber schon extrem klein ist, fällt dies nicht weiter auf.

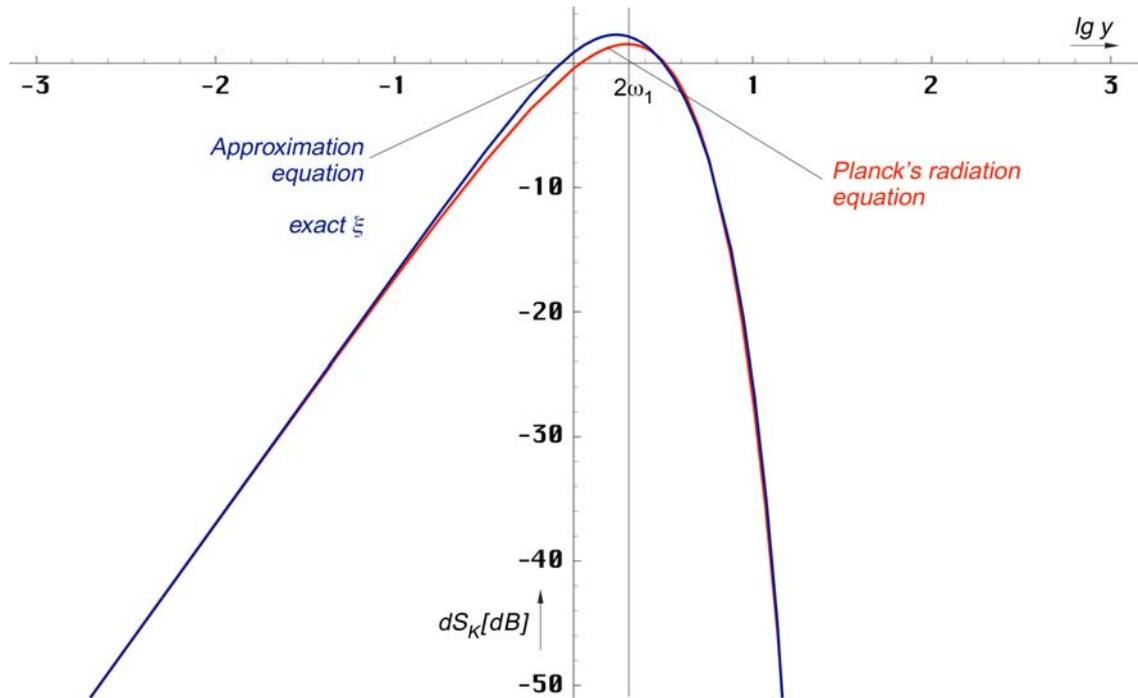


Bild 4
 PLANCKS Strahlungsformel und Approximation unter
 Verwendung der exakten Funktion ξ (relativer Pegel)

Im Bild 4 sieht man die gleiche Approximation unter Verwendung der exakten Funktion ξ (46) und zwar für $c=3,756$. Damit ergibt sich die beste Übereinstimmung (Für $c=4$ unterscheidet sich das Ergebnis nur unwesentlich von Bild 3). Beide Funktionen liegen aber auch hier nicht exakt übereinander, die maximale Abweichung in der Amplitude liegt hier bei 1,3dB und das Maximum ist in der Frequenz um 13,6% (0,8639) nach unten verschoben. Dies ist etwas mehr, als die in [1] Abschnitt 7.5.3. festgestellte Abweichung der gemessenen zur berechneten CMBR-Temperatur in Höhe von $-8,232\%$ (0,9177).

Die Verschiebung des Maximums der Approximation nach unten könnte ein Grund für letztgenannte Abweichung sein. Allerdings entspricht die Form der Approximationskurve nicht der eines schwarzen Strahlers und der Wert ist zu hoch. Beim COBE-Experiment wurde aber gerade festgestellt, daß das Spektrum der CMBR exakt schwarz ist. Es bedarf daher weiterer Einflüsse, um die Form so zu verändern, daß sie der eines schwarzen Strahlers entspricht. Welche Einflüsse dafür in Frage kommen, soll im nächsten Abschnitt betrachtet werden.

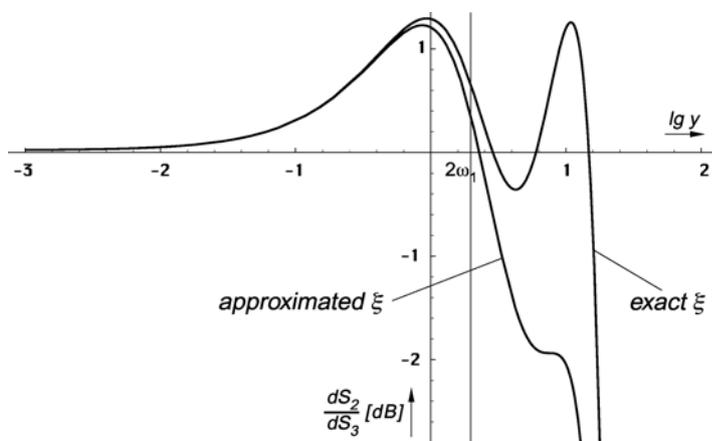


Bild 5
 Relative Abweichung zwischen
 Approximation und Strahlungsformel in
 Abhängigkeit von der verwendeten
 Funktion ξ

Im Bild 5 ist noch der Verlauf der Abweichung im Vergleich mit der Näherung ξ dargestellt. Man sieht, die Verwendung der exakten Funktion ξ bringt schon eine Verbesserung, dennoch bleibt eine gewisse Restabweichung.

4. Mögliche Ursachen der Abweichung, Aussichten

Als nächstes wollen wir mögliche Ursachen diskutieren, die zu dieser Abweichung führen können. Die einfachste und unangenehmste wäre, daß die ursprüngliche Vermutung nicht zutrifft. Das Ergebnis stimmt aber immerhin so gut mit der Vorhersage überein, daß man dies nicht mit ausreichender Gewißheit bejahen kann. Andernfalls muß es dann aber eine andere Ursache geben. Die wahrscheinlichste soll deshalb als nächstes dargestellt werden.

Da es sich beim Linienelement um ein Minimalphasensystem handelt, haben wir die Approximationsfunktion berechnet, indem wir die Ausgangsfunktion iterativ mit dem gerade gültigen Amplitudengang $A(\omega)$ multipliziert haben, solange, bis sich das Ergebnis nicht mehr ändert, da die Frequenz der Signalfunktion soweit unter die Grenzfrequenz abgesunken ist, daß sich diese nicht mehr auswirkt. Der Faktor $\cos\phi$ ergab sich aus der Tatsache, daß nur der Realteil übertragen wird ($\phi=B(\omega)$).

Dies ist im allgemeinen die Vorgehensweise bei Minimalphasensystemen. Nach [3] S. 340 gilt dies aber nur für *stabile* Minimalphasensysteme! Denn nur bei diesen besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen Amplituden- und Phasenkennlinie, so daß die Berechnung ausschließlich mit Hilfe der Amplitudenkennlinie erfolgen kann. Bei dem Linienelement kurz nach der Einkopplung ($Q\approx 1$), das ist kurz nach dem Urknall, handelt es sich aber *keineswegs* um ein stabiles System. Vielmehr weist dieses speziell zu diesem Zeitpunkt seine größte Dynamik auf, so daß unser Ansatz zu keinem *exakten* Resultat führen kann, was man ja sieht.

Will man zu einem exakten Ergebnis gelangen, muß man auch einen Bezug zwischen Amplitude und Phase, quasi eine Phasenkorrektur einführen, da es bei instabilen Systemen zu einer Phasennacheilung kommt, die durch den verwendeten Ansatz nicht berücksichtigt wird. Auch bei der Ausbreitungsfunktion (306) wurde eine solche Phasennacheilung festgestellt, die durch den Term $\Phi(\omega)$ beschrieben wurde. Leider läßt sich dieser nicht so einfach auf o.g. Ansatz übertragen. Andererseits kann eine Berücksichtigung der Phasennacheilung aber die Verschiebung des Strahlungsmaximums nach unten auf keinen Fall beseitigen, da durch eine Phasenkorrektur nur der Anstieg der Kurve korrigiert wird, nicht aber die Lage des Maximums ($0\cdot n=0$). Vielmehr ist die Phasennacheilung ein Ausdruck für eine von c verschiedene Phasengeschwindigkeit gegenüber der Metrik. Da sich entgegen der Aussage in [3] die Übertragungsfunktion (143) aufgrund ihrer besonderen Form nicht in einen Minimalphasen- und einen Nicht-Minimalphasenanteil aufspalten läßt, hat es den Anschein, daß unser Ansatz in diesem speziellen Fall *trotz* der hohen Dynamik im betrachteten Zeitraum gültig ist, die Übertragung damit *immer* phasentreu erfolgt.

Die Phasennacheilung äußert sich beim Beobachter in der Form, daß die Spektralanteile mit niedrigerer Frequenz stärker rotverschoben sind, als die mit höherer Frequenz. Die niederfrequenten Anteile sind zwar nicht älter als die höherfrequenten (wir beobachten ja immer denselben Zeitpunkt der Strahlungseinkopplung bei $Q_0=1/2$), haben aber eine längere Strecke zurückgelegt. Und dies führt automatisch zu einer höheren Rotverschiebung. Wie erklärt sich aber dieser längere Weg? Die niederfrequenten Anteile haben ganz einfach einen anderen Weg genommen, als die höherfrequenten (anderer Abstrahlungswinkel). Denn die niederfrequenten, die denselben Weg genommen haben, wie die höherfrequenten, haben uns bereits passiert. Dies führt zu einer Art Achromatismus beim Beobachter, der sich jedoch nur sehr schwer nachweisen läßt, da uns die Strahlung aus allen Richtungen gleichzeitig erreicht. Möglich wäre hier, die geringfügigen Temperaturunterschiede bei niedrigen und höheren Frequenzen übereinanderzulegen. Dann könnte man vielleicht etwas erkennen. Allerdings ist die derzeit verwendete Auflösung dafür zu gering.

Die Wirkung dieses Effekts zeigt sich in einer nichtlinearen Dehnung der Approximationskurve hin zu den niedrigeren Frequenzen, wobei die Dehnung umso größer ausfällt, je niedriger die Frequenz ist. Dies bedeutet aber eine weitere Verschiebung des Maximums nach unten, obwohl es bereits kleiner als der gemessene Wert ist. Gleichzeitig wird dann die Amplitude der niedrigeren Frequenzen größer als die der Zielfunktion. Bei den höheren Frequenzen ist es genau umgekehrt. Der Verlauf weicht noch weiter von dem eines schwarzen Strahlers ab.

Nun haben wir aber einen weiteren Effekt außer Acht gelassen, die parametrische Dämpfung (Siehe [1] Abschnitt 4.6.4.2.7.). Während man bei technischen und den meisten in der Natur vorkommenden Frequenzen einen frequenzunabhängigen Wert für die parametrische Dämpfung ansetzen kann, ist dies in der Umgebung von $Q_0=1/2$ vollkommen anders. Hier ist nicht nur die Dämpfung sehr stark von der Frequenz abhängig, nein bei sehr hohen Frequenzen wird sogar aus der parametrischen Dämpfung eine parametrische Verstärkung (siehe [1] Bild 81). Dies führt dann zu einer Rückverschiebung des Maximums nach oben. Die nieder- und höherfrequenten Anteile bewegen sich wieder in Richtung auf die Zielfunktion. Dies kann durchaus dazu führen, daß aus der „schrägen“ Approximationsfunktion eine schwarze Strahlungsfunktion wird.

Der mathematische Beweis dafür ist aber noch wesentlich komplizierter, als der hier angegebene, jedoch nicht unmöglich. Daher möchte ich dies mit Hilfe eines Formfaktors f korrigieren, der immer dann zur Anwendung kommt, wenn Bezüge zum Punkt $Q_0=1/2$ berechnet werden. Ausgehend von [1] (905), unter der Prämisse, daß der gemessene Wert gleich dem berechneten sein soll, ergibt sich dieser zu:

$$H_0 = 0,497532508 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{24kT_k} \right)^{-2} \quad H_0 = 286,579 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{kT_k} \right)^{-2} \quad (905)$$

$$0,497532508 \omega_0 \left(\frac{24k \cdot 2,9681K}{\hbar\omega_1} \right)^2 = 0,497532508 \cdot f^2 \cdot \omega_0 \left(\frac{24k \cdot 2,7250K}{\hbar\omega_1} \right)^2 \quad (47)$$

$$f^2 = \left(\frac{2,9681K}{2,7250K} \right)^2 = 1,18638 \quad f = 1,08921 \quad (48)$$

$$H_0 = 0,497532508 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{24kfT_k} \right)^{-2} \quad H_0 = 340 \omega_0 \left(\frac{\hbar\omega_1}{kT_k} \right)^{-2} \quad (49)$$

$$\hbar\omega_{\max} = 2,821439372 \cdot f \cdot kT \quad \text{WIENSches Verschiebungsgesetz für } \omega_{0,5} \quad (50)$$

Für das Wiensche Verschiebungsgesetz selbst gilt dann folgendes:

I. Das WIENSche Verschiebungsgesetz in seiner bekannten Form gilt auch bei Vorhandensein starker Gravitationsfelder, allerdings mit eingeschränkter Genauigkeit, wobei der maximale Fehler bei 9% liegt.

Fazit: Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit schließen die Möglichkeit, daß der Verlauf der PLANCKSchen Strahlungsformel das Resultat der Existenz einer oberen Grenzfrequenz des Vakuums ist, nicht aus. Die Antwort kann nur lauten: Es ist möglich, aber nicht bewiesen. Sollte sich meine Vermutung aber als wahr erweisen, wird dadurch die klassische Ableitung [2] nicht außer Kraft gesetzt. Vielmehr wäre dies die Begründung dafür, warum die BOLTZMANN-Konstante genau den bekannten Wert hat und keinen anderen.

ENDE

5. Literatur

- [1] **Dipl. Ing. Gerd Pommerenke**
E-Mail-Adresse: GerdPommerenke@arcor.de
Struktur des Universums, Augsburg 2000

- [2] **Ottmar Marti**
Institut für Experimentelle Physik, Universität Ulm
Strahlungsgesetze
<http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/gk4-2005/node13.html#1474>

- [3] **Prof. Dr. sc. techn. Dr. techn. h.c. Eugen Philippow**, TH Ilmenau
Taschenbuch der Elektrotechnik, Band 2, Grundlagen der Informationstechnik
Verlag Technik Berlin, 1. Auflage 1977

Envelope Curve Approximation

■ Definitions

```

In[1]:= Off [General :: " spell " ]
Off [General :: " spell1 " ]

Hankell = Function[BesselJ [0 , #] + I * Bessely [0 , #]];
Hankel21 = Function[BesselJ [2 , #] + I * Bessely [2 , #]];

A = Function[(BesselJ [0 , #] * BesselJ [2 , #] + Bessely [0 , #] * Bessely [2 , #]) /
  (BesselJ [0 , #]^2 + Bessely [0 , #]^2)];
B = Function[(Bessely [0 , #] * BesselJ [2 , #] - BesselJ [0 , #] * Bessely [2 , #]) /
  (BesselJ [0 , #]^2 + Bessely [0 , #]^2)];

RhoQ = Function[If [# < 30 ,
  Abs [-2 * I / # / Sqrt [1 - (Hankel21 [#] / Hankell [#])^2]], #^(-1 / 2)]]; (*c_*)
InvRhoQ = Function[If [(Abs [#] > .851661), Infinity, If [Abs [#] ≤ .1 , 1 / #^2 ,
  0.346365 + 0.998383 / #^2 - 2.50962 * # + 5.63857 * #^2 - 4.39788 * #^3]]];

PhiQ = Function[If [# > 20 , -Pi / 4 - 3 / 4 / # ,
  N[Arg [-2 * I / # / Sqrt [1 - (Hankel21 [#] / Hankell [#])^2]]]];
InvPhiQ = Function[If [(((-#) > Pi) || ((-#) < Pi / 4)), Infinity,
  (*4 % Error *) If [((-3 / 4 / (# + Pi / 4)) > 6), -3 / 4 / (# + Pi / 4),
  3 / 4 / (1 / (# - 0.5493137) + Pi / 4) - 1.45783361506639903156 ]]];

RhoQQ = Function[
  If [# < 30 , Sqrt [Sqrt [(1 - A[#]^2 + B[#]^2)^2 + (2 * A[#] * B[#])^2]], 2 / Sqrt [#]];
  (* Arc length unequal RhoQ!!!*)
RhoQQQ = Function[Sqrt [Sqrt [(1 - A[#]^2 + B[#]^2)^2 + (2 * A[#] * B[#])^2]]];
rq = {{0 , 0}};
For [x = (-8); i = 0 , x < 4 , (++i),
  x += .01; AppendTo [rq , {10 ^ x, N[1 / RhoQQQ [10 ^ x]]}]]
RhoQ1 = Interpolation[rq];
RhoQQ1 = Function[If [# < 10 ^ 4 , RhoQ1 [#], .5 * Sqrt [#]];
AlphaQ = Function[N[Pi / 4 - PhiQ [#]];
BetaQ = Function[Sqrt [#1] * ((#2)^2 + #1^2 * (1 - (#2)^2)^2)^(-.25)];
DeltaQ = Function[ArcSin [RhoQ [#] * Sin [AlphaQ [#]]]];

GammaPQ = Function[N[PhiQ [#] + ArcCos [RhoQ [#] * Sin [AlphaQ [#]]] + Pi / 4]];
GammaPQa = Function[N[-PhiQ [#] - ArcSin [RhoQ [#] * Sin [AlphaQ [#]]] + Pi / 4]];
GammaNQ = Function[N[-PhiQ [#] + ArcSin [RhoQ [#] * Cos [AlphaQ [#]]] - Pi / 4]];
GammaNQa = Function[N[PhiQ [#] - ArcCos [RhoQ [#] * Cos [AlphaQ [#]]] - Pi / 4]];

Rk = If [#1 < 1000 , 3 Sqrt[#1] NIntegrate [RhoQQ1 [x1], {x1 , 0 , #1}], #1^2] &;
(* Exact world radius / r1 *)

BRQP = Function[Rk [#] Sqrt [(Sin [AlphaQ [#]] / Sin [GammaPQ [#]])^4 - 1]];
BRQP a = Function[Rk [#] Sqrt [(Sin [AlphaQ [#]] / Sin [GammaPQ a [#]])^4 - 1]];
BRQN = Function[Rk [#] Sqrt [(-Cos [AlphaQ [#]] / Sin [GammaNQ [#]])^4 - 1]];
BRQN a = Function[Rk [#] Sqrt [(Cos [AlphaQ [#]] / Sin [GammaNQ a [#]])^4 - 1]];
BNQP = Function[0.4073456 #^(-6 / 4)];
BNQN = Function[0.282048 #^(-7 / 4)];

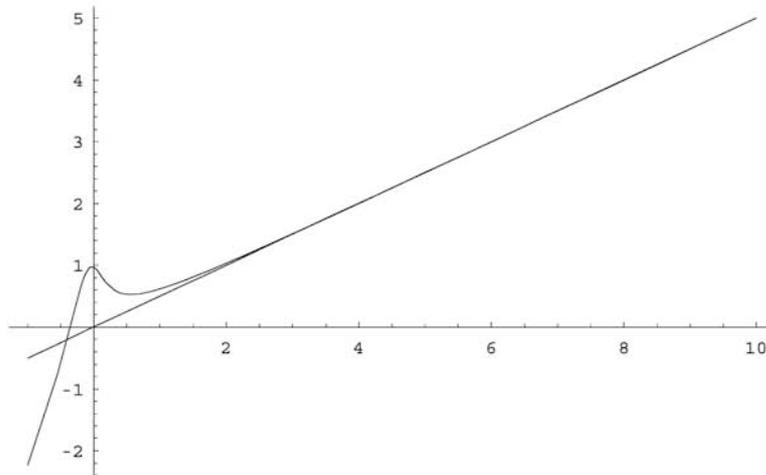
BGN = 1 / 3 Sqrt[2] * BRQP [.5]

```

Out[31]= 0.564099

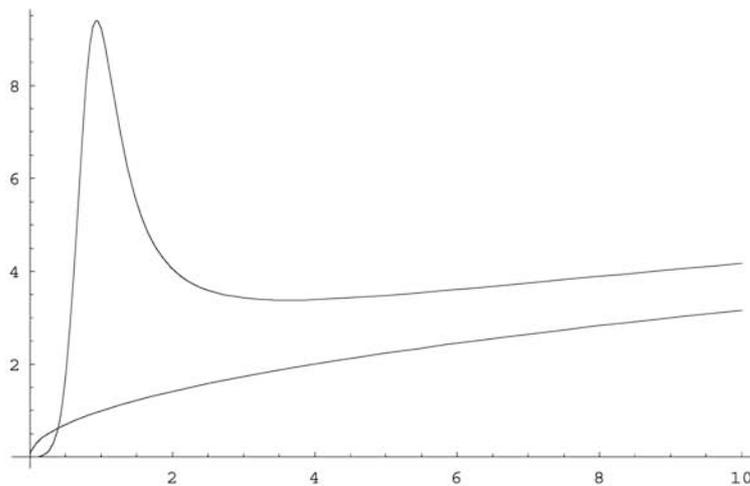
■ Expansion

```
In[32]:= Plot[{Log[10, BRQP[10 ^ qqg] / BGN / (2.5070314770581117 × 10 ^ qqg)], Log[10, √{10 ^ qqg}]},
  {qqg, -1, 10}]
```



Out[32]= - Graphics -

```
In[33]:= Plot[{BRQP[qqg] / BGN / (2.5070314770581117 × qqg), √{qqg}}, {qqg, 0, 10}]
```



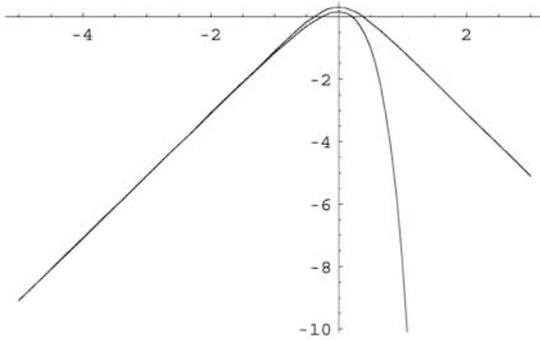
Out[33]= - Graphics -

```
In[34]:= brq = {{0, 0}};
For[x = (-8); i = 0, x < 5, (++i), x += .01;
  AppendTo[brq, {10 ^ x, N[BRQP[10 ^ x] / BGN / (2.5070314770581117 × 10 ^ x)}]];
BRQ1 = Interpolation[brq];
```

■ Approximation

```
In[37]:= b = 2.821439;
Plot[Log[10, (b × 10 ^ y) ^ 3 / (e^(b × 10 ^ y) - 1)], {y, -5, 3}]
Plot[Log[10, 8 ((10 ^ y) / (10 ^ y) ^ 2 + 1) ^ 2], {y, -5, 3}]
```

```
In[40]:= Show[%, %, PlotRange -> {-10.1, .45}]
```



```
Out[40]= - Graphics -
```

```
In[41]:= b = (*2 sqrt[2] 2.821439 *)2.821439 ;
c = 2.821439 b;
```

```
S1 = Function[8 ((# / 2)^(2 + 1))^2];
```

```
S2 = Function[(b * # / 2)^3 / (e^(b * # / 2) - 1)];
```

```
Psi0 = Function[1/2 Log[1 + (#1 / (c sqrt[#2]))^2] -
```

$$\frac{(\#1 / (c \sqrt{\#2}))^2}{1 + (\#1 / (c \sqrt{\#2}))^2} + \text{Log} \left[\text{Cos} \left[\text{ArcTan} \left[\#1 / (c \sqrt{\#2}) \right] \right] - \frac{\#1 / (c \sqrt{\#2})}{1 + (\#1 / (c \sqrt{\#2}))^2} \right] \right];$$

```
Psi1 = Function[NIntegrate[1/2 Log[1 + (#1 / (c sqrt[Q]))^2] -
```

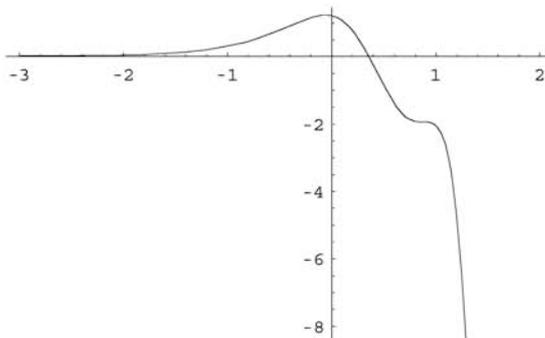
$$\text{Log} \left[\text{Cos} \left[\text{ArcTan} \left[\#1 / (c \sqrt{Q}) \right] \right] - \frac{\#1 / (c \sqrt{Q})}{1 + (\#1 / (c \sqrt{Q}))^2} \right], \{Q, .5, 3000\}];$$

```
Psi2 = Function[NIntegrate[1/2 Log[1 + (#1 / (c * BRQ1 [Q]))^2] -
```

$$\text{Log} \left[\text{Cos} \left[\text{ArcTan} \left[\#1 / (c * \text{BRQ1} [Q]) \right] \right] - \frac{\#1 / (c * \text{BRQ1} [Q])}{1 + (\#1 / (c * \text{BRQ1} [Q]))^2} \right], \{Q, .5, 3000\}];$$

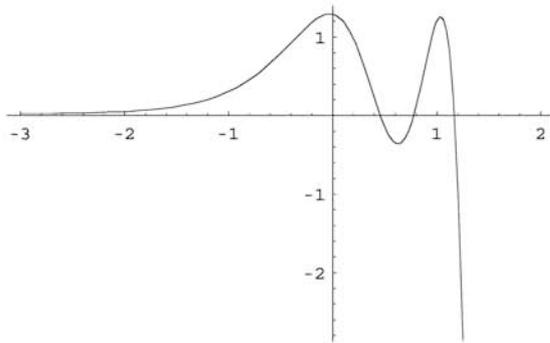
```
In[48]:= c = 8 ; (*Factor 8 approx xi *)
```

```
Plot[{10 Log[10, S1[10^y] * e^Psi1[10^y] / S2[10^y]], {y, -3, 2}}
```



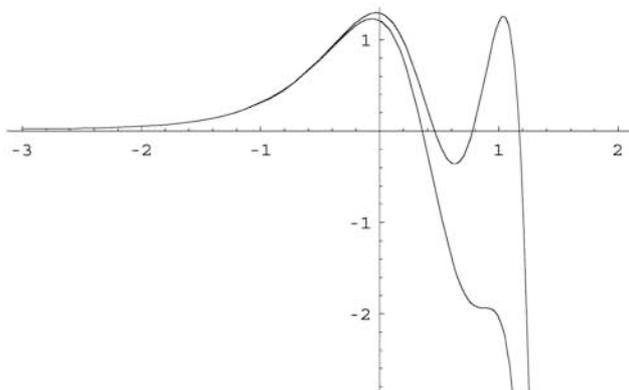
```
Out[49]= - Graphics -
```

```
In[50]:= c = 7.519884824; (*  $\sqrt{\pi}$  exact  $\xi$  *)
Plot[{10 Log[10, S1[10^y] x e^Psi2[10^y]/S2[10^y]]}, {y, -3, 2}]
```



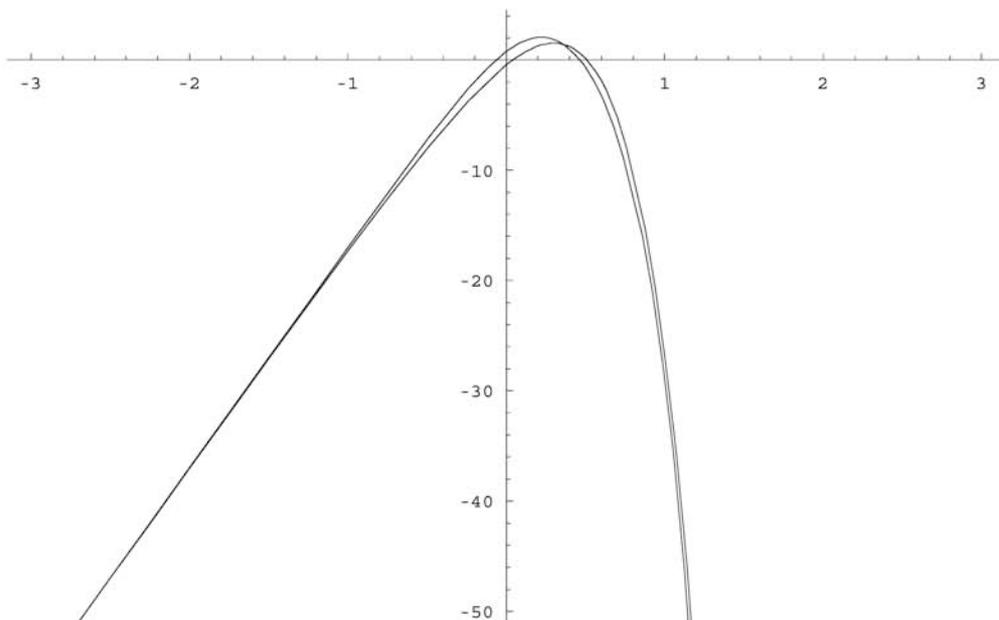
Out[50]= - Graphics -

```
In[51]:= Show[%, %, PlotRange → {-2.85, 1.35}]
```



Out[51]= - Graphics -

```
In[52]:= c = 8; (* Factor 8 approximated BGN exact *)
Plot[{10 Log[10, S2[10^y]], 10 (Log[10, S1[10^y]] + Log[10, e] x Psi1[10^y])},
{y, -3, 3}, PlotRange → {-51, 4.5}] (* Exakt exakt exakt Fehler max +1.3 dB *)
```



Out[52]= - Graphics -

```
In[53]:= FindMinimum[-10 Log[10, S1[10^y] x e^Psi1[10^y]/S2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[53]= {-1.22806, {y → -0.0629576}}
```

```
In[54]:= FindMinimum[-10 Log[10, S1[10^y] × e^Psi2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[54]= {-2.36011, {y → 0.243378}}
```

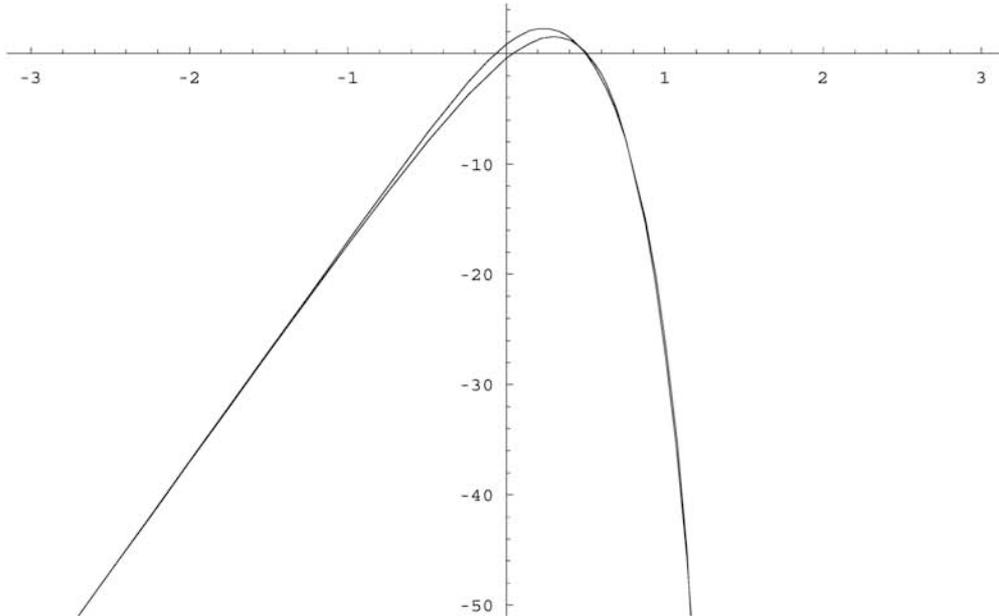
```
In[55]:= FindMinimum[-10 Log[10, S2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[55]= {-1.52727, {y → 0.30103}}
```

```
In[56]:= 10^(0.24337841343157107 - 0.30102979061078156)
```

```
Out[56]= 0.875686
```

```
In[57]:= c = 7.519884824; (* √π exact ξ *)
Plot[{10 Log[10, S2[10^y]], 10 (Log[10, S1[10^y]] + Log[10, e] × Psi2[10^y])},
{y, -3, 3}, PlotRange → {-51, 4.5}] (* Exakt exakt exakt Fehler max +1.3 dB *)
```



```
Out[57]= - Graphics -
```

```
In[58]:= FindMinimum[-10 Log[10, S1[10^y] × e^Psi2[10^y] / S2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[58]= {-1.29393, {y → -0.0315663}}
```

```
In[59]:= FindMinimum[-10 Log[10, S1[10^y] × e^Psi2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[59]= {-2.28562, {y → 0.237471}}
```

```
In[60]:= FindMinimum[-10 Log[10, S2[10^y]], {y, -3, 2}]
```

```
Out[60]= {-1.52727, {y → 0.30103}}
```

```
In[61]:= 10^(0.23747118308581136 - 0.30102979061078156)
```

```
Out[61]= 0.863856
```