HYPOTHESE DE RIEMANN 8/12/2018

1)Identité d'Euler

Euler a démontré la formule de zéta à partir de la série :
$1 + 1/x + 1/x^2 + 1/x^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/x^n$
Pour que cette relation soit convergente et égale à $1/(1 - 1/x)$, il faut que $1/x^n$ tende vers 0 ; c'est à dire module de $x > 1$.

En faisant $x = 2^s$, avec $s = a + ib$ nous devons avoir [module de 2^s] > 1 c'est à dire $2^a > 1$ ou $a > 0$, on obtient la somme des puissances inverses de 2 :
$1 + 1/2^s + 1/4^s + 1/8^s + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/2^{\alpha s} = 1/(1 - 1/ 2^s)$

En faisant $x = 3^s$, avec $s = a + ib$ nous devons avoir [module de 3^s] > 1 c'est à dire $3^a > 1$ ou $a > 0$, on obtient la somme des puissances inverses de 3 :
$1 + 1/3^s + 1/9^s + 1/27^s + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1/3^{\beta s} = 1/(1 - 1/ 3^s)$

En faisant le produit de ces 2 fonctions, on obtient la somme des puissances de toutes les fractions dont le dénominateur est un produit de 2 et 3.
$1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/6^s + 1/8^s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 1/(1 - 1/ 2^s)]*[1/(1 - 1/ 3^s)]$

Après avoir fait $x = 2^s$, puis $x = 3^s$, si nous faisons $x = 5^s$, puis $x = 7^s$, …................... avec l'ensemble des nombres premiers ; puis en faisant leur produit, nous obtenons l'identité d'EULER
$\xi(s) = 1 + 1/2^s + 1/3^s + 1/4^s + 1/5^s + 1/6^s + 1/7^s + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$
$1/(1 - 1/ 2^s)]*[1/(1 - 1/ 3^s)]*[1/(1 - 1/ 5^s)]*[1/(1 - 1/7^s)]*[\ldots\ldots\ldots\ldots$, avec $s = a + ib$ et $a > 0$,

Lorsque [module de 2^s] > 1, avec $a > 0$, cette fonction zéta peut-elle être égale à 0 ?
Nous allons étudier la représentation des différents termes $[1/(1 - 1/2^s)]$; $[1/(1 - 1/3^s)]$; $[1/(1 - 1/5^s)]$; $[1/(1 - 1/7^s)]$; …...................,

2)Représentation de $[1/(1 - 1/2^s)]$

L'annexe jointe donne la représentation de différents vecteurs dans un repère orthonormé ayant l'axe des réels en abscisse et l'axe des imaginaires en ordonnée $O_{21}(0,0)$ et $O_{22}(1,0)$.

Considérons le terme 2^s et posons $s = a + ib$
$2^s = e^{(a + ib)\mathrm{Log}\, 2}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{21}A_2}$; A_2 est sur le cercle de centre $O_{21}(0, 0)$ et de rayon $R_{21} = 2^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{21}A_2}$ ont pour valeurs $\rho_{21} = 2^a$ (plus grand que 1) et $\phi_{21} = \mathrm{arctg}\; b\mathrm{Log}\, 2$.

$1/2^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{21}B_2}$, B_2 est sur le cercle de centre $O_{21}(0,0)$ et de rayon $R_{22} = 1/2^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{21}B_2}$ ont pour valeurs $\rho_{22} = 1/2^a$ (plus petit que 1) et $\phi_{22} = - \mathrm{arctg}\; b\mathrm{Log}\, 2$.

$1 - 1/2^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{21}C_2}$, $O_{21}(0,0)$ et C_2 est sur le cercle de centre $O_{22}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/2^a$
Compte tenu de $\overrightarrow{O_{21}C_2}$, son module et son argument ont pour valeurs telles que $1 - 1/2^a \leq \rho_{23} \leq 1 + 1/2^a$ et $- \arcsin 1/2^a \leq \phi_{23} \leq \arcsin 1/2^a$. Lorsque b varie régulièrement de 0 à l'infini, le point C_2 se déplace sur le cercle de centre $O_{22}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/2^a$.

Soit H_2 le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de O_{21}, nous savons que si une droite issue d'un point O_{21} coupe un cercle aux points C_2 et D_2 , le produit $\overline{O_{21}C_2} . \overline{O_{21}D_2} = (\overline{O_{21}H_2})^2$.

Il en résulte que si la droite issue de O_{21} coupe le cercle de centre O_{22} en C_2 et D_2, le produit $\overline{O_{21}C_2} . \overline{O_{21}D_2} = (\overline{O_{21}H_2})^2 = 1 – (1/2^a)^2$.
C_2 étant sur le cercle de centre $O_{22}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/2^a$, D_2 est tel que
$\overline{O_{21}D_2} = [1 – (1/2^a)^2]/\overline{O_{21}C_2}$.
Pour obtenir $\overline{O_{21}E_2} = 1/\overline{O_{21}C_2}$, nous devons effectuer une homothétie de $O_{21}C_2$ dans le rapport $1/[1 – (1/2^a)^2]$
Nous savons que les représentations de $1 - 1/2^s$ et de $1/(1 - 1/2^s)$ sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de $1/(1 - 1/2^s)$ qui est un vecteur $\overrightarrow{O_{21}F_2}$, $O_{21}(0,0)$ et F_2 est sur le cercle de centre $O_{23}(1/[1 – (1/2^a)^2], 0)$ et de rayon $R = [1/(2^a)]/[1 – (1/2^a)^2]$

Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{21}F_2}$ ont pour valeurs telles que $[1 – 1/2^a]/[1 – (1/2^a)^2] \leq \rho_{24} \leq [1 + 1/2^a]/[1 – (1/2^a)^2]$ et $- \arcsin 1/2^a \leq \phi_{24} \leq \arcsin 1/2^a$.

Nous avons posé [module de 2^s] > 1 plus grand que 0, donc a est aussi plus grand que 0, et $1/2^a$ est toujours plus petit que 1. Le dénominateur $[1 – (1/2^a)^2]$ et le numérateur allant de $(1 – 1/2^a)$ à $(1 + 1/2^a)$ sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de $O_{21}F_2$ a pour valeur telle que $1/[1 + 1/2^a] \leq \rho_{24} \leq 1/[1 - 1/2^a]$
a est positif et lorsque a varie de > 0 à l'infini, $1/2^a$ est une fonction continue décroissante qui varie de < 1 à 0.
Lorsque $1/2^a$ varie de < 1 à 0, $1/[1 + 1/2^a]$ est une fonction continue croissante qui varie de > ½ à 1, et $1/[1 - 1/2^a]$ est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1
Il en résulte que le module du vecteur $\overrightarrow{O_{21}F_2}$ est donc toujours supérieur à ½.

3) **Représentation de $[1/(1 – 1/3^s)]$**

Dans l'annexe jointe, nous avons vu la représentation des différents vecteurs concernés du paragraphe 2. Dans cette annexe, si nous remplaçons le premier chiffre en indice des différents points (le nombre 2) par le nombre 3, nous avons les représentations des différents vecteurs concernés de ce présent paragraphe.

Considérons le terme 3^s et posons $s = a + ib$
$3^s = e^{(a + ib)\text{Log } 3}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{31}A_3}$; A_3 est sur le cercle de centre $O_{31}(0, 0)$ et de rayon $R_{31} = 3^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{31}A_3}$ ont pour valeurs $\rho_{31} = 3^a$ (plus grand que 1) et ϕ_{31} = arctg bLog 3.

$1/3^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{31}B_3}$, B_3 est sur le cercle de centre $O_{31}(0,0)$ et de rayon $R_{32} = 1/3^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{31}B_3}$ ont pour valeurs $\rho_{32} = 1/3^a$ (plus petit que 1) et ϕ_{32} = - arctg bLog 3.

$1 - 1/3^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{31}C_3}$, $O_{31}(0,0)$ et C_3 est sur le cercle de centre $O_{32}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/3^a$
Compte tenu de $\overrightarrow{O_{31}C_3}$, son module et son argument ont pour valeurs telles que $1 - 1/3^a \leq \rho_{33} \leq 1 + 1/3^a$

et - arc sin $1/3^a \leq \phi_{33} \leq$ arc sin $1/3^a$.

Nous savons que si une droite issue d'un point O_{31} coupe un cercle aux points C_3 et D_3 , le produit $\overline{O_{31}C_3} \,.\, \overline{O_{31}D_3} = (\overline{O_{31}H_3})^2$,H_3 étant le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de O_{31}.

Il en résulte que si la droite issue de O_{31} coupe le cercle de centre O_{31} en C_3 et D_3, le produit $\overline{O_{31}C_3} \,.\, \overline{O_{31}D_3} = (\overline{O_{31}H_3})^2 = 1 - (1/3^a)^2$.
C_3 étant sur le cercle de centre $O_{32}(1, 0)$ et de rayon R = $1/3^a$, D_3 est tel que $\overline{O_{31}D_3} = [1 - (1/3^a)^2]/\overline{O_{31}C_3}$.
Pour obtenir $\overline{O_{31}E_3} = 1/\overline{O_{31}C_3}$, nous devons effectuer une homothétie de $O_{31}C_3$ dans le rapport $1/[1 - (1/3^a)^2]$
Nous savons que les représentations de $1 - 1/3^s$ et de $1/(1 - 1/3^s)$ sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de $1/(1 - 1/3^s)$ qui est un vecteur $\overrightarrow{O_{31}F_3}$, $O_{31}(0,0)$ et F_3 est sur le cercle de centre $O_{33}(1/[1 - (1/3^a)^2], 0)$ et de rayon R = $[1/(3^a)]/[1 - (1/3^a)^2]$

Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{31}F_3}$ ont pour valeurs telles que $[1 - 1/3^a]/[1 - (1/3^a)^2] \leq \rho_{34} \leq [1 + 1/3^a]/[1 - (1/3^a)^2]$ et - arc sin $1/3^a \leq \phi_{34} \leq$ arc sin $1/3^a$.

Nous avons posé [module de 3^s] > 1 plus grand que 0, donc a est aussi plus grand que 0, et $1/3^a$ est toujours plus petit que 1. Le dénominateur $[1 - (1/3^a)^2]$ et le numérateur allant de $(1 - 1/3^a)$ à $(1 + 1/3^a)$ sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de $\overrightarrow{O_{31}F_3}$ a pour valeur telle que $1/[1 + 1/3^a] \leq \rho_{34} \leq 1/[1 - 1/3^a]$
a est positif, $0 < a <$ infini, et donc $0 < 1/3^a < 1$, puis $1 < 1 + 1/3^a < 2$, et $0 < 1/[1 - 1/3^a] <$ infini
Lorsque varie de 0 à l'infini,
$1 < 1/[1 + 1/3^a] < ½$,
Lorsque $1/3^a$ varie de < 1 à 0, $1/[1 + 1/3^a]$ est une fonction continue croissante qui varie de > ½ à 1, et $1/[1 - 1/3^a]$ est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1
Il en résulte que le module du vecteur $\overrightarrow{O_{31}F_3}$ est donc toujours supérieur à ½.

4) Représentation de $[1/(1 - 1/5^s)]$

Dans l'annexe jointe, nous avons vu la représentation des différents vecteurs concernés du paragraphe 2. Dans cette annexe, si nous remplaçons le premier chiffre en indice des différents points (le nombre 2) par le nombre 5, nous avons les représentations des différents vecteurs concernés de ce présent paragraphe.

Considérons le terme 5^s et posons s = a + ib
$5^s = e^{(a + ib)\text{Log } 5}$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{51}A_5}$; A_5 est sur le cercle de centre $O_{51}(0, 0)$ et de rayon $R_{51} = 5^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{51}A_5}$ ont pour valeurs $\rho_{51} = 5^a$ (plus grand que 1) et ϕ_{51} = arctg bLog 5.

$1/5^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{51}B_5}$, B_5 est sur le cercle de centre $O_{51}(0,0)$ et de rayon $R_{52} = 1/5^a$.
Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{51}B_5}$ ont pour valeurs $\rho_{52} = 1/5^a$ (plus petit que 1) et ϕ_{52} = - arctg bLog 5.

$1 - 1/5^s$ est représenté par un vecteur $\overrightarrow{O_{51}C_5}$, $O_{51}(0,0)$ et C_5 est sur le cercle de centre $O_{52}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/5^a$

Compte tenu de $\overrightarrow{O_{51}C_5}$, son module et son argument ont pour valeurs telles que $1 - 1/5^a \leq \rho_{53} \leq 1 + 1/5^a$ et $- \arcsin 1/5^a \leq \phi_{53} \leq \arcsin 1/5^a$.

Nous savons que si une droite issue d'un point O_{51} coupe un cercle aux points C_5 et D_5 , le produit $\overline{O_{51}C_5} . \overline{O_{51}D_5} = (\overline{O_{51}H_5})^2$,H_5 étant le point de tangence à ce même cercle de la droite issue de O_{51}.

Il en résulte que si la droite issue de O_{51} coupe le cercle de centre O_{51} en C_5 et D_5, le produit $\overline{O_{51}C_5} . \overline{O_{51}D_5} = (\overline{O_{51}H_5})^2 = 1 – (1/5^a)^2$.
C_5 étant sur le cercle de centre $O_{52}(1, 0)$ et de rayon $R = 1/5^a$, D_5 est tel que
$\overline{O_{51}D_5} = [1 – (1/5^a)^2]/\overline{O_{51}C_5}$.
Pour obtenir $\overline{O_{51}E_5} = 1/\overline{O_{51}C_5}$, nous devons effectuer une homothétie de $O_{51}C_5$ dans le rapport $1/[1 – (1/5^a)^2]$
Nous savons que les représentations de $1 - 1/5^s$ et de $1/(1 - 1/5^s)$ sont tels que le produit des modules est égale à 1, et leurs arguments sont égaux mais de signes contraires, nous en déduisons la représentation de $1/(1 - 1/5^s)$ qui est un vecteur $\overrightarrow{O_{51}F_5}$, $O_{51}(0,0)$ et F_5 est sur le cercle de centre $O_{53}(1/[1 – (1/5^a)^2], 0)$ et de rayon $R = [1/(5^a)]/[1 – (1/5^a)^2]$

Le module et l'argument de $\overrightarrow{O_{51}F_5}$ ont pour valeurs telles que $[1 – 1/5^a]/[1 – (1/5^a)^2] \leq \rho_{54} \leq [1 + 1/5^a]/[1 – (1/5^a)^2]$ et $- \arcsin 1/5^a \leq \phi_{54} \leq \arcsin 1/5^a$.

Nous avons posé [module de 5^s] > 1 plus grand que 0, donc a est aussi plus grand que 0, et $1/5^a$ est toujours plus petit que 1. Le dénominateur $[1 – (1/5^a)^2]$ et le numérateur allant de $(1 – 1/5^a)$ à $(1 + 1/5^a)$ sont toujours positifs, nous pouvons simplifier pour dire que le module de $\overrightarrow{O_{51}F_5}$ a pour valeur telle que $1/[1 + 1/5^a] \leq \rho_{54} \leq 1/[1 - 1/5^a]$
a est positif et lorsque a varie de > 0 à l'infini, $1/5^a$ est une fonction continue décroissante qui varie de < 1 à 0.
Lorsque $1/5^a$ varie de < 1 à 0, $1/[1 + 1/5^a]$ est une fonction continue croissante qui varie de > ½ à 1, et $1/[1 - 1/5^a]$ est une fonction continue décroissante qui varie de l'infini à 1
Il en résulte que le module du vecteur $\overrightarrow{O_{51}F_5}$ est donc toujours supérieur à ½.

5) Représentation de $[1/(1 – 1/7^s)]$

Dans le paragraphe « Représentation de $[1/(1 – 1/2^s)]$ », nous avons démontré que le module du vecteur $\overrightarrow{O_{21}F_2}$ est supérieur à 1/2
Dans le paragraphe « Représentation de $[1/(1 – 1/3^s)]$ », nous avons démontré que cette propriété est vraie avec le nombre 3.
La propriété est vraie avec le nombre premier 2, elle est vraie avec le nombre premier suivant (le nombre 3) ; est-elle vraie avec le nombre premier suivant (le nombre 5) ?
Dans le paragraphe « Représentation de $[1/(1 – 1/5^s)]$ », nous avons démontré que cette propriété est vraie avec le nombre 5.La propriété étant vraie pour le nombre 2, puis pour le nombre premier suivant 3, puis pour le nombre premier suivant 5 ; il en résulte que la propriété est vraie pour le nombre premier suivant 7, puis pour le nombre premier suivant 11, puis …...............................

6) Valeur de zéta

Euler a démontré la formule suivante de zéta :
$\xi(s) = [1/(1 – 1/2^s)]$ $[+ 1/(1 – 1/3^s)]$ $[1/(1 – 1/5^s)]$ $[1/(1 – 1/7^s)]$ [….................., où le module de s est plus grand que 0.
Nous avons vu que la représentation de chacun des termes $[1/(1 – 1/2^s)]$, $[+ 1/(1 – 1/3^s)]$, $[1/(1 – 1/5^s)]$, $[1/(1 – 1/7^s)]$, [….................. est un vecteur de module toujours supérieur à ½.
Nous savons que le produit de plusieurs nombres complexes, est un nombre complexe dont le module est égal au produit des modules et l'argument est égal à la somme des arguments.
Il en résulte que la représentation de zéta est un nombre complexe dont le module a une valeur au moins supérieure à (1/2)(1/2) (1/2)(1/2)(1/2)(1/2)(1/2)(................. ;
D'une part, cette valeur ne peut pas être nulle, et d'autre part la valeur ½ ne constitue qu'une valeur minimale pour chacun des termes $[1/(1 – 1/2^s)]$, $[+ 1/(1 – 1/3^s)]$, $[1/(1 – 1/5^s)]$, $[1/(1 – 1/7^s)]$,[…...... qui pour une valeur donnée de a et b, ne peuvent tous prendre la valeur ½.

Quel que soit l'argument, avec a (réel de s) plus grand que 0, la fonction zéta ne peut jamais être égale à 0, et à fortiori quand a = ½ .

Considérons s = a + ib, et la formule $1/[1 + 1/x^a] \leq \rho_X \leq 1/[1 – 1/x^a]$.

A titre indicatif avec a = ½, les valeurs limites de différentes valeurs significatives de ρ sont les suivantes

$0,585 \leq \rho_2 \leq 3,415$

$0633 \leq \rho_3 \leq 2,367$

$0,690 \leq \rho_5 \leq 1,810$

$0,725 \leq \rho_7 \leq 1,608$

$0,768 \leq \rho_{11} \leq 1,342$

$0,909 \leq \rho_{101} \leq 1,101$

$0,969 \leq \rho_{1009} \leq 1,0326$

$0 ,990 \leq \rho_{10007} \leq 1,0101$

Avec a = ½, quel que soit b, la fonction zéta ne peut pas être égal à 0.

L'hypothèse de Riemann est fausse

Annexe