ПОЛНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЕЛИКОЙ ТЕОРЕМЫ ФЕРМА МЕТОДОМ ДЕЛЕНИЯ

Ведерников Сергей Иванович – пенсионер.

г. Москва

Аннотация: великая теорема Ферма доказана двадцать лет назад. Как показал С. Сингх [1], от Пифагора до П. Ферма, от П. Ферма до Э. Уайлса знаменитое уравнение развивало математику. Казалось бы, тема закрыта, но многим, не только математикам, не даёт покоя тот факт, что ещё в 1637 году Пьер Ферма заявил, что нашёл «удивительное» решение своей теоремы, несмотря на то, что математические знания того времени были далеки от знаний нашего времени. В предлагаемой работе на базе школьных знаний показана невозможность разложения на целочисленные множители в уравнении при n > 2. Это значит, что теорема Ферма не имеет целочисленных решений. Ключевые слова: великая, теорема, Ферма, метод деления.

THE PROOF OF FERMAT'S GREAT THEOREM BY THE METHOD OF DIVISION Vedernikov S.I.

Vedernikov Sergey Ivanovich – Retired.

Abstract: Fermat's Great Theorem was proven twenty years ago. As shown by Singh [1], from Fermat to Wiles, this famous equation developed math. It would seem that the topic is closed, but many people, not just mathematicians, is haunted by the fact that in 1637 Pierre de Fermat stated that he found "amazing" solution to his theorem, despite the fact that the mathematical knowledge of that time were far from the knowledge of our time. In this paper, on the basis of school knowledge, shows the inability of the decomposition of and for integer multipliers in the equation when n > 2. This means that Fermat's Great Theorem has no integer solutions. Keywords: Fermat’s Great Theorem. Division method.

УДК 512.1

Теорема: для целого натурального числа n > 2 уравнение $X^n+Y^n= Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X, Y, Z.

Доказательство.

Имеется $X^n + Y^n = Z^n$, где X, Y, Z, n - натуральные положительные числа. Z > X >Y - взаимно простые числа, n > 2.

Исходя из того, что уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$ является частным случаем уравнения $X^n + Y^n = Z^n$ и в нём выделяются целочисленные значения X, Z и Y, можно утверждать, что если уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при n > 2 не имеет целочисленных множителей для X^n или Z^n, то оно не имеет решений в целых положительных числах.

Рассмотрим порядок выделения множителей числа Y^n и целочисленных Z, X на примере Пифагоровой тройки (5; 12; 13). [2]

Имеем: $X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$.

Преобразуем выражение: $Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2$. (1)

Разложим ф. (1) на множители: Z + X = Y_1↔13 + 5 = 18; (2)

Z – X = Y_2↔13 – 5 = 8. (3)

Сложим почленно ф. (2) и ф. (3):

2·Z = $Y_1 + Y_2$↔18 + 8 = 26; откуда Z = $\frac{Y_1+Y_2}{2}$ = $\frac{2(9+4)}{2}$ = 13. (4)

Вычтем почленно ф. (3) из ф. (2): 2·X = $Y_1 - Y_2$ ↔18 – 8 = 10;

откуда: X = $\frac{Y_1-Y_2}{2}$ = $\frac{2(9-4)}{2}$ = 5. (5)

Из ф. ф. (2) и (3), а также из ф. ф. (4) и (5) видно, что в случае n = 2 уравнения $X^n + Y^n = Z^n$ возможно выделение целочисленных множителей Y^n и целочисленных значений X и Z.

Произведём разложение на множители в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ при n>2. Есть общий случай и три частных, как дополнение к общему. Посыл общий для всех случаев: чётное число, имеющее множителем 2^n, при n≥3, можно представить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Известно, что Z в исходном уравнении при чётном n не может быть чётным числом, а X и Y одновременно нечётными, поэтому примем Z , X - нечётными числами, Y - чётным числом, поскольку принципиальной разницы между X и Y в данном случае нет. Доказательство невозможности чётного Z при нечётном n см. ниже Случай 3.

Рассмотрим «Общий случай» доказательства.

Имеем: $X^n + Y^n = Z^n$. (1)

Возведём левую и правую части формулы в квадрат.

$$X^{2n} + 2\cdot X^n \cdot Y^n + Y^{2n} = Z^{2n}.$$

Преобразуем полученную формулу следующим образом:

$$Z^{2n} - X^{2n} = Y^{2n} + 2\cdot X^n \cdot Y^n = Y^n \cdot (Y^n + 2 \cdot X^n). \quad (2)$$

Разложим ф. (2) на множители.

$$Z^n + X^n = Y^n + 2\cdot X^n; \quad (3)$$

$$Z^n - X^n = Y^n. \quad (4)$$

(Следует заметить, что ф. (3) можно получить, прибавив $2\cdot X^n$ к левой и правой частям формулы (4)).

В соответствии с ф. ф. (4) и (5) (См. ниже Случай 1) множители Y^n и $(Y^n + 2\cdot X^n)$ формулы (2) не могут иметь общих множителей, кроме одного числа 2, исходя из условия о взаимно простых X, Y, Z . Рассмотрим всё же этот момент отдельно.

Запишем ф. (3) и ф. (4) следующим образом:

$$Z^n + X^n = 2 \cdot \left(2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n\right);$$

$$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n.$$

Предположим что $2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n = Y_2^n$, где Y_2^n целое нечётное число в степени n.

Итак: $Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$; (5) $Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n$. (6)

Из почленного сложения ф. (5) и ф. (6) имеем:

$2 \cdot Z^n = 2 \cdot Y_2^n + 2^n \cdot Y_1^n$ или $Z^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2}$; $Z^n = Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n$. (7)

Из почленного вычитания ф. (6) из ф. (5) имеем:

$2 \cdot X^n = 2 \cdot Y_2^n - 2^n \cdot Y_1^n$ или $X^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2}$; $X^n = Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n$. (8)

Из ф. ф. (7) и (8) видно, что условия о взаимной простоте Z и X выполнимо только при отсутствии общих множителей в числах Y_2^n и $2^{(n-1)} \cdot Y_1^n$.
Поэтому множители этих чисел должны быть в степени n. (Или целое Y_2^n должно быть n – ой степенью дробного числа.)
Рассмотрим этот момент на примере разложения на множители пифагоровой <u>тройки (5; 12; 13), где Z = 13, X = 5, Y = 12.</u>

Как показано в Случае 1 (См. ниже после ф. ф. (2) и (3)) сумма и разность двух нечётных чисел, числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, а другое – минимум 2^2, в общем же случае 2^{n-1} при $n > 2$.

Разложение формулы $Z^n - X^n = Y^n$ при чётном n выглядит так:

$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = Y^m$ и $Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = Y^{n-m}$.

Для разности квадратов пифагоровой тройки (5; 12; 13) разложение такое.

Имеется: $X^2 + Y^2 = Z^2 \leftrightarrow 5^2 + 12^2 = 13^2$. (1a)

Преобразуем ф. (1a).

$Z^2 - X^2 = Y^2 \leftrightarrow 13^2 - 5^2 = 12^2$. $(2a)$

Разложим на множители ф. (2a).

Z + X = $2 \cdot Y_1^2 \leftrightarrow 13 + 5 = 18$; (3a)

Z – X = $2^{(2-1)} \cdot Y_2^2 = 2 \cdot Y_2^2 \leftrightarrow 13 - 5 = 8$. $(4a)$

Число 18 ф. (3a) содержит только одно число 2, а число 8 ф. (4a) имеет вид 2^3. Следовательно, весь чётный сомножитель числа $12^2 = 144$ составляет $2^4 = 2^2 \cdot 2^2 = 4^2 = 16$. Т. е. одно число 4 разделено пополам между числом 18 и числом 8.

Поделив 18 и 8 на 2, имеем $9 = 3^2$ и $4 = 2^2$.

Это значит, что вторыми множителями чисел 18 и 8, кроме числа 2, являются квадраты чисел. Причём это свойство всех пифагоровых троек.

Рассмотрим ф. (5) как аналог ф. (3).

$Z^n + X^n = Y^n + 2 \cdot X^n$; (3) $Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$. (5)

Нами предположено, что Y_2^n является n – ой степенью целого нечётного числа, в противном случае уравнение (1) не имеет решения в целых числах. На анализе ф. (3а) и ф. (4а) разложения пифагоровой тройки (5, 12, 13) можно заключить, что сомножитель правой части ф. (2) $2 \cdot Y_2^n$ имеет в некоторых случаях, как и в уравнении $X^2 + Y^2 = Z^2$, целочисленные значения Y_2. Следовательно, можно заключить, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ может иметь целочисленные решения.

Однако перемножим левые и правые части ф. ф. (5) и (6).

$Z^{2n} – X^{2n} = 2\cdot Y_2^n \cdot Y^n = 2\cdot(Y_2^n \cdot Y^n)$. (9)

Примем чётное, имеющее множителем 2^n, где n≥ 3, число $Y_2^n \cdot Y^n$ как Y_3^n. А любое чётное число, имеющее множитель 2^n при n > 2 , можно представить разностью квадратов двух нечётных чисел.

Запишем ф. (9) следующим образом: $Z^{2n} – X^{2n} = 2\cdot Y_3^n$. (10)

Поскольку числа Y^{2n} и X^{2n} являются квадратами чисел Z^n и X^n, то в левой части имеется разность квадратов нечётных чисел, а в правой – результат, который должен раскладываться на целые множители в соответствии с левой частью.

Выразим число Y_3^n разностью квадратов чисел A и B.

$Y_3^n = A^2 – B^2$.

Формула (10) примет вид:

$Z^{2n} – X^{2n} = 2\cdot(A^2 – B^2) = (2\cdot A^2 – 2\cdot B^2)$.

Разложим на множители её левую и правую части.

$(Z^n – X^n)(Z^n + X^n) \neq (\sqrt{2}\cdot A - \sqrt{2}\cdot B)(\sqrt{2} \cdot A + \sqrt{2} \cdot B)$. (11)

Как видно из ф. (11) целочисленные значения её левой части не соответствуют результатам разложения правой части, поскольку правую часть ф. (10) невозможно разложить на целочисленные множители. Отсюда следует, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решения в целых числах при целочисленном Y_3. (См. формулу (10).)

Поясним разложение на множители правой части ф.(10). $Z^{2n} - X^{2n} = 2Y_3^n$.

Примем $Y_3^n = 6^3$. Разложение на множители числа 6^3 методом разности квадратов двух нечётных чисел будет таким:

$$6^3 = 216 = 21^2 - 15^2 = (21 - 15)(21 + 15) = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36.$$

Это целочисленное разложение.

Разложим на множители число $2 \cdot 6^3$ в соответствии с правой частью ф.(10).

$$2 \cdot 6^3 = 2 \cdot 216 = 432 = 39^2 - 33^2 = (39 - 33)(39 + 33) = 6 \cdot 72 = = 6 \cdot 6^2 \cdot 2.$$

Очевидно, что число $2 \cdot 6^3 = 432$ невозможно представить кубической степенью целого числа.

Снова рассмотрим формулу (9).

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot Y_2^n \cdot Y^n = 2 \cdot (Y_2^n \cdot Y^n), \quad \text{где } Y_2^n \cdot Y^n = Y_3^n.$$

Предположим, что Y_2, а тем самым и Y_3 не являются целыми числами.

По аналогии со случаем $X^2 + Y^2 = Z^2$ можно бы заключить, что уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ и тогда не имеет решений, но рассмотрим этот момент отдельно.

Запишем ф. (9) по-другому, приняв $Y_2^n = k$, где k - целое, нечётное число.

$$Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot k \cdot Y^n. \quad (9a)$$

Поскольку Y^n можно выразить разностью квадратов, то запишем его как $Y^n = (A_1^2 - B_1^2)$.

Тогда ф. (9a) примет вид:

$$(Z^n - X^n)(Z^n + X^n) = 2 \cdot k \cdot (A_1^2 - B_1^2) = (2 \cdot k \cdot A_1^2 - 2 \cdot k \cdot B_1^2). \quad (9b)$$

Разложим правую часть ф.(9b) на множители.

$$(Z^n - X^n)(Z^n + X^n) \neq \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot B_1\right)\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot A_1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{k} \cdot B_1\right). \quad (9c)$$

Из ф. (9c) следует, что правую часть ф. (9a) невозможно разложить на целочисленные множители и при целом $\sqrt{k}$, и при иррациональном, поскольку k – нечётное число. Следовательно, уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ и в этом случае не имеет целочисленных решений.

Рассмотрим ф. (9a) в следующей позиции.

Имеем: $Z^{2n} - X^{2n} = 2 \cdot k \cdot Y^n$. Выразим $Y^n = 2^n \cdot Y_0^n$ при $n \geq 3$.

В данном случае $2^n \cdot Y_0^n$ можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел. Тогда разложение ф. (9a) будет соответствовать ф. (9b) и ф. (9c). Т. е. с отсутствием целочисленных решений.

При n = 2 ф. (9a) будет выглядеть так:

$$Z^4 - X^4 = 2 \cdot k \cdot 2^2 \cdot Y_0^2 = 2^3 \cdot k \cdot Y_0^2.$$

Выразим $2^3 \cdot k \cdot Y_0^2$ разностью квадратов нечётных чисел.

$$2^3 \cdot k \cdot Y_0^2 = (A_2^2 - B_2^2).$$

Тогда ф. (9a) будет такой: $Z^4 - X^4 = A_2^2 - B_2^2$. Следовательно, уравнение $X^2 + Y^2 = Z^2$ может иметь решения в целых числах.

Особо нужно заметить, что разложение Z^n и X^n на целочисленные множители невозможно и по ф. (7), и по ф. (8), поскольку невозможно разложить правую часть ф. (8) на целочисленные множители по формуле разложения разности n – x степеней, а правую часть ф. (7) на целочисленные множители по формуле суммы n – x степеней при $n = 2k + 1$. (См. Подробнее ф. (8) и ф. (9) Случай 2.) Между тем, разложение Z^2 и X^2 на целочисленные Z и X в формуле $X^2 + Y^2 = Z^2$ имеет конкретное значение, как показано в водной части доказательства. (См. ф. (4) и ф. (5) вводной части.)

Приведённое доказательство является приемлемым, для всех трёх частных случаев «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления».

Рассмотрим первый случай, когда n > 2 чётное число.

Случай 1.

Z, X - нечётные, Y - чётное, n - чётное.

Имеется: $X^n + Y^n = Z^n$.

Преобразуем исходное уравнение:

$Z^n - X^n = Y^n$. (1)

Разложим на множители ф. (1).

$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)}$. (2) $Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = Y^m$. (3)

Хотя абзац после ф.(5) разъясняет суть разложения на ф.(2) и ф. (3), поясним всё же этот момент. Сумма двух нечётных чисел и разность этих же чисел - числа чётные, но одно из них имеет множителем только одно число 2, другое - множителем 2^2, а в общем случае $2^{(n-1)}$. Разложение на множители $Z^n - X^n = Y^n$ при чётном n = 2k соответствует ф.(2) и ф.(3), но имеются два случая: когда $Y^{(n-m)}$ имеет множитель 2, а Y^m множитель $2^{(n-1)}$, и когда $Y^{(n-n)}$ имеет множитель $2^{(n-1)}$, а Y^m только один множитель 2. Вариантов разложения может быть несколько, но все они соотносятся с этими двумя случаями, отдельно друг от друга рассмотренными в Случай 1. (См. ф. (6) и ф. (13)).

Из почленного сложения ф. (2) и ф. (3) имеем:

$2 \cdot Z^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)} + Y^m$; $Z^{\frac{n}{2}} = \frac{Y^{(n-m)} + Y^m}{2}$; (4)

а из почленного вычитания ф. (3) из ф. (2) имеем:

$2 \cdot X^{\frac{n}{2}} = Y^{(n-m)} - Y^m$; $X^{\frac{n}{2}} = \frac{Y^{(n-m)} - Y^m}{2}$. (5)

Из ф. ф. (4) и (5) видно, что при соблюдении условия о нечётности Z и X необходимо, чтобы одно из чётных чисел $Y^{(n-m)}$ или Y^m имело множителем только одно число 2. Тогда другое число должно иметь множителем $2^{(n-1)}$, поскольку Y^n- число чётное и имеет множителем минимум одно число 2^n. При этом $Y^{(n-m)}$ и Y^n не могут иметь общих множителей, кроме оговорённых выше кратных 2, поскольку в противном случае такие множители должны иметь также Z^n и X^n, что противоречит условию о взаимной простоте Z, X и Y.

Поэтому $Y^{(n-m)}$ и Y^m должны состоять из различных множителей числа Y^n в той же степени, в степени n, если исходить из предположения, что исходное уравнение имеет целочисленные решения.

Поскольку из ф. (4) и ф. (5) следует, что одно из чисел $Y^{(n-m)}$ или Y^m должно иметь множителем только одно число 2, а оба должны быть в степени n, то примем ф. (2) и ф. (3) в виде: Место для формулы.

$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2\cdot Y_1^n$; (6) $Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)}\cdot Y_2^n$; (7) имея в виду, что Y_1^n - число нечётное.

Из ф. ф. (4) и (5) выразим значение $Z^{\frac{n}{2}}$ и $X^{\frac{n}{2}}$, подставив вместо $Y^{(n-m)}$ значение $2\cdot Y_1^n$, а вместо Y^m значение $2^{(n-1)}\cdot Y_2^n$.

$$Z^{\frac{n}{2}} = \frac{2\cdot Y_1^n + 2^{(n-1)}\cdot Y_2^n}{2} = Y_1^n + 2^{(n-2)}\cdot Y_2^n; \quad (8)$$

$$X^{\frac{n}{2}} = \frac{2\cdot Y_1^n - 2^{(n-1)}\cdot Y_2^n}{2} = Y_1^n - 2^{(n-2)}\cdot Y_2^n. \quad (9)$$

Поскольку $X^{\frac{n}{2}}$ является степенью числа X при чётном $n \geq 4$, то его можно разложить на множители. Разложим выражение (9) на множители по формуле для разности n–x степеней.

$$X^{\frac{n}{2}} = (Y_1 - \sqrt[n]{2^{(n-2)}}\cdot Y_2)\cdot(Y_1^{(n-1)} + \dots + 2^{\frac{(n-2)(n-1)}{n}}\cdot Y_2^{(n-1)}). \quad (10)$$

Очевидно, что $X^{\frac{n}{2}}$ невозможно разложить на целочисленные множители по формуле разности n - x степеней.

Рассмотрим ф. (6) и ф. (7), которые удовлетворяют разложению на множители разности квадратов двух чисел при чётном $n > 3$.

$Z^n - X^n = Y^n$. Y^n – чётное.

$Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2\cdot Y_1^n$; (6) Y_1^n - нечётное.

$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)}\cdot Y_2^n$; (7)

Нужно заметить, что разложение на множители формулы $Z^2 - X^2 = Y^2$, соответствующее «пифагоровым тройкам», где Y^2 - чётное число, даёт результатом один множитель, содержащий только одно число 2, а другой множитель кратен числу 8, при этом чётное число этих троек кратно именно числу 4.

Рассмотрим разложение на множители ф. (7) при показателе n кратном 4 для иллюстрации «Общего случая доказательства».

Формула (7), на первый взгляд, тоже может удовлетворять условию кратности числу 8, однако преобразуем её правую часть.
Преобразуем $2^{(n-1)} \cdot Y_2^n$ следующим образом:

$$2^{(n-1)} \cdot Y_2^n = \frac{2^n \cdot Y_2^n}{2} = \frac{Y_3^n}{2}.$$

Выразим Y_3^n разностью квадратов двух нечётных чисел, поскольку чётное число, имеющее множителем 2^2 при n > 2 , можно хотя бы один раз представить такой разностью, где первый множитель разложения разности квадратов, имеет только один множитель 2, а второй – множитель $2^{(n-1)}$.

Пусть: $Y_3^n = A^2 - B^2$.

Тогда: $\frac{Y_3^n}{2} = \frac{A^2 - B^2}{2} = \frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2}$. (11)

Разложим ф. (11) на множители:

$$\frac{A^2}{2} - \frac{B^2}{2} = \left(\frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right). \quad (12)$$

$$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = (Z^{\frac{n}{4}} - X^{\frac{n}{4}})(Z^{\frac{n}{4}} + X^{\frac{n}{4}}) \neq \left(\frac{A}{\sqrt{2}} - \frac{B}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{A}{\sqrt{2}} + \frac{B}{\sqrt{2}}\right), \quad (12а)$$

Из ф .ф. (12) и (12а) можно сделать вывод, что ф. (7), а также уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при чётном n, кратном 4, не имеет решения в целых числах.

Допустим: $Z^{\frac{n}{2}} + X^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-1)} \cdot Y_4^n$; (13)

$Z^{\frac{n}{2}} - X^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot Y_5^n$. (14)

Очевидно, что ф. (14) не имеет целочисленных решений при n кратных 4, поскольку левая часть уравнения имеет множителем минимум 2^3, а правая только 2 при нечётном Y_5^n.

Доказано, что корень k из целого числа является рациональным числом только тогда, когда число под корнем является k - ой степенью другого целого числа, в остальных случаях такой корень иррациональное число. [3] Поэтому $\sqrt[n]{2^{(n-2)}}$ - число иррациональное, поскольку другим, меньшим 2^n, может быть только 1.

Следовательно, опираясь на ф. (10), ф. (16) и результаты разложения правых частей ф. (7) и ф.(13), можно заключить, что $X^{\frac{n}{2}}$ невозможно разложить на целочисленные множители, и уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ при чётном n > 2 не имеет решения в целых положительных числах.

При этом особо нужно отметить, что для $\sqrt[n]{2^{(n-2)}} = 2^{\frac{(n-2)}{2}}$ при нечётном $\frac{n}{2}$ = 2k+1, характерен следующий ряд показателей: $\frac{(n-2)}{n}$ $\frac{0}{2}; \frac{4}{6}; \frac{8}{10}; \frac{12}{14}; \frac{16}{18}; \frac{20}{22} \dots$, где первый показатель - $\frac{0}{2}$ соответствует уравнению $X^2 + Y^2 = Z^2$ при $2^{\frac{0}{2}} = \sqrt{2^0} = \sqrt{1} = 1$, что делает возможным его целочисленные решения при невозможности таковых для остального ряда показателей.

Случай 2.

Z; X - нечётные, Y - чётное, n - нечётное. Имеем: $X^n + Y^n = Z^n$.

Возведём левую и правую часть исходной формулы в квадрат.

$X^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n + Y^{2n} = Z^{2n}$.

Преобразуем полученную формулу следующим образом:

$Z^{2n} - X^{2n} = Y^{2n} + 2 \cdot X^n \cdot Y^n = Y^n(Y^n + 2 \cdot X^n)$. (1)

Разложим ф. (1) на множители.

$Z^n + X^n = Y^n + 2 \cdot X^n$; (2)

$Z^n - X^n = Y^n$. (3)

Y^n - чётное число, поэтому выразим его как $2^n \cdot Y_1^n$.

Запишем ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$Z^n + X^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n)$;

$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n$.

Примем $Z^n + X^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Y_1^n + X^n)$ в виде $Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$, при нечётном Y_2^n, поскольку целое положительное число можно выразить n - ой степенью другого положительного числа.

Итак, имеем:

$Z^n + X^n = 2 \cdot Y_2^n$; (4)

$Z^n - X^n = 2^n \cdot Y_1^n$. (5)

(См. Общий случай для ф.ф. (4) и (5).)

Сложим почленно ф. ф. (4) и (5).

Откуда:

$2 \cdot Z^n = 2 \cdot Y_2^n + 2^n \cdot Y_1^n$, или

$Z^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2}$;

$Z^n = Y_2^n + 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n$. (6)

Вычтем почленно из ф. (4) ф. (5).

$$2 \cdot X^n = 2 \cdot Y_2^n - 2^n \cdot Y_1^n.$$

$$X^n = 2 \cdot \frac{Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n}{2};$$

$$X^n = Y_2^n - 2^{(n-1)} \cdot Y_1^n. \ (7)$$

Из ф. ф. (6) и (7) видно, что Y_2^n и Y_1^n не могут иметь общих множителей при сохранении условия о взаимной простоте Z,X,Y; а ф. (6) и ф. (7), т. е. Z^n и X^n, можно разложить на множители по формулам разложения на множители разности n-х и суммы n-х степеней при нечётном n=2k+1.

Разложим на множители ф.(6) и ф.(7).

$$Z^n = (Y_2 + \sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Y_1)(Y_2^{(n-1)} - \cdots + 2^{\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot Y_1^{(n-1)}; \ (8)$$

$$X^n = (Y_2 - \sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Y_1)(Y_2^{(n-1)} + \cdots + 2^{\frac{(n-1)^2}{n}} \cdot Y_1^{(n-1)}). \ (9)$$

Итак, X^n нельзя разложить на целочисленные множители, а значит уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах при нечётном n≥3.

Случай 3.

X>Y - нечётные, Z - чётное, n - нечётное.

Кроме известного доказательства, что Z в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ не может быть чётным числом при чётном n, заключающемся в неравенстве

суммы квадратов двух нечётных чисел и квадрата чётного числа, возможно ещё одно доказательство этого случая.

Имеется:

$X^n + Y^n = Z^n$. (1)

Вычтем из левой и правой частей уравнения (1) 2·Y^n.

$X^n - Y^n = Z^n - 2 \cdot Y^n$; где

$Z^n - 2 \cdot Y^n = 2^n \cdot Z_1^n - 2 \cdot Y^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n)$;

с нечётным $(2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n)$ = a.

Тогда:

$X^n - Y^n$ = 2·a. (2)

Поскольку n чётное по условию, то $X^n - Y^n$ можно разложить, как разность квадратов. Пусть $X^{\frac{n}{2}} + Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot b$, а $X^{\frac{n}{2}} - Y^{\frac{n}{2}} = 2 \cdot c$, поскольку X и Y нечётные числа.

Тогда:

$X^n - Y^n$= 2·b·2·c = 4·b·c. (3)

Сравним ф. (2) и ф. (3).

2·a=4·b·c; или a≠2·b·c, т. к. a - нечётное число.

Итак: доказано, что Z в уравнении $X^n + Y^n = Z^n$ не может быть чётным числом при чётном n≥4 и целочисленных решениях уравнения.

Рассмотрим доказательство невозможности чётного Z при нечётном n.

X > Y - нечётные, Z - чётное, n - нечётное.

Преобразуем уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, вычтя из левой и правой его частей 2·Y^n.

Имеем:

$X^n - Y^n = Z^n - 2 \cdot Y^n = 2 \cdot (2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n)$. (4)

Отметим, что $(2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n)$ - нечётное число.

Примем $2^{(n-1)} \cdot Z_1^n - Y^n = Z_2^n$.

Тогда ф.(4) примет вид:

$X^n - Y^n = 2 \cdot Z_2^n$. (5)

Представим уравнение (1) и уравнение (5) в качестве сомножителей разности квадратов X^n и Y^n:

$(X^n + Y^n)(X^n - Y^n) = X^{2n} - Y^{2n} = 2 \cdot Z_2^n \cdot Z^n = 2 \cdot (Z_2 \cdot Z)^n$. (6) (См. Общий случай.)

Произведём почленное сложение и вычитание уравнения (1) и уравнения (5), откуда имеем:

$2 \cdot X^n = Z^n + 2 \cdot Z_2^n$.

Выразим $Z^n = 2^n \cdot Z_3^n$. Тогда:

$X^n = \frac{Z^n + 2 \cdot Z_2^n}{2} = 2 \cdot \frac{2^{(n-1)} \cdot Z_3^n - Z_2^n}{2} = 2^{(n-1)} \cdot Z_3^n + Z_2^n$; (7)

$2 \cdot Y^n = Z^n - 2 \cdot Z_2^n$;

$Y^n = \frac{Z^n - 2 \cdot Z_2^n}{2} = 2 \cdot \frac{2^{(n-1)} \cdot Z_3^n - Z_2^n}{2} = 2^{(n-1)} 2 \cdot Z_3^n - Z_2^n$. (8)

Разложим ф. (7) по формуле разложения на множители суммы n – х степеней при нечётном n.

$X^n = 2^{(n-1)} \cdot Z_3^n + Z_2^n = \left(\sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Z_3 + Z_2\right)\left(2^{(n-1)^2} \cdot Z_3^{(n-1)} - \cdots + Z_2^{(n-1)}\right)$. (9)

Разложим ф. (8) на множители по формуле размножения на множители разности n-х степеней, имея в виду, что Y^n нечётное число.

$$Y^n = 2^{(n-1)}Z_3^n - Z_2^n = (\sqrt[n]{2^{(n-1)}} \cdot Z_3 - Z_2)(2^{\frac{(n-1)^2}{n}} Z_3^{(n-1)} + \cdots + Z_2^{(n-1)}). \quad (10)$$

Из ф.ф. (9) и (10) следует, что разложение X^n и Y^n на целочисленные множители невозможно, а значит Z не может быть чётным числом в уравнении (1), поскольку уравнение не имеет целочисленных решений.

Общий вывод: для рационального числа n≥3 уравнение $X^n + Y^n = Z^n$ не имеет решений в целых положительных числах X,Y,Z.

Список литературы:

1. Сингх С. Великая теорема Ферма. М.: МЦИМО, 2000 г.
2. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959 г.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1984 г.