$r(t)$ in integraler Darstellung

Zafer Sah

30 Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

1 r(t) in integraler Darstellung

1.1 Einleitung

In jedem elementaren Physikbuch findet man die folgende Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung einer Zentralmasse M .

$$\overrightarrow{a(r)} = -\frac{\gamma\ M}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r} \tag{1}$$

Läßt man eine Probemasse m im Feld dieser Zentralmasse M zum Zeitpunkt $t = 0$ von der Koordinate r_0 aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ frei fallen so erhält man eine Gleichung die ebenfals in vielen Büchern zu finden ist.

$$\overrightarrow{v(r)} = -\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r} - \frac{2\ \gamma\ M}{r_0}} \cdot \overrightarrow{e_r} \tag{2}$$

Eine weitere Integration führt uns dann zu der folgenden $r(t)$ Darstellung die nicht mehr so häufig anzutreffen ist.

$$r(t) = r_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}\right)^2 \tag{3}$$

Wir sehen hier dass eine explizite Darstellung von $r(t)$ nicht möglich ist und daher $r(t)$ numerisch berechnet werden muß . Doch dieser Umstand ist sehr unbefriedigend. Wenn die Gleichungen (1) und (2) so grundlegend sind kann man vermuten, dass sich $r(t)$ zumindestens harmonische schreiben lässt. Ich zeige zuerst dass man in der Tat Gleichung (3) auch folgendermaßen schreiben kann :

$$r(t) = r_0 \cdot \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt'\right) \tag{4}$$

Danach werde ich kurz die nummerische Berechnung vorstellen um anschließend Gleichung (4) auf die Planetenbewegungen anzuwenden.

1.2 Herleitung

Sei Gleichung (3) schon bewiesen. Setzen wir $\alpha = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$

so bekommen wir $r(t) = r_0 \cdot cos\left(\alpha\right)^2$

Ansatz: $cos\left(\alpha\right)^2 = cos\left(\beta\right)$ (5)

Denn zu jedem α lässt sich ein β derart finden so dass Gleichung (5) gilt. Es gilt nun dieses β zu bestimmen.

$\beta = \arccos\left(cos\left(\alpha\right)^2\right)$ **Subsitution:** $x = cos\left(\alpha\right)^2$

$\beta = \arccos\left(x\right) = \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ dy$ laut Definition von Arkuscosinus.

Subsitution: $y = cos\left(u\right)^2$ $dy = -2 \cdot sin\left(u\right) \cdot cos\left(u\right) \cdot du$

Integrationsgrenzen: $y = 1 \Rightarrow u = 0$ und $y = x$ mit $cos\left(u\right)^2 = cos\left(\alpha\right)^2 \Rightarrow u = \alpha$

$$\beta = \int_\alpha^0 \frac{-2 \cdot sin\left(u\right) \cdot cos\left(u\right)}{\sqrt{1 - cos\left(u\right)^4}}\ du = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot sin\left(u\right) \cdot cos\left(u\right)}{\sqrt{\left(1 - cos\left(u\right)^2\right) \cdot \left(1 + cos\left(u\right)^2\right)}}\ du$$

$\beta = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot cos\left(u\right)}{\sqrt{\left(1 + cos\left(u\right)^2\right)}}\ du$ **Subsitution:** $u = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}}$

Integrationsgrenzen: $u = 0 \ \Rightarrow\ t' = 0$ und $u = \alpha \ \Rightarrow\ t' = t$

wobei $u = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t' - \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t')}{r_0}} = \alpha = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^3}} \cdot t - \sqrt{\frac{r(t)}{r_0}} \cdot \sqrt{1 - \frac{r(t)}{r_0}}$

benutzt wurde. Setzen wir alles ein so folgt für β

$$\beta = \int_0^t \frac{2 \cdot \sqrt{\frac{r(t')}{r_0}}}{\sqrt{1 + \frac{r(t')}{r_0}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0\ r(t')^2}} \cdot dt' = \int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt' \tag{6}$$

Damit folgt aus (5) und (6) die (4) $r(t) = r_0 \cdot \cos\left(\int_0^t \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r(t') + r_0\ r(t')^2}}\ dt'\right)$

1.3 Eigenschaften

Offensichtlich beschreibt Gleichung (4) eine Drehung wobei der folgende Term die dazugehörige Winkelgeschwindigkeit ist.

$$\omega_s\left(r\left(t\right)\right)=\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r\left(t\right)+r_0\ r\left(t\right)^2}} \tag{7}$$

Um diese Rotation darzustellen füge ich eine neue w-Achse ein, die keine räumliche Achse darstellt. siehe Abbildung 1 Da sich das innere Gravitationsfeld mit komplexen Zahlen beschreiben läßt,könnte man vermuten dass die r-w-Ebene der komplexen Zahlenebene entspricht.Es ist aber im Rahmen dieser Arbeit ausreichend wenn wir folgendermassen ansetzen:

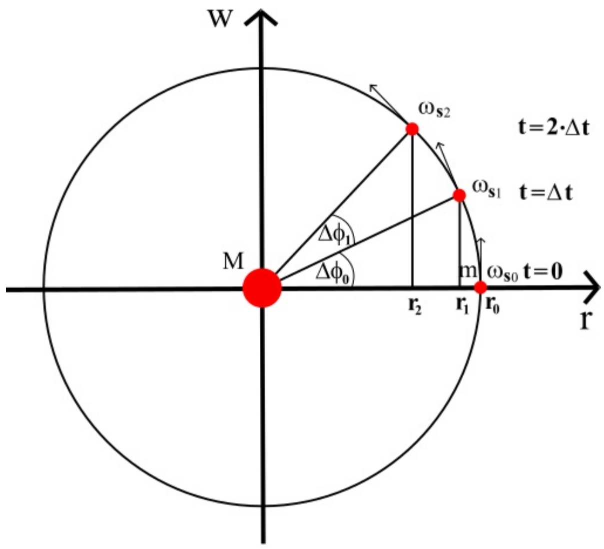

Abbildung 1

$$\overrightarrow{R(t)}=r_0\cdot\cos\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\overrightarrow{e_r}+r_0\cdot\sin\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\overrightarrow{e_w} \tag{8}$$

Wir können Gleichung (8) differenzieren

$$\frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt}=-r_0\cdot\sin\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\overrightarrow{e_r}$$

$$+r_0\cdot\cos\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\frac{d}{dt}\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\overrightarrow{e_w}$$

$$\frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt}=-r_0\cdot\sin\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\cdot\overrightarrow{e_r}$$

$$+r_0\cdot\cos\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\ dt'\right)\cdot\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r+r_0\ r^2}}\cdot\overrightarrow{e_w}$$

$$\frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt} = -r_0 \cdot \sqrt{1-\frac{r^2}{r_0^2}} \cdot \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r + r_0\ r^2}} \cdot \overrightarrow{e_r} + r \cdot \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r + r_0\ r^2}} \cdot \overrightarrow{e_w}$$

$$\frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt} = -\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r} - \frac{2\ \gamma\ M}{r_0}} \cdot \overrightarrow{e_r} + \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0} - \frac{2\ \gamma\ M}{r_0 + r}} \cdot \overrightarrow{e_w} \tag{9}$$

Für $t = 0$ und $r(t) = r_0$ folgt aus Gleichung (9)

$$\frac{d\overrightarrow{R(t)}}{dt} = -0 \cdot \overrightarrow{e_r} + \sqrt{\frac{\gamma\ M}{r_0}} \cdot \overrightarrow{e_w}$$

Die Darstellung des freien Falles als Rotation hat die Konsequenz, dass die frei fallende Probemasse auch zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Geschwindigkeit haben muß die nicht räumlich ist. Differenzieren wir Gleichung (9) so erhalten wir

$$\frac{d^2\overrightarrow{R(t)}}{dt^2} = -\frac{\gamma\ M}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r} - \frac{\gamma\ M}{(r_0 + r)^2} \cdot \sqrt{\frac{r_0^2 - r^2}{r^2}} \cdot \overrightarrow{e_w} \tag{10}$$

1.4 Numerische Berechnung

Die betrachtete Probemasse m befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Koordinate $r(t = 0) = r_0$ und hat die räumliche Geschwindigkeit $v(t = 0) = 0$. Wir möchten für $0 < t < t_a$ (wobei t_a die Aufschlagzeit der Probemasse m auf der gravitierenden Masse M sein soll) die Ortskoordinate $r(t)$ berechnen. Siehe Abbildung 1

Wir zerlegen die Zeit t in n-Teilintervalle. Sei also $t = n \cdot \Delta t$. Für den Beginn des k-ten Intervalls $I_k = [k \cdot \Delta t, (k+1) \cdot \Delta t[$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k < n$ sei die Ortskoordinate r_k schon gegeben. Damit berechnen wir als erstes die Winkelgeschwindigkeit $\omega_{sk} = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r_k + r_0\ r_k^2}}$ die wir für das Intervall I_k als konstant annehmen. Hieraus berechnen wir den im Intervall I_k überstrichenen Winkel $\Delta\phi_k = \omega_{sk} \cdot \Delta t$. Damit berechnen wir dann die Ortskoordinate zu Beginn des nächsten Intervalles $r_{k+1} = r_0 \cdot \cos\left(\sum_{i=0}^{k} \Delta\phi_i\right)$ usw.

$$k = 0 \Rightarrow r = r_0 \Rightarrow\ \omega_{s0} = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0^3}}\ \Rightarrow\ \Delta\phi_0 = \omega_{s0} \cdot \Delta t\ \Rightarrow\ r_1 = r_0 \cdot \cos\left(\Delta\phi_0\right)$$

$$k = 1 \Rightarrow r = r_1 \Rightarrow\ \omega_{s1} = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r_1 + r_0\ r_1^2}} \Rightarrow\ \Delta\phi_1 = \omega_{s1} \cdot \Delta t\ \Rightarrow\ r_2 = r_0 \cdot \cos\left(\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1\right)$$

$$\vdots$$

$$k = n-1 \Rightarrow r = r_{n-1} \Rightarrow\ \omega_{s(n-1)} = \sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2\ r_{n-1} + r_0\ r_{n-1}^2}}\ \Rightarrow\ \Delta\phi_{n-1} = \omega_{s(n-1)} \cdot \Delta t$$

$$\Rightarrow\ r_n = r_0 \cdot \cos\left(\Delta\phi_0 + \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + ... + \Delta\phi_{n-1}\right)$$

Das so berechnete r_n stimmt mit der tatsächlichen Ortskoordinate $r(t)$ umso besser überein je größer n oder je kleiner Δt ist.

Das entspricht ja dann wieder Gleichung (4).

$$r(t) = \lim_{n\to\infty} r_n = r_0 \cdot \cos\left(\lim_{\Delta t\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sqrt{\frac{2\ \gamma\ M}{r_0^2 \cdot r_k + r_0 \cdot r_k^2}}\ \Delta t\right)\right) \tag{11}$$

1.5 Planetenbahnen

Wir betrachten jetzt eine Probemasse m die zum Zeitpunkt $t=0$ von der Koordinate $x=x_0$, $y=0$ und $w=0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{u_x}=0\cdot\vec{e_x}$ und $\vec{u_y}=u_0\cdot\vec{e_y}$ startet. Um eine Ellipsenbahn mit dem Startpunkt als Aphel zu erhalten wähle ich $u_0<\sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}}=u_K$ .Dabei ist u_K die Kreisbahngeschwindigkeit.

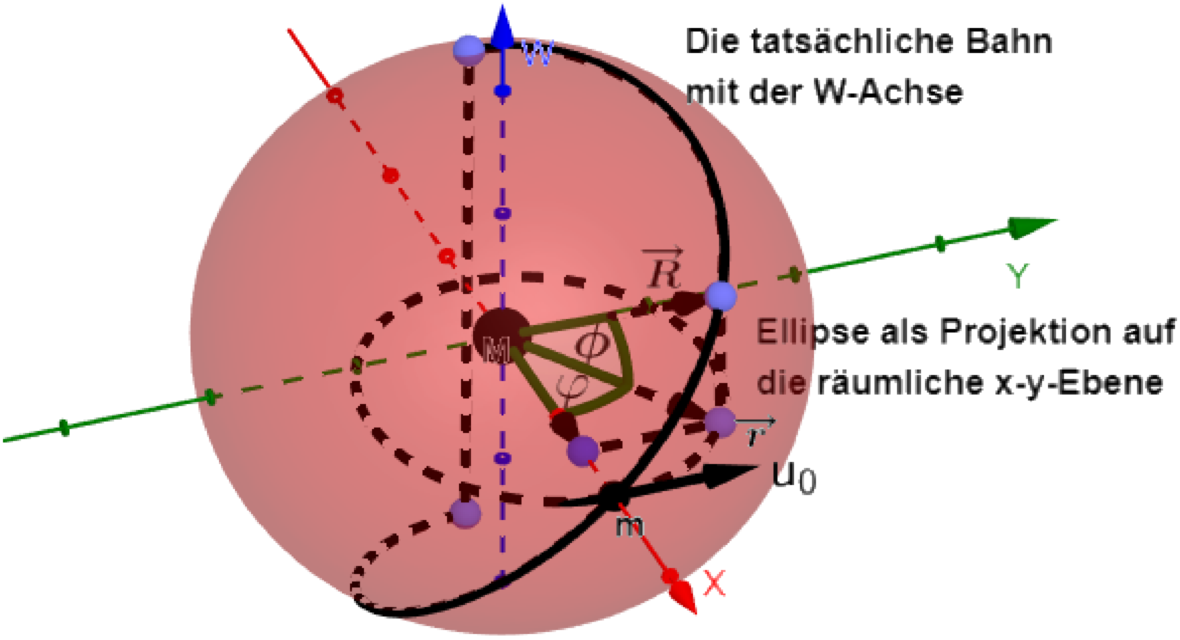

Abbildung 2

Die zur Gleichung (4) äquivalente Gleichung lautet in diesem Fall
(Herleitung im Anhang als (G611))

$$r(t)=r_0\cdot\cos\left(\int_0^t\sqrt{\frac{2\;\gamma\;M}{r_0^2\;r(t')+r_0\;r(t')^2}-\frac{u_0^2}{r\left(t'\right)^2}}\,dt'\right)=r_0\cdot cos\left(\phi\left(t\right)\right) \tag{12}$$

Für das Integral habe ich dabei abkürzend geschrieben:

$$\phi\left(t\right)=\int_0^t\sqrt{\frac{2\;\gamma\;M}{r_0^2\;r(t')+r_0\;r(t')^2}-\frac{u_0^2}{r\left(t'\right)^2}}\,dt' \tag{13}$$

Zusammen mit der Ellipsen Gleichung (siehe für die Ableitung Anhang G612)

$$r\left(\varphi\right)=\frac{\frac{u_0^2}{u_K^2}\cdot r_0}{1-\left(1-\frac{u_0^2}{u_K^2}\right)\cdot cos\left(\varphi\right)} \tag{14}$$

$$\text{folgt daraus zunächst} \quad cos\left(\varphi\left(t\right)\right) = \frac{cos\left(\phi\left(t\right)\right) - \frac{u_0^2}{u_K^2}}{\left(1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right) \cdot cos\left(\phi\left(t\right)\right)} \tag{15}$$

da zu jedem Zeitpunkt $r\left(t\right) = r\left(\varphi\right)$ gilt.
Insgesamt erhalten wir für die Bahn der Probemasse m in der Abbildung 2

$$x\left(t\right) = r_0 \cdot cos\left(\phi\right) \cdot cos\left(\varphi\right) = r_0 \cdot \frac{cos\left(\phi\left(t\right)\right) - \frac{u_0^2}{u_K^2}}{1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}} \tag{16}$$

$$y\left(t\right) = r_0 \cdot cos\left(\phi\right) \cdot sin\left(\varphi\right) = r_0 \cdot \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right)^2 \cdot cos\left(\phi\left(t\right)\right)^2 - \left(cos\left(\phi\left(t\right)\right) - \frac{u_0^2}{u_K^2}\right)^2}}{1 - \frac{u_0^2}{u_K^2}} \tag{17}$$

$$w\left(t\right) = r_0 \cdot sin\left(\phi\left(t\right)\right) \tag{18}$$

Es ist also nötig für ein konkreten Zeitpunkt t nur den Ausdruck $\phi\left(t\right)$ numerisch auszuwerten.

2 Anhang

Herleitung von Gleichung 12 (G611) und Gleichung 14 (G613)

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e_r} \qquad \text{(G601)}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e_r} + r \cdot \frac{d}{dt}\vec{e_r} \qquad \text{mit} \qquad \frac{d}{dt}\vec{e_r} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{dr}{dt} \cdot \vec{e_r} + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e_\varphi} \qquad \text{(G602)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d^2}{dt^2}r \cdot \vec{e_r} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d}{dt}\vec{e_r} + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e_\varphi} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi \cdot \vec{e_\varphi} + r \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d}{dt}\vec{e_\varphi}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \frac{d^2}{dt^2}r \cdot \vec{e_r} + 2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{e_\varphi} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi \cdot \vec{e_\varphi} - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \cdot \vec{e_r}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \left(\frac{d^2}{dt^2}r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \cdot \vec{e_r} + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi\right) \cdot \vec{e_\varphi} \qquad \text{(G603)}$$

Setzen wir dies mit der Gravitationsbeschleunigung gleich :

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) \cdot \vec{e_r} + \left(2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi\right) \cdot \vec{e_\varphi} = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e_r} \qquad \text{(G604)}$$

so folgen die beiden Gleichungen :

$$2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{d^2}{dt^2}\varphi = 0 \qquad \text{(G605)}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \qquad \text{(G606)}$$

Sehen wir uns (G605) $2 \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi = 0$ an.

Wir multiplizieren beide Seiten mit r und formen dann um .

$$2 \cdot r \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right) + r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\varphi = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0$$

Also gilt $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = constant = k$ (G607)

Ich möchte Ellipsenbahnen betrachten, und den Anfangspunkt der Bewegung auf den

Aphel legen. Diese Entfernung nenne ich r_0. Dann ist $k = {r_0}^2 \cdot \frac{d\varphi_0}{dt} = {r_0}^2 \cdot \omega_0 = r_0 \cdot u_0$

u_0 soll kleiner sein als die für eine Kreisbahn notwendige Geschwindigkeit $u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$

Damit gilt: $u_0 \le u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}}$ oder $k = r_0 \cdot u_0 \le r_0 \cdot u_K = \sqrt{\frac{\gamma \cdot M}{r_0}} \cdot r_0$

setzen wir (G607) in die Gleichung (G606) $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2}$ ein.

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r - \frac{k^2}{r^3} = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} r = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3} \qquad \text{(G608)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3}$$

$$v \cdot dv = \left(-\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3}\right) \cdot dr \qquad \text{oder} \qquad \int_0^v v \,\mathrm{d}v = \int_{r_0}^{r} \left(-\frac{\gamma \cdot M}{r^2} + \frac{k^2}{r^3}\right) \mathrm{d}r$$

$$\frac{1}{2} \cdot v^2 = \left(\frac{\gamma \cdot M}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{r_0}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)$$

$$v^2 = \left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)} \qquad \text{(G609)}$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\left(\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r}-\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}\right)-\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}}=-dt$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r}-\frac{k^2}{r^2}\right)-\left(\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}-\frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}}\,\mathrm{d}r=-\int_0^t 1\,\mathrm{d}t=-t$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\right)-\left(\frac{1}{r_0}-\frac{1}{{r_0}^2}\cdot\frac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\right)}}\,\mathrm{d}r=-\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

sei $\quad \xi^2=\frac{\frac{k^2}{{r_0}^2}}{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}}=\frac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot\frac{1}{r_0}$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}-\frac{\xi^2\cdot r_0}{r^2}\right)-\left(\frac{1}{r_0}-\frac{\xi^2\cdot r_0}{{r_0}^2}\right)}}\,\mathrm{d}r=-\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

$$\int_{r_0}^{r}\frac{r}{\sqrt{\left(r-\xi^2\cdot r_0\right)-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2}}\,\mathrm{d}r=\int_{r_0}^{r}\frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r=-\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

Aus $\quad k\le\sqrt{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}\cdot r_0 \quad$ folgt $\quad 0\le\xi^2=\frac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot\frac{1}{r_0}\le\frac{\gamma\cdot M\cdot r_0}{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot\frac{1}{r_0}=\frac{1}{2}$

Also gilt insbesondere $\quad -\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)<0$

Für das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r$ kann ich schreiben

$$=\frac{1}{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}\cdot\int \frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r-1+1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r$$

$$=-\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}\cdot\left(\int \frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r+1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r-\int \frac{1}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r\right)$$

$$=-\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}\cdot\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}+\int \frac{\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r$$

Für das letzte Integral gilt laut Tabelle :

$$\int \frac{\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}}\,\mathrm{d}r=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)}\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}}\right)\cdot arcsin\left(\frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r+1}{\sqrt{1-4\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\xi^2}}\right)$$

Für das bestimmte Integral folgt

$$\int_{r_0}^{r} \frac{r}{\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}}\, \mathrm{d}r =$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0} + \frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot {r_0}^2 + r_0 - \xi^2 \cdot r_0}$$

$$+ \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}}\right) \cdot arcsin\left(\frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r + 1}{\sqrt{1-4\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\xi^2}}\right)$$

$$- \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}}\right) \cdot arcsin\left(\frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r_0 + 1}{\sqrt{1-4\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\xi^2}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2 + r - \xi^2 \cdot r_0}$$

$$- \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}}\right) \cdot arcsin\left(\frac{-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r + 1}{1-2\cdot\xi^2}\right)$$

$$- \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}}\right) = -\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t$$

$$\frac{1-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r}{1-2\cdot\xi^2} = \blacksquare$$

$$\sin\left(2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t-\frac{\pi}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}\cdot\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}\right)$$

$$\frac{1-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r}{1-2\cdot\xi^2} = \blacksquare$$

$$-\cos\left(2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot t-2\cdot\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}\cdot\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}\right)$$

$$\frac{1-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r}{1-2\cdot\xi^2} = \blacksquare$$

$$-\cos\left(2\cdot\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}}\cdot t-2\cdot\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}\cdot\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}\right)$$

wegen $-\cos(2\cdot x) = -2\cdot\cos(x)^2+1$

$$\frac{1-2\cdot\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r}{1-2\cdot\xi^2} = \blacksquare$$

$$-2\cdot\cos\left(\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}}\cdot t-\sqrt{\frac{1-\xi^2}{r_0}}\cdot\sqrt{-\left(\frac{1-\xi^2}{r_0}\right)\cdot r^2+r-\xi^2\cdot r_0}\right)^2+1$$

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \blacksquare$$

$$r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos\left[\left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}} \cdot t - \sqrt{\left(1-\xi^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}\right]^2$$

Für den Fall $\xi = 0$, also $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ erhalten wir wieder die Gleichung nur für den

freien Fall : $r(t) = r_0 \cdot cos\left(\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}} \cdot t - \sqrt{1-\frac{r}{r_0}} \cdot \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right)^2$.

setzen wir nun $\alpha = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}} \cdot t - \sqrt{\left(1-\xi^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} \cdot \sqrt{\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}$

dann können wir vereinfacht schreiben $r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2$

mit $cos(x)^2 = \frac{1}{2} \cdot cos(2\cdot x) + \frac{1}{2}$ folgt

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot cos(2\cdot\alpha) + \frac{1}{2}\right)$$

$$r = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \cdot r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot cos(2\cdot\alpha)$$

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{r_0}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(2\cdot\alpha)$$

$$r = r_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(2\cdot\alpha)\right)$$

Aus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} = 1$ folgt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\xi^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(2\cdot\alpha) \le 1$

Die letzte Ungleichung ist genau dann eins wenn der kosinus eins ist.
Daher mache ich den folgenden Ansatz machen :

$$r = r_0 \cdot cos(\beta) = r_0 \cdot \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + r_0 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2$$

oder $\beta = arccos\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2\right)$

Den Arkuscosinus Ausdruck stelle ich jetzt als integral dar, dazu setze ich zunächst

$y = \frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2$ damit $dy = -2 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha) \cdot d\alpha$

$$\beta = arccos(y) = \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int_\alpha^0 \frac{-2 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2\right)^2}}\,\mathrm{d}\alpha$$

$$\beta = \int_0^\alpha \frac{2 \cdot \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha) \cdot sin(\alpha)}{\sqrt{1-\left(\frac{\xi^2}{1-\xi^2} + \frac{1-2\cdot\xi^2}{1-\xi^2} \cdot cos(\alpha)^2\right)^2}}\,\mathrm{d}\alpha$$

Aus $\alpha = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0^{\,3}}} \cdot t - \sqrt{\left(1-\xi^2\right) \cdot \left(1-\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(\left(1-\xi^2\right) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}$ folgt

$$d\alpha = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0^{\,3}}} \cdot dt - \blacksquare$$

$$\frac{-\left(1-\xi^2\right) \cdot \frac{dr}{r_0} \cdot \left(\left(1-\xi^2\right) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right) + \left(1-\xi^2\right) \cdot \left(1-\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1-\xi^2\right) \cdot \frac{dr}{r_0}}{2 \cdot \sqrt{\left(1-\xi^2\right) \cdot \left(1-\frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(\left(1-\xi^2\right) \cdot \frac{r}{r_0} - \xi^2\right)}}$$

$$d\alpha = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}} \cdot dt - \blacksquare$$

$$\frac{1-2\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}}{2\cdot\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\cdot\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}-\xi^2\right)}} \cdot \left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{dr}{r_0}$$

mit $dr = -\sqrt{\left(\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r}-\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}\right)-\left(\frac{k^2}{r^2}-\frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}\ dt$ und $\xi^2 = \frac{\frac{k^2}{{r_0}^2}}{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}} = \frac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot\frac{1}{r_0}$

$$dr = -\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0}} \cdot \sqrt{\left(\frac{r_0}{r}-1\right)-\xi^2\cdot\left(\frac{r_0}{r}-1\right)\cdot\left(\frac{r_0}{r}+1\right)}\ dt$$

$$d\alpha = \left(1-\xi^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}} \cdot dt + \blacksquare$$

$$\frac{\left(1-2\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}\right)\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}}\cdot\sqrt{\left(\frac{r_0}{r}-1\right)-\xi^2\cdot\left(\frac{r_0}{r}-1\right)\cdot\left(\frac{r_0}{r}+1\right)}}{2\cdot\sqrt{\left(1-\xi^2\right)\cdot\left(1-\frac{r}{r_0}\right)\cdot\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}-\xi^2\right)}}\cdot dt$$

$$d\alpha = \left(1-\xi^2\right)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}}\cdot dt\cdot\left(\sqrt{1-\xi^2}+\frac{\left(1-2\cdot\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}\right)}{2}\cdot\frac{\frac{r_0}{r}}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$d\alpha = \left(1-\xi^2\right)\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{{r_0}^3}}\cdot dt\cdot\frac{\frac{r_0}{r}}{2\cdot\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\xi^2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r^2\cdot r_0}}\cdot dt$$

$$\beta = \int_0^t \frac{2\cdot\left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)\cdot sin(\alpha)\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r^2\cdot r_0}}}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)-\left(\xi^2+\left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)^2\right)^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$\beta = \int_0^t \frac{\left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)\cdot sin(\alpha)\cdot\sqrt{1-\xi^2}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot\gamma\cdot M}{r^2\cdot r_0}}}{\sqrt{\left(1-\xi^2\right)^2-\left(\xi^2+\left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)^2\right)^2}}\,\mathrm{d}t$$

mit $\left(1-\xi^2\right)\cdot\dfrac{r}{r_0} = \xi^2+\left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)^2$

$$\sqrt{\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\frac{r}{r_0}-\xi^2\right)\cdot\left(1-2\cdot\xi^2\right)} = \left(1-2\cdot\xi^2\right)\cdot cos(\alpha)$$

$$1-\frac{\left(1-\xi^2\right)\cdot\dfrac{r}{r_0}-\xi^2}{\left(1-2\cdot\xi^2\right)} = 1-cos(\alpha)^2 = sin(\alpha)^2$$

$\sqrt{\left(1-\xi^2\right)}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{r}{r_0}}{\left(1-2\cdot\xi^2\right)}} = sin(\alpha)$ und mit $\xi^2 = \dfrac{k^2}{2\cdot\gamma\cdot M}\cdot\dfrac{1}{r_0}$

$$\beta = \int_0^t \frac{\sqrt{\left(\left(1-\xi^2\right)\cdot\dfrac{r}{r_0}-\xi^2\right)}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot\gamma\cdot M}{r^2\cdot r_0}}}{\sqrt{1+\dfrac{r}{r_0}}}\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0^2\cdot r+r_0\cdot r^2}-\frac{k^2}{r^2\cdot r_0^2}}\,\mathrm{d}t$$

und wieder mit $k = r_0\cdot u_0$

$$\beta = \int_0^t \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0^2\cdot r+r_0\cdot r^2}-\frac{u_0^2}{r^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(G610)}$$

ergibt insgesamt $r(t) = r_0\cdot cos\left(\displaystyle\int_0^t \sqrt{\frac{2\cdot\gamma\cdot M}{r_0^2\cdot r+r_0\cdot r^2}-\frac{u_0^2}{r^2}}\,\mathrm{d}t\right)$ (G611) wir kehren jetzt zu der Gleichung (G609) $\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}$

und paramatisieren nach φ anstatt nach t .

$\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}$ mit (G607) $r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} = k$

$$\int_{r_0}^{r} \frac{k}{r^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r} - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0}\right) - \left(\frac{k^2}{r^2} - \frac{k^2}{{r_0}^2}\right)}} \, \mathrm{d}r = -\int_0^{\varphi} 1 \, \mathrm{d}\varphi = -\varphi$$

Subsitution: sei $x = \frac{1}{r}$, $dx = -\frac{1}{r^2} \cdot dr$ oder $-\frac{1}{x^2} \cdot dx = dr$

$$-\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{-k \cdot x^2}{x^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \gamma \cdot M \cdot x - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} - k^2 \cdot x^2 + \frac{k^2}{{r_0}^2}}} \, \mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \gamma \cdot M \cdot x - \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{r_0} + \frac{k^2}{{r_0}^2}}} \, \mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot \left(\left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\gamma \cdot M}{k^2 \cdot r_0} - \frac{1}{{r_0}^2}\right)}} \, \mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{k}{\sqrt{-k^2 \cdot \left(\left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)^2\right)}} \, \mathrm{d}x = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)^2 - \left(x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}\right)^2}} \, \mathrm{d}x$$

$$\varphi = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)^2}} \, \mathrm{d}x$$

Subsitution: sei $u = \frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}$, $du = \frac{dx}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}$

$$\varphi = \frac{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}{\left(\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}\right)} \cdot \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \, \mathrm{d}u = \int_{(r_0)}^{(r)} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \, \mathrm{d}u$$

$\varphi = arcsin(u)$ (von r_0 bis r)

oder wieder mit x $\varphi = arcsin\left(\frac{x - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)$ (von r_0 bis r)

oder wieder mit r $\varphi = arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right)$ (von r_0 bis r)

damit $\varphi = arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) - arcsin\left(\frac{\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) = arcsin\left(\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}}\right) + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\frac{1}{r} - \frac{\gamma \cdot M}{k^2}}{\frac{\gamma \cdot M}{k^2} - \frac{1}{r_0}} = sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -cos(\varphi)$$

$$r=\frac{1}{\frac{\gamma\cdot M}{k^2}-\left(\frac{\gamma\cdot M}{k^2}-\frac{1}{r_0}\right)\cdot cos(\varphi)}=\frac{\frac{1}{\frac{\gamma\cdot M}{k^2}}}{1-\left(1-\frac{k^2}{\gamma\cdot M\cdot r_0}\right)\cdot cos(\varphi)}$$ mit $k=u_0\cdot r_0$

$$r=\frac{\frac{1}{\frac{\gamma\cdot M}{u_0^{\ 2}\cdot r_0^{\ 2}}}}{1-\left(1-\frac{u_0^{\ 2}\cdot r_0^{\ 2}}{\gamma\cdot M\cdot r_0}\right)\cdot cos(\varphi)}=\frac{\frac{u_0^{\ 2}}{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}\cdot r_0}{1-\left(1-\frac{u_0^{\ 2}}{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}\right)\cdot cos(\varphi)}$$ (G612)

Ich setze $u_k=\sqrt{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}$ als die jenige Geschwindigkeit die zu einer Kreisbewegung führen würde. Anscheinend sind die Eigenschaften der Ellipsenbahn von dem Verhältnis $\left(\frac{u_0}{u_k}\right)^2$ abhängig.

Wir können dann schreiben : $r(\varphi)=\frac{\frac{u_0^{\ 2}}{u_k^{\ 2}}\cdot r_0}{1-\left(1-\frac{u_0^{\ 2}}{u_k^{\ 2}}\right)\cdot cos(\varphi)}$ (G613)

Ein Vergleich mit der Ellipsen Gleichung $r(\varphi)=\frac{p}{1-\varepsilon\cdot cos(\varphi)}$ ergibt

$p=\frac{u_0^{\ 2}}{u_k^{\ 2}}\cdot r_0=\frac{u_0^{\ 2}}{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}\cdot r_0$ und $\varepsilon=1-\frac{u_0^{\ 2}}{u_k^{\ 2}}=1-\frac{u_0^{\ 2}}{\frac{\gamma\cdot M}{r_0}}$