DEMONSTRATION DE LA CONJECTURE DE C.GOLDBACH

BERKOUK Mohamed

Email: bellevue-2011@hotmail.com

En 1742, Christian Goldbach adressa une lettre à Leonhard Euler dans laquelle il proposait la conjecture faible suivante :

> ***Tout nombre supérieur à 5 peut être écrit comme une somme de trois nombres premiers.***

Euler, lui répondit avec la version plus forte de la conjecture :

> ***Tout nombre pair plus grand que deux peut être écrit comme une somme de deux nombres premiers.*** [1]

Le « Tout nombre » de la réponse d'Euler qui a écarté 2 aussi, laisse entendre que Euler ou Goldbach, ou les deux à la fois ne considéraient pas que 1 est premier...

C'est ces deux dernières versions actuelles que nous allons essayer de démontrer en adoptant une nouvelle approche.

INTRODUCTION

1°- en ce *qui concerne* la conjecture forte, chaque nombre pair n, à partir de 4 peut générer plusieurs couples dont les éléments a et b < n et que parmi ces couples, qui déjà répondent à la conjecture par la sommation (n=a+b).Le nombre ou le cardinal des couples premiers sera estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers , en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall$ N pair > 3, $\exists$ un couplet Goldbach premier (p, p') généré par N / N= p + p'
En établissant l'inéquation de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les couples impair...)

2°- quand à la conjecture faible, chaque nombre impair n, à partir de 7 peut générer plusieurs triplets dont les éléments a ,b et c < n et que parmi ces triplets , qui déjà répondent à la conjecture par la sommation (n=a+b+c).Le nombre ou le cardinal des triplets premiers est estimé par le théorème fondamentale des nombres premiers , en démontrant que ce cardinal > 0 c'est-à-dire $\forall$ N impair > 5, $\exists$ un triplet Goldbach premier (p, p',p '') généré par N / N= p + p'+p''
En établissant l'inéquation faible de Goldbach qui exprime autrement la conjecture (réduisant ce cardinal en ne considérant que les triplets impairs)

I- Démonstration de la conjecture Forte de C. Goldbach.

a) détermination de la suite des décompositions de couplets impairs générés par tout pair >2

- un couplet commutatif impair est généré 2 fois par n , soit (a,b) et (b,a) , comme nous somme concerné par la somme n = a+b pour l'énoncé de la conjecture , vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seul fois (a,b).

- un couplet Goldbach , c'est tout couplet impair et premier (a, b premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture par rapport au nombre pair qui le génère. . (n = a+b)

Commençons par cette observation inductive de cette suite

Exemple 1 : les couplets générés par le premier pair 4 sont :

4 -→ (3,1) (2,2) (1,3) dont 1 couplets commutatifs impairs (3,1) (ou bien (3,1)), et un couplet Goldbach particulier (2,2) pour construire la somme de 2 premiers et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **4**/4 = 1

Exemple 2 : les couplets générés par le deuxième pair 6 sont :

6 -→ (5,1) (4,2) (3,3) (2,4) (1,5) dont 1 couplets commutatifs impairs (5,1) et un couplet Goldbach (3,3) pour construire la somme de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **6**+2/4 = 2

Exemple 3: les couplets générés par le troisième pair 8 sont :

8 -→ (7,1) (6,2) (5,3) (4,4) (3,5) (2,6) (1,7) dont 2 couplets commutatifs impairs (7,1) (5,3)

(Ou bien (3,5) (1,7), et dont 1 couplet Goldbach (5,3) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **8**/4= 2

Exemple 4: les couplets générés par le quatrième pair 10 sont :

10 -→ (9,1) (8,2) (7,3) (6,4) (5,5) (4,6) (3,7) (2,8) (1,9) dont 2 couplets commutatifs impairs (9,1) (7,3) (ou bien (1,9) (3,7)), et dont 2 couplets Goldbach (7,3) (5,5) pour construire la somme de 2 premiers pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **10+2**/4= 3

Exemple 5: les couplets générés par le cinquième pair 12 sont :

12 -→ (11,1) (10,2) (9,3) (8,4) (7,5) (6,6) (5,7) (4,8) (3,9) (2,10) (1,11) dont 3couplets commutatifs impairs (11,1) (9,3) (7,5) (ou bien (1,11) (3,9) (5,7)), et dont 1 couplet Goldbach (5,7) pour construire la somme commutative de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **12**/4= 3

Exemple 6: les couplets générés par le sixième pair 14 sont :

14-→ (13,1) (12,2) (11,3) (10,4) (9,5) (8,6) (7,7) (6,8) (5,9) (4,10) (3,11) (2,12) (2,13) dont 3 couplets commutatifs impairs (13,1) (11,3) (9,5) ;(ou bien (1,13) (3,11) (5,9)), et dont 2 couplet Goldbach (3,11) et (7,7) pour construire la somme de 2 premiers, et pour aussi énoncer la conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **14+2**/4= 4

Exemple 7: les couplets générés par le septième pair 16 sont :

16-→ (15,1) (14,2) (13,3) (12,4) (11,5) (10,6) (9,7) (8,8) (7,9) (6,10) (5,11) (4,12) (3,13) (2,14) (1,15) dont 4 couplets commutatifs impairs (15,1) (13,3) (11,5), (9,7) et dont 3 couplets Goldbach (13,3) (11,5) (7,7) pour construire la somme de 2 premiers, et pour aussi énoncer la Conjecture.

Le nombre de couplets impairs = **16**/4= 4

....

LEMME 1 :

Pour Tout n, pair > 2 ∈ $\mathbb{N}^*$, Si il est de forme 4k = n , (∀ k ∈ $\mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D généré par n, en couplets, dont les éléments a et b sont impairs est : D**(n)** = **n/4.**

LEMME 2 :

Si il est de forme 4k+2 = n , (∀ k ∈ $\mathbb{N}^*$), le nombre de décompositions D, en couplets dont les éléments a et b sont impairs **D(n) = (n+2)/4**

La preuve du lemme 1 et du lemme 2 se retrouvent dans la formule explicite de la récurrence définit par la fonction f(n) , qui pour tout n pair > 2 , f(n) = au nombre de décomposant impairs générés par n :

$$f: 2\mathbb{N} \setminus \{2\} \to \mathbb{N} : \quad n \to \frac{n+1+(-1)^{\frac{n-6}{2}}}{4} \qquad (2\mathbb{N} : \text{ensemble des entiers pairs positifs})$$

Preuve :

. Si n = 4k ⇒ $(-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k-6}{2}} = (-1)^{2k+3}$, comme 2k-3 est Impair

⇒ $(-1)^{2k-3} = -1$ ⇒ $f(n) = \frac{n}{4}$.

. Si n = 4k+2 ⇒ $(-1)^{\frac{n-6}{2}} = (-1)^{\frac{4k+2-6}{2}} = (-1)^{2k-2}$, comme 2k-2 est Pair

⇒ $(-1)^{2k-2} = +1$ ⇒ $f(n) = \frac{n+2}{4}$.

Il existe une équi-répartition des formes 4k et 4k+2 et qui s'alternent dans la suite, comme nous avons vu ci-dessus à partir de 4 , on peut affirmer que la moyenne MD, des nombres de couplets impairs générés par un nombre pair > 2, est de :

$$\mathrm{MD}(n) = \frac{\left(\frac{n}{4} + \frac{n+2}{4}\right)}{2}$$

$$= \frac{2n+2}{4.2}$$

$$\mathbf{MD(n)} = \frac{n+1}{4}$$

b) détermination des « couplets Goldbach » parmi la MD(n) des couplets impairs générés par tout n > 2 , entier positif pair.

1° Utilisant le Théorème fondamental des nombres premiers , pour déterminer le nombre de couplets Goldbach **G(m)** parmi ces $\frac{n+1}{4}$ couplets impairs.

Au début l'hypothèse était que le nombre de premiers inférieur à x, entier positif, est sensiblement égale à x divisé par son logarithme népérien, quand x tend vers l'infini :

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad (x \to +\infty),$$

Le problème consiste alors à prouver $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log(x)} = 1$

Vers 1896, Hadamard et de la vallée Poussin, en utilisant l'analyse complexe de Riemann , trouvèrent la démonstration du problème qui devient *théorème fondamental des nombres premiers. (TFNP)*

Appliquons le TFNP pour déterminer le cardinal des couplets Goldbach G (m) , parmi les couplets impairs généré par un nombre pair donné :

2° **Théorème :** Le nombre de *k*-combinaisons avec répétition d'un ensemble à *n* éléments ($n > 0$), noté $\Gamma_n^{\,k}$ est égal à $\frac{(n+k-1)!}{k\,(n-1)!}$

Preuve :

Supposons que $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Les *k*-combinaisons de *E* avec répétition qui ne contiennent pas x_1 sont en bijection avec les *k*-combinaisons avec répétition de $\{x_2, \ldots, x_n\}$ donc il y en a $\Gamma_{n-1}^{\,k}$. Les *k*-combinaisons de *E* avec répétition qui contiennent x_1 au moins une fois sont en bijection (en leur enlevant un x_1) avec les
($k - 1$)-combinaisons de *E* avec répétition donc il y en a $\Gamma_n^{\,k-1}$. Le nombre total de *k*-combinaisons de *E* avec répétition est la somme de ces deux nombres. On en déduit la relation de récurrence . Le

résultat s'en déduit par récurrence sur $n + k$, compte tenu du fait que pour tout entier naturel k, $\Gamma_1^{\,k}$ = 1 et pour tout entier $n > 0$, $\Gamma_n^{\,0} = 1$. [2]

La conjecture forte de Goldbach est équivalente donc à **« ∀ N pair > 3, ∃ un couplet Goldbach (p, p') généré par N / N= p + p' »** (p et p' premiers bien entendu).

Le cardinal des couplets Goldbach G (m) = au nombre de combinaison répétées de 2 parmi $\pi(\mathrm{m})$, m <u>est réduit</u> à $\frac{n+1}{4}$ qui constitue le nombre moyen de couplet impairs généré par tout n pair > 2 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les couplets Goldbach par $\pi(\mathrm{m})$.

$$G(m) = \Gamma\, \pi(\mathrm{m})^{2} = \frac{(\pi(\mathrm{m}) + 2 - 1)!}{2\,(\pi(\mathrm{m}) - 1)!} \qquad \text{(d'après le théorème 2°)}$$

$$G(m) = \frac{(\pi(\mathrm{m})+1).\pi(\mathrm{m}).(\pi(\mathrm{m})-1)!}{2\,.(\pi(\mathrm{m})-1)!}$$

$$G(m) = \frac{(\pi(\mathrm{m})+1).\pi(\mathrm{mx})}{2}$$

Posons $\pi(\mathrm{m}) = \frac{\mathrm{m}}{\log(\mathrm{m})}$, tant que ça été prouvée pour m au voisinage de l'infini par Hadamard et de la vallée Poussin ($\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(\mathrm{m})}{\mathrm{m}/\log(\mathrm{m})} = 1$).

$$G(m) = \frac{\left(\frac{\mathrm{m}}{\log(\mathrm{m})}+1\right).\left(\frac{\mathrm{m}}{\log(\mathrm{m})}\right)}{2}$$

$$G(m) = \frac{m}{2\log(m)}.\left(\frac{\mathrm{m}}{2\log(\mathrm{m})} + \frac{1}{2}\right)$$

$$G(m) = \left(\frac{m}{2\log(m)}\right)^{2} + \frac{m}{4.\log(m)}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture de Goldbach par l'inéquation de Goldbach suivante :

$\left(\frac{m}{2\log(m)}\right)^{2} + \frac{m}{4.\log(m)} > 0$ avec $m = \frac{n+1}{4}$ et pour tout n pair > 2

Simplifions cette inéquation dite de Goldbach :

C'est-à-dire $\left(\frac{m}{2\log(m)}\right)^{2} + \left(\frac{\mathrm{m}}{4\log(\mathrm{m})}\right) > 0$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{m^2}{4.\log(m)^2} + \dfrac{\mathrm{m}}{4\log(\mathrm{m})} > 0$

$\Rightarrow \qquad \dfrac{m^2 + \log(\mathrm{m}).m}{4.\log(m)^2} > 0$

$\Rightarrow \qquad m^2 + \log(\mathrm{m}).m > 0 \,.\, 4.\log(m)^2$

$\Rightarrow \qquad m^2 > -\log(\mathrm{m}).m$

$\Rightarrow \qquad m > -\log(\mathrm{m})$

$\Rightarrow \qquad e^{\mathbf{m}}. > e^{-\log(\mathrm{m})}$

$\Rightarrow \qquad e^{\mathbf{m}} > \dfrac{1}{\mathrm{m}}$

Avec m = $\dfrac{n+1}{4}$ $\qquad e^{\frac{n+1}{4}} > \dfrac{1}{\frac{n+1}{4}}$

$\Rightarrow \qquad e^{\frac{n+1}{4}} > \dfrac{4}{n+1}$

L'inéquation de GOLDBACH devient : $\qquad e^{\frac{n+1}{4}} > \dfrac{4}{n+1} \quad (1)$

Soit la fonction $\qquad$ f(n) = $e^{\frac{n+1}{4}} - \dfrac{4}{n+1}$

f(n) est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (1) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit n >2 . f(n) étant définit dans l'intervalle [4, +∞ [

Calculons sa dérivé $\qquad$ f'(n) $= \dfrac{n^2.\, e^{\frac{n+1}{4}} + 2.\mathrm{n}.\, e^{\frac{n+1}{4}} + e^{\frac{n+1}{4}} + 16}{4.\ (n+1)^2}$, son signe est toujours positif

puisse que avec n > 2 et $e^{\frac{n+1}{4}}$ positif, le numérateur et le dé-numérateur donne un quotient toujours positif $\Rightarrow$ f'(n) > 0 $\Rightarrow$ f(n) est strictement croissante entre f(4) =2,690342 Et +∞ $\Rightarrow e^{\frac{n+1}{4}} > \dfrac{4}{n+1}$

$\Rightarrow$ L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour m = $\dfrac{n+1}{4}$.

c) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n}{4}$ valeur minimale des couplets impairs générés par tout n > 2, entier positif pair.

Partant du $\qquad (\dfrac{m}{2\log(m)})^2 + \dfrac{m}{4.\log(m)} > 0$

Et après simplification, arrivant à $e^{\mathrm{m}} > \frac{1}{\mathrm{m}}$ ($\mathrm{m} = \frac{n}{4}$, dans ce cas)

$\Rightarrow \quad e^{\frac{n}{4}} > \frac{1}{\frac{n}{4}}$

$\Rightarrow \quad e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$

L'inéquation de GOLDBACH devient : $e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$ (2)

Soit la fonction g(n) = $e^{\frac{n}{4}} - \frac{4}{n}$

g(n) est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (2) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit n >2 . g(n) étant définit dans l'intervalle [4 , +∞ [

Calculons sa dérivé g'(n) = $\frac{n^2 .\ e^{\frac{n}{4}}+16}{4.\ n^2}$, son signe est toujours positif puisse que avec n > 2 et $e^{\frac{n}{4}}$ positif , le numérateur et le dénumérateur positifs donnent un quotient toujours positif ⇒ g'(n) > 0 ⇒ g(n) est strictement croissante entre g(4) =1.71828183 Et +∞

$\Rightarrow \quad e^{\frac{n}{4}} > \frac{4}{n}$

⇒ L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour m = $\frac{n}{4}$.

d) détermination des « couplets Goldbach » parmi $\frac{n+2}{4}$ valeur maximale des couplets impairs générés par tout n > 2, entier positif pair.

Partant du $\left(\frac{m}{2\log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4.\log(m)} > 0$

Et après simplification, arrivant à $e^{\mathrm{m}} > \frac{1}{\mathrm{m}}$ ($\mathrm{m} = \frac{n+2}{4}$, dans ce cas)

$\Rightarrow \quad e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{1}{\frac{n+2}{4}}$

$\Rightarrow \quad e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2}$

L'inéquation de GOLDBACH devient : $e^{\frac{n+2}{4}} > \frac{4}{n+2}$ (3)

Soit la fonction h(n) = $e^{\frac{n+2}{4}} - \frac{4}{n+2}$

h(n) est strictement croissante c'est-à-dire l'inéquation de Goldbach (3) est vérifiée SSI sa dérivé est positive quelque soit n >2 . h(n) étant définit dans l'intervalle [4, +∞ [

Calculons sa dérivé h'(n) $= \dfrac{n^2.\ e^{\frac{n+2}{4}} + 4.\text{n}.\ e^{\frac{n+2}{4}} + 4.e^{\frac{n+2}{4}} + 16}{4.\ (n+2)^2}$ 'son signe est toujours positif puisse que avec n > 2 , $e^{\frac{n+2}{4}}$ positif le numérateur et le dé-numérateur positifs donnent un quotient toujours positif ⇒ h'(n) > 0 ⇒ $\mathrm{h(n)}$ est strictement croissante entre $\mathrm{h}(4)$ = 3,815022 Et +∞ .

$$\Rightarrow \quad e^{\frac{n+2}{4}} \quad > \quad \frac{4}{n+2}$$

⇒ L'inéquation de GOLDBACH est vérifiée pour m = $\frac{n+2}{4}$.

e) Conclusions :

nous avons déduit que l'énoncé de la conjecture de Goldbach est équivalent à **« ∀ N pair > 3, ∃ un couplet Goldbach (p, p') généré par N / N= p + p' »** ce qui , comme nous avons vu ci-dessus Peut être traduit par « l'inéquation de Goldbach » après simplification, par :

$$\left(\frac{m}{2\log(m)}\right)^2 + \frac{m}{4.\log(m)} > 0$$

Ou m correspond au cardinal des couplets impairs, dans ce cas, ce cardinal qui pour tout n pair > 2, s'alternent entre $\frac{n+2}{4}$ et $\frac{n}{4}$ formant une moyenne de $\frac{n+1}{4}$

Nous avons démontré que pour ces trois cardinaux, l'inéquation de Goldbach reste vraie ∀ n pair >2, c'est-à-dire que pour tout pair> 2, ∃ un couplet Goldbach dont la somme des 2 éléments est égale à n ⇒ la conjecture forte de Goldbach est vrai CQFD.

<u>II- Démonstration de la conjecture Faible de C. Goldbach</u>

a) détermination de la suite des décompositions de triplets impairs générés par tout impair > 5

Précisions :

- *un triplet commutatif impair est généré 6 fois par tout impair n>5 , soit (a,b,c) ; (a,c,b) ,(b,a,c) ;(b,c,a) ;(c,a,b) et (c,b,a) .Comme nous somme concerné par la somme n = a+b +c pour l'énoncé de la conjecture faible , vu la commutativité de l'addition on prend dans le décompte des impairs qu'une seul fois (a,b,c).*

- *un triplet Goldbach , c'est tout triplet impair et premier (a, b, c premiers) qui respecte l'énoncé de la Conjecture faible par rapport au nombre n impair qui le génère. . (n = a+b+c)*

Nous savons par le théorème 2, ci-dessus (b, n°2) que le nombre de triplets (k=3) générés par tout impair n est égale à $\Gamma_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k\,(n-1)!} = \frac{(n+2)!}{3!\,(n-1)!}$ (1)

Commençons par cette observation inductive de ces 2 suites des triplets :

Rang du n impair	nombre de triplet Déduit par (1)	nombre de triplet impairs observés	déduction de la formule qui génère les triplets impairs pour chaque impair n À partir de son rang (rang = 0 pour 1)
0 (1)	3!/ (3!*0!) = 1	1	3!/ (3!*0!) = 1
1 (3)	5!/ (3!*2!) = 10	4	(3+1)!/ (3!*(0+1)!) = 4
2 (5)	7!/ (3!*4!) = 35	10	(3+2)!/ (3!*(0+2)!) = 10
3 (7)	9!/ (3!*6!) = 84	20	(3+3)!/ (3!*(0+3)!) = 20
4 (9)	11!/ (3!*8!) = 165	35	(3+4)!/ (3!*(0+4)!) = 35
5 (11)	13!/ (3!*10!) = 286	56	(3+5)!/ (3!*(0+5)!) = 56
6 (13)	15!/ (3!*12!) = 455	84	(3+6)!/ (3!*(0+6)!) = 84
"""""""""	"""""""	"""""""""	""""""""""""
r	Γ_n^3	T(r)	(3+r)!/ (3!*(r)!) = T(r)

Soit $\frac{(3+r)!}{3!*r!}$ la formule explicite de la récurrence déduite ci-dessus qui permet, à partir du rang d'un entier impair positif n, de connaitre le cardinal (T(r)) des triplets impairs généré par ce dernier .Exprimant directement cette formule en fonction ce nombre impair (T(n)) :

Comme il existe une bijection entre le rang et n impair ⇒ $\forall\,(\mathrm{r}, \mathrm{n}) \in \mathbb{N}$, $\mathrm{n} = 2\mathrm{r} + 1$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{r} = \frac{(n-1)}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\left(3+\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!\right)}{3!*\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!} = \frac{\left(\frac{(n+5)}{2}\right)!}{3!*\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!} = \mathrm{T(n)}$$ en simplifiant :

$$\mathrm{T(n)} = \frac{\left(\frac{(n+5)}{2}\right)*\left(\frac{(n+3)}{2}\right)*\left(\frac{(n+1)}{2}\right)*\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!}{6*\left(\frac{(n-1)}{2}\right)!}$$

$$\mathrm{T(n)} = \frac{(n^2+8.n+15)(n+1)}{6*2^3} = \frac{(n^3+9.n^2+23.n+15)}{48}$$

LEMME 3 :

Pour Tout n, impair > 5 ∈ 2N+1 , l'ensemble des entiers positifs impairs , le nombre de décompositions D généré par n, en triplets, dont les éléments a ,b et c sont impairs est :

$$\mathrm{T}(\mathbf{n}) = \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$$

La preuve du lemme 3 se trouve dans la formule explicite de la récurrence définit par la fonction f(n) , qui pour tout n impair > 5, f(n) = au nombre de triplets impairs générés par n :

f: $2\mathbb{N}+1 \setminus \{1, 3,5\} \rightarrow \mathbb{N}$: $n \rightarrow \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$ ($2\mathbb{N}+1$: ensemble des entiers impairs positifs)

b) détermination des « triplets Goldbach » parmi la T(n) des triplets impairs générés par tout entier positif impair > 5

La conjecture faible de Goldbach est équivalente donc à **« $\forall$ N impair > 5, $\exists$ un triplet Goldbach (p, p',p '') généré par N / N= p + p'+p'' »** (p ,p' et p'' , premiers).

Le cardinal des triplets Goldbach T(m) = au nombre de combinaison répétées de 3 parmi $\pi(m)$, m est réduit à $\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$, qui constitue le nombre de triplets impairs généré par tout n impair > 5 , dont la somme respecte la conjecture et dont on cherche à estimer les triplets Goldbach par $\pi(m)$.

$$T(m) = \Gamma\, \pi(m)^3 = \frac{(\pi(m) + 3 - 1)!}{3!\,(\pi(m) - 1)!} \qquad \text{(d'après le théorème 2°)}$$

$$T(m) = \frac{(\pi(m)+2).(\pi(m)+1).\pi(m).(\pi(m)-1)!}{3!\ .(\pi(m)-1)!}$$

$$T(m) = \frac{\pi(m).(\pi(m)^2+3\,\pi(m)+2)}{6}$$

$$T(m) = \frac{\pi(m)^3+3.\pi(m)^2+2.\pi(m)}{6}$$

Posons $\pi(m) = \frac{m}{\log(m)}$, tant que ça été prouvée pour m au voisinage de l'infini par Hadamard et de la vallée Poussin ($\lim_{m\to\infty} \frac{\pi(m)}{m/\log(m)} = 1$).

$$T(m) = \frac{\frac{m^3}{\log(m)^3}+\frac{3.m^2}{\log(m)^2} + \frac{2.m.}{\log(m)}}{6}$$

$$T(m) = \frac{\frac{m^3}{\log(m)^3}+\frac{3.m^2.\log(m)}{\log(m)^3} + \frac{2.m.\log(m)^2}{\log(m)^3}}{6}$$

$$T(m) = \frac{m^3}{6.\log(m)^3} + \frac{3.m^2.\log(m)}{6.\log(m)^3} + \frac{2.m.\log(m)^2}{6.\log(m)^3}\,]$$

$$T(m) \quad = \quad \frac{m^3+3.m^2.\log(m)+2.m.\log(m)^2}{6.\log(m)^3}$$

Dans ce cas, cela revient à exprimer la conjecture faible de Goldbach par l'inéquation faible de Goldbach suivante :

$$\frac{m^3+3.m^2.\log(m)+2.m.\log(m)^2}{6.\log(m)^3} > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$$

Ou bien

$$m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2 > 0 \quad \text{avec } m = \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$$

c) étude de l'inéquation faible de Goldbach en tant que fonction composée pour connaitre son signe et variation.

Soit f(n) = $\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}$, définit dans $[7, +\infty[$; sa dérivé f'(n) = $\frac{3.n^2+18.n+23}{48}$

Le signe de f'(n) est le signe du numérateur $3.n^2 + 18.n + 23$ qui est positif dans $]-\infty, -4.15..[$ et $]-1.846.., +\infty[$, (signe de a= 3/48) ; - 4.15.. et - 1.846.. étant respectivement les racines du numérateur ,

$[f(7), +\infty[$ ou bien $[20, +\infty[\quad \subset \quad]-1.846 , +\infty[\Rightarrow$ f'(n) > 0

Soit g(m) =$m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2$, définit dans $[7, +\infty[$;

Sa dérivé g'(m) = $2.\log(m)^2 + 6.m.\log(m) + 4.\log(m) + 3.m^2 + 3m$

Il est bien évident que le signe de g'(m) > 0 puisse que∀ m ,entier >0 , son produit ou sa sommation par m ou log(m) sont toujours positif.

g o f = g (f(n)) (doit être supérieur à 0, comme le stipule l'inéquation faible de Goldbach)

g o f = $(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48})^3 + 3.(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48})^2.\log\left((\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48})\right) + 2.(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}).\log\left((\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48})\right)^2$

L'inéquation faible de Goldbach consiste alors à démontrer g o f > 0

1° - ensemble de définition : $[7, +\infty[\; \rightarrow \; \mathbb{R}$ (R , ensemble des réels)

$n \xrightarrow[g\,o\,f]{} g(f(n))$

2° - dérivé :

Théorème 3 : si f est dérivable sur un intervalle I , et g dérivable sur I , alors la composé g o f Est dérivable sur I , (g o f)' = (g' o f) * f '

(g o f)’ =

$[\ 2.\log\left(\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)\right)^2 + 6.\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right).\log\left(\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)\right) + 4.\log\left(\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)\right) +$
$3.\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)^2 + 3\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)\ ]\ *\left(\frac{3.n^2+18.n+23}{48}\right)$

Le signe de (g o f)’ > 0 car le signe de $\left(\frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48}\right)$ et sa dérivé $\frac{3.n^2+18.n+23}{48}$ est > 0 , comme nous avons vu ci-dessus . Ensuite l’expression de (g o f)’ par la sommation ou le produit d’une quantité positif avec son logarithme positif , et par le produit de f’(n) positif , est toujours positif

$\Rightarrow$ (g o f)’ > 0

3° - limites :

Théorème 4 : si $\lim_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$ et $\lim_{m\to+\infty} g(m) = +\infty$ **, alors**
$\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{g\ o\ f})(\mathrm{n}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{g}\big(\mathrm{f(n)}\big) = +\infty$

Il est bien évident que $\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+9.n^2+23.n+15}{48} = \lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$

Et $\lim_{m\to+\infty} g(m) = \lim_{m\to+\infty} m^3 + 3.m^2.\log(m) + 2.m.\log(m)^2 = +\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty}(\mathrm{g\ o\ f})(\mathrm{n}) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{g}\big(\mathrm{f(n)}\big) = +\infty$

4° - tableau de variation :

n	7		$+\infty$
(g o f)’		+	
g o f	a	$\nearrow$	$+\infty$

d) conclusion :

g o f est strictement croissante entre a (= +9561.95…) et $+\infty$ $\Rightarrow$ **g o f** > 0

g o f > 0 $\Leftrightarrow$ **$\forall$ N impair > 5, $\exists$ un triplet Goldbach (p, p’,p ’’) généré par N / N= p + p’+p’’** $\Leftrightarrow$ la conjecture faible de Goldbach est vrai CQFD .

Référence :

[1] : techno science.net

[2] : wikipédia ($\Gamma_n^{\,k}$ se lit « Gamma nk »)