

匀加速直线运动点电荷的电场

赵永强

E-mail: zhao671116@163.com

摘要: In this paper, we find the electric field of a uniformly accelerating point charge in vacuum when $v \ll c$. We show that the electric field is curved toward the opposite direction of acceleration, and it is not a conservative field. //在本文中我们求出了当 $v \ll c$ 时真空中匀加速直线运动点电荷的电场。我们证明此电场是向加速度的反方向弯曲的，并且它不是保守场。

关键词: 扰动电场 点电荷 真空 保守场

宇宙是由物质和空间构成的，二者之间相互作用、相互影响。空间是物质赖以存在的基础，没有空间物质就不可能存在。物质的一切性质都需依赖空间才能表现出来，因此可以说，在一定意义上物质的性质是由空间的性质决定的。在真空中由于空间的各向同性以及均匀性，静止点电荷的电场具有球对称性，其电场线呈直线放射状分布。根据广义相对论，引力场实质上是时空的弯曲，因此在引力场中静止点电荷的电场也应该随着时空的弯曲而弯曲，其电场线也应该变为曲线。由等效远原理可知，一个均匀引力场和一个匀加速运动参照系等效，因此在匀加速运动参照系中静止点电荷的电场也应该是弯曲的。下面首先来研究在真空中匀加速直线运动的点电荷的电场。

在此我们不做一般的研究，只对一种简单的情况加以研究。假设在真空中的惯性参照系 S 中有一个正的点电荷 q ，电荷 q 原来一直静止在原点 O ，从时刻 $t_0=0$ 开始以加速度 a 沿 y 轴正方向做匀加速直线运动。在时刻 t 时，电荷 q 的速度为 $v=at$ ，为了简单起见我们假设 $v \ll c$ (c 为光速)，下面研究在时刻 t 时电荷 q 的电场。

如图 1 所示，在 t_0 时刻，电荷 q 从原点开始加速，在时刻 t 电荷 q 到达 P 点。在此期间，由于电荷的加速运动，它周围的电场会发生扰动，这一扰动以光速 c 向外传播。在时刻 t ，这一扰动的前沿到达以 O 为中心，以 $r_0=ct$ 为半径的球面上。根据相对论关于光速最大的结论，此时不可能有任何变化的信息传到此球面以外，因此球面以外的电场仍是在 t_0 时刻之前原来电荷 q 静止于 O 点时的静电场，它的电场线是沿着从 O 点引出的沿半径方向的直线，而球面内的电场就是在这段时间内电荷加速运动产生的扰动电场。在电荷的速度远小于光速的情况下，球面内扰动电场相对于电荷的分布，可以看作是近似不变的，就好像扰动电场同电荷一起做加速运动。实际上随着时间的推移，扰动电场不断地由近及远的传播，同时电荷又不断地产生新的扰动电场。

由于电荷 q 做加速运动，球面内扰动电场的电场线不再是直线，而是变为曲线，因此在时刻 t ，球面内的电场线应该是从此时刻 q 所在的 P 点引出的曲线。由高斯定律可知，在球面两侧的电场线总条数应该是相等的，而且电场线在通过球面处也应该是连续的，因此用电场线描绘整个电场时，就应该把球面两侧的电场线一一对应连接，如图 1 所示。

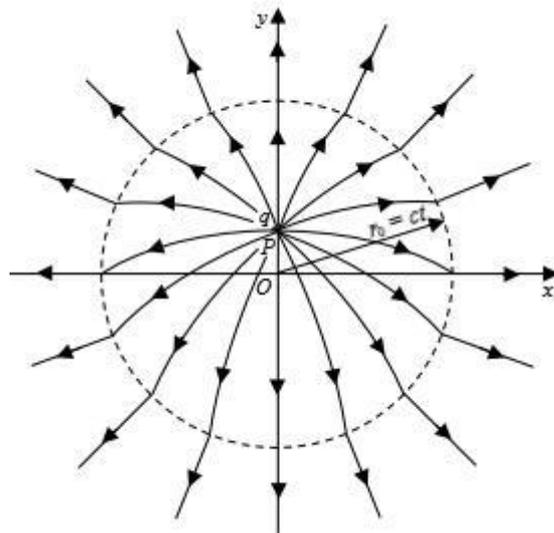


图1 在时刻 t 加速电荷 q 的电场。

现在借助电场线图来分析球面处的扰动电场。如图2所示, M 为球面上任意一点, r 为从点 P 到点 M 的径矢, 且 r 与 y 轴的夹角为 φ 。在球面内过点 M 的电场线为曲线 PM , 在球面外则是沿着直线 OM 。从 O 到 M 的径矢 r_0 与 y 轴的夹角为 θ 。点 P 距点 O 的距离为 $OP=vt/2$ 。由于 $r_0=ct$ 且 $v \ll c$, 因而 $OP \ll r_0$ 。

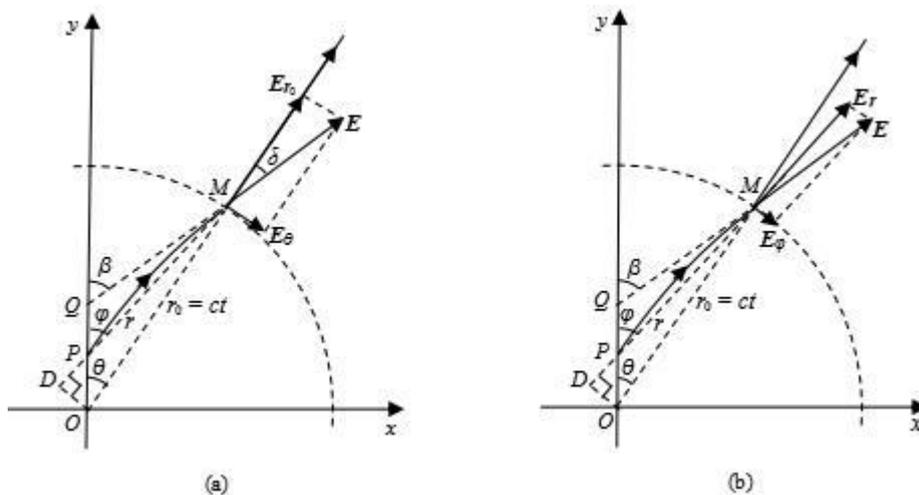


图2 在球面上点 M 处的扰动电场 E 。(a), E 被分为 E_{r_0} 和 E_θ 两个分量。(b), E 被分为 E_r 和 E_ϕ 两个分量。

我们来求点 M 处的扰动电场 E 。 E 是加速电荷 q 在 O 点产生的此时已传播至点 M 处的扰动电场。 E 的方向是沿着曲线 PM 在点 M 处的切线方向。 E 可分为 E_{r_0} 和 E_θ 两个分量(见图2a)。根据高斯定律, 电通量只与垂直于高斯面的电场分量有关, 所以电场线在球面处连续就意味着 E_{r_0} 分量仍是由库仑定律给出的径向电场, 也就是原来点 M 处的静电场, 即

$$E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (1)$$

E_θ 分量就是加速电荷 q 产生的横向电场^[1], 即

$$E_\theta = \frac{qa \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_0} = \frac{v \sin \theta}{c} E_{r_0} \quad (2)$$

由于 $v \ll c$, 所以 $E_\theta \ll E_{r_0}$, 因而可得

$$E = \sqrt{E_{r_0}^2 + E_\theta^2} \approx E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \quad (3)$$

如图 2 所示, 过点 O 作 OD 垂直于直线 PM , 并与直线 PM 相交于点 D 。 \mathbf{E} 的延长线与 y 轴相交于点 Q , 并且与 y 轴的夹角为 β , \mathbf{E} 与 \mathbf{E}_{r_0} 的夹角为 δ 。 因此可得

$$\sin \angle OMD = \frac{OD}{r_0} = \frac{\frac{vt}{2} \sin \varphi}{ct} = \frac{v \sin \varphi}{2c} \quad (4)$$

$$\cos \angle OMD = \sqrt{1 - \sin^2 \angle OMD} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{2c}\right)^2} \approx 1 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \frac{E_\theta}{E} \approx \frac{v \sin \theta}{c} = \frac{v}{c} \sin(\varphi - \angle OMD) \\ &\approx \frac{v}{c} \left(\sin \varphi - \frac{v \sin \varphi \cos \varphi}{2c} \right) \approx \frac{v \sin \varphi}{c} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \sin^2 \delta} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{c}\right)^2} \approx 1 \quad (7)$$

$$\sin \angle QMP = \sin(\delta - \angle OMD) \approx \frac{v \sin \varphi}{c} - \frac{v \sin \varphi}{2c} = \frac{v \sin \varphi}{2c} \quad (8)$$

$$\cos \angle QMP = \sqrt{1 - \sin^2 \angle QMP} = \sqrt{1 - \left(\frac{v \sin \varphi}{2c}\right)^2} \approx 1 \quad (9)$$

由于

$$r_0 = \frac{DM}{\cos \angle OMD} \approx r + \frac{ar_0^2 \cos \varphi}{2c^2} \approx r + \frac{ar^2 \cos \varphi}{2c^2} \quad (10)$$

因此点 M 处扰动电场 \mathbf{E} 的大小为

$$E = E_{r_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{ar^2 \cos \varphi}{2c^2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (11)$$

从图 2b 可以看出, \mathbf{E} 的方向不在径矢 \mathbf{r} 的方向上, 而是向加速度的反方向发生了偏转, 且 \mathbf{E} 与径矢 \mathbf{r} 方向的夹角等于 $\angle QMP$ 。 如果把 \mathbf{E} 分为 \mathbf{E}_r 和 \mathbf{E}_φ 两个分量, 其中 \mathbf{E}_r 为 \mathbf{E} 在径矢 \mathbf{r} 方向上的分量, \mathbf{E}_φ 为 \mathbf{E} 在径矢 \mathbf{r} 垂直方向上的分量(见图 2b), 则

$$E_r = E \cos \angle QMP \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (12)$$

$$E_\varphi = E \sin \angle QMP \approx \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right) \times \frac{v \sin \varphi}{2c} \approx \frac{qa \sin \varphi}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \quad (13)$$

\mathbf{E} 可以用矢量式表示为

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_r + \mathbf{E}_\varphi = \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{qa \cos \varphi}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{qa \sin \varphi}{8\pi\epsilon_0 c^2 r} \mathbf{e}_\varphi \quad (14)$$

假设有一个匀加速运动的参照系 S' ，加速电荷 q 相对于 S' 系始终静止。如果在 S' 系中观察，电荷 q 周围的扰动电场相对于电荷 q 的分布是固定不变的，并且根据等效原理，该电场同电荷 q 在与 S' 系等效的引力场中静止时的电场相同。

在 S 系中，在 $v \ll c$ 的情况下，电荷 q 周围的扰动电场与在 S' 系中近似相同，并且随着时间的推移之前在电荷 q 周围扰动电场的分布是近似不变的，也就是说在电荷 q 周围相对于电荷 q 任意一点处的扰动电场是一近似恒量，所以电荷 q 周围任意一点的扰动电场都可以用式 (14) 近似表示，此时式中 r 表示该点距电荷 q 的距离， φ 表示电荷 q 到该点的径矢 \mathbf{r} 与加速度方向的夹角。由于 $v = ar_0/c \approx ar/c$ ，因此，当 $v \ll c$ 时，我们可以得到 $r \ll c^2/a$ ，这就是上式中 r 的取值范围。如果加速电荷为负电荷，则负电荷与正电荷产生的扰动电场大小相等方向相反。

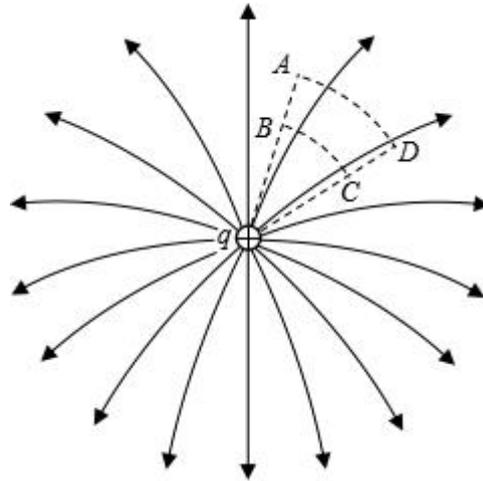


图 3 匀加速直线运动点电荷 q 的扰动电场

图 3 表示做匀加速直线运动的正的点电荷 q 的扰动电场，其中 $ABCD$ 为一闭合回路， BC 和 AD 是以 q 为圆心的两个同心圆的弧， BA 和 CD 是沿径向的两个线段。我们求电场沿这一闭合回路的线积分。由式 (13) 可知，电场沿 BC 和 DA 的线积分的大小相等，因此它们相互抵消，对总积分无贡献。由式 (12) 可知，线段 BA 上的电场强度小于线段 CD 上的电场强度，而此两个线段的长度相等，所以电场沿这两线段的线积分的大小不相等。因此，电场沿此闭合回路的线积分不为零，即 $\oint_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \neq 0$ 。这一结果表明，匀加速直线运动点电荷的扰动电场不是保守场。

参考文献

- [1] 张三慧.电磁学[M].北京:清华大学出版社,1999:373-377.