Discussion sur les infinis et sur l'irrationalité de la constante d'Euler-Mascheroni

On ignore toujours si la constante d'Euler-Mascheroni est irrationnelle, nous verrons qu'elle dépend de la façon dont on catégorise l'infini.

Si on part du point que l'addition des infinis obéi aux règles des nombres usuels :

- Un rationnel sommé à un irrationnel donne un irrationnel et deux rationnels sommé donnent un rationnel.

On peut affirmer que pour rester cohérent au lemme 1, gamma est irrationnelle.

Lemme 1 :

Soient deux fonctions croissantes intégrables asymptotiquement identiques, f et g.

Soit h une fonction dérivable strictement croissante.

S'il existe une constante réelle c telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - g(x) = c$$

Alors :

$$\lim_{y\to+\infty} f(h(y)) - g(h(y)) = c$$

Démonstration 1 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{c + g(x)}{f(x)} = 1$$

La limite existante en $+\infty$ on sait que la Règle de L'Hospital dit :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g'(x)}{f'(x)} = z \implies \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = z$$

De ce fait :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{cx + \int g(x)\, dx}{\int f(x)\, dx} = 1$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$x = h(y) \implies dx = h'(y)dy$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{c\,x + \int g(h(y))h'(y)\, dy}{\int f(h(y))h'(y)\, dy} = 1$$

$$\lim_{y\to+\infty} c\,x + \int g(h(y))h'(y)\, dy = \lim_{y\to+\infty} \int f(h(y))h'(y)\, dy$$

$$\lim_{y\to+\infty} c\ + g\big(h(y)\big) = \lim_{y\to+\infty} f(h(y))$$

$$\lim_{y\to+\infty} f(h(y)) - g(h(y)) = c$$

Tout d'abord partons du point que n est un entier (ou un rationnel) :

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} H_n - \ln(n)$$

On sait que pour tout rationnel mise à part 1, sont logarithme naturel est transcendant, donc irrationnel.

Grace au lemme 1, on peut dire que

$$h(n) = e^n$$

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} H_{h(n)} - \ln(h(n))$$

Ici on a un logarithme qui annule une exponentielle, donc un rationnel.

On ignore la nature de la série harmonique alors imaginons tous les cas :

Dans la première expression on a soit une H rationnelle, soit irrationnelle :

$$\gamma = \mathbb{Q} + \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

$$\gamma = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} + \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

Également dans la deuxième :

$$\gamma = \mathbb{Q} + \mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

$$\gamma = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} + \mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

Pour rester cohérent, on ne peut pas avoir un gamma à élément de l'ensemble vide, on doit choisir une série harmonique irrationnelle pour que l'intersection entre $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ donne $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, pour gamma.