Una curiosa identidad de la función zeta

Moreno Borrallo, Juan

March 22, 2019

e-mail: juan.morenoborrallo@gmail.com

"Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem" (Ockam, W.)

"Dios no juega a los dados con el Universo" (Einstein, Albert)

"Te doy gracias, Padre, porque has ocultado estas cosas a los sabios y entendidos y se las has revelado a la gente sencilla" (Mt 11,25)

Abstract

En este breve artículo se propone y demuestra una curiosa identidad de la función zeta, equivalente a la suma de las progresiones geométricas de los recíprocos de todos los enteros positivos que no son potencias, con numeradores cuyo valor es la función divisor del exponente de cada término de la progresión.

2010MSC: 11A41

1 Identidad de la función zeta

1.1 Prueba de la identidad

Se establece la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k - 1} = \sum_{q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d(k)}{q^k} \right)$$

Donde q está formado por todos los enteros positivos que no son potencias, y donde $d(k)$ es la función divisor, e indica el número de divisores del exponente k.

1.1.1 Demostración.

Aplicando la fórmula general de convergencia de una serie geométrica, podemos establecer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k} \right) = \frac{1}{n-1} \tag{1}$$

Utilizando esta identidad, puede deducirse aplicando (1) que

Lema 1.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d(k)}{n^k} \right)$$

Donde $d(k)$ es la función divisor, e indica el número de divisores del exponente k.

Demostración Lema 1.
Es fácil ver que, aplicando (1) a cada término de la suma,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + ... \right) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + ... \right) + \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^9} + ... \right) + ... =$$

$$= 1 \left(\frac{1}{n} \right) + 2 \left(\frac{1}{n^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{n^3} \right) + 3 \left(\frac{1}{n^4} \right) + ...$$

Por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d\,(k)}{n^k} \right)$$

Por otro lado, el Teorema de Goldbach-Euler establece que

$$\sum_{t}^{\infty} \left(\frac{1}{t-1} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1$$

Donde t recorre el conjunto de potencias de todos los números enteros positivos.

Se observa que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k - 1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + ...$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k - 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{26} + \frac{1}{80} + ...$$

Y que

$$\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + ... \right) =$$

$$= \sum_{q}^{\infty} \left(\frac{1}{q-1} \right) + \sum_{t}^{\infty} \left(\frac{1}{t-1} \right)$$

Por tanto, sustituyendo, podemos concluir que

$$\sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d\,(k)}{n^k} \right) = 1 + \sum_{q} \left(\frac{1}{q-1} \right)$$

Por la demostración implícita de Goldbach en el teorema de Goldbach-Euler, se llega a que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{q} \left(\frac{1}{q-1} \right)$$

Igualando, se tiene la triple identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \sum_{q}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d\,(k)}{q^k} \right)$$

1.2 Primera consecuencia del Lema 1.

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d\,(k)}{n^k} \right)$$

Aplicando (1), podemos establecer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} > 2 \left(\frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{n}$$

Y en consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k - 1} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k} \right) > 2 \left(\frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > \frac{1}{n\,(n-1)}$$

1.2.1 Demostración

Tenemos en la demostración del Lema 1 que, aplicando (1),

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + ... \right) + \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6} + ... \right) + \left(\frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^9} + ... \right) + ... =$$

$$= 1 \left(\frac{1}{n} \right) + 2 \left(\frac{1}{n^2} \right) + 2 \left(\frac{1}{n^3} \right) + 3 \left(\frac{1}{n^4} \right) + ...$$

Por otro lado, por (1),

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + ...$$

Así pues,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} - \left(\frac{1}{n-1} \right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + 2\frac{1}{n^4} + ...$$

Como $d(k) \geq 2$ para todo $k > 1$, podemos restar de nuevo la expresión $\frac{1}{n-1}$ excepto por el término $\frac{1}{n}$, por lo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} - 2 \left(\frac{1}{n-1} \right) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} + 2\frac{1}{n^6} + 2\frac{1}{n^8} + ...$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k - 1} > 2 \left(\frac{1}{n-1} \right) - \frac{1}{n}$$

1.3 Segunda consecuencia del Lema 1

Por lo demostrado anteriormente,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k - 1} > 2\left(\frac{1}{q-1}\right) - \frac{1}{q}$$

Por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{q}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{q-1}\right) - \frac{1}{q}\right)$$

Por otro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{q}^{\infty} \left(\frac{1}{q-1}\right) + 1 \tag{2}$$

Como

$$2\left(\frac{1}{q-1}\right) - \frac{1}{q} = \left(\frac{1}{q-1}\right) + \frac{1}{q\,(q-1)}$$

Entonces, reemplazando,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > \sum_{q}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{q-1}\right) + \left(\frac{1}{q\,(q-1)}\right)\right)$$

De lo que se deduce, en unión con (2), que

$$\sum_{q}^{\infty} \left(\frac{1}{q\,(q-1)}\right) < 1$$

1.4 Otra identidad similar, y demostración alternativa del teorema de Goldbach-Euler

Se establece la identidad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Demostración.

Aplicando la fórmula general de convergencia de una serie geométrica, podemos establecer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{1}{n-1} \tag{3}$$

Utilizando esta identidad, puede deducirse aplicando (2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

Por otro lado, de aquí se deduce fácilmente que

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n^k}\right)=1$$

1.5 Conclusión

Desarrollando la primera identidad,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{q}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{d\left(k\right)}{q^k}\right)=\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+...\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\frac{3}{81}+...\right)+...$$

$$...+\left(\frac{1}{q_n}+\frac{2}{q_n^2}+\frac{2}{q_n^3}+\frac{3}{q_n^4}+...\right)$$

Notando que los numeradores se repiten, dado que la función $d\left(k\right)$ es constante para todo q_n^k, podemos reordenar:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{q}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{q}\right)+2\left(\sum_{p}\frac{1}{q^p}\right)+3\left(\sum_{p^2}\frac{1}{q^{p^2}}\right)+4...\right)$$

Donde p es un número primo, y p^2 es una potencia perfecta de un primo. El resto de términos se pueden ordenar en función de la configuración del exponente k, que determina el valor de $d\left(k\right)$.

Esto implica que, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{q}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)+\sum_{t}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$$

Entonces, podemos concluir la identidad

$$\sum_{t}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{q}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{d\left(k\right)}{q^k}\right)$$

Y por tanto

$$\sum_{t}^{\infty}\left(\frac{1}{t}\right)=\sum_{q}^{\infty}\left(2\left(\sum_{p}\frac{1}{q^{p}}\right)+3\left(\sum_{p^{2}}\frac{1}{q^{p^{2}}}\right)+4...\right)$$

Curiosamente, hemos podido expresar la serie de los inversos de todo entero positivo expresable como potencia, en función de una suma que recorre potencias de los inversos de los enteros positivos que no son expresables como potencias.