Abstract

Dans ce present document vous trouverez la correction du concours BCEAS 2019

1 CORRECTION DU CONCOURS BECEAS 2019

1.1 PARTIE PRELIMINAIRES

• On sait que $X_{k,k\in\mathbb{N}}$ sont indépendants et suivent des lois de Poisson de parmaètre λ alors $G_{S_n}(t)=\mathbb{E}(e^{S_nt})=\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}(e^{X_kt})=[G_{X_1}(t)]^n$ comme

$$[G_{X_1}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{kt}P(X_1=k)=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(e^t\lambda)^k}{k!}=e^{-\lambda+\lambda e^t}$$

donc

$$G_{S_n}(t)=e^{-n\lambda+n\lambda e^t}$$

donc $S_n\rightsquigarrow\mathcal{P}(n\lambda)$

• Prouvons pour $\forall\epsilon>0,\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\geq\lambda+\epsilon)\leq\frac{\lambda}{n\epsilon^2}$ On a

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}-\lambda\geq\epsilon)=\mathbb{P}((\frac{S_n}{n}-\lambda)^2\geq\epsilon^2)=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{(\frac{S_n}{n}-\lambda)^2\geq\epsilon^2})\leq\mathbb{E}(\frac{(\frac{S_n}{n}-\lambda)^2}{\epsilon^2}\mathbf{1}_{(\frac{S_n}{n}-\lambda)^2\geq\epsilon^2})$$

donc

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}-\lambda\geq\epsilon)\leq\mathbb{E}(\frac{(\frac{S_n}{n}-\lambda)^2}{\epsilon^2})=\frac{1}{\epsilon^2n^2}Var(S_n)=\frac{\lambda}{n\epsilon^2}$$

• Montrons que la fonction Ψ définie par :

$$\forall\theta\geq0,\Phi(\theta)=e^{\mu(e^\theta-1)-\theta x)}$$

a un minimum sur $\mathbb{R}_+$ La fonction Ψ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\forall\theta\in\mathbb{R}_+,\Psi'(\theta)=(\mu e^\theta-x)\Psi(\theta)$$

donc $\Psi(\theta)\geq0\Leftrightarrow\theta\geq\ln(\frac{x}{\mu})$ ceci justifie la croissante de Psi sur $[\ln(\frac{x}{\mu}),+\infty[$ et la décroissance sur $[0,\ln(\frac{x}{\mu})]$ d'où $\arg\min_{\theta\in\mathbb{R}_+}\Psi(\theta)=\ln(\frac{x}{\mu})$

• Pour justifier l'existence de $a>0$ il suffit de Montrer que

$$a(\lambda,\epsilon)=\frac{\ln(\frac{x}{\mu})x-\mu(\frac{x}{\mu}-1)}{n}\geq0$$

et est le candidat. Par simplification $a(\lambda,\epsilon) = (\lambda+\epsilon)\ln(1+\frac{\epsilon}{\lambda}) - \epsilon$ en remarquant que $\forall x > -1, \ln(1+x) \geq \frac{x}{1+x}$ on prend $x = \frac{\epsilon}{\lambda}$
on a donc $\ln(1+\frac{\epsilon}{\lambda}) \geq \frac{\epsilon}{\lambda+\epsilon}$ ansi $a(\lambda,\epsilon) \geq 0$ et vérifie de manière évidente la relation .

• Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant la rélation:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

Montrons que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in [[0,2^n]] : g(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y) \leq \frac{k}{2^n}g(x)+(1-\frac{k}{2^n})g(y)$$

Nous allons démontrer par récurrence cette propriété . Au rang n=0 la relation est vérifiée En effet $k \in \{0,1\}$ suivant les valeurs de k les choses s'obtiennent . Supposons que la relation est vrai au rang n et montrons sa validité au rang n+1

$$g(\frac{k}{2^{n+1}}x+(1-\frac{k}{2^{n+1}})y) = g(\frac{1}{2}(\frac{k}{2^n}x+\frac{2^n-k}{2^n}y)+\frac{1}{2}\frac{2^n}{2^n}y) \leq \frac{1}{2}(g(\frac{k}{2^n}x+\frac{2^n-k}{2^n}y)+g(\frac{2^n}{2^n}y))$$

$$g(\frac{k}{2^{n+1}}x+(1-\frac{k}{2^{n+1}})y) \leq \frac{1}{2}(\frac{k}{2^n}g(x)+(1-\frac{k}{2^n})g(y)+g(y))$$

$$g(\frac{k}{2^{n+1}}x+(1-\frac{k}{2^{n+1}})y) \leq \frac{1}{2}(\frac{k}{2^n}g(x)+2g(y)-\frac{k}{2^n}g(y)) = \frac{k}{2^{n+1}}g(x)+(1-\frac{k}{2^{n+1}})g(y)$$

Céci achève la récurrence .

• On pose

$$D = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\{\frac{k}{2^n}, k \in [[0,2^n]]\}$$

Vérifions que la suite $d_n = \frac{[\lambda 2^n]}{2^n}$ pour $\lambda \in [0,1]$ est une suite de D, croissante et convergente .Posons $v_n = 2^n d_n = [\lambda 2^n]$ on a $v_n \in [[0,2^n]]$ alors $d_n = \frac{v_n}{2^n} \in D$ De plus $v_{n+1} = \max\{k : k \leq 2^{n+1}\lambda\}$ comme $[\lambda 2^n] \leq \lambda 2^n$ alors $2[\lambda 2^n] \leq \lambda 2^{n+1}$ Ainsi $v_{n+1} \geq 2v_n \Leftrightarrow d_{n+1} \geq d_n$ ceci justifie que d_n est croissante. comme $d_n \leq \lambda \leq d_1 + \frac{1}{2^n}$ alors d_n converge vers λ

• On suppose que g est croissante .Montrons qu'elle est convexe Ici la fonction f n'est pas supposée continue elle est juste croissante donc le passage à la limite il faudrait s'abstenir sans preuve !!! Soit x,y deux réelles on a soit $x \leq y$ où $y \leq x$ Pour conclure nous allons traiter les deux cas . Supposons le premier cas et posons $a_n = d_n x + (1-d_n)y$ comme $a_{n+1} - a_n = (d_{n+1}-d_n)(x-y)$ alors la suite a_n est croissante et elle converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lambda x + (1-\lambda)y$ de plus $g(a_n) \leq d_n g(x) + (1-d_n)g(y)$ Posons $b_n = d_n g(x) + (1-d_n)g(y)$ de même $b_{n+1} - b_n = (d_{n+1} - d_n)(g(x) - g(y))$ donc b_n est croissante et converge vers $\sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$ comme

$$g(a_n) \leq b_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n = \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g(a_n) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

ainsi $g(\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n) = g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$
L'autre cas est laissé au lecteur ..
• L'inégalité de Markov soit X une variable aléatoire alors

$$\forall a > 0, \mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}(X)$$

• On suppose dans cette partie à valeurs positives ou nulles .Etablissons la relation (inégalité de Chernoff) :

$$\forall x > 0 : \mathbb{P}(X \geq x) \leq \inf_{\theta>0} \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

la fonction $x \mapsto e^{\theta x}$ est croissante donc

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta x})$$

on applique ensuite l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(e^{\theta X} \geq e^{\theta x}) \leq \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

donc

$$\mathbb{P}(X \geq x) \leq \inf_{\theta>0} \frac{E(e^{\theta X})}{e^{\theta x}}$$

• Soit X une variable aléatoire ,possédant une espérance et telle que

$$X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}^*\}$$

où la suite $x_{k,k\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$,strictement croissante et de limite $+\infty$ On pose $x_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\leq x_n})$$

Dans cette partie on souhaite prouver la convergence de α_n Comme la variable $X \geq 0$ alors $X\mathbf{1}_{X\leq x_n} \leq X$ de plus son experance est fini d'où

$$\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\leq x_n}) \leq \mathbb{E}(X) < +\infty$$

Comme x_n est strictement croissante alors $X\mathbf{1}_{X\leq x_{n+1}} \geq X\mathbf{1}_{X\leq x_n}$ En effet $[x_{n+1}, +\infty[\subset [x_n, +\infty[$ donc $\mathbb{R} \setminus [x_n, +\infty[\subset \mathbb{R} \setminus [x_{n+1}, +\infty[$ ceci justifie la relation Par passage à l'espérance on a :

$$\alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\leq x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\leq x_{n+1}}) = \alpha_{n+1}$$

la suite α est croissante et majorée par $\mathbb{E}(X)$ donc elle converge .

• Justifions que

$$\forall \epsilon, \exists N, \forall n \geq N : \mathbb{E}(X) - \epsilon \leq \alpha_n$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>x_n}) + \alpha_n$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ alors $\forall A > 0, \exists N, \forall n \geq N : x_n > A(*)$ .De plus

$$\forall n \geq N : \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>A})$$

D'après l'inégalité de Markov :

$$\mathbb{P}(X > A) \leq \frac{1}{A}\mathbb{E}(X)$$

en faisant tendre A vers $+\infty$ il vient que

$$\lim_{A\to+\infty} \mathbb{P}(X > A) = 0$$

d'ou $\exists M$ tel que $X \leq M$ donc $(*)$ devient

$$\forall n \geq N : \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>x_n}) \leq \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>A}) \leq M\mathbb{P}(X > A)$$

en faisant tendre A vers l'infini . il vient que $\forall \epsilon, \exists N, \forall n \geq N, \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>x_n}) \leq \epsilon$ comme $\mathbb{E}(X) - \alpha_n = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X>x_n})$ le résultat s'en déduit. De plus la convergence de α_n est immédiate .La justification vient du fait que toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure ou bien on majore α_n par $\mathbb{E}(X) + \epsilon$

• Soit $K \geq 0$ on pose $\beta(K) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{X\leq K})$ la suite $X_K = K$ est strictement croissante et de limite $+\infty$ donc d'après la partie précédente le resultat s'obtient.

• Soit f une fonction concave réelle et décroissante et $x \in \mathbb{R}$ Posons

$$r_x(u) : \frac{f(u) - f(x)}{u - x}, \forall u \neq x$$

On souhaite montrer que l'existence de la limite à droite en x . Commençons par montrer que la fonction r_x est décroissante dans le voisinage de x^+

Soit $u, u' : x < u < u'$ alors

$$r_x(u') - r_x(u) = \frac{f(u') - f(x)}{u' - x} - \frac{f(u) - f(x)}{u - x} = \frac{(f(u') - f(x))(u - x) - (f(u) - f(x))(u' - x)}{(u' - x)(u - x)}$$

$$r_x(u') - r_x(u) = \frac{(u-u')f(x) - (u-x)f(u') + (u'-x)f(u)}{(u'-x)(u-x)}$$

En remarquant que

$$u = \frac{u-x}{u'-x}u' + (1 - \frac{u-x}{u'-x})x$$

comme $0 \leq \frac{u-x}{u'-x} \leq 1$ de la concavite de f on déduit que

$$f(u) \geq \frac{u-x}{u'-x}f(u') + (1 - \frac{u-x}{u'-x})f(x)$$

d'où r_x est décroissante au voisinage de x^+ de plus $r_x(u) \leq r_x(x^+) \leq 0$ Ainsi D'après le Théorème de la limite monotone r_x admet une limite finie ,négative ou nulle .

• Prouvons que $\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + \theta_0(u-x)$

Remarquons que

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) = f(x) + (u-x)r_x(u) \leq f(x) + (u-x) \sup_{u \in \mathbb{R}\setminus\{x\}} r_x(u)$$

comme

$$\sup_{u \in \mathbb{R}\setminus\{x\}} r_x(u) = \max(\sup_{u \in]-\infty,x[} r_x(u), \sup_{u \in]x,+\infty[} r_x(u))$$

de plus $\forall u \in]-\infty, x[, \forall y \in]x, +\infty[: r_x(u) \geq r_x(y)$ donc

$$\sup_{u \in \mathbb{R}\setminus\{x\}} r_x(u) = \sup_{u \in]-\infty,x[} r_x(u)$$

de plus

$$\forall y \in]x, +\infty[, (u-x) \sup_{u \in]-\infty,x[} r_x(u) \leq (u-x)r_x(y)$$

donc $(u-x)\sup_{u \in]-\infty,x[} r_x(u) \leq (u-x)r_x(x^+)$ d'où:

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + (u-x)\theta_0$$

• Déduisons l'égalité $\inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}}(f(u) + \theta(u-x)) = f(x)$ On sait que

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) \leq f(x) + (u-x)\theta_0$$

donc

$$\forall u \in \mathbb{R}, f(u) - (u-x)\theta_0 \leq f(x)$$

comme $-\theta_0 \geq 0$ alors

$$\sup_{u \in \mathbb{R}}(f(u) - \theta_0(u-x)) \leq f(x) \Leftrightarrow \inf_{\theta \geq 0} \sup_{u \in \mathbb{R}}(f(u) + \theta(u-x)) \leq \sup_{u \in \mathbb{R}}(f(u) - \theta_0(u-x)) \leq f(x)$$

de plus $f(x) = f(x) + \theta(x - x)$ et c'est gagné!! • Soit une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}^*\}$ où la suite x_k est positif ,strictement croissante et de limite $+\infty$

• Montrons la fonction qui à tout $t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ est continue par morçeau sur $\mathbb{R}$ il suffit d'abord demontrer que la fonction est décroissante En effet soit t et t' tel que $t > t' > 0$ alors $\{X > t\} \subset \{X > t'\}$ donc

$$\mathbb{P}(X > t) \leq \mathbb{P}(X > t')$$

de plus si $\mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X > t')$ alors $\forall k \in \mathbb{N} : x_k \notin]t', t[$ comme la suite x_k est strictement croissante de limite infini alors cela n'est possible que si $t = t'$ donc F est bien bien strictement croissante de plus $sit \leq 0$,$\mathbb{P}(X \geq t) = 1$ Ceci permet de conclure !!! • On notera par dP_X la loi densité de X Montrons que

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k)$$

On va appliquer le théorème de Fubini

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \int_{x_0}^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t)dt$$

1.2 METHODE 1

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \int_{x_0}^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t)dt$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sum_{j=[t]+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j)dt = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=[t]+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=k+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dt$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k) \sum_{j=k+1}^{r+1} \mathbb{P}(X = x_j)$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k)$$

1.3 METHODE 2

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_k}^{x_{k+1}} [\int_t^{+\infty} d\mathbb{P}_X]dt$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_r}^{+\infty} [\int_{x_k}^{x_{k+1}} dt]d\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{r} \int_{x_r}^{+\infty} (x_{k+1} - x_k)d\mathbb{P}_X$$

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k) \int_{x_r}^{+\infty} d\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k)$$

• Montrons que

$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt = \sum_{k=0}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1}\mathbb{P}(X > x_r)$$

Remarquons que

$$\sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k) = \sum_{k=1}^{r+1} x_k \mathbb{P}(X > x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbb{P}(X > x_k$$

$$\sum_{k=0}^{r} (x_{k+1} - x_k)\mathbb{P}(X > x_k) = x_{r+1}\mathbb{P}(X > x_r) + \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbb{P}(x_{k-1} < X \leq x_k)$$

comme $X(\Omega) = \{x_k; k \in \mathbb{N}^*\}$ et que x_k est strictement croissante alors

$$\mathbb{P}(x_{k-1} < X \leq x_k) = P(X = x_k)$$

et c'est gagné!! • Montrons l'équivalence

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty \Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt < +\infty$$

Supposons que $\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty$ Comme la suite x_k est strictement croissante on a :

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + \sum_{k=r+1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

donc

$$\int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} \geq \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1} \sum_{k=r+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{k=0}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1}\mathbb{P}(X > x_r)$$

d'où
$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt \leq \int_{X(\Omega)} X d\mathbb{P} < +\infty$$
en faisant tendre r vers $+\infty$ le resultat est gagné!!! Réciproquement supposons que
$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)dt < +\infty$$
alors
$$\int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt < +\infty$$
comme
$$\sum_{k=0}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) + x_{r+1}\mathbb{P}(X > x_r) = \int_0^{x_{r+1}} \mathbb{P}(X > t)dt \geq \sum_{k=0}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$
ceci justifie que
$$\sum_{k=0}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k) < +\infty$$
en faisant tendre r vers l'infini c'est gagné!!! L'égalité se déduit simplement supposons que X est intégrable alors alors le reste R_r d'ordre r de la série
$$S_r = \sum_{k=1}^{r} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$
tend vers 0 comme $R_r \geq x_{r+1}\mathbb{P}(X = x_k)$ alors $x_{r+1}\mathbb{P}(X = x_k)$ tends vers 0 quand r tends vers $+\infty$ • Soit v_n une suite d'élements de $\mathbb{R}_+$ vérifiant la rélation de sous additivité
$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, v_{n+m} \leq v_n + v_m$$
On souhaite justifier l'existence du nombre $\rho = \inf\{\frac{v_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ Posons $A = \{\frac{v_n}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$ alors de l'existence de la suite on déduit que l'ensemble A est non vide de plus tous les éléments de A sont positifs . Il ressort que A est une partie non vide et minoré de R ceci justifie l'existence du nombre ρ

- Dans cette partie on considère $\epsilon > 0$ et

$$N \in \mathbb{N}^* : \rho \leq \frac{v_N}{N} \leq \rho + \epsilon$$
.Soit $(k, r) \in \mathbb{N} \times [[0, N-1]], n = kN + r$ Prouvons l'inégalité
$$\frac{v_n}{n} \leq \frac{v_N}{N} + \frac{v_r}{n}$$

On a :

$$v_n = v_{kN+r} \leq v_{kN} + v_r$$

Montrons par récurrence sur p que $v_{pn} \leq pv_n$ au rang p=1 c'est trivial supposons qu'elle est vrai au rang p

$$v_{(p+1)n} = v_{pn+n} \leq v_{pn} + v_n \leq (p+1)v_n$$

En utilisant ce résultat on a :

$$v_n = v_{kN+r} \leq v_{kN} + v_r \leq kv_N + v_r$$

comme $k \leq \frac{n}{N}$ alors on a

$$v_n \leq \frac{n}{N} v_N + v_r$$

En divisant par n c'est gagné!!! • comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_r}{n} = 0$ alors $\exists n_0$ tel que $\frac{v_r}{n} \leq \epsilon$ ainsi $\forall n \geq n_0 : \rho \leq \frac{v_n}{n} \leq \rho + 2\epsilon$ d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \rho$$

• On considère une suite $X_{k,k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires discrètes ,à valeurs positives ou nulles ,indépendantes et suivant toutes la loi de X_1 .On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On suppose $\mathbb{P}(X_1 > t) > 0$
• Montrons que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2}, (u,v) \in \mathbb{R}^2 : \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv) \geq \mathbb{P}(S_m \geq mu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

Il s'agit d'une relation simple remarquons que

$$\{S_m \geq mu\} \cap \{ \sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv\} \subset \{S_{m+n} \geq mu + nv\}$$

donc

$$\mathbb{P}(\{S_m \geq mu\} \cap \{ \sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv\}) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv)$$

comme les variables sont indépendantes alors S_m et $\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k$ le sont . donc

$$\mathbb{P}(S_m \geq mu)\mathbb{P}(\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv) \leq \mathbb{P}(S_{m+n} \geq mu + nv)$$

comme

$$\mathbb{P}(\sum_{k=m+1}^{n+m} X_k \geq nv) = \mathbb{P}(\sum_{k=1}^{n} X_{k+m} \geq nv)$$

de plus les variables X sont directes leur loi peut être caractérisé par la fonction génératrice alors

$$G_{\sum_{k=1}^n X_{k+m}}(t) = \mathbb{E}(e^{t\sum_{k=1}^n X_{k+m}}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_{k+m}}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(e^{tX_k}) = G_{S_n}(t)$$

donc

$$\mathbb{P}(\sum_{k=1}^{n} X_{k+m} \geq nv) = \mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

ceci achève la preuve

• Montrons dans cette partie la question suivante :

$$\forall n \geq 1, \forall u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(S_n \geq nu) > 0$$

Nous allons montrer par récurrence sur n $\forall u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_1 > u) > 0$ comme $S_1 = X_1$ la relation est vraie au rang n=1 Supposons qu'elle l'est au rang n comme

$$\mathbb{P}(S_{n+1} \geq (n+1)u) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu)\mathbb{P}(S_1 \geq u) > 0$$

alors la relation est vraie au rang $n+1$ ceci achève la preuve .

bullet On souhaite en déduire que ,

$$\forall u \in \mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n}$$

Posons $v_n = -\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))$ la suite $v_n \geq 0$ et de plus elle sous additive d'après la question 9-a il suffit de passer au logarithme puis ensuite multiplier par -1. D'après la question 8-b on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = \rho = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{-\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n} = -\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n}$$

comme

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{-v_n}{n}$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-v_n}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv))}{n}$$

et c'est gagné!!!

2 PARTIE 2 LE THEOREME DE CRAMER

2.1 UNE INEGALITE

• Soit J une partie de $\mathbb{R}$ qui est telle que $\forall x \in J,]-\infty, x] \subset J$ On souhaite Montrer que J est un intervalle .Rappelons qu'on appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie convexe de $\mathbb{R}$ Donc nous allons montrer que J est convexe . $\forall (x,y) \in J^2, \forall \alpha \in [0,1]$ on a

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in [\min(x,y), \max(x,y)] \subset]-\infty, \max(x,y)] \subset J$$

donc

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in J$$

ceci montre que J est convexe .c'est gagné!!

• vérifions que la fonction $\phi : \theta \mapsto \ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))$ la condition pour que ϕ soit définie est $\mathbb{E}(e^{\theta X_1}) > 0$ comme X_1 est une variable positive alors

$$0 < \mathbb{E}(e^{\theta X_1}) = \int_{X(\Omega)} e^{\theta X_1} d\mathbb{P}_{X_1} < +\infty, \forall \theta \leq 0$$

donc l'ensemble sur lequel elle est définie contient $\mathbb{R}_-$ ceci achève la preuve .

• Determination de I dans le cas d'une loi de géométrique (p) ou poisson (λ). Il s'agit d'une question au choix nous allons traiter le cas exponentielle le lecteur pourrait chercher le cas géométrique .Dans la partie préliminaire nous tirons la forme de $\phi(\theta) = \ln(e^{-\lambda(1-e^{\theta})})$ donc $I = \mathbb{R}$

• On souhaite montrer que la fonction H définie par $H(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est décroissante . D'après la question 9-b elle est bien définie la décroissance vient du fait que $\forall u, u' : u \leq u'$ on a

$$\{S_n \geq nu'\} \subset \{S_n \geq nu\}$$

donc

$$\mathbb{P}(S_n \geq nu')) \leq \mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

$$\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu'))}{n} \leq \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n}$$

$$H(u') = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu'))}{n} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))}{n} = H(u)$$

et c'est gagné!!

• Montrons que $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 : H(\frac{u+v}{2}) \geq \frac{1}{2}(H(u) + H(v))$ On utilisera la question 9-a en prenant n=m et donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} \geq n(u+v)) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

$$\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2}) \geq \mathbb{P}(S_n \geq nu)\mathbb{P}(S_n \geq nv)$$

$$\frac{1}{2n}\ln(\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2})) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu)) + \frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv)))$$

comme

$$H(\frac{u+v}{2}) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n \geq n\frac{u+v}{2}))}{n} \geq \frac{1}{2n}\ln(\mathbb{P}(S_{2n} \geq 2n\frac{u+v}{2}))$$

alors

$$H(\frac{u+v}{2}) \geq \frac{1}{2}(\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu)) + \frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nv)))$$

en passant au sup sur n c'est gagné!!! • la fonction H est décroissante donc $-H$ est croissante et vérifie la relation 3 donc elle est convexe ainsi H est concave .

• Soit $\theta \in I \cap \mathbb{R}_+$ On demande de justifier que $\forall n \geq 1, \mathbb{E}(e^{\theta S_n}) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^n$ Nous l'avons plus ou moins demontrer mais nous allons le reprendre par recurrence sur n au rang $n = 1$ c'est trivial !!! supposons que la relation est vraie au rang n et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$ on a $\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}}) = \mathbb{E}(e^{\theta S_n}e^{\theta X_{n+1}})$ comme S_n et X_{n+1} sont indépendants et de même loi que X_1 alors

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_{n+1}}) = \mathbb{E}(e^{\theta S_n})\mathbb{E}(e^{\theta X_{n+1}}) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^n(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})) = (\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))^{n+1}$$

c'est gagné!!!

• Il s'agit d'une déduction :

$$\forall n \geq 1, \phi(\theta) \geq \frac{1}{n}\ln(e^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

On sait que

$$e^{\theta S_n} \geq e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n \geq nu)} \geq e^{n\theta u}\mathbf{1}_{S_n \geq nu)}$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}) \geq e^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geq nu)$$

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n})) \geq \ln(e^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

On utilise maintenant la question précédente

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n})) = n\phi(\theta) \geq \ln(e^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

c'est gagné!!!

• On souhaite conclure à l'inégalité :

$$\phi(\theta) \geq \sup_{u\in\mathbb{R}}(\theta u + H(u))$$

On se sert de la déduction

$$\phi(\theta) \geq \frac{1}{n}\ln(e^{n\theta u}\mathbb{P}(S_n \geq nu)) = \theta u + \frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq nu))$$

En prenant le sup sur n on a $\phi(\theta) \geq \theta u + H(u)$ en reprenant le sup sur u c'est gagné!!!!

• On souhaite établir le cas d'égalité pour $\theta = 0$ on a $\phi(0) \geq \sup_{u\in\mathbb{R}} H(u)$ comme $H(0) = \frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n \geq 0))$ comme les variables sont positives alors $\mathbb{P}(S_n \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(S_n < 0) = 1$ donc $H(0) = 0 = \phi(0)$ on peut conclure on pouvait utiliser la question 6 aussi comme argument de justification puisque H est concave et décroissante .avec x=0 c'est aussi gagné!!!

• Prouvons

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}\mathbf{1}_{X_1\leq K})) = \frac{1}{n}\ln(\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\leq K}))$$

On a

$$e^{\theta S_n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\leq K} = \prod_{i=1}^{n}e^{\theta X_i}\mathbf{1}_{X_i\leq K}$$

comme les variables sont indépendants et ont même loi que alors

$$\ln(\mathbb{E}(S_n\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}_{X_i\leq K}) = \ln(\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}(e^{\theta X_i}\mathbf{1}_{X_i\leq K})) = \sum_{i=1}^{n}\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_i}\mathbf{1}_{X_i\leq K})) = n\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}\mathbf{1}_{X_1\leq K}))$$

et c'est gagné!!!!

• Justifions l'existence d'une espérance pour la variable $e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK}$ On a

$$e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{\{S_n\leq nK\}} \leq e^{\theta nK}$$

donc

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK}) \leq e^{\theta nK}$$

Montrons l'inégalité

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq \int_0^{e^{n\theta K}}\mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt$$

Remarquons que

$$e^{nK\theta} = \int_0^{e^{n\theta K}}\mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n}>t\}}dt$$

Donc

$$e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK} \leq \int_0^{e^{n\theta K}}\mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n}>t\}}dt$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq \mathbb{E}(\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n}>t\}}dt)$$

La linéarité de l'espérance .

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{e^{\theta S_n}>t\}})dt = \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt$$

c'est gagné!!!!

• Déduisons l'inégalité

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK}) \leq 1 + n\theta \int_0^K \mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du$$

D'après la question précédente on a :

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq \int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt$$

De plus en posant $t = e^{n\theta u}$ on a :

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt = \int_{-\infty}^K n\theta\mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du$$

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt = \int_{-\infty}^0 n\theta\mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du + \int_0^K n\theta\mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du$$

$$\int_0^{e^{n\theta K}} \mathbb{P}(e^{\theta S_n} > t)dt \leq \int_{-\infty}^0 n\theta e^{n\theta u}du + \int_0^K n\theta\mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du = 1 + \int_0^K n\theta\mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du$$

c'est gagné!!!!.

• Déduction de l'inégalité

$$\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}\mathbf{1}_{X_1\leq K}))) \leq \frac{1}{n}\ln(1 + n\theta K e^{nM(\theta)})$$

On sait que

$$\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n > nu)) \leq H(u)$$

donc

$$\mathbb{P}(\theta S_n > nu) \leq e^{nH(u)}$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq 1 + n\theta \int_0^K \mathbb{P}(S_n > nu)e^{n\theta u}du \leq 1 + n\theta \int_0^K e^{nH(u)}e^{n\theta u}du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq 1+n\theta\int_0^K e^{nH(u)}e^{n\theta u}du = 1+n\theta\int_0^K e^{n(H(u)+\theta u)}du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq 1+n\theta\int_0^K e^{n\sup_{u\in\mathbb{R}}(H(u)+\theta)}du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq 1+n\theta\int_0^K e^{nM(\theta)}du$$

$$\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq 1+n\theta K e^{nM(\theta)}$$

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}(e^{\theta S_n}\mathbf{1}_{S_n\leq nK})) \leq \frac{1}{n}\ln(1+n\theta K e^{nM(\theta)})$$

d'après 5-ii c est gagné!!!!!

• Soit n fixé et $K_0 = [\frac{e^{-nM(\theta)}}{n\theta}]+1\ \forall K\geq K_0, n\theta K e^{nM(\theta)}\geq 1$

$$\forall K\geq K_0, 1+n\theta K e^{nM(\theta)} \leq 2n\theta K e^{nM(\theta)}$$

$$\forall K\geq K_0, ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}\mathbf{1}_{X_1\leq K}))) \leq \frac{\ln(2n\theta e^{nM(\theta)})}{n}$$

c'est gagné!!!!!! En faisant tendre n vers l'infini puis ensuite K vers l'infini dans la question 6 on déduit la question 7

• Dans cette question il s'agira de conclure que :

$$\forall x\in\mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx)) = \inf_{\theta\geq 0}(\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))-\theta x)$$

D'après la question 9-c on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx))}{n} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx))}{n} = H(x)$$

de plus la fonction H est concave et décroissante alors d'après la question 6-c on a :

$$\inf_{\theta\geq 0}\sup_{u\in\mathbb{R}}(H(u)+\theta(u-x)) = H(x)$$

$$\inf_{\theta\geq 0}\sup_{u\in\mathbb{R}}(H(u)+\theta u-\theta x)) = \inf_{\theta\geq 0}(-\theta x+\sup_{u\in\mathbb{R}}(H(u)+\theta u))) = \inf_{\theta\geq 0}(-\theta x+M(\theta)) = \inf_{\theta\geq 0}(-\theta x+\phi(\theta))$$

$$\inf_{\theta\geq 0}\sup_{u\in\mathbb{R}}(H(u)+\theta(u-x)) = \inf_{\theta\geq 0}(\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1})-\theta x)$$

et c'est gagné!!!!!!

• Soit $\lambda>0,\epsilon>0$ on souhaite montrer l'existence de $a>0$ tel que pour tout entier n suffisament grand on a

$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\geq\lambda+\epsilon)\leq e^{-an}$$

D'après la question précédente on a ;

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx))}{n}=\inf_{\theta\geq 0}(\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))-\theta x)$$

comme

$$\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx))}{n}\leq\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx))}{n}=\inf_{\theta\geq 0}(\ln(\mathbb{E}(e^{\theta X_1}))-\theta x)=H(x)\leq 0$$

donc

$$\ln(\mathbb{P}(S_n\geq nx)\leq nH(x)$$
$$\mathbb{P}(S_n\geq nx)\leq e^{-n(-H(x))}$$
$$\mathbb{P}(\frac{S_n}{n}\geq x)\leq e^{-n(-H(x))}$$

pour $x=\lambda+\epsilon$ on prend $a=-H(\lambda+\epsilon)>0$ et c'est gagné
• La dernière question est simple il suffit de trouver a tel que $e^{-na}=\frac{\lambda}{n\epsilon^2}$ On pouvait utiliser l'inégalité de Chernoff en 4-b

.