Les Équations d'Einstein Spinorielles

A.Balan

April 13, 2019

1 La géométrie spinorielle

Une variété riemannienne M admet une structure spin si la seconde classe de Stieffel-Whitney s'annule $\omega_2(M) = 0$. On peut alors définir le fibré des spineurs Σ. Le fibré en algèbres de Clifford agit en tant qu'endomorphismes du fibré des spineurs. On obtient la multiplication de Clifford d'un vecteur par un spineur. Le fibré Σ admet une métrique hermitienne pour laquelle un vecteur est un endomorphisme réel anti-symétrique. La connexion de Levi-Civita ∇^{LC} s'étend au fibré des spineurs et vérifie :

$$\nabla(X.\psi) = \nabla^{LC}(X).\psi + X.\nabla(\psi)$$

On peut définir l'opérateur de Dirac qui agit sur les spineurs selon la formule :

$$\mathcal{D}(\psi) = \sum_i e_i.\nabla_{e_i}(\psi)$$

pour n'importe quelle base orthonormée (e_i) du fibré tangent.

2 Les spineurs d'Einstein

Définition 1 *On appelle spineur d'Einstein, un spineur qui vérifie pour tout X vecteur :*

$$\nabla_X\psi = \mu X.\psi + (\frac{2\nu}{r})Ricc(X).\psi$$

pour deux constantes μ et ν. Ricc est la courbure de Ricci et r est la courbure scalaire.

A cause de cette équation aux dérivées partielles, le spineur d'Einstein ne peut pas s'annuler en aucun point sauf s'il est identiquement nul.

3 L'opérateur de Dirac

On a la proposition suivante :

Proposition 1 *Soit une variété spin M qui admet un spineur d'Einstein ψ, alors ψ est un vecteur propre de l'opérateur de Dirac pour la valeur propre $-n\mu - 2\nu$.*

Démonstration :

En effet :

$$\mathcal{D}(\psi) = \mu \sum_i e_i.e_i.\psi + (\frac{2\nu}{r}) \sum_i e_i.Ricc(e_i).\psi$$

et $\sum_i e_i.Ricc(e_i) = -r$.

•

4 Un champ de vecteurs d'Einstein

Définition 2 *Un champ de vecteurs d'Einstein est un champ de vecteurs V qui vérifie :*

$$g(\nabla_X V, Y) + g(\nabla_X V, Ricc(Y) = -g(\nabla_Y V, X) - g(\nabla_Y V, Ricc(X))$$

Soit :

$$V^\psi = \sum_i (e_i.\psi, \psi) e_i$$

Alors, on a la proposition suivante :

Proposition 2 *Le vecteur V^ψ pour $\mu = \frac{2\nu}{r}$ est un vecteur d'Einstein.*

Démonstration :

On choisit une base locale (e_i) telle que :

$$\nabla e_i = 0$$

Alors :

$$\nabla_X V^\psi = \sum_i (e_i.\nabla_X \psi, \psi) e_i + (e_i.\psi, \nabla_X \psi) e_i =$$

$$= \mu \sum_i ((e_i.X - X.e_i).\psi, \psi) e_i + (\frac{2\nu}{r}) \sum_i ((e_i.Ricc(X) - Ricc(X).e_i).\psi, \psi) e_i$$

$$g(\nabla_X V^\psi, Y) = \mu((Y.X - X.Y).\psi, \psi)) + (\frac{2\nu}{r})((Y.Ricc(X) - Ricc(X).Y).\psi, \psi)$$

•

5 Les équations d'Einstein spinorielles

On définit les équations d'Einstein spinorielles :

Définition 3 *Une variété spinorielle M vérifie les équations d'Einstein spinorielle s'il existe un spineur ψ qui ne s'annule pas et on a les équations suivantes :*

$$Ricc(X)\psi = \mu(r)X.\psi + \nu(r)\sum_{\alpha} e_{\alpha}.(d^{\nabla}Ricc(X, e_{\alpha})).\psi$$

avec $\mu(r), \nu(r)$ deux fonctions de la courbure scalaire r. $d^{\nabla}Ricc$ est la dérivée covariante de la courbure de Ricci.

On a alors le théorème suivant :

Théorème 1 *Si une variété spin M admet un spineur d'Einstein ψ, alors elle vérifie les équations d'Einstein spinorielles pour le spineur ψ.*

Démonstration :

$$\nabla_X\nabla_Y\psi = \nabla_X(\mu Y.\psi + (\frac{2\nu}{r})Ricc(Y).\psi) =$$

$$= \mu\nabla_X Y.\psi + \mu^2 Y.X.\psi + (\frac{2\nu}{r})\nabla_X Ricc(Y).\psi +$$

$$+(\frac{2\nu}{r})\mu Y.Ricc(X).\psi + (\frac{2\nu}{r})\mu Ricc(Y).\psi + (\frac{2\nu}{r})^2 Ricc(Y).Ricc(X).\psi$$

$$(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\psi = \mu^2(Y.X - X.Y).\psi + (\frac{2\nu}{r})(d^{\nabla}Ricc(X,Y)).\psi +$$

$$+(\frac{2\nu}{r})(\nabla_X Ricc(Y) - \nabla_Y Ricc(X)).\psi +$$

$$+\mu(\frac{2\nu}{r})(Y.Ricc(X) - X.Ricc(Y) + Ricc(Y).X - Ricc(X).Y).\psi$$

On a :

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha}.R(X, e_{\alpha}) = -(1/2)Ricc(X)$$

•

References

[B] N.Berline, E.Getzler, M.vergne, "Heat kernels and Dirac operators", Springer-Verlag, 1992.

[F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.

[K] M.Karoubi, "Algèbres de Clifford et K-théorie", Ann.Scient.Ec.Norm.Sup. 4 ser. 1 (1968), 161-270.