Rough estimate of Legendre's conjecture

Hajime Mashima

September 16, 2018

Abstract

Legendre's conjecture argues that there is always a prime number between n^2 and $(n+1)^2$ when natural number n.

Proposition 1 $n^2 \sim (n+1)^2$ 間の奇数が、常に $(n+1)$ 未満の奇素数で構成させる位相の全ての組み合わせに該当しない *cell* があるならば *Legendre's conjecture* は真である。

$n^2 \sim (n+1)^2$ 間の奇数の合成数を ab と置く。
$(a > 2\ ,\ b > 2\ ,\ n^2 < ab \leqq (n+1)^2)$

$b > (n+1)$ ならば $a < (n+1)$ である。

・このとき b が素数でも必ず a の積の pair となるので b を考慮する必要はない。

$(n-1)(n+1) = n^2 - 1 < n^2$ となるので $(n+1)$ が素数ならば
$n^2 \sim (n+1)^2$ 間に存在する $(n+1)$ の積は $(n+1)^2$ を除けば $n(n+1)$ のみである。

・このとき $n(n+1)$ は偶数なので考慮する必要はない。

偶数と平方数は明らかに合成数なので予め消去する。(Table 1. ×)

Table 1:

n+1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	×	×	5	×	17	×	37	×	65
2	×	3	×	11	×	27	×	51	×
3	×	×	7	×	19	×	39	×	67
4	×	15	×	13	×	29	×	53	×
5	×	×	23	×	21	×	41	×	69
6	×	35	×	33	×	31	×	55	×
7	×	×	47	×	45	×	43	×	71
8	×	63	×	61	×	59	×	57	×
9	×	×	79	×	77	×	75	×	73

・$n^2 \sim (n+1)^2$ 間の green cell の個数は n 個である。

$5^2 \sim 6^2$ 間に存在する 6 未満の奇素数の積は 3 と 5 である。
このとき green cell に対する位相は 3 周期 × 5 周期の 15 通りある。以下に示す。

Table 2: $n = 5$

p	3	5	n
1			27
2			29
3			31
4			33
5			35
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 3: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			27
3			29
4			31
5			33
6			35
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 4: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			27
4			29
5			31
6			33
7			35
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 5: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			27
5			29
6			31
7			33
8			35
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 6: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			27
6			29
7			31
8			33
9			35
10			
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 7: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			27
7			29
8			31
9			33
10			35
11			
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 8: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			27
8			29
9			31
10			33
11			35
12			
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 9: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			27
9			29
10			31
11			33
12			35
13			
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 10: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			27
10			29
11			31
12			33
13			35
14			
15			
16			
17			
18			
19			

Table 11: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			27
11			29
12			31
13			33
14			35
15			
16			
17			
18			
19			

Table 12: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			27
12			29
13			31
14			33
15			35
16			
17			
18			
19			

Table 13: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			27
13			29
14			31
15			33
16			35
17			
18			
19			

Table 14: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			27
14			29
15			31
16			33
17			35
18			
19			

Table 15: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			27
15			29
16			31
17			33
18			35
19			

Table 16: $n = 5$

p	3	5	n
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			27
16			29
17			31
18			33
19			35

Definition 2 $(n{+}1)$ 未満の最大奇素数を $P(n{+}1)_{max}$ と置く。$(2 \perp P(n{+}1)_{max})$

$$
\begin{aligned}
P(4)_{max} &= 3 \\
P(5)_{max} &= 3 \\
P(6)_{max} &= 5 \\
P(7)_{max} &= 5 \\
P(8)_{max} &= 7 \\
P(9)_{max} &= 7 \\
P(10)_{max} &= 7 \\
P(11)_{max} &= 7 \\
P(12)_{max} &= 11 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

・奇素数の位相の全ての組み合わせは $P(n+1)_{max}!$ 通りである。

$$P(n+1)_{max}! = P(n+1)_{max} \cdots 13 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3$$

$$\log(P(n+1)_{max}!) = \sum_{k=2}^{k} \log(p_k)$$

$(n=7)$〜$(n=10)$ における奇素数の位相は共通して $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$ 通りであるが、$(n=7)$ は $(n=8)$〜$(n=10)$ よりも green cell における素数の出現率が最少である。(Table 17〜20)

よって、$P(p+1)_{max}$ すなわち $n = p$ について考察すれば十分である。

Table 17: $n = 7$

p	3	5	7	n
1				51
2				53
3				55
4				57
5				59
6				61
7				63
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
⋮				

Table 18: $n = 8$

p	3	5	7	n
1				65
2				67
3				69
4				71
5				73
6				75
7				77
8				79
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
⋮				

Table 19: $n = 9$

p	3	5	7	n
1				83
2				85
3				87
4				89
5				91
6				93
7				95
8				97
9				99
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
⋮				

Table 20: $n = 10$

p	3	5	7	n
1				101
2				103
3				105
4				107
5				109
6				111
7				113
8				115
9				117
10				119
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
⋮				

Theorem 3 素数定理より、x における素数の間隔はおよそ $\log(x)$ である。

$P(p+1)_{max}$ より小さいところでは 2^m が green cell にあるが大きいところでは定かではない。
よって常に奇素数が少なくとも一個は green cell に存在するか調べる必要がある。
$\log(P(p+1)_{max}!)$ における素数のおよその間隔について、$k = 1000$ まで出力した。

Table 21:

n	$\log(P(p+1)_{max}!)$
3	$1.098\cdots$
5	$2.708\cdots$
7	$4.653\cdots$
11	$7.051\cdots$
13	$9.616\cdots$
17	$12.450\cdots$
19	$15.394\cdots$
23	$18.529\cdots$
29	$21.897\cdots$
31	$25.331\cdots$
37	$28.942\cdots$
41	$32.655\cdots$
43	$36.416\cdots$
47	$40.267\cdots$
53	$44.237\cdots$
59	$48.314\cdots$
61	$52.425\cdots$
67	$56.630\cdots$
71	$60.893\cdots$
73	$65.183\cdots$
79	$69.553\cdots$
83	$73.971\cdots$
89	$78.460\cdots$
97	$83.035\cdots$
	$\vdots$
7919	$7811.59\cdots$

$$n \geqq \sum_{k=2}^{k} \log(p_k)$$

上式を満たすならば green cell に素数が存在する可能性が高いと言える。また Table 21 を見る限り n が大きくなるほど両辺は近似すると推測される。