ALGEBRAIC FIELD THEORY

A MATHEMATICAL CONSTRUCTION OF THE VACUUM

ROBERT HANS IHDE†
MUNICH (GERMANY), AUGUST 2018

ABSTRACT

All algebras of quantum theory are algebras over a field or briefly K-algebras of a binary operation, which are defined as constant invariants over the Poincaré group. The Christoffel symbols occurring in the classical geodetic equation can be understood as a representation of a K-algebra. In contrary to the constant algebras of quantum theory, the K-algebra of the Christoffel symbols is a function of space-time. A mathematical, conformal unification of geometry and algebra requires a corresponding dependence on space-time for the quantum algebras. Assuming the existence of an algebraic field, based on a changing binary operation with a feedback to the domain, a quantum mechanical vacuum equation for gravity is established. The vacuum equation structurally follows a generalized, pseudo-linear Dirac-Maxwell system with additional algebraic constraints. A physical existence of the algebraic field, as the counterpart to the geometric field of gravity, can be falsified by the experiment. The part of the spin in the magnetic moment of a particle would then depend on its acceleration, since the algebraic field should influence the spin algebra accordingly.

1. INTRODUCTION

"How can it be, that mathematics, being after all product of human thought which is independent of experience, is so admirable appropriate to the objects of reality?"

Konrad Zuse[1] had a simple information-theoretical thesis (IT) as an answer to Albert Einstein's[2] epistemological question. Nature could already function like an algebraic computer on the smallest level. However, Zuse's approach of a classical computer does not take quantum mechanical principles[3] into account and the connection to gravity also remained open. The Feynman/Stückelberg Y-graph[4] of the interaction of two elementary particles, e.g. the annihilation of an electron with a positron to a photon, is understood in the IT picture as a finger pointing of nature to a deeper, binary operation which then takes place on the Planck length ($\approx 10^{-33}$ cm). At an energy of about 14 Tev available today, any interaction that can be resolved, would still be a package of several quadrillions of such smallest operations.

The world of a modern, almost natural, computer game on the monitor and what is going on parallel on the processor and main memory seem to be two completely separate worlds, but one requires the other. A similar situation occurs when you want to connect the current elementary particle physics with a speculative IT physics on the Planck level. Therefore, analogies and new points of view are conveyed simultaneously with mathematics in order to facilitate the introduction to algebraic thinking in relation to physics. This is not absolutely necessary, but was helpful as a model for the development of this theory. Anyway, only the mathematics presented here is of importance and the experiment is decisive, independent of the concrete picture.

Are the terms 'reality' and 'virtuality' based on the same mathematical principles and can this be proven experimentally?

According to Karl Popper[5], a physical theory cannot be proved in principle, but only falsified. This work should therefore continue the path inspired by Konrad Zuse, towards a falsifiable algebraic field theory.

The approach presented here is far removed from all current main directions of physics. Rather, it should be understood as a restriction from an algebraic point of view, similar to higher programming languages that lead to the machine language.

---

† roberthans.ihde@gmail.com, preprint, draft, subject to changes and error corrections

To realize this theory, an axiomatic, bottom-up approach is chosen. Only a generalized binary operation is assumed, mediated by arbitrary K-algebras, which can change themselves depending on the domain. Everything else is derived from these few axioms.

Binary operations can be generalized by K-algebras, which can be constructed by a generating base. In quantum theory, K-algebras contribute substantially to their properties, for example the γ matrices in the Dirac equation[6] for the electron, the Pauli σ matrices[7] for the spin, or the Gell-Mann‘s λ matrices[8], describing the quark color symmetries. There are further structural clues in physics which support an algebraic view. The Maxwell equations[9] can be derived as generalized Cauchy-Riemann equations from a subspace of Bi-quaternions as generators[10]. The Dirac equation itself can also be understood as the Cauchy-Riemann system of the γ matrices[11]. In physics such systems are therefore also called 'Dirac-Maxwell' systems. Solutions of general relativity[12] have the property of conserving angles under physical transformations, a genuine property of conformal Cauchy-Riemann systems. These mathematical facts already point in the direction that the formula structures of quantum mechanics and gravity can have their origin in algebraic constraints of a generalized, binary operation determined by K-algebras. For this purpose, the K-algebra itself must be able to change in the form of an algebraic field with a feedback to the domain. The complementary image is that of a simple programmable transistor (or artificial neuron) with two inputs and one output. The output is determined by the two inputs but also by the changing weights of the K-algebra, which themselves depend on the domain. It will be shown in the following that such a construct follows a pseudo-linear Cauchy-Riemann system (math.) or Dirac-Maxwell system (phys.).

In order to clarify the overall picture, this will first be demonstrated using the example of complex numbers. A complex number can also be described as a pseudo-scalar product between the vector of the generators (e, i) and a vector of the real field numbers, where the operator T symbolizes the transposition of a matrix or vector. In the literature, the complex one with the real one is often identified on the basis of the same algebraic properties ($\mathrm{e} \equiv 1$). Via the strict mathematical view, all generators are always of a different kind than the real numbers.

$$2\,\mathrm{e} + 3\,\mathrm{i} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Thus, this concept is also suitable for the mathematical description of a memory (the generators here represent two cells) with the respective internal states (the real numbers).

The K-algebra $\mathbb{C}$ of the complex numbers can be represented as a binary operation using the vector of the generating base and the Kronecker/Zehfuss-product (symbol $\otimes$) as follows (classical construction of a K-algebra from the generating base elements by embedding into the domain). Thereby the generators get their actual meaning. Remark: In the quantum mechanical view two states (left side) are generated from one state (right side) by means of the rectangular matrix as ascending operator (in the Bra-Ket notation: $|\beta,\beta\rangle = \boldsymbol{A}|\beta\rangle$). The algebraic field can therefore be interpreted also as a creation or annihilation operator field.

$$\begin{pmatrix}e\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}e\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}e\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

All eight weights of the rectangular matrix unambiguously determine the K-algebra of the complex numbers $\mathbb{C}$. Changing these weights results in different number systems, i.e. a different K-algebra.

The complex multiplication can be determined freely from the generators, by combining the rectangular matrix with the Kronecker product, only by means of the vectors of the field numbers (this follows already from the definitions 1.1 and 1.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot (p \otimes q) = r \qquad p, q, r \in \mathbb{R}^2 \tag{1.3}$$

The geodetic equation follows the same structure when the Christoffel symbols are mapped into a corresponding rectangular 16x4 matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ and then brought into the form of a matrix vector product. The connection $\boldsymbol{\Gamma}$ can then be interpreted as space-time dependent K-algebra. The point above the location vector q denotes the derivation according to the eigentime.

$$-\boldsymbol{\Gamma}^T(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \tag{1.4}$$

Another heuristic indication of a connection between algebra and metric are the Diracian γ matrices as generators. These result as division algebra from the linearized Klein-Gordon equation from the Minkowski metric. The following constraint[6] must be fulfilled with the help of the anti-commutator brackets:

$$\frac{1}{2}\{\gamma^j,\ \gamma^k\} = G^{jk}E \tag{1.5}$$

These peculiarities are now the mathematical motivation to infer a more general physical relation between any K-algebra as algebraic field and the metric. While Dirac assumed a definite, constant metric in order to deduce the necessary algebra, the opposite way is taken here. It is investigated under which mathematical conditions a local algebraic field induces another local metric field as geometric conservation quantity[13].

2. DEFINITIONS

For the formulation of the algebraic field theory no new mathematics is necessary, but the use of different mathematical tools, which are not very common in physics at present. This concerns the use of the rectangular matrix calculus in interaction with the Kronecker product as well as the use of shift index operators, hereinafter referred to as `RKS notation`. The RKS notation is optimized for programming and at the same time reduces the amount of formula writing for the algebraic field theory. The following additional notations are used. Standard lower-case letters like `x` are variables from the field numbers, italic lower case standard letters like `*q*` are vectors. Capitalized letters in italics like `*M*` should denote square matrices, bold letters in italics and capitalized Greek letters like `***A***` or `***Γ***` should represent rectangular matrices. The Greek little `*β*` is reserved for the vector of the generating base to symbolize that this vector is of a different kind than the vectors defined over the field. The Einstein sum convention common in physics as well as the symbols for differential operators are used, as far as no ambiguities occur. Furthermore, the Euclidean unit vectors are called `*e*` and the quadratic unit matrix is called `*E*`. In case of transition to affine manifolds these are to be generalized as location-dependent Vielbein, by replacing $e_j \rightarrow e_j(q)$, i.e. all operators are generally dependent on the domain. Exceptions to this notation are known entities such as Dirac's Gamma Matrices `γ`.

Definition for a vector over the field

$$q := \mathrm{q}^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\mathrm{j} \in \mathbb{N},\ \mathrm{q}^{\mathrm{j}} \in \mathbb{K},\ e_{\mathrm{j}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}},\ e^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{k}} = \delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{k}}) \tag{2.1}$$

Definition for the vector of the generators ('atomic memory cells')

$$\beta := \beta^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\beta^{\mathrm{j}} \notin \mathbb{K} \wedge \mathrm{d}\beta^{\mathrm{j}} = \partial \beta^{\mathrm{j}} := 0 \in \mathbb{K}) \tag{2.2}$$

Note: This definition results from the generalization of the symbol `i` for the complex numbers. The infinitesimal difference of `i` vanishes, because this symbol is an atomic entity. In the IT picture the β^{j} are seen as atomic memory cells, which themselves do not belong to space-time and do not need any further topological assumptions. Thus, the metric operator for up and down indexing is only possible for (2.1). For (2.2) an own conjugation operator is necessary, which is derived later directly from the K-algebra, if certain conditions are fulfilled. The metric space-time is generated virtually and exclusively by the algebraic relations between the atomic memory cells, comparable to a computer game. The individual cells must not be equated with a quantized space-time. These are to be regarded as degrees of freedom. The postulates for quantization are not assumed, but are identified in the following as a specific variant from the class of all algebraic field theories.

Definition of a generalized complex number ('memory state')

$$\tilde{q} := \beta^T q = q^T \beta \tag{2.3}$$

Definition of the mapping of variables with triple indices to a rectangular matrix

$$\boldsymbol{A} := \left(e_{\mathrm{j}} \otimes e_{\mathrm{k}} \otimes e^{l}\right) \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \qquad \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \in \mathbb{K} \tag{2.4}$$

For clarification an example of any two-dimensional K-algebra:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1^{11} & \mathrm{a}_2^{11} \\ \mathrm{a}_1^{12} & \mathrm{a}_2^{12} \\ \mathrm{a}_1^{21} & \mathrm{a}_2^{21} \\ \mathrm{a}_1^{22} & \mathrm{a}_2^{22} \end{pmatrix} \text{ e.g. for the complex numbers } \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

The use of standard complex numbers already as field numbers, as usual in physics, may have disadvantages in treatment or in explicit computer calculations with algebraic operators. The appendix (A.1) describes a procedure that always maps Cartesian products of K-algebras (e.g. bi-quaternions) to a corresponding, higher dimensional algebra over the real numbers.

In addition to the superscript operator ´*T*´ of the transposition, three more superscript operators are needed for the RKS notation.

The operator ´*I*´ should represent the Moore-Penrose Inverse[14] of a rectangular matrix, which is defined by the following pseudo-inverse property. In a normal square matrix, the same symbol means the usual matrix inverse.

$$\boldsymbol{A}^I = \boldsymbol{A}^I\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^I \quad \wedge \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^I\boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

From the six possible permutations of the trivalent indices (including the identity), two index shift operators can already be selected as the base. The first operator exchanges the first two indices bilaterally against each other from the left, the second operator shifts each index one position to the right. Note, that the classic index shifts (in brackets) are only valid for Euclidean metrics.

Definition Superscript Shift Operator B (“bilateral shift”)

$$\boldsymbol{A}^B := \left(e_j^T \otimes E \otimes e_{\mathrm{j}}\right)\boldsymbol{A} \qquad\qquad (\mathrm{a}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{jk}})^B = \mathrm{a}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{kj}} \tag{2.6}$$

Definition Superscript Shift Operator R (“right shift, rotate thru carry”)

$$\boldsymbol{A}^R := \left(e_{\mathrm{j}} \otimes E\right)\boldsymbol{A}^T\left(E \otimes e_{\mathrm{j}}\right) \qquad\qquad (\mathrm{a}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{jk}})^R = \mathrm{a}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{lj}} \tag{2.7}$$

When executing the Superscript operators sequentially, it must be payed attention to the position and to their rules of permutation (A.2). The order of execution must always be read from left to right.

$$\boldsymbol{A}^{BRI} := ((\boldsymbol{A}^B)^R)^I \tag{2.8}$$

The definitions of the shift operators already imply relations (A.2) and in interaction with the Kronecker product further identities can be derived (A.3).

The Neudecker vector function[15] for transforming any matrix into a vector, arranged by the columns, is defined as follows.

$$vec(\boldsymbol{A}) := \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}_c}\left(e_{\mathrm{j}}(\mathrm{n}_c) \otimes E(\mathrm{n}_r \times \mathrm{n}_r)\right)\boldsymbol{A}(\mathrm{n}_r \times \mathrm{n}_c)\ e_{\mathrm{j}}(\mathrm{n}_c) \tag{2.9}$$

A general construction of a K-algebra from a generating base can be guaranteed with the following definition. The sub index at the Kronecker symbol stands as a parameter for the K-algebra, with which the Kronecker product on the left side is to be replaced with the respective context of a corresponding rectangular matrix on the right side.

In the following, the abbreviated term ‘algebra’ or ‘algebraic field’ is therefore used as a synonym for the representation of a domain-dependent K-algebra by means of a rectangular matrix (see 1.2 for the complex numbers as special case).

$$\beta \ \otimes_{\mathbb{A}} \beta \ := \boldsymbol{A}\,\beta \tag{2.10}$$

An affine connection can now be defined according to the same scheme, using the Levi-Cevita Operator ∇ and the metric tensor G (A.4). Here the generating base vector is used as a local frame to define the Christoffel symbols as a rectangular matrix $\boldsymbol{\Gamma}$.

$$(G\,\nabla) \otimes \beta := \boldsymbol{\Gamma}\,\beta \tag{2.11}$$

This allows the definition of a derivative, minimally coupled with $\boldsymbol{\Gamma}$, which is lifted into the rectangular matrix form in order to arrive later at a generator free representation (it follows $\boldsymbol{\nabla}\beta = 0$).

$$\boldsymbol{\nabla} \ := (G\,\nabla) \ \otimes \ E - \boldsymbol{\Gamma} \tag{2.12}$$

The model of a computer with only one memory forces the identification of the dual space with the outgoing space. Anti-particles and particles are in the same space-time. Complex numbers follow the ‘one memory’ principle, because the dual space of the complex numbers is identical to that of the complex numbers. The dual base of the generators is formulated in the algebraic field theory with the help of the pseudo-inverse base. Due to the identity of the dual space with the original space, the pseudo-inverse basis can also be expressed by means of the original basis.

The corresponding transformation matrix is then the searched operator for the conjugation and is generalized here.

$$\begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{I} = \tfrac{1}{2}\,(e \quad -i) = \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{(complex numbers)} \tag{2.13}$$

$$\beta^{I} \ := \ \beta^{T} \ \cdot \ K_{\mathbb{A}} \ \cdot \ \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \qquad (K_{\mathbb{A}}, \mathrm{m}_{\mathbb{A}} \in \mathbb{K})$$

$K_{\mathbb{A}}$ stands for the algebra-dependent conjugation operator and $\mathrm{m}_{\mathbb{A}}$ for the algebra-induced metric calibration coefficient. Chapter 5 shows later that the existence of a conjugation is subject to additional constraints.

For the metric calibration coefficient of the domain base the pseudo-Riemannian metric is assumed, thus structurally equal to the algebraic base (2.13), if the field identity is added. The metric tensor G is thus interpreted as the conjugation operator of the domain:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{2}(q)\ 1_{\mathbb{K}} := q^{T}\ G\ \ q \tag{2.14}$$

If a dual algebraic base is available, a generalized, inverse complex number can be defined analogous to the complex numbers as follows:

$$\tilde{q}^{I} \ := \beta^{I} q \ \mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{-2}(q) \tag{2.15}$$

3. GENERAL

Each K-algebra of a binary operation constructed by the definitions (2.3) and (2.10) can be represented as a combination of a rectangular matrix vector product and the Kronecker product.

$$\tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = (\beta^T p) \otimes_{\mathbb{A}} (\beta^T q) = (\beta^T \otimes_{\mathbb{A}} \beta^T)(p \otimes q) = \beta^T \boldsymbol{A}^T (p \otimes q) \tag{3.1}$$

The binary operation can also be reversed in the order in which the bilaterally shifted algebra is performed.

$$\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{p} = \tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}^B} \tilde{q} \tag{3.2}$$

It follows that a K-algebra is commutative, if the rule applies:

$$\boldsymbol{A}^B = \boldsymbol{A} \tag{3.3}$$

Solutions for algebraic problems therefore usually have a left- and right-handed version, if the K-algebra is not commutative. In the following, only a one-handed solution is given. The other one can be determined by replacing the rectangular matrix $\boldsymbol{A} \longmapsto \boldsymbol{A}^B$ in the solution.

Using the *vec* function and the Jacobi matrix representation of the Levi-Cevita operator, the relationship (2.11) can be symbolically rewritten as follows:

$$vec\left(\frac{d\beta}{dq}\right) = vec(\nabla^T \otimes \beta) = \nabla \otimes \beta = (G^I \otimes E)\, \boldsymbol{\Gamma}\, \beta \tag{3.4}$$

This allows the infinitesimal, total Levi-Cevita difference of β to be determined, using Kronecker/shift operator symmetries (A.2/A.3):

$$d\beta = \boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(\beta \otimes G^{IT})\, dq = \boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{IT} dq)\, \beta := dQ\, \beta \tag{3.5}$$

This has an effect on (2.10). Looking at this infinitesimal change of the expression, the new base, infinitesimally shifted by dq around $d\beta$, must apply:

$$(\beta + d\beta) \otimes_{\mathbb{A}+d\mathbb{A}} (\beta + d\beta) = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})(\beta + d\beta) \tag{3.6}$$

The terms of the second order fall away on both sides, then follows:

$$(\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A}\beta = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + \boldsymbol{A}dQ\beta \tag{3.7}$$

In order for this to be fulfilled, it must hold:

$$\boldsymbol{A}dQ = (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\, \boldsymbol{A} \tag{3.8}$$

For the total difference of the algebra together with (3.8) ensues:

$$d\boldsymbol{A} = \partial\boldsymbol{A} + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \partial\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}dQ \tag{3.9}$$

The following also counts:

$$d(\beta \otimes_{\mathbb{A}} \beta) = d\boldsymbol{A}\,\beta + \boldsymbol{A}d\beta \tag{3.10}$$

From this follows by means of (3.8):

$$(E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \boldsymbol{A}dQ \tag{3.11}$$

This can only be fulfilled, if it pertains to the algebra:

$$d\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.12}$$

From this follows immediately from equation (3.9):

$$\partial \boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{A}dQ = -2\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{I})\,dq \tag{3.13}$$

In order for (3.6, 3.10) both to be fulfilled, the following must apply between $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$½\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{I}) \tag{3.14}$$

The source of geometric space-time distortion is the energy impulse tensor, according to general relativity. In algebraic field theory gravity is coupled with a changing algebraic field, similar to the coupling of a magnetic field to an electric field. The operator $\boldsymbol{\Gamma}$ must vanish according to (3.14) if the algebraic field is constant and non-zero or has an extremum.

The standard deduction of the operator $\boldsymbol{\Gamma}$ from the metric G for a holonomic base (here in the RKS notation, defined by 2.11) is as follows:

$$\boldsymbol{\Gamma} = ½\left((\partial \otimes G)^{R} + (\partial \otimes G)^{RR} - (\partial \otimes G)\right) \tag{3.15}$$

The equation (3.14) can then be replaced on the right side by this relation and results in a non-linear differential equation of the first order for the algebraic field. If the metric tensor itself is a function of the algebraic field, so to speak the "self-interaction" of the vacuum state, then this differential equation depends only on the algebra (see chapter 6). This has to be considered as a constraint for the later vacuum solution. When interacting with an external metric field, the tensor G can alternatively be determined semi-classically via general relativity.

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\left((\partial \otimes G)^{T} + (\partial \otimes G)^{RT} - (\partial \otimes G)^{RRT}\right)(E \otimes G^{I}) \tag{3.16}$$

The equation must then also be valid for all quantum algebras. These would have to change correspondingly under high accelerations or strong gravitation and thus it is possible to physically falsify this mathematically justified speculation of the existence of algebraic fields. Without knowing the explicit solutions, the effect can be estimated at least structurally.

For a particle, which moves with nearly speed of light on a circle with radius vector r, the geodetic equation applies in classical approximation:

$$-\boldsymbol{\Gamma}^{T}(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \approx \frac{c^2}{|r|^2}\,r = -\boldsymbol{\Gamma}^{T}(c \otimes c) \text{ and } c^{T}r = 0 \tag{3.17}$$

If the particle now passes through two different radii, the change of the geometric field should be in first approximation dependent on the amount of the difference between the two different radii, if the difference is small compared to the total radius.

$$|\delta\boldsymbol{\Gamma}| \approx \frac{|\delta r|}{|r|^2} \qquad \delta r \ll r \tag{3.18}$$

This relation used in equation (3.16) then gives approximately for the change of the algebra with an experimental factor n_{exp} to be determined:

$$\delta\boldsymbol{A} \approx \mathrm{n}_{exp}\,\boldsymbol{A}\,|\delta r|^2 \tag{3.19}$$

The magnetic moment u of an electron is the sum of the moment of the orbital angular momentum l and of the spin s and the Landé factor g_L (with e=charge, m=mass):

$$u \;=\; \frac{e}{2m}\left(l + g_L \cdot s \right) \tag{3.20}$$

In quantum theory, the difference of the magnetic moment between two different orbital radii depends only on the orbital angular momentum, since the spin does not depend on the radius or on the respective acceleration (centrifugal force):

$$\delta u_{QT} \;=\; \frac{e}{2m}\delta l \tag{3.21}$$

Algebraic field theory predicts an additional term resulting from the change in the spin K-algebra. From the point of view of current quantum theory, this would look like a change in the Landé factor as a function of the orbit radius:

$$\delta u_{AF} \;\approx\; \frac{e}{2m}\left(\delta l + g_L n_{exp} |\delta r|^2 s\right) \tag{3.22}$$

4. ALGEBRAIC IDENTITIES

In the first order the vacuum does not interact with other states. From the algebraic point of view this can only be a neutral element. For this there are two possibilities, the algebraic 'one' or the algebraic 'zero'. The latter can be excluded for the vacuum, since the zero-state extinguishes every other state. Within quantum theory, the zero-state is hardly mentioned, since trivially the probability there is exactly zero. The 'nothing' does not exist. In an algebraic field theory of gravity, this is generally no longer excluded.

If no further additional assumptions are made, besides the 'global' zero, additional 'local' zero-states can theoretically exist with non-vanishing probability. At first this seems to be a physical abstrusity. It would mean that space-time could be destroyed. In quantum theory, particles can be created from vacuum and destroyed again, and thus this property would be an understandable consequence of quantum gravity being transferred to space-time itself. The continuing expansion of the universe is a proof that space and time will be continuously created. What can be created should therefore also be able to be destroyed. This also does not contradict the special as well as the general relativity theory, because both theories presuppose classically a stable and coherent space-time. The tunnel effect in the physics of elementary particles then finds an interpretation in the IT picture. If a small space-time range is erased by means of a zero-state field, then this could force the particle to jump because of the preservation of information. A universe with unstable space-time is automatically no longer deterministic, since all trajectories of the particles are no longer complete.

ALGEBRAIC ZERO-STATE

All K-algebras share the 'global' zero according to the definition (3), which is often identified with the zero of the field (in the strict sense both are different because of the different structure).

$$\forall \tilde{q},\, \mathbb{A}: \;\; \tilde{q} \;\otimes_{\mathbb{A}} \tilde{n} = \;\tilde{n} \;\otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = \tilde{n} := 0 \tag{4.1}$$

The 'global' zero is theoretically the only shared state to all K-algebras. In the algebraic interpretation the physical equivalent is the beginning of the universe, because only in the beginning everything was equal and common. The probability here is exactly equal to zero according to definition and thus the vacuum cannot acquire this global zero-state and must always have a different state.

Nevertheless, the global zero is suitable for algebraic field theory as the origin of an excellent reference system, the view from the same beginning, so to speak.

The algebraic constraints for other zeros are:

$$\exists\, \tilde{n} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(q \otimes E)\,n = n \;\vee\; \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes q)\,n = n \tag{4.2}$$

If the rectangular matrix $\boldsymbol{A}$, which represents the K-algebra, has full rank then these systems of equations are only solvable for certain q ('local' zero-states).

It is obvious to link local zero-states with black holes, due to similar behaviour. The singularity of a black hole "eats up" every other state, just like the zero-state. The difference is in the mightiness. But if a black hole cannot collapse to a point and only to a minimal mass shell, then the forces in the centre of the mass shell would cancel each other out exactly and become zero - a local zero-state?

ALGEBRAIC VACUUM-STATE

The constraints of existence for a right-handed 'one' for any K-algebra are as follows:

$$\forall \tilde{q} \neq 0 \wedge \tilde{o}_{\mathbb{A}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \tilde{q} \qquad \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \beta^T o_{\mathbb{A}} \tag{4.3}$$

This problem can be reformatted to an overdetermined matrix vector standard problem in the RKS notation using the Neudecker function and a Kronecker/shift operator identity (A.3/F.5). The advantage of the RKS notation over an index notation emerges here.

The following RKS formula now outputs any 'one' for all K-algebras, if the algebra follows certain constraints (third line, right side):

$$\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)q = q \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o) = E \;\Rightarrow$$

$$vec\big(\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)\big) = \boldsymbol{A}^{BR} o = vec(E) \;\Rightarrow$$

$$o_{\mathbb{A}} = \boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{BR}\boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) = vec(E) \tag{4.4}$$

The right-handed one is unique and minimal, if there is no kernel solution for $\boldsymbol{A}^{BR}$ i.e. $\boldsymbol{A}^{BR}$ has full rank. The solution for the left-handed one is structurally the same, here the algebra must be replaced by the bilaterally shifted one ($\boldsymbol{A}^{BRI} \rightarrow \boldsymbol{A}^{BBRI} = \boldsymbol{A}^{RI}$).

If right- and left-handed 'one' both exist together, then they are necessarily identical. The quantum mechanical vacuum state with the usual symbol $|0\rangle$ is here identified with a domain dependent algebraic field $o_{\mathbb{A}}(q)$, since the 'one' is neutral to any other state. Three different handed vacuum states are possible locally (right-, left- or both-handed) but also local regions in the algebraic field that do not have a vacuum state are allowed.

This opens up a new understanding of particles and fields. Fields must exist in a vacuum and therefore have a local vacuum state. Particles are then enclosed regions without a vacuum state. The changing boundaries between regions without and with vacuum state can then represent higher particle states in this new algebraic image. The following section shows that the existence of a conjugation (dual space) depends on the existence of the vacuum state.

5. ALGEBRAIC DUAL SPACE

From the definition (2.13) the following properties already follow for the conjugation:

$$K_{\mathbb{A}}{}^{T} = K_{\mathbb{A}} \quad \text{und} \quad K_{\mathbb{A}}^{2} = E \tag{5.1}$$

To determine the conjugation operator for any K-algebra, the scalar product of the dual base is formed with the original base. This results in the algebraic one, if the K-algebra has a one (4.4) otherwise no conjugation is possible.

$$\beta^{I}\,\beta = \tilde{o}_{\mathbb{A}} \tag{5.2}$$

This has its physical equivalent, because particles and anti-particles can only be generated from a vacuum (=algebraic one) if a vacuum state exists in the algebraic primeval field. From this follows then:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}(\beta)\,\tilde{o}_{\mathbb{A}} = \beta^{T} K_{\mathbb{A}}\,\beta = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}(\beta \otimes_{\mathbb{A}} \beta) = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}\boldsymbol{A}\,\beta \tag{5.3}$$

Using Kronecker/shift operator Symmetries (A.2/A.3), the following results are obtained:

$$K_{\mathbb{A}} = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\,\boldsymbol{A}^{IRR}(o_{\mathbb{A}} \otimes E) \iff \boldsymbol{A}^{IT}\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.4}$$

The missing metric coefficient can be determined by the conjugation involution (5.1).

This property needs the following relationship for the K-algebra:

$$\boldsymbol{A}^{I} = \boldsymbol{A}^{T}\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \tag{5.5}$$

Thus, the metric coefficient can be determined with the help of the trace of a matrix:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2} = \frac{trace(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})}{trace(E)} \tag{5.6}$$

The conjugation operator is then given under the conditions (4.4) of the existence of a one and under the following additional constraints:

$$K_{\mathbb{A}} = \boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}} \otimes E) \iff \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\, vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.7}$$

6. ALGEBRAIC DECAY OF THE VACUUM

For a two-handed algebraic decay of the vacuum state shall apply:

$$\tilde{q}^{I} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q}^{I} \tag{6.1}$$

Writing this out requires the following relationship to be valid to fulfil it:

$$\forall q \neq 0: \quad \boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}} \otimes E - E \otimes K_{\mathbb{A}})(q \otimes q) = 0 \tag{6.2}$$

A solution is given if the K-algebra is subject to the following constraint:

$$\forall q, \boldsymbol{X} \neq 0: \quad \boldsymbol{X}^{T}(q \otimes q) = 0 \iff \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^{B} \tag{6.3}$$

It follows with that:

$$(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\,\boldsymbol{A} = ((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.4}$$

Off (6.1) then applies to the searched operator G:

$$\boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}} \otimes E)(q \otimes q) = (q^{T}\,G\,q)\;o_{\mathbb{A}} = vec(G)^{T}(q \otimes q)\,o_{\mathbb{A}} \tag{6.5}$$

A structural comparison between the right and the left side then shows using Kronecker/shift operator symmetries (A.2/A.3) that the following identities must be valid:

$$(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A}\, o_{\mathbb{A}}{}^{IT} = vec(G) = vec(\boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}{}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}})) \tag{6.6}$$

Thus, the K-algebra also determines the metric for the vacuum state, if a ‘one’ and a conjugation are present locally and under the following additional conditions:

$$G_{Vacuum} = \boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}{}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}}) \Leftrightarrow (K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A} = ((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.7}$$

Theoretically, one of the two sides can be dropped from the conditions in (6.1). This would then generally lead to two different handed metric operators.

7. ALGEBRAIC ANALYSIS

In the introduction it was already mentioned, that due to common properties the mathematical structures of quantum theory and general relativity can be derived from algebraic constraints of the binary operation. The complex analysis with the Cauchy-Riemannian constraints shall serve as a model here.

Analogous to the complex procedure, the following pseudo-linear functional shall apply:

$$\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f] \tag{7.1}$$

For the complex numbers, the complex derivation $\tilde{p}$ results as a special case from the infinitesimal difference of this functional in the representation by $\tilde{q}$.

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{C}}(q)[f] = d\tilde{q} \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{p}[f] = d\tilde{f}(\tilde{q}) \tag{7.2}$$

This relation is only valid for constant K-algebras and if the derivative itself is extreme ($d\tilde{p}[f] = 0$). For an algebraic field, the complete total differential must apply over the entire product including the algebra:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,(\,\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f]\,) \tag{7.3}$$

Furthermore, for the searched, pseudo-linear operators it is required that the total infinitesimal difference is independent of the order of the operators in the functional:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(p,q)[f] \tag{7.4}$$

This is justified by the linearity requirements, because for comparison this property also applies to the commutator of the standard derivation (and later also to the quantum mechanical commutator).

$$\left[\partial_j, q^k\right] = \delta_j^k \quad \Rightarrow \quad d\left[\partial_j, q^k\right] = 0 \tag{7.5}$$

A quantum mechanical matrix view according to Werner Heisenberg now helps to find a solution in closed form for this algebraic problem. Two operators P, Q are interpreted as a quadratic matrix with the following properties:

$$\beta^T P\, f \coloneqq \tilde{p}[f] \quad \text{and} \quad Q \coloneqq \boldsymbol{A}^T(q \otimes E) \tag{7.6}$$

P plays the role of the energy impulse tensor (here the to be determined algebraic differential operator) and Q the role of the algebraic local operator.

With the help of the operator (2.12), the problem (7.3) can be reformulated into a form, free of the generating base as follows:

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) = \boldsymbol{\nabla}f \text{ by } \boldsymbol{\nabla}\beta = 0 \tag{7.7}$$

The left side then results in the following relation, where the index c at an operator means that this is to be treated as a constant, with respect to the action of the first differential operator to the left of it.

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf + \boldsymbol{\nabla}Q_c(Pf) \tag{7.8}$$

From the validity of (7.4) follows simultaneously:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}(P(Q_c f)) \tag{7.9}$$

If equation (7.9) is subtracted from (7.8), the commutator brackets are used:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q_c, P]f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 0 \tag{7.10}$$

If you add both equations (7.9) and (7.8), using the anti-commutator brackets, the following is shown:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 2\,\boldsymbol{\nabla}f \tag{7.11}$$

Since the operator P must be pseudo-linear as a differential operator, this only works if the following additional condition applies, with a rectangular matrix operator $\boldsymbol{J}$, which has yet to be determined:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) = (2\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\nabla}(Q))Pf \tag{7.12}$$

This reduces the problem to a known, overdetermined and pseudo-linear system:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{J}\,P\,f \tag{7.13}$$

The solution is then subject to generalized Cauchy-Riemann constraints:

$$P = \boldsymbol{J}^I\,\boldsymbol{\nabla} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{J}\boldsymbol{J}^I\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}f \tag{7.14}$$

To determine the operator $\boldsymbol{J}$, first consider the following derivation of the general commutator between Q and P:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q, P]f) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf - \boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) + \boldsymbol{\nabla}([Q_c, P]f) \tag{7.15}$$

This equation is reduced because of (7.10) to the following relation:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q, P]f) = -\boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) \tag{7.16}$$

For this to be fulfilled, the following must apply to the commutator:

$$[P, Q] = P(Q) \tag{7.17}$$

By (7.5):

$$P(Q) = E \tag{7.18}$$

At the same time, the searched for operator $\boldsymbol{J}$ is already fixed, provided that it has full rank:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla}Q \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{\nabla}Q)^I\,\boldsymbol{\nabla}Q = E \tag{7.19}$$

The algebraic-affine derivative operator can thus be specified completely. It is now subject to three algebraic constraints for existence:

$$P = (\boldsymbol{\nabla} Q)^I \, \boldsymbol{\nabla} \qquad \Leftrightarrow \big((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\big)\, \boldsymbol{\nabla} f = 0 \tag{7.20}$$

$$\wedge \quad \boldsymbol{\nabla}\,(Q_c(\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} f)) = 0 \quad \wedge \quad (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0$$

Due to the symmetries of the shift operators, a total of six different variants are possible for the P operator. These can be grouped into three related families $\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^B\}, \{\boldsymbol{A}^R,\ \boldsymbol{A}^{RB}\}, \{\boldsymbol{A}^{RR}, \boldsymbol{A}^{BR}\}$ according to handiness.

The first overdetermined constraints in the system (7.20) are the generalization of the Cauchy-Riemann equations, because they form a Dirac-Maxwell system in the limit value of vanishing gravity ($\boldsymbol{\Gamma} = 0$ and thus $\partial \boldsymbol{A} = 0$). Therefore, algebraic field theory is structurally transferred into quantum theory when gravity disappears. This means that algebraic field theory introduces gravity into quantum theory at the expense of an additional algebraic field and the associated change in quantum algebras ($\partial \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Gamma}$). However, in algebraic field theory there are six different versions due to the symmetry of the shift operators (7.21, the left version as an example), i.e. the Dirac equation has five more siblings with respective additional constraints. Their physical significance must be left open at this early stage of theory.

$$P_0 = \boldsymbol{A}^{RI}(\partial \otimes E) \; = \; \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_{\mathrm{j}} \otimes E\big)\, \partial_{\mathrm{j}} \tag{7.21}$$

$$\Leftrightarrow \; (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

If you insert the rectangular matrix into the constraint of equation (7.21), which represents the complex numbers (see section Introduction 1.2, see also A.5), you get the classical Cauchy-Riemann differential equations. Equation (7.21) can now also be applied to all other quantum algebras, e.g. the K-algebra of Gell-Mann's λ matrices. These are now also subject to additional conditions (A.8). The physical meaning of these new constraints for the symmetries of the strong force is currently also open.

Constraint (7.21, line 2) is also applicable for K-algebras without ‘one’, e.g. the cross product between vectors (see A.6, generalized Cauchy-Riemann equations for the cross product).

The second additional constraint in (7.20) is a mixed differential equation system of the second order, similar to the structures of the vacuum equation of general relativity. This additionally restricts the solution space of the first constraint. A more detailed analysis is still pending.

So far, the operator P is not yet a physical energy impulse operator, but only a purely generic algebraic operator. Equation (7.18) has the degree of freedom of free choice of a constant for ensuring linearity. In order to move now to a specific algebraic field theory as variant, the constant can be replaced by the quantum mechanical counterpart by means of the Minkowski metric G_0.

$$\big[\partial_{\mathrm{j}}, q^k\big] = \quad \mathrm{i}\, \hbar\, \mathrm{G}_{0}{}_j^k \quad \text{with} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

With this the defining equation (7.18) becomes $P_{Physics}$ for the physical operator:

$$P_{Physics}(Q) = \mathrm{i}\,\hbar G_0 \;\Rightarrow\; P_{Physics} = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, (\boldsymbol{\nabla} Q)^{I}\, \boldsymbol{\nabla} \tag{7.23}$$

This describes an "algebraic quantum computer" as a variant.

So where does the fundamental equation (7.22) for quantum theory come from?

This may be related to the type of expansion of the vacuum and the associated position of the observer. Suppose the universe is closed in itself in the form of a corresponding S^3-sphere, which itself is located in a four-dimensional Euclidean space plus time. The 'surface' (hyperface) of this S^3-sphere is the metric, three-dimensional space and time forms a common vector from the origin to the surface of the S^3-sphere. If now this surface expands outward with the limit speed (at the speed of light), all observers within this expanding surface would not notice the additional dimension at all on a large scale, since interactions can only work perpendicular to the direction of expansion, i.e. only within the S^3 surface. The observers on the surface then do not discover the Euclidean metric as a conservation quantity, but the Minkowski metric and from its divisional algebra the `i` of the complex numbers is also needed. From the point of view of the origin, the universe would satisfy the following Euclidean relationship with an additional fourth spatial dimension q^4.

$$(\mathrm{ct})^2 = (\mathrm{q}^1)^2 + (\mathrm{q}^2)^2 + (\mathrm{q}^3)^2 + (\mathrm{q}^4)^2 \tag{7.24}$$

From the view of the observers, the fourth dimension of space will be noticeable as "dents" $(\delta\mathrm{q}^4)^2$ in their space-time, caused by local material distortions into the fourth dimension of space and thus for all observers in the spherical surface always a conservation quantity. From that follows the Minkowski metric, if one now includes time in the metric:

$$(\delta\mathrm{ct})^2 - (\delta\mathrm{q}^1)^2 - (\delta\mathrm{q}^2)^2 - (\delta\mathrm{q}^3)^2 = (\delta\mathrm{q}^4)^2 = \mathrm{G}_{0_{\mathrm{jk}}}\mathrm{x}^{\mathrm{j}}\mathrm{x}^{\mathrm{k}} \text{ by } x = (\delta\mathrm{ct}, \delta q) \tag{7.25}$$

To sum up, the Minkowski metric might originate from the fact that we ride like surfers on a wave which propagates at the speed of light in a higher dimensional Euclidean space (in the IT picture an algebraic wave at maximum processor speed in the memory). The physical *P*-operator (7.23) then only applies specifically to the wave but no longer in general!

Dirac-Operator in comparison to the physical *P*-Operator at vanishing gravity (7.21):

$$P_{Dirac} = \mathrm{i}\,\hbar\; \gamma^{\mathrm{j}}\, \partial_{\mathrm{j}} \quad \leftrightarrow \quad P_{Physics}\,(\boldsymbol{\Gamma} = 0) = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_{\mathrm{j}} \otimes E\big)\, \partial_{\mathrm{j}} \tag{7.26}$$

This requires the validity of the following relationship:

$$\gamma^{\mathrm{j}} = G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_{\mathrm{j}} \otimes E\big) \tag{7.27}$$

By means of reformatting and application of Kronecker/shift operator symmetries (A.2/A.3), the related K-algebra for the Dirac's gamma matrices (A.7) follow.

$$\boldsymbol{A}_{Dirac} = \big(\, \big(e_{\mathrm{j}} \otimes E\big)\, G_0\, \gamma^{\mathrm{j}}\, \big)^{BRITRR} \tag{7.28}$$

Now, one faces a mathematical issue, because the gamma matrices only form a complete generating system with 16 independent 4x4 matrices. The Dirac equation itself is only developed over a four-dimensional subspace of the first four gamma matrices. In four space-time dimensions the K-algebra (A.7), recalculated by means of (7.28), has no algebraic unity and thus no vacuum state.

This corresponds to the algebraic picture, because the Dirac equation describes an elementary particle without external field, which in the algebraic view can no longer decay, because a vacuum state would be necessary for this. The application of the relation (6.7) for the metric is therefore no longer permitted, since it is only valid for an existing vacuum state. For the metric of a particle induced by the algebra, the Dirac condition (1.5) is still available, because this does not require a vacuum state. With (7.27) the following relation can be established for the 'inner' metric of a particle without a vacuum state:

$$G_{Particle} = ½\ Trace(\{G_0\boldsymbol{A}^{RI}(e_j \otimes E), G_0\boldsymbol{A}^{RI}(e_k \otimes E)\})\,(e_j \otimes e_k^T) \tag{7.29}$$

Inside a particle, there is an algebraic as well as a metric field in the same way as outside. Unlike on the outside there is no vacuum state inside a particle. Only the boundary of the particle is measurable, because without a vacuum state there is no zero-point reference as a prerequisite for a comparable measurement.

8. VACUUM EQUATION

All means are now available for calculating the energy/mass k of a physical vacuum solution. The following eigenvalue vacuum equation applies to $P_{Physics}$:

$$\mathrm{i}\, G_0(\boldsymbol{\nabla} Q_{\mathbb{A}})^I\, \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = \mathrm{k}\, o_{\mathbb{A}} \tag{8.1}$$

In order to solve that, all permitted algebraic fields must be determined. First, all previously determined constraints for the algebraic field must be collected. A two-handed vacuum must therefore fulfil all following eight systems (3.16, 4.4[2], 5.7, 6.7, 7.20[3]). All occurring factors can be expressed by the K-algebra. Topological reasons[16] do limit non-trivial algebraic solutions to the finite degrees of freedom N=2,4,8 in general for these eight systems, since the K-algebras must be real divisional algebras according to the conditions for vacuum. Since only a physical solution is sought, only N=4 applies.

Of the eight systems, four are differential equations:

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right) = -\boldsymbol{A}\,((\partial \otimes G)^T + (\partial \otimes G)^{RT} - (\partial \otimes G)^{RRT})(E \otimes G^I) \\ \left((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\right) \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, \mathrm{i}G_0(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla}\} o_{\mathbb{A}}) = (\boldsymbol{\nabla}(Q)(\mathrm{i}\, G_0 - 2E)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} \\ (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0\end{gathered} \tag{8.2}$$

The remaining four systems further restrict the initial conditions and solution space:

$$\begin{gathered}(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\,\boldsymbol{A} = \left((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A}\right)^B \\ \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(K_{\mathbb{A}}) \\ \boldsymbol{A}^{BR}\boldsymbol{A}^{BRT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(E) \\ \boldsymbol{A}^R\boldsymbol{A}^{RT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(E)\end{gathered} \tag{8.3}$$

A general solution of the complex system (8.2 & 8.3) is currently in work and therefore still open. The generalizations of the Cauchy integral formulas to arbitrary K-algebras are helpful for this purpose. With the new operators presented here, this is now possible, starting from the definition of an integral via the complex numbers, and applies analogously to algebraic field theory:

$$\int d\,(\tilde{q}\ \otimes_{\mathbb{A}}\ \tilde{p}[f])\ =\ \tilde{f}(\tilde{q}) \tag{8.4}$$

A discussion of various solution strategies or the consequent extension to integrals would clearly exceed the scope of this work, intended as an introduction. The primary goals are the demonstration of the potential of an algebraic field theory and that with the few required axioms, the structures of quantum mechanics and at least near structures of general relativity can be derived from one principle. For the first time a quantum theory of the vacuum itself is established and at the same time the experimental possibility of falsifying algebraic fields is demonstrated.

The author assumes from first calculations, that the operator $P_{Physics}$ is bounded downward and upward. That would mean for the vacuum a minimum mass in a maximum possible, finite expansion or vice versa only a maximum mass is possible in the minimum expansion. This can be taken rudimentarily from the structures. Because of the fourth line in (8.2) $\boldsymbol{\nabla} Q$ can never disappear. Then the term in (8.1) must be $\boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = 0$. This relationship follows the definition of the local frame (2.12) and leads to contradictions in (8.2). The first and third lines together seem to require a finite $\boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} \neq 0$. An exact mathematical proof of this assumption or its refutation is pending.

Ω

APPENDIX

***A.1)* Cartesian product of K-algebras**

The numbers for the domain $\mathbb{K}$ should now also follow the structure of (2.3) with their own generators. Thus, they are no longer necessarily a field, but at least they should have the real numbers themselves as inner subspace. Be now $\beta_{\mathbb{A}}$, $\beta_{\mathbb{K}}$ the respective bases of the generators for the K-algebras $\mathbb{A}$ and $\mathbb{K}$.

The cartesian product K-Algebra $\mathbb{A}'$, in respect to the base $\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}$ is:

$$(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{A}'} (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) = \boldsymbol{A}' (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})$$

By (2.3) the two bases must commutate by definition. In addition, an operator '*B*' is required, to swap the factors in the Kronecker product. '*B*' is a generalization of the definition (2.6) for two different dimensional bases.

$$\beta_{\mathbb{A}} \otimes (\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} = \beta_{\mathbb{A}} \otimes \left(B\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\right) \otimes \beta_{\mathbb{K}}$$

$$B \coloneqq \Sigma_j \left(e_j(Dim\ \beta_{\mathbb{K}}) \otimes E(Dim\ \beta_{\mathbb{A}}) \otimes e_j^T(Dim\ \beta_{\mathbb{K}})\right)$$

With the help of standard Kronecker identities this results:

$$\begin{aligned}(E \otimes B)\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} &= (E \otimes B \otimes E)\,(\boldsymbol{A}\beta_{\mathbb{A}} \otimes \boldsymbol{K}\beta_{\mathbb{K}}) \\ &= (E \otimes B \otimes E)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\end{aligned}$$

In summary, any combined complex structure (e.g. bi-quaternions) can be mapped to a higher dimensional K-algebra with the real numbers as field. The corresponding K-algebra is then given:

$$\boldsymbol{A}' = \left(E_{Dim(\beta_{\mathbb{A}})} \otimes B_{Dim(\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}})} \otimes E_{Dim(\beta_{\mathbb{K}})}\right)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})$$

***A.2)* Shift Operator relations für B, I, R, T**

$$BRB = RR \qquad BRR = RB \qquad RRB = BR \qquad RBR = B$$

$$BB = II = RRR = TT = E$$

$$[T, B] = [T, I] = [T, R] = [B, I] = 0$$

$[B, R]$ und $[I, R]$ do not commute generally!

***A.3)* Kronecker Shift Operator Identities**

The listed identities can be derived from the shift operator definitions in combination with Kronecker product identities.

F.1 $\quad (\partial \otimes E)(\boldsymbol{A}^T(q \otimes E)) = \boldsymbol{A}^{BR} \Leftrightarrow (\partial \otimes E)\boldsymbol{A}^T = 0$

F.2 $\quad (q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^{BR} = \boldsymbol{A}^T(q \otimes E)$

F.3 $\quad \beta^T\boldsymbol{A}^T(p \otimes q) = p^T\boldsymbol{A}^{RT}(q \otimes \beta) = q^T\boldsymbol{A}^{RRT}(\beta \otimes p) = \beta^T\boldsymbol{A}^{BT}(q \otimes p) = q^T\boldsymbol{A}^{BRT}(p \otimes \beta) = p^T\boldsymbol{A}^{RBT}(\beta \otimes q)$

F.4 $\quad p^T\boldsymbol{A}^{BRT}(Q \otimes q)q = q^T\boldsymbol{A}^T(Q \otimes p)\,q$

F.5 $\quad vec(\boldsymbol{A}^T\,(q \otimes Q)) = (Q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^R q$

F.6 $\quad \boldsymbol{A}^{RRT}(E \otimes q) = \Sigma_j[\boldsymbol{A}]_j\, q_j$ with $[\boldsymbol{A}]_j \coloneqq \boldsymbol{A}^T\left(e_j \otimes E\right)$ (the j-th sub matrix from top)

F.7 $\quad (\boldsymbol{A}^T(p \otimes q))_j = p^T[\boldsymbol{A}^{RR}]_j\, q$

F.8 $\quad (E \otimes \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \otimes E)\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ ist associative

F.9 $\quad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^B + \boldsymbol{A}^R - \boldsymbol{A}^{BR} + \boldsymbol{A}^{RR} - \boldsymbol{A}^{RB}) = \Sigma_{jkl}\left(\mathrm{A}_{jkl}\varepsilon_{jkl}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor)

***A.4)* Local Frame**

$$(G\nabla) \otimes \beta = e_j \otimes (\mathrm{G}^{jl}\nabla_l\, e_k)\beta^k = \Gamma_l^{jk}\beta^l(e_j \otimes e_k) = \Gamma_l^{jk}(e_j \otimes e_k \otimes e^l)e_l\beta^l) = \boldsymbol{\Gamma}\,\beta$$

A.5) *Standard complex numbers* $\mathbb{C}$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_2^{11} \\ a_1^{12} & a_2^{12} \\ a_1^{21} & a_2^{21} \\ a_1^{22} & a_2^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^R = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_1^{21} \\ a_2^{11} & a_2^{21} \\ a_1^{12} & a_1^{22} \\ a_2^{12} & a_2^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{RI} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathbb{C}} := \boldsymbol{A}^{RI}(\partial \otimes E) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 \\ \partial_2 f_2 - \partial_1 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

$$K_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.6) *Vector cross product*

K-Algebra $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor) (Symbol $\times$)

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^T{:}\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{RI} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{BRI}$$

Here two-handed P operators exist:

$$\Rightarrow \quad P_r{:}\times = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_l{:}\times = -P_r{:}\times$$

The generalized Cauchy-Riemann constraints are identical for both operators:

$$\Leftrightarrow CR_r = CR_l = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 = \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 = \partial_1 f_3 + \partial_3 f_1 = \partial_2 f_3 + \partial_3 f_2 = 0 \end{pmatrix} = (\partial \otimes E \ + E \otimes \partial) f = 0$$

The algebraic one does not exist, so conjugation is not possible.

A.7) *Dirac K-Algebra*

The following representation of Dirac's gamma matrices is used:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

The K-Algebra $\boldsymbol{D}_4$ results then by (7.24):

$$\boldsymbol{D}_4^T = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

For the associated Dirac Operator,

$$P_0 = \mathrm{i}\,\gamma^{\mathrm{k}}\partial_{\mathrm{k}}$$

following Cauchy Riemann constraints result, where the listed vector is to be set equal to the corresponding zero vector:

$$\begin{pmatrix}
3\,\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
3\,\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\,\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_3 \\
-\,\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_4 \\
3\,\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 - \partial_1\varphi_4 \\
-\,\partial_4\varphi_1 + 3\,\partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
-\,\partial_1\varphi_2 + 3\,\partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\,\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 + (3\,\partial_2 + \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\mathrm{i}(\partial_2\varphi_1 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 - \partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_4\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + \partial_1\varphi_3) \\
\mathrm{i}(\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 - \partial_4\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_1\varphi_1 + \partial_4\varphi_3 + (\partial_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4) \\
3\,\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
\partial_2\varphi_1 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4 \\
-\,\partial_1\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + 3\,\partial_4\varphi_4
\end{pmatrix} = 0$$

A.8) *SU (3) Gell-Mann λ-Matrices*

The structural constants of the eight-dimensional K-algebra of the λ matrices result from the relationship:

$$A_l^{jk} = \frac{1}{4\mathrm{i}}Trace([\lambda_{\mathrm{j}}, \lambda_{\mathrm{k}}]\,\lambda_{\mathrm{l}})$$

Here then by Eq. (7.21) two-handed P operators with the property exist: $P_l\!:\lambda \;\; = -P_r\!:\lambda$

$$P_r\!:\lambda =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{\partial_3}{3} & -\frac{\partial_2}{3} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_3}{3} & 0 & \frac{\partial_1}{3} & \frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 \\
\frac{\partial_2}{3} & -\frac{\partial_1}{3} & 0 & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_6}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 & \frac{\partial_3}{6}+\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\partial_1}{6} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} \\
-\frac{\partial_5}{6} & \frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & 0 & \frac{\partial_8}{2\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{6} & -\frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} & 0
\end{pmatrix}$$

The generalized Cauchy-Riemann equations here are identical for both handed operators where the listed vector is to be set to zero:

$$
\begin{pmatrix}
\partial_1\varphi_1 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_2}{3}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_3}{3}-\frac{\partial_6\varphi_4}{6}-\frac{\partial_7\varphi_5}{6}+\frac{\partial_4\varphi_6}{6}+\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{11\,\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_1\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_2}{3}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_2\varphi_2 \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{2\,\partial_2\varphi_3}{3}+\frac{\partial_7\varphi_4}{6}-\frac{\partial_6\varphi_5}{6}+\frac{\partial_5\varphi_6}{6}-\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{11\,\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_2\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_3}{3}+\frac{\partial_6\varphi_4}{6}+\frac{\partial_7\varphi_5}{6}-\frac{\partial_4\varphi_6}{6}-\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{\partial_2\varphi_3}{3}-\frac{\partial_7\varphi_4}{6}+\frac{\partial_6\varphi_5}{6}-\frac{\partial_5\varphi_6}{6}+\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
\partial_3\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_3\varphi_8 \\
\frac{11\,\partial_4\varphi_1}{12}-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_4\varphi_4 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{2\,\partial_4\varphi_5}{3}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_6}{12}-\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}-\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1+\frac{11\,\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{2\,\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{\partial_4\varphi_5}{3}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_5\varphi_5 \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}-\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}-\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1+\frac{11\,\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_6\varphi_4}{12}-\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}-\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\partial_6\varphi_6 \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{2\,\partial_6\varphi_7}{3} \\
-\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{3\,\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_7\varphi_1}{12}-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}-\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}-\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{2\,\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{\partial_6\varphi_7}{3} \\
\partial_7\varphi_7 \\
-\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{3\,\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_1 \\
\partial_8\varphi_2 \\
\partial_8\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_8
\end{pmatrix} = 0
$$

References

[1] Rechnender Raum, K.Zuse, *Elektronische Datenverarbeitung*, Bd. 8, pp 336, 1967

[2] Geometrie und Erfahrung, A.Einstein, *Preussische Akadamie der Wissenschaften,* Berlin*,* 1921

[3] Conference of Physics of Computation, USA Boston 1981 May 6-8

[4] The Theory of Positrons, R.Feynman, *Physical Review* 76, pp 749, 1949

[5] Logik der Forschung, *Buchreihe Wiener Kreis*, K.Popper, 1934

[6] The Quantum Theory of the Electron, P.Dirac, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1928

[7] Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, W.Pauli, *Zeitschrift für Physik*, Bd. 43, S. 601, 1927

[8] Symmetries of baryons and mesons, M.Gell-Mann, *Physical Review 125 (3) 1067,* 1962

[9] A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, J.C. Maxwell, *Royal Society Transactions*, 155, pp 459–512, 1865

[10] Die funktionentheoretischen Beziehungen der Maxwell Aethergleichungen, Dissertation, K.Lánczos, Technische Hochschule Budapest, 1919

[11] Über den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Riemannschen und Diracschen Differentialgleichungen, D.Iwanenko und K.Solsky, *K. Z. Physik 63*: 129, Universität Leningrad und Charkow, 1930

[12] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, A.Einstein, *Annalen der Physik*, 4.Folge Bd. 44, pp50, 1916

[13] Sur la dynamique de l'électron, H.Poincaré, Henri, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 21, S. 129–176,1906

[14] On the reciprocal of the general algebraic matrix, E.H. Moore, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26, 395-395, 1920 / A generalized inverse for matrices, R.Penrose, *Proceedings of the Cambridge Philosophical society*, 51, 406-413, 1955

[15] Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products, H.Neudecker, *Journal American Statistics Assoc*., Volume 64 pp 953-963, 1969

[16] Some consequences of a theorem of Bott, J.Milnor, *Annals of Mathematics*, Band 68, S. 444–449, 1958

ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

EINE MATHEMATISCHE KONSTRUKTION DES VAKUUMS

ROBERT HANS IHDE†

MÜNCHEN (DEUTSCHLAND), AUGUST 2018

ZUSAMMENFASSUNG

Alle Algebren der Quantentheorie sind Algebren über einen Körper oder kurz K-Algebren einer binären Operation, welche als konstante Invarianten über der Poincaré Gruppe definiert sind. Die in der klassischen Geodäten-Gleichung vorkommenden Christoffelsymbole können gleichfalls als Darstellung einer K-Algebra aufgefasst werden. Im Unterschied zu den konstanten Algebren der Quantentheorie ist die K-Algebra der Christoffelsymbole eine Funktion der Raum-Zeit. Eine mathematische, konforme Vereinigung von Geometrie und Algebra erfordert für die Quanten Algebren eine entsprechende Abhängigkeit von der Raum-Zeit. Unter der Annahme der Existenz eines algebraischen Feldes, welches auf einer sich ändernden, binären Operation basiert und mit der Domäne rückgekoppelt ist, wird eine quantenmechanische Vakuumgleichung für die Gravitation aufgestellt. Die Vakuumgleichung folgt strukturell einem verallgemeinerten, pseudo-linearen Dirac-Maxwell System mit zusätzlichen, algebraischen Zwangsbedingungen. Eine physikalische Existenz des algebraischen Feldes, als Gegenstück zum geometrischen Feld der Gravitation, kann durch das Experiment prinzipiell falsifiziert werden. Der Anteil des Spins am magnetischen Moment eines Teilchens wäre dann abhängig von dessen Beschleunigung, da das algebraische Feld die Spin-Algebra entsprechend beeinflussen sollte.

1. EINLEITUNG

"Wie ist es möglich, daß die Mathematik,
die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens ist,
auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt?"

Auf diese erkenntnistheoretische Frage von Albert Einstein[1] hatte Konrad Zuse[2] eine einfache informationstheoretische These (IT) als Antwort. Die Natur könnte auf kleinster Ebene bereits selbst wie ein algebraischer Rechner funktionieren. Der Ansatz von Zuse eines klassischen Computers berücksichtigt allerdings keine quantenmechanischen Prinzipien[3] und auch die Verbindung zur Gravitation blieb offen. Die Feynman/Stückelberg Y-Graphen[4] der Wechselwirkung von zwei Elementarteilchen, z.B. die Annihilation eines Elektrons mit einem Positron zu einem Photon, wird im IT Bilde als Fingerzeig der Natur auf eine tiefer liegende, binäre Operation verstanden, welche dann auf der Planck Länge ($\approx 10^{-33}$ cm) stattfindet. Bei einer heute verfügbaren Energie von circa 14 Tev, wäre jede heute auflösbare Wechselwirkung dann immer noch ein Paket aus mehreren Billiarden solcher kleinsten Operationen.

Die Welt eines modernen, fast schon Natur getreuen, Computer Spiels auf dem Monitor und was sich dabei parallel auf dem Prozessor und der Hauptspeicher Ebene tut, scheinen zwei komplett getrennte Welten zu sein, doch eine bedingt die andere. Eine ähnliche Situation tritt auf, wenn man die aktuelle Elementarteilchen Physik mit einer spekulativen IT Physik auf der Planck Ebene in Verbindung setzen will. Deswegen werden gleichzeitig mit der Mathematik auch Analogien und neue Sichtweisen vermittelt, um den Einstieg in die algebraische Denkweise im Bezug zur Physik zu erleichtern. Dieses ist nicht unbedingt erforderlich, war aber als Leitbild zur Entwicklung dieser Theorie hilfreich. Letztlich ist aber nur die hier vorgebrachte Mathematik von Bedeutung und das Experiment ist entscheidend, unabhängig vom konkreten Bild.

Beruhen die Begriffe „Realität" und „Virtualität" auf den gleichen mathematischen Grundprinzipien und ist das experimentell beweisbar?

Nach Karl Popper[5] kann eine physikalische Theorie grundsätzlich nicht bewiesen, sondern nur falsifiziert werden. Diese Arbeit soll daher den durch Konrad Zuse inspirierten Weg fortsetzen, hin zu einer falsifizierbaren, algebraischen Feldtheorie.

---

† roberthans.ihde@gmail.com, Entwurf, Änderungen u. Fehlerkorrekturen vorbehalten

ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

Der hier vorgestellte Ansatz liegt abseits aller derzeitigen Hauptrichtungen der Physik. Diese Theorie soll aber nicht im Gegensatz dazu verstanden werden, sondern als Restriktion aus algebraischer Sicht, ähnlich wie höhere Programmiersprachen letztlich in die Maschinensprache münden.

Zur Realisierung dieser Theorie wird eine axiomatische Herangehensweise von unten nach oben gewählt. Es wird nur eine verallgemeinerte binäre Operation vorausgesetzt, welche durch beliebige K-Algebren vermittelt wird, die sich selbst in Abhängigkeit der Domäne ändern können. Alles Weitere wird von diesen wenigen Axiomen abgeleitet.

Binäre Operationen lassen sich verallgemeinern durch K-Algebren, welche durch eine erzeugende Basis konstruiert werden können. K-Algebren tragen in der Quantentheorie wesentlich zu deren Eigenschaften bei, beispielsweise die Dirac'schen γ-Matrizen in der Dirac Gleichung[6] für das Elektron, die Pauli'schen σ-Matrizen[7] für den Spin oder die Gell-Mann'schen λ-Matrizen[8], welche die Quark Farbsymmetrien beschreiben. Es gibt weitere strukturelle Anhaltspunkte in der Physik, welche eine algebraische Sichtweise unterstützen. Die Maxwell-Gleichungen[9] können als verallgemeinerte Cauchy-Riemann Gleichungen aus einem Teilraum der Bi-Quaternionen als Erzeugende hergeleitet werden[10]. Die Dirac Gleichung selbst kann auch als Cauchy-Riemann System[11] der γ-Matrizen aufgefasst werden. In der Physik werden solche Systeme daher auch „Dirac-Maxwell" Systeme genannt. Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie[12] haben die Eigenschaft der Winkelerhaltung unter physikalischen Transformationen, eine genuine Eigenschaft von konformen Cauchy-Riemann Systemen. Diese mathematischen Fakten weisen bereits in die Richtung, dass die Formelstrukturen der Quantenmechanik und der Gravitation letztlich ihren Ursprung in algebraischen Zwangsbedingungen einer verallgemeinerten binären Operation haben können, die durch K-Algebren bestimmt ist. Dazu muss sich die K-Algebra selbst in Form eines algebraischen Feldes ändern können und zudem eine Rückkopplung zur Domäne vorliegen. Das hierzu komplementäre Bild ist das eines einfachen programmierbaren Transistors (oder auch künstliches Neuron) mit zwei Eingängen und einem Ausgang. Der Ausgang ist determiniert durch die zwei Eingänge aber auch durch die sich ändernden Gewichte der K-Algebra, welche ihrerseits von der Domäne abhängen. Es wird im Folgenden gezeigt, dass so ein Konstrukt einem pseudo-linearen Cauchy-Riemann System (math.) oder Dirac-Maxwell System (phys.) folgt.

Um das Gesamtbild zu verdeutlichen soll dies zunächst am Beispiel der komplexen Zahlen demonstriert werden. Eine komplexe Zahl lässt sich auch als pseudo-skalares Produkt zwischen dem Vektor der Erzeugenden (e, i) und einem Vektor der reellen Körperzahlen umschreiben, wobei der Operator T die Transponierte einer Matrix oder Vektors symbolisiert. Dabei wird oft in der Literatur die komplexe Eins mit der reellen Eins aufgrund der gleichen algebraischen Eigenschaften identifiziert (e ≡ 1). Im mathematischen, strengen Sinne sind alle Erzeugenden immer von anderer Art als die reellen Zahlen.

$$2\,\mathrm{e} + 3\,\mathrm{i} \;=\; \begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Damit eignet sich dieses Konzept auch für die mathematische Beschreibung eines Speichers (die Erzeugenden repräsentieren hier zwei Zellen) mit den jeweiligen internen Zuständen (den reellen Zahlen).

Die K-Algebra $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann mit Hilfe des Vektors der erzeugenden Basis und des Kronecker/Zehfuss-Produkts (Symbol $\otimes$) wie folgt als binäre Operation abgebildet werden (klassische Konstruktion einer K-Algebra aus den erzeugenden Basiselementen mittels einer Einbettung in die Domäne). Die Erzeugenden erhalten so erst ihre eigentliche Bedeutung. Anmerkung: In der quantenmechanischen Sichtweise wird aus einem Zustand (rechte Seite) mittels der rechteckigen Matrix als Aufsteige Operator dann zwei Zustände (linke Seite) erzeugt (in der Bra-Ket Schreibweise: $|\beta, \beta\rangle = \boldsymbol{A}|\beta\rangle$). Ein algebraisches Feld ist damit auch als Auf- oder Absteigeoperator Feld interpretierbar.

$$\begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \coloneqq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Alle acht Gewichte der rechteckigen Matrix bestimmen eindeutig die K-Algebra der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Bei Änderung dieser Gewichte erhält man jeweils andere Zahlensysteme, d.h. eine andere K-Algebra.

Die komplexe Multiplikation kann frei von den Erzeugenden, durch die Kombination der rechteckigen Matrix mit dem Kroneckerprodukt, nur mittels der Vektoren der Körperzahlen bestimmt werden (dies folgt bereits aus den Definitionen 1.1 und 1.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot (p \otimes q) = r \qquad p, q, r \in \mathbb{R}^2 \tag{1.3}$$

Die Geodäten Gleichung folgt der gleichen Struktur, wenn man die Christoffelsymbole in eine entsprechende, rechteckige 16x4 Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ abbildet und dann in Form eines Matrix-Vektor Produkts bringt. Der Zusammenhang $\boldsymbol{\Gamma}$ ist dann als Raum-Zeit abhängige K-Algebra interpretierbar. Der Punkt über den Ortsvektor q bezeichnet die Ableitung nach der Eigenzeit.

$$-\boldsymbol{\Gamma}^T(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \tag{1.4}$$

Ein weiterer heuristischer Hinweis auf eine Verbindung zwischen Algebra und Metrik sind die Dirac'schen γ-Matrizen als Erzeugende. Diese ergeben sich als Divisionsalgebra aus der linearisierten Klein-Gordon-Gleichung aus der Minkowski Metrik. Dabei muss folgende Zwangsbedingung[6] mit Hilfe der Anti-Kommutatoren Klammern erfüllt sein:

$$\frac{1}{2}\{\gamma^j, \ \gamma^k\} = G^{jk}E \tag{1.5}$$

Diese Auffälligkeiten sind jetzt die mathematische Motivation um auf eine allgemeinere physikalische Relation zwischen einer beliebigen K-Algebra als algebraisches Feld und der Metrik zu schließen. Während Dirac von einer definiten, konstanten Metrik ausgegangen ist, um damit auf die notwendige Algebra zu schließen, wird hier der umgekehrte Weg gegangen. Es wird untersucht unter welchen mathematischen Bedingungen ein lokales, algebraisches Feld ein weiteres lokales, metrisches Feld als geometrische Erhaltungsgröße induziert[13].

2. DEFINITIONEN

Für die Formulierung der algebraischen Feldtheorie ist keine neue Mathematik notwendig, sondern der Einsatz von verschiedenen mathematischen Werkzeugen, die in der Physik derzeit nicht sehr verbreitet sind. Das betrifft den Einsatz des rechteckigen Matrizen Calculus im Zusammenspiel mit dem Kroneckerprodukt sowie der Verwendung von Shift Index Operatoren, im Folgenden \`RKS Notation\` genannt. Die RKS Notation ist für die Programmierung optimiert und reduziert gleichzeitig den Umfang der Formelschreibung für die algebraische Feldtheorie. Folgende weitere Schreibweisen werden angewendet. Standard klein geschriebene Buchstaben wie \`x\` seien Variablen aus den Körperzahlen, kursiv klein geschriebene Standard Buchstaben wie \`$q$\` sollen Vektoren darstellen. Kursiv groß geschriebene Buchstaben wie \`$M$\` sollen Standard quadratische Matrizen bezeichnen, Kursiv fett und groß geschriebene griechische Buchstaben wie \`$\boldsymbol{A}$\` oder \`$\boldsymbol{\Gamma}$\` sollen rechteckige Matrizen repräsentieren. Das griechische kleine \`$\beta$\` wird für den Vektor der erzeugenden Basis reserviert, um zu symbolisieren, dass dieser Vektor von anderer Art ist als die Vektoren, welche über dem Körper definiert sind. Die in der Physik übliche Einstein'sche Summenkonvention sowie die üblichen Symbole für Differentialoperatoren werden verwendet, insoweit keine Mehrdeutigkeiten auftreten. Im Weiteren werden die euklidischen Einheitsvektoren mit \`$e$\` und die quadratische Einheitsmatrix mit \`$E$\` bezeichnet. Bei Übergang zu affinen Mannigfaltigkeiten sind diese als ortsabhängiges Vielbein entsprechend zu verallgemeinern, mittels ersetzen von $e_j \rightarrow e_j(q)$, d.h. alle Operatoren sind im Allgemeinen abhängig von der Domäne. Ausnahmen von dieser Schreibweise sind bekannte Entitäten wie z.B. die Dirac'schen Gamma Matrizen \`$\gamma$\`.

Definition für einen Vektor aus den Körperzahlen

$$q := \mathrm{q}^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\mathrm{j} \in \mathbb{N},\ \mathrm{q}^{\mathrm{j}} \in \mathbb{K},\ e_{\mathrm{j}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}},\ e^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{k}} = \delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{k}}) \tag{2.1}$$

Definition des Vektors der erzeugenden Basis („atomare Speicherzellen")

$$\beta := \beta^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\beta^{\mathrm{j}} \notin \mathbb{K} \wedge \mathrm{d}\beta^{\mathrm{j}} = \partial\beta^{\mathrm{j}} := 0 \in \mathbb{K}) \tag{2.2}$$

Anmerkung: Diese Definition resultiert aus der Verallgemeinerung des Symbols \`i\` für die komplexen Zahlen. Die infinitesimale Differenz von \`i\` verschwindet, da dieses Symbol eine atomare Größe ist. Im IT Bild werden die β^{j} als atomare Speicherzellen aufgefasst, die selbst nicht der Raum-Zeit angehören und keine weiteren topologischen Annahmen benötigen. Damit ist der metrische Operator für das hoch- und runterziehen der Indizes nur für (2.1) möglich. Für (2.2) ist ein eigener Konjugationsoperator notwendig, welcher später aus der K-Algebra direkt hergeleitet wird, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Die metrische Raum-Zeit wird ausschließlich durch die algebraischen Relationen zwischen den atomaren Speicherzellen virtuell erzeugt, vergleichbar einem Computerspiel. Die einzelnen Zellen dürfen nicht mit einer quantisierten Raum-Zeit gleichgesetzt werden. Diese sind als Freiheitsgrade zu betrachten. Die Postulate für die Quantisierung werden nicht vorausgesetzt, sondern im Folgenden als spezifische Variante aus der Klasse aller algebraischen Feldtheorien identifiziert.

Definition einer verallgemeinerten komplexen Zahl („Speicherzustand")

$$\tilde{q} := \beta^T q = q^T \beta \tag{2.3}$$

Definition der Abbildung von Variablen mit Triple-Indizes zu einer rechteckigen Matrix

$$\boldsymbol{A} := \left(e_{\mathrm{j}} \otimes e_{\mathrm{k}} \otimes e^{l}\right) \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \qquad \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \in \mathbb{K} \tag{2.4}$$

Zur Verdeutlichung ein Beispiel für eine beliebige, zweidimensionale K-Algebra:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_2^{11} \\ a_1^{12} & a_2^{12} \\ a_1^{21} & a_2^{21} \\ a_1^{22} & a_2^{22} \end{pmatrix} \quad \text{z.B. für die komplexen Zahlen } \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Verwendung von Standard komplexen Zahlen bereits als Körperzahlen, wie in der Physik üblich, hat u.U. Nachteile bei der Behandlung oder bei expliziten Computer Berechnungen mit algebraischen Operatoren. Im Anhang (A.1) ist eine Prozedur beschrieben, die kartesische Produkte von K-Algebren (z.B. Bi-Quaternionen) immer zu einer entsprechenden, höher dimensionalen Algebra über den reellen Zahlen abbildet.

Zusätzlich zum Superscript Operator *´T´* der Transponierung werden noch drei weitere Superscript Operatoren für die RKS Notation benötigt.

Der Operator *´I´* soll die Moore-Penrose Inverse[14] einer rechteckigen Matrix darstellen, welcher über folgende pseudo-inverse Eigenschaft definiert ist. Bei einer normalen quadratischen Matrix bedeutet das gleiche Symbol die übliche Matrixinverse.

$$\boldsymbol{A}^I = \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^I \quad \wedge \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

Aus den sechs möglichen Permutationen der dreiwertigen Indizes (inklusive der Identität) können bereits zwei Index Shift Operatoren als Basis herausgegriffen werden. Der erste Operator tauscht die ersten beiden Indizes bilateral gegeneinander von links aus gesehen aus, der zweite Operator schiebt jeden Index um eine Position nach rechts. Dabei ist zu beachten, dass die klassischen Index-Shifts (in Klammern) nur für euklidische Metriken gültig sind.

Definition Superscript Shift Operator B ("bilateraler Shift")

$$\boldsymbol{A}^B := \left(e_j^T \otimes E \otimes e_j\right) \boldsymbol{A} \qquad (a_l^{jk})^B = a_l^{kj} \tag{2.6}$$

Definition Superscript Shift Operator R ("rechter Shift, rotieren mit übertragen")

$$\boldsymbol{A}^R := \left(e_j \otimes E\right) \boldsymbol{A}^T \left(E \otimes e_j\right) \qquad (a_l^{jk})^R = a_k^{lj} \tag{2.7}$$

Beim sequentiellen Ausführen der Superscript Operatoren ist auf die Position zu achten bzw. auf deren Vertauschungsregeln (A.2). Die Reihenfolge der Ausführung ist immer von links nach rechts zu lesen.

$$\boldsymbol{A}^{BRI} := ((\boldsymbol{A}^B)^R)^I \tag{2.8}$$

Die Definitionen der Shift Operatoren implizieren bereits Relationen (A.2) und im Zusammenspiel mit den Kroneckerprodukt sind weitere Identitäten ableitbar (A.3).

Die Neudecker Vektor Funktion[15] zur Umformung einer beliebigen Matrix zu einem Vektor, sortiert nach den Spalten, ist wie folgt definiert.

$$vec(\boldsymbol{A}) := \textstyle\sum_{j=1}^{n_s} \left(e_j(n_s) \otimes E(n_z \times n_z)\right) \boldsymbol{A}(n_z \times n_s)\; e_j(n_s) \tag{2.9}$$

Eine allgemeine Konstruktion einer K-Algebra aus einer erzeugenden Basis kann mit folgender Definition gewährleistet werden. Dabei steht der Sub Index am Kronecker Symbol als Merker für die K-Algebra, mit welcher das Kroneckerprodukt auf der linken Seite mit dem jeweiligen Kontext einer zugehörigen rechteckigen Matrix auf der rechten Seite zu ersetzen ist.

Im Folgenden wird daher der verkürzte Begriff „Algebra“ oder „algebraisches Feld“ verwendet, als Synonym für die Darstellung einer von der Domäne abhängigen K-Algebra, mittels einer rechteckigen Matrix (siehe 1.2 für die komplexen Zahlen).

$$\beta \ \otimes_{\mathbb{A}} \beta \ := \boldsymbol{A}\,\beta \tag{2.10}$$

Ein affiner Zusammenhang kann nun nach dem gleichen Schema definiert werden, mittels des Levi-Cevita Operator ∇ und dem metrischen Tensor G (A.4). Hier wird der erzeugende Basisvektor als lokaler Rahmen zur Definition der Christoffelsymbole als rechteckige Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ verwendet.

$$(G\ \nabla)\ \otimes \beta := \boldsymbol{\Gamma}\,\beta \tag{2.11}$$

Dieses ermöglicht die Definition einer Ableitung, minimal gekoppelt mit $\boldsymbol{\Gamma}$, welche in die rechteckige Matrizenform gehoben wird, um später zu einer basisfreien Darstellung zu kommen (es folgt hieraus $\boldsymbol{\nabla}\beta = 0$).

$$\boldsymbol{\nabla} \ := (G\ \nabla)\ \otimes\ E - \boldsymbol{\Gamma} \tag{2.12}$$

Das Modell eines Computers mit nur einem Speicher erzwingt die Identifizierung des Dualraums mit dem Ausgangsraum. Anti-Teilchen und Teilchen befinden sich in der gleichen Raum-Zeit. Komplexe Zahlen folgen dem „ein Speicher“-Prinzip, denn der Dualraum der komplexen Zahlen ist identisch mit dem der komplexen Zahlen. Die duale Basis der Erzeugenden wird in der algebraischen Feldtheorie mit der Hilfe der pseudo-inversen Basis formuliert. Aufgrund der Identität des Dualraums mit dem originären Raum ist die pseudo-inverse Basis auch mittels der ursprünglichen Basis ausdrückbar.

Die entsprechende Transformationsmatrix ist dann der gesuchte Operator für die Konjugation und wird hier verallgemeinert.

$$\begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{I} = \tfrac{1}{2}\,(e \quad -i) = \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{(komplexe Zahlen)} \tag{2.13}$$

$$\beta^{I} \ := \ \beta^{T}\ \cdot\ K_{\mathbb{A}}\ \cdot \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \quad (K_{\mathbb{A}}, \mathrm{m}_{\mathbb{A}} \in \mathbb{K})$$

$K_{\mathbb{A}}$ steht dabei für den von der Algebra abhängigen Konjugationsoperator und $\mathrm{m}_{\mathbb{A}}$ steht für den von der Algebra induzierten metrischen Eichkoeffizienten. In Kapitel 5 wird später gezeigt, dass die Existenz einer Konjugation zusätzlichen Zwangsbedingungen unterliegt.

Für den metrischen Eichkoeffizienten der Domänen Basis wird die pseudo-Riemannsche Metrik angenommen, damit strukturell gleich zur algebraischen Basis (2.13), wenn man die Körper-Eins hinzufügt. Der metrische Tensor G wird damit als Konjugationsoperator der Domäne aufgefasst:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{2}(q)\ 1_{\mathbb{K}} := q^{T}\ G\ \ q \tag{2.14}$$

Wenn eine duale algebraische Basis verfügbar ist, lässt sich analog den komplexen Zahlen eine verallgemeinerte, inverse komplexe Zahl wie folgt definieren:

$$\tilde{q}^{I} \ := \beta^{I} q\ \mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{-2}(q) \tag{2.15}$$

3. ALLGEMEINES

Jede K-Algebra einer binären Operation, welches mittels der Definitionen (2.3) und (2.10) konstruiert ist, kann als Kombination eines rechteckigen Matrizen-Vektor Produkts und des Kronecker-Produkts dargestellt werden.

$$\tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = (\beta^T p) \otimes_{\mathbb{A}} (\beta^T q) = (\beta^T \otimes_{\mathbb{A}} \beta^T)(p \otimes q) = \beta^T \boldsymbol{A}^T (p \otimes q) \tag{3.1}$$

Die binäre Operation kann auch in der Reihenfolge umgedreht werden, in dem man zur bilateral geshifteten K-Algebra übergeht.

$$\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{p} = \tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}^B} \tilde{q} \tag{3.2}$$

Daraus folgt, das eine K-Algebra kommutativ ist, wenn gilt:

$$\boldsymbol{A}^B = \boldsymbol{A} \tag{3.3}$$

Lösungen für algebraische Probleme haben daher in der Regel eine links- und rechtshändige Version, wenn die K-Algebra nicht kommutativ ist. Im Folgenden wird jeweils nur eine händische Lösung angegeben. Die jeweils andere kann einfach durch die Ersetzung der rechteckigen Matrix $\boldsymbol{A} \longmapsto \boldsymbol{A}^B$ in der Lösung ermittelt werden.

Mittels der *vec* Funktion und der Jacobi Matrix Darstellung des Levi-Cevita Operators, kann die Beziehung (2.11) symbolisch wie folgt umgeschrieben werden:

$$vec\left(\frac{d\beta}{dq}\right) = vec(\nabla^T \otimes \beta) = \nabla \otimes \beta = (G^I \otimes E)\ \boldsymbol{\Gamma}\, \beta \tag{3.4}$$

Damit lässt sich die infinitesimale, totale Levi-Cevita Differenz von β ermitteln unter Ausnutzung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3):

$$d\beta = \boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(\beta \otimes G^{IT})\, dq = \boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{IT} dq)\, \beta := dQ\, \beta \tag{3.5}$$

Das hat Auswirkungen auf (2.10). Betrachtet man diese infinitesimale Änderung des Ausdrucks, so muss für die um $d\beta$ infinitesimal um dq verschobene, neue Basis gelten:

$$(\beta + d\beta) \otimes_{\mathbb{A}+d\mathbb{A}} (\beta + d\beta) = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})(\beta + d\beta) \tag{3.6}$$

Die Terme der zweiten Ordnung fallen auf beiden Seiten weg, dann folgt:

$$(\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A}\beta = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + \boldsymbol{A}dQ\beta \tag{3.7}$$

Damit das erfüllt wird muss gelten:

$$\boldsymbol{A}dQ = (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\, \boldsymbol{A} \tag{3.8}$$

Für die totale Differenz der Algebra zusammen mit (3.8) folgt:

$$d\boldsymbol{A} = \partial\boldsymbol{A} + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \partial\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}dQ \tag{3.9}$$

Im Weiteren gilt auch:

$$d(\beta \otimes_{\mathbb{A}} \beta) = d\boldsymbol{A}\,\beta + \boldsymbol{A}d\beta \tag{3.10}$$

Daraus folgt mittels (3.8):

$$(E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \boldsymbol{A}dQ \tag{3.11}$$

Das kann nur erfüllt werden, wenn für die Algebra gilt:

$$d\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.12}$$

Daraus folgt aber sofort aus Gleichung (3.9):

$$\partial \boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{A}dQ = -2\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{I})\,dq \tag{3.13}$$

Damit (3.6, 3.10) beide erfüllt sind, muss zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{\Gamma}$ folgendes gelten:

$$½\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q}\right) = -\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Gamma}^{RRT}(E \otimes G^{IT}) \tag{3.14}$$

Die Ursache der geometrischen Raum-Zeitverzerrung ist nach der Allgemeinen Relativitätstheorie der Energie-Impuls-Tensor. In der algebraischen Feldtheorie wird die Gravitation mit einem sich ändernden algebraischen Feld gekoppelt, ähnlich der Kopplung eines magnetischen Feldes zu einem elektrischen. Der Operator $\boldsymbol{\Gamma}$ muss nach (3.14) verschwinden, wenn das algebraische Feld konstant und ungleich Null ist oder ein Extremum erreicht.

Die Standard Ableitung des Operators $\boldsymbol{\Gamma}$ aus der Metrik G für eine holonome Basis (hier in der RKS Notation) ist wie folgt:

$$\boldsymbol{\Gamma} = ½\left((\partial \otimes G)^{R} + (\partial \otimes G)^{RR} - (\partial \otimes G)\right) \tag{3.15}$$

Die Gleichung (3.14) kann dann auf der rechten Seite durch diese Beziehung ersetzt werden und ergibt dann eine nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung für das algebraische Feld. Falls der metrische Tensor selbst eine Funktion des algebraischen Feldes ist, sozusagen die „Selbst-Wechselwirkung“ des Vakuumzustandes, dann hängt diese Differentialgleichung nur noch von der Algebra ab (siehe Kapitel 6). Dies ist für die spätere Vakuumlösung als eine Zwangsbedingung zu berücksichtigen. Bei der Wechselwirkung mit einem externen metrischen Feld kann der Tensor G auch alternativ semi-klassisch über die allgemeine Relativitätstheorie bestimmt werden.

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\,((\partial \otimes G)^{T} + (\partial \otimes G)^{RT} - (\partial \otimes G)^{RRT})(E \otimes G^{I}) \tag{3.16}$$

Die Gleichung muss dann auch gültig für alle Quantenalgebren sein. Diese müssten sich unter hohen Beschleunigungen oder bei starker Gravitation entsprechend ändern und damit kann man diese mathematisch begründete Spekulation der Existenz von algebraischen Feldern physikalisch falsifizieren. Ohne die expliziten Lösungen zu kennen kann man den Effekt zumindest strukturell schon abschätzen.

Für ein Teilchen, welches sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt mit Radiusvektor r, gilt in klassischer Näherung die Geodäten Gleichung:

$$-\,\boldsymbol{\Gamma}^{T}(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \;\approx\; \frac{c^2}{|r|^2}\,r \;=\; -\,\boldsymbol{\Gamma}^{T}(c \otimes c) \;\text{ mit } c^{T}r = 0 \tag{3.17}$$

Wenn das Teilchen jetzt zwei unterschiedliche Radien durchläuft, sollte die Änderung des geometrischen Feldes damit in erster Näherung abhängig vom Betrag der Differenz der beiden unterschiedlichen Radien sein, wenn die Differenz klein gegenüber dem Gesamtradius ist.

$$|\delta\boldsymbol{\Gamma}| \approx \frac{|\delta r|}{|r|^2} \qquad \delta r \ll r \tag{3.18}$$

Diese Relation eingesetzt in Gleichung (3.16) ergibt dann näherungsweise für die Änderung der Algebra mit dabei einem zu bestimmenden experimentellen Faktor n_{exp}:

$$\delta\boldsymbol{A} \approx \mathrm{n}_{exp}\,\boldsymbol{A}\,|\delta r|^2 \tag{3.19}$$

Das magnetische Moment *u* eines Elektrons, ergibt sich als Summe aus dem Moment des Bahndrehimpulses *l* und des Spins *s* und dem Landé-Faktor $\mathrm{g_L}$ (mit e=Ladung, m=Masse):

$$u \;=\; \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{m}}\left(l + \mathrm{g_L} \cdot s\right) \tag{3.20}$$

In der Quantentheorie ist die Differenz des magnetischen Moments zwischen zwei verschiedenen Bahnradien nur vom Bahndrehimpuls abhängig, da der Spin nicht vom Radius bzw. von der jeweiligen Beschleunigung (Zentrifugalkraft) abhängt:

$$\delta u_{QT} \;=\; \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{m}}\delta l \tag{3.21}$$

Die algebraische Feldtheorie sagt einen zusätzlichen Term voraus, welcher von der Änderung der Spin K-Algebra herrührt. Aus Sicht der derzeitigen Quantentheorie würde dies wie eine Änderung des Landé-Faktors in Abhängigkeit des Bahnradius aussehen:

$$\delta u_{AF} \;\approx\; \frac{\mathrm{e}}{2\mathrm{m}}\left(\delta l + \mathrm{g_L}\mathrm{n}_{exp}|\delta r|^2 s\right) \tag{3.22}$$

4. ALGEBRAISCHE IDENTITÄTEN

In erster Ordnung interagiert das Vakuum nicht mit anderen Zuständen. In der algebraischen Sichtweise kann dies nur ein neutrales Element sein. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten, die algebraische „Eins“ oder die algebraische „Null“. Letztere kann für das Vakuum ausgeschlossen werden, da der Nullzustand jeden anderen Zustand auslöscht. Innerhalb der Quantentheorie wird der Nullzustand kaum erwähnt, da trivialerweise die Wahrscheinlichkeit dort exakt Null beträgt. Das „Nichts“ gibt es nicht. In einer algebraischen Feldtheorie der Gravitation ist dieses aber im Allgemeinen nicht mehr ausgeschlossen. Falls keine weiteren Zusatzannahmen getroffen werden, können neben der „globalen“ Null theoretisch noch zusätzliche „lokale“ Nullzustände mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit existieren. Das scheint zunächst eine physikalische Abstrusität zu sein. Es würde bedeuten, dass die Raum-Zeit vernichtet werden könnte. In der Quantentheorie können Teilchen aus dem Vakuum erzeugt und wieder vernichtet werden und damit wäre diese Eigenschaft eine verständliche Konsequenz für eine Quantengravitation, die auf die Raum-Zeit selbst übertragen wird. Die andauernde Expansion des Universums ist ein Beleg das Raum und Zeit kontinuierlich erschaffen wird. Was erschaffen werden kann sollte daher auch zerstört werden können. Dieses widerspricht auch nicht der speziellen sowie der allgemeinen Relativitätstheorie, denn beide Theorien setzen klassisch eine stabile und zusammenhängende Raum-Zeit ohne „Löcher“ voraus. Der Tunnel Effekt in der Physik der Elementarteilchen findet im IT Bilde dann eine Deutung. Wenn ein kleiner Raum-Zeit Bereich mittels eines Nullzustandsfeldes gelöscht wird, dann könnte dieses ein Springen des Teilchens wegen der Informationserhaltung erzwingen. Ein Universum mit nicht stabiler Raum-Zeit ist automatisch nicht mehr deterministisch, da alle Trajektorien der Teilchen nicht mehr vollständig sind.

ALGEBRAISCHER NULLZUSTAND

Alle K-Algebren teilen sich nach der Definition (3) die „globale“ Null, die oft auch mit der Null des Körpers identifiziert wird (im strengen Sinne sind beide wegen der unterschiedlichen Struktur verschieden).

$$\forall \tilde{q},\, \mathbb{A}: \;\; \tilde{q} \;\otimes_{\mathbb{A}} \tilde{n} = \;\tilde{n}\; \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = \tilde{n} := 0 \tag{4.1}$$

Die „globale“ Null ist theoretisch der einzige gemeinsame Zustand aller K-Algebren. In der algebraischen Interpretation ist die physikalische Entsprechung der Anfang des Universums, denn nur im Anfang war alles gleich und gemeinsam. Die Wahrscheinlichkeit ist hier exakt gleich Null nach Definition und damit kann das Vakuum diesen globalen Nullzustand nicht annehmen bzw. muss immer einen anderen Zustand haben. Trotzdem eignet sich dieser Punkt für die algebraische Feldtheorie als Ursprung eines ausgezeichneten Bezugssystems, sozusagen die Sicht vom gleichen Anfang aus.

Die algebraischen Zwangsbedingungen für andere Nullen sind:

$$\exists\, \tilde{n} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(q\,\otimes E)\,n = n \,\vee\, \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes q)\,n = n \tag{4.2}$$

Falls die rechteckige Matrix $\boldsymbol{A}$, welche die K-Algebra repräsentiert, vollen Rang besitzt dann sind diese Gleichungssysteme nur für bestimmte q („lokale" Null Zustände) lösbar.

Es liegt nahe lokale Nullzustände mit schwarzen Löchern gedanklich zu verknüpfen, aufgrund des ähnlichen Verhaltens. Die Singularität eines schwarzen Lochs „frisst" jeden anderen Zustand auf, genauso wie der Nullzustand. Der Unterschied besteht in der Mächtigkeit. Wenn aber ein schwarzes Loch nicht auf einen Punkt kollabieren kann, sondern nur auf eine minimale Massenschale, dann würden sich die Kräfte im Zentrum der Massenschale genau aufheben und zu Null werden – zu einem lokalen Nullzustand?

ALGEBRAISCHER VAKUUMZUSTAND

Die Existenzbedingungen für eine rechtshändige Eins sind in Abhängigkeit von einer beliebigen K-Algebra wie folgt:

$$\forall \tilde{q} \neq 0 \,\wedge\, \tilde{o}_{\mathbb{A}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \tilde{q} \qquad \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \beta^T o_{\mathbb{A}} \tag{4.3}$$

Dieses Problem kann mit Hilfe der Neudecker-Funktion and einer Kronecker/Shift Operator Identität (A.3/F.5) zu einem überdeterminierten Matrix-Vektor Standard-Problem in der RKS Notation umformatiert werden. Der Vorteil der RKS Notation gegenüber einer Index-Notation tritt hier zu Tage.

Folgende RKS Formel gibt jetzt jede Eins für alle K-Algebren aus, wenn die Algebra gewissen Zwangsbedingungen folgt (dritte Zeile, rechte Seite):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)q = q \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o) = E \;\Rightarrow\\
&vec\big(\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)\big) = \boldsymbol{A}^{BR} o = vec(E) \;\Rightarrow\\
&o_{\mathbb{A}} = \boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{BR}\boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) = vec(E)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Die rechtshändige Eins ist eindeutig und minimal, wenn es keine Nullraumlösung für $\boldsymbol{A}^{BR}$ gibt d.h. $\boldsymbol{A}^{BR}$ hat vollen Rang. Die Lösung für die linkshändige Eins ist strukturell gleich, hier muss die Algebra durch die bilateral, geshiftete ersetzt werden ($\boldsymbol{A}^{BRI} \rightarrow \boldsymbol{A}^{BBRI} = \boldsymbol{A}^{RI}$).

Wenn rechts- und linkshändige Eins beide gemeinsam existieren, dann sind diese notwendigerweise identisch. Der quantenmechanische Vakuumzustand mit dem üblichen Symbol $|0\rangle$ wird hier mit einem von der Domäne abhängigen, algebraischen Feld $o_{\mathbb{A}}(q)$ identifiziert, da die „Eins" neutral zu jedem anderen Zustand ist. Drei verschiedene händische Vakuum Zustände sind lokal möglich (rechts-, links- oder beidhändig) aber auch lokale Gebiete im algebraischen Feld sind erlaubt, die keinen Vakuumzustand besitzen.

Das eröffnet ein neues Verständnis für Teilchen und Felder. Felder müssen im Vakuum existieren und deswegen einen lokalen Vakuumzustand besitzen. Teilchen umfassen dann Gebiete ohne Vakuumzustand. Die sich ändernden Ränder zwischen Gebiete ohne und mit Vakuumzustand können dann höhere Teilchenzustände in diesem neuen, algebraischen Bild darstellen. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Existenz einer Konjugation (Dualraum) von der Existenz des Vakuumzustands abhängt.

5. ALGEBRAISCHER DUALRAUM

Aus der Definition (2.13) folgen bereits folgende Eigenschaften für die Konjugation:

$$K_{\mathbb{A}}{}^{T} = K_{\mathbb{A}} \quad \text{und} \quad K_{\mathbb{A}}^{2} = E \tag{5.1}$$

Um den Konjugationsoperator für eine beliebige K-Algebra zu bestimmen wird das Skalarprodukt der dualen Basis mit der originalen Basis gebildet. Dies ergibt dann die algebraische Eins, falls die K-Algebra eine Eins besitzt (4.4) ansonsten ist keine Konjugation möglich.

$$\beta^{I}\,\beta \;=\; \tilde{o}_{\mathbb{A}} \tag{5.2}$$

Das hat seine physikalische Entsprechung, denn Teilchen und Anti-Teilchen können nur aus einem Vakuum (=algebraische Eins) erzeugt werden, wenn ein Vakuumzustand im algebraischen Ur-Feld existiert. Hieraus folgt dann:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}(\beta\,)\,\tilde{o}_{\mathbb{A}} = \;\beta^{T} K_{\mathbb{A}}\,\beta = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}(\beta\;\otimes_{\mathbb{A}}\beta) = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}\boldsymbol{A}\,\beta \tag{5.3}$$

Unter Ausnutzung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien(A.2/A.3) ergibt sich:

$$K_{\mathbb{A}} = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\,\boldsymbol{A}^{IRR}(o_{\mathbb{A}}\otimes E) \;\;\Leftrightarrow\;\; \boldsymbol{A}^{IT}\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.4}$$

Der noch fehlende metrische Koeffizient kann mittels der Involution der Konjugation (5.1) bestimmt werden.

Diese Eigenschaft erfordert folgende Beziehung für die K-Algebra:

$$\boldsymbol{A}^{I} = \boldsymbol{A}^{T}\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \tag{5.5}$$

Damit ist der metrische Koeffizient mit Hilfe der Spur einer Matrix determinierbar:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2} = \frac{Spur(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})}{Spur(E)} \tag{5.6}$$

Der gesuchte Konjugationsoperator ist dann unter den Bedingungen (4.4) der Existenz einer Eins und unter folgenden zusätzlichen Bedingungen gegeben:

$$K_{\mathbb{A}} = \;\boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}\otimes E) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\, vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.7}$$

6. ALGEBRAISCHER ZERFALL DES VAKUUMS

Für einen beidhändigen algebraischen Zerfall des Vakuumzustands soll gelten:

$$\tilde{q}^{I}\otimes_{\mathbb{A}}\tilde{q} = \;\; \tilde{o}_{\mathbb{A}} \;\;=\;\; \tilde{q}\,\otimes_{\mathbb{A}}\tilde{q}^{I} \tag{6.1}$$

Schreibt man dieses aus muss folgende Beziehung gültig sein, um das zu erfüllen:

$$\forall q\;\neq 0:\quad \boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}}\otimes E - E\otimes K_{\mathbb{A}})(q\otimes q) = 0 \tag{6.2}$$

Eine Lösung ist gegeben, wenn die K-Algebra folgender Zwangsbedingung unterliegt:

$$\forall q,\boldsymbol{X}\;\neq 0:\;\; \boldsymbol{X}^{T}(q\otimes q) = 0 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{X} \;=\;\; \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^{B} \tag{6.3}$$

Es folgt damit:

$$(K_{\mathbb{A}}\otimes E)\,\boldsymbol{A} \;= ((E\otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.4}$$

Aus (6.1) gilt dann für den gesuchten Operator *G*:

$$\boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}}\otimes E)(q\otimes q) = \;(q^{T}\;G\;\;q)\;\;o_{\mathbb{A}} = vec(G)^{T}(q\otimes q)\,o_{\mathbb{A}} \tag{6.5}$$

Ein struktureller Vergleich zwischen der rechten und linken Seite ergibt dann unter Anwendung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3) das folgende Identitäten gültig sein müssen:

$$(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A}\, o_{\mathbb{A}}{}^{IT} = vec(G) = vec(\boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}{}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}})) \tag{6.6}$$

Damit bestimmt die K-Algebra auch die Metrik für den Vakuumzustand, wenn eine Eins und eine Konjugation lokal vorhanden sind und unter folgenden zusätzlichen Bedingungen:

$$G_{Vakuum} = \boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}{}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}}) \Leftrightarrow (K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A} = ((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.7}$$

Theoretisch kann eine der beiden Seiten von den Bedingungen in (6.1) fallen gelassen werden. Das würde dann i.allg. zu zwei verschiedenen händischen Metrik Operatoren führen.

7. ALGEBRAISCHE DIFFERENZIERBARKEIT

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass aufgrund gemeinsamer Eigenschaften die mathematischen Strukturen der Quantentheorie und die Eigenschaften der allgemeinen Relativitätstheorie aus algebraischen Zwangsbedingungen der binären Operation abgeleitet werden können. Die komplexe Differenzierbarkeit mit den Cauchy-Riemannschen Zwangsbedingungen soll hier als Vorlage dienen.

Analog zu dem komplexen Verfahren soll das folgende, pseudo-lineare Funktional gelten:

$$\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f] \tag{7.1}$$

Bei den komplexen Zahlen ergibt sich dann als Spezialfall die komplexe Ableitung $\tilde{p}$ aus der infinitesimalen Differenz dieses Funktionals in der Darstellung mittels $\tilde{q}$.

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{C}}(q)[f] = d\tilde{q} \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{p}[f] = d\tilde{f}(\tilde{q}) \tag{7.2}$$

Diese Beziehung ist nur gültig für konstante K-Algebren und wenn die Ableitung selbst extremal ist ($d\tilde{p}[f] = 0$). Für ein algebraisches Feld muss das komplette totale Differential über das gesamte Produkt samt Algebra gelten:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,(\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f]) \tag{7.3}$$

Im Weiteren wird für die gesuchten, pseudo-linearen Operatoren gefordert, dass die totale infinitesimale Differenz unabhängig von der Reihenfolge der Operatoren im Funktional ist:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(p,q)[f] \tag{7.4}$$

Dies begründet sich aus den Linearitätsanforderungen, denn zum Vergleich gilt diese Eigenschaft auch für den Kommutator der Standardableitung (sowie später auch für den quantenmechanischen Kommutator).

$$[\partial_j, q^k] = \delta_j^k \quad \Rightarrow \quad d[\partial_j, q^k] = 0 \tag{7.5}$$

Eine quantenmechanische Matrix-Sichtweise nach Werner Heisenberg hilft jetzt weiter um eine Lösung in geschlossener Form für dieses algebraische Problem zu ermitteln. Dazu werden zwei Operatoren *P, Q* als quadratische Matrix aufgefasst mit folgenden Eigenschaften:

$$\beta^T P\, f \coloneqq \tilde{p}[f] \quad \text{und} \quad Q \coloneqq \boldsymbol{A}^T(q \otimes E) \tag{7.6}$$

P spielt dabei die Rolle des Energie-Impuls-Tensors (hier der gesuchte algebraische Differentialoperator) und *Q* die Rolle des algebraischen Ortsoperators.

Damit lässt sich das Problem (7.3) unter zu Hilfenahme des Operators (2.12) in eine von der erzeugenden Basis freien Form wie folgt umformulieren:

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) = \boldsymbol{\nabla}f \text{ mit } \boldsymbol{\nabla}\beta = 0 \tag{7.7}$$

Die linke Seite ergibt dann folgende Beziehung, wobei der Index c an einem Operator bedeutet, dass dieser als Konstante zu behandeln ist, gegenüber der Aktion des ersten links davon stehenden Differentialoperators.

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf + \boldsymbol{\nabla}Q_c(Pf) \tag{7.8}$$

Aus der Gültigkeit von (7.4) folgt gleichzeitig:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}(P(Q_c f)) \tag{7.9}$$

Subtrahiert man Gleichung (7.9) von (7.8) ergibt sich unter Zuhilfenahme der Kommutatoren Klammern:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q_c, P]f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 0 \tag{7.10}$$

Addiert man beide Gleichungen (7.9) und (7.8) dann folgt unter Zuhilfenahme der Anti-Kommutatoren Klammern:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 2\,\boldsymbol{\nabla}f \tag{7.11}$$

Da der Operator P als Differentialoperator pseudo-linear sein muss, geht dieses nur wenn folgende Zusatzbedingung gilt, mit einem noch zu bestimmenden rechteckigen Matrixoperator $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) = (2\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\nabla}(Q))Pf \tag{7.12}$$

Denn damit reduziert sich das Problem zu einem bekannten, überbestimmten und pseudo-linearen System:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{J}\,P\,f \tag{7.13}$$

Die Lösung unterliegt dann verallgemeinerten Cauchy-Riemann Zwangsbedingungen:

$$P = \boldsymbol{J}^I\,\boldsymbol{\nabla} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{J}^I\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}f \tag{7.14}$$

Um den Operator $\boldsymbol{J}$ festzulegen betrachtet man zuerst folgende Ableitung des allgemeinen Kommutators zwischen Q und P:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q, P]f) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf - \boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) + \boldsymbol{\nabla}([Q_c, P]f) \tag{7.15}$$

Diese Gleichung reduziert sich wegen (7.10) zu folgender Relation:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q, P]f) = -\boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) \tag{7.16}$$

Damit dieses erfüllt wird muss für den Kommutator folgendes gelten:

$$[P, Q] = P(Q) \tag{7.17}$$

Man setzt nach (7.5):

$$P(Q) = E \tag{7.18}$$

Damit ist aber gleichzeitig der gesuchte Operator $\boldsymbol{J}$ bereits festgelegt, unter der Bedingung, dass dieser vollen Rang besitzt:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla}Q \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{\nabla}Q)^I\,\boldsymbol{\nabla}Q = E \tag{7.19}$$

Der algebraisch-affine Ableitungsoperator kann damit vollständig angegeben werden. Dieser unterliegt jetzt drei algebraischen Zwangsbedingungen für die Existenz:

$$P = (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} \qquad \Leftrightarrow \big((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\big)\, \boldsymbol{\nabla} f = 0 \tag{7.20}$$

$$\wedge \quad \boldsymbol{\nabla}\, (Q_c(\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} f)) = 0 \quad \wedge \quad (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0$$

Aufgrund der Symmetrien der Shift Operatoren sind insgesamt sechs verschiedene Varianten für den *P*-Operator möglich. Diese können in drei verwandte Familien $\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^B\}, \{\boldsymbol{A}^R,\ \boldsymbol{A}^{RB}\}, \{\boldsymbol{A}^{RR}, \boldsymbol{A}^{BR}\}$ nach der Händigkeit gruppiert werden.

Die ersten überdeterminierten Zwangsbedingungen im System (7.20) sind die Verallgemeinerung der Cauchy-Riemann Gleichungen, denn diese bilden ein Dirac-Maxwell System im Grenzwert zu verschwindender Gravitation ($\boldsymbol{\Gamma} = 0$ und damit $\partial \boldsymbol{A} = 0$). Damit geht die algebraische Feldtheorie bei verschwindender Gravitation strukturell in die Quantentheorie über. D.h. die algebraische Feldtheorie führt die Gravitation in die Quantentheorie auf Kosten eines zusätzlichen algebraischen Feldes und der damit verbundenen Änderung der Quantenalgebren ein ($\partial \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Gamma}$). Allerdings existieren in der algebraischen Feldtheorie sechs verschiedene Versionen, aufgrund der Symmetrie der Shift Operatoren (7.21, die Linksversion als Beispiel), d.h. die Dirac-Gleichung hat noch fünf weitere Geschwister mit jeweiligen, zusätzlichen Zwangsbedingungen. Deren physikalische Bedeutung muss in diesem frühen Stadium der Theorie offengelassen werden.

$$P_0 = \boldsymbol{A}^{RI}(\partial \otimes E) \ = \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_j \otimes E\big)\, \partial_{\mathrm{j}} \tag{7.21}$$

$$\Leftrightarrow \ (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

Setzt man in die Zwangsbedingung der Gleichung (7.21) die rechteckige Matrix ein, welche die komplexen Zahlen repräsentiert (siehe Abschnitt Einleitung 1.2, siehe auch A.5), erhält man die klassischen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Gleichung (7.21) kann jetzt auch für alle anderen Quantenalgebren angewendet werden, z.B. die K-Algebra der Gell-Mann'schen λ-Matrizen. Diese unterliegen jetzt zusätzlichen Bedingungen (A.8). Die physikalische Bedeutung dieser neuen Zwangsbedingungen für die Symmetrien der starken Kraft ist derzeit auch offen.

Zwangsbedingung (7.21, Zeile 2) ist auch für K-Algebren ohne Eins anwendbar, z.B. das Kreuzprodukt zwischen Vektoren (siehe A.6, verallgemeinerte Cauchy-Riemann Gleichungen für das Kreuzprodukt).

Die zweite zusätzliche Zwangsbedingung in (7.20) ist ein gemischtes Differential-Gleichungssytem der zweiten Ordnung, ähnlich den Strukturen der Vakuumgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. Diese schränkt den Lösungsraum der ersten Zwangsbedingung zusätzlich ein. Eine genauere Analyse steht noch aus.

Bisher ist der Operator *P* noch kein physikalischer Energie-Impuls Operator, sondern nur ein rein generisch, algebraischer Operator. Gleichung (7.18) hat den Freiheitsgrad der freien Wahl einer Konstante für die Gewährleistung der Linearität. Um nun zu einer spezifischen algebraischen Feldtheorie als Variante überzugehen, kann die Konstante durch das quantenmechanische Pendant mittels der Minkowski Metrik G_0 ersetzt werden.

$$\left[\partial_{\mathrm{j}}, q^k\right] = \quad \mathrm{i}\, \hbar\, \mathrm{G}_{0\,j}^{\ k} \quad \text{mit} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Damit wird die definierende Gleichung (7.18) für den physikalischen Operator P_{Physik} zu:

$$P_{Physik}(Q) = \mathrm{i}\,\hbar G_0 \;\Rightarrow\; P_{Physik} = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} \tag{7.23}$$

Diese beschreibt dann einen „algebraischen Quantencomputer“ als Variante.

Woher kommt nun die fundamentale Gleichung (7.22) für die Quantentheorie?

Dieses kann mit der Art der Expansion des Vakuums zusammenhängen und der damit verbundenen Lage des Beobachters. Angenommen das Universum ist in sich geschlossen in Form einer entsprechenden S^3-Kugel, welche selbst sich in einem vier dimensionalen euklidischen Raum plus der Zeit befindet. Die „Oberfläche“ (Hyperfläche) dieser S^3-Kugel ist der metrische, dreidimensionale Raum und die Zeit bildet einen gemeinsamen Vektor vom Ursprung zur Oberfläche der S^3-Kugel hin. Wenn sich nun diese Oberfläche nach außen mit der Grenzgeschwindigkeit (mit Lichtgeschwindigkeit) ausdehnt, würden alle Beobachter innerhalb dieser sich ausdehnenden Oberfläche, die zusätzliche Dimension gar nicht im großen Maßstab bemerken, da Wechselwirkungen nur senkrecht zur Ausdehnungsrichtung wirken können, d.h. nur innerhalb der S^3-Oberfläche. Die Beobachter auf der Oberfläche entdecken dann nicht die Euklidische Metrik als Erhaltungsgröße, sondern genau die Minkowski’sche Metrik bzw. aus deren Divisionsalgebra heraus wird auch das `i` der komplexen Zahlen benötigt. Aus der Sicht des Ursprungs würde das Universum der folgenden euklidischen Beziehung genügen mit einer zusätzlichen vierten, räumlichen Dimension q^4.

$$(\mathrm{ct})^2 = (\mathrm{q}^1)^2 + (\mathrm{q}^2)^2 + (\mathrm{q}^3)^2 + (\mathrm{q}^4)^2 \tag{7.24}$$

Aus der Sicht der Beobachter würde die vierte Raumdimension sich nur als „Dellen“ $(\delta \mathrm{q}^4)^2$ in ihrer Raum-Zeit bemerkbar machen, verursacht durch materielle Verzerrungen in die vierte Raum Dimension und damit für alle Beobachter in der Kugeloberfläche lokal immer eine Erhaltungsgröße. Daraus folgt dann die Minkowski Metrik, wenn man die Zeit jetzt mit in die Metrik einbezieht:

$$(\delta \mathrm{ct})^2 - (\delta \mathrm{q}^1)^2 - (\delta \mathrm{q}^2)^2 - (\delta \mathrm{q}^3)^2 = (\delta \mathrm{q}^4)^2 = \mathrm{G}_{0\mathrm{jk}} \mathrm{x}^\mathrm{j} \mathrm{x}^\mathrm{k} \text{ mit } x = (\delta \mathrm{ct}, \delta q) \tag{7.25}$$

Zusammenfassend kommt die Metrik in diesem Bilde dadurch zustande, dass wir wie Surfer auf einer Welle mitreiten, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in einem höher dimensionalen euklidischen Raum ausbreitet (im IT Bild eine algebraische Welle im Speicher bei maximaler Prozessorfrequenz). Der physikalische *P*-Operator (7.23) gilt dann nur speziell auf der Welle aber nicht mehr im Allgemeinen!

Der Dirac-Operator im Vergleich zum physikalischen *P*-Operator bei verschwindender Gravitation (7.21):

$$P_{Dirac} = \mathrm{i}\,\hbar\; \gamma^\mathrm{j}\, \partial_\mathrm{j} \quad \leftrightarrow \quad P_{Physik}\,(\boldsymbol{\Gamma} = 0) = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_\mathrm{j} \otimes E\big)\, \partial_\mathrm{j} \tag{7.26}$$

Das erfordert die Gültigkeit folgender Beziehung:

$$\gamma^\mathrm{j} = G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}\big(e_\mathrm{j} \otimes E\big) \tag{7.27}$$

Mittels Umformatierungen und Anwendung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3) folgt für die Algebra der Dirac’schen Gamma Matrizen (A.7).

$$\boldsymbol{A}_{Dirac} = (\,\big(e_\mathrm{j} \otimes E\big)\, G_0\, \gamma^\mathrm{j}\,)^{BRITRR} \tag{7.28}$$

Nun steht man vor einem mathematischen Problem, denn die Gamma Matrizen bilden erst mit 16 unabhängigen 4x4 Matrizen ein vollständiges Erzeugenden System. Die Dirac Gleichung selbst wird aber nur über einen vier dimensionalen Teilraum der ersten vier

Gamma Matrizen entwickelt. In vier Raum-Zeit Dimensionen besitzt die mittels (7.28) rückgerechnete K-Algebra (A.7) keine algebraische Eins und damit keinen Vakuumzustand. Das entspricht dem algebraischen Bild, denn die Dirac Gleichung beschreibt ein Elementar-Teilchen ohne äußere Felder, welches in der algebraischen Sichtweise jetzt selbst nicht mehr zerfallen kann, denn dafür wäre ein Vakuumzustand notwendig. Die Anwendung der Beziehung (6.7) für die Metrik ist damit nicht mehr erlaubt, da diese nur für einen existenten Vakuumzustand gültig ist. Für die von der Algebra induzierte Metrik eines Teilchens steht noch die Dirac Bedingung (1.5) zur Verfügung, denn diese verlangt keinen Vakuumzustand. Damit lässt sich mittels (7.27) folgende Relation für die „innere" Metrik eines Teilchens ohne Vakuumzustand aufstellen:

$$G_{Teilchen} = \tfrac{1}{2}\ Spur(\{G_0 \boldsymbol{A}^{RI}(e_j \otimes E), G_0 \boldsymbol{A}^{RI}(e_k \otimes E)\})\ (e_j \otimes e_k^T) \tag{7.29}$$

Im Innern eines Teilchens befindet sich also gleichermaßen wie außen ein algebraisches sowie ein metrisches Feld. Im Unterschied zu außen existiert allerdings kein Vakuumzustand im Innern eines Teilchens. Damit entzieht sich das Innere eines Teilchens der Messbarkeit, nur der Rand des Teilchens ist messbar, denn ohne Vakuumzustand gibt es keine Nullpunkts-Referenz als Voraussetzung für eine vergleichbare Messung.

8. VAKUUMGLEICHUNG

Für die Berechnung der Energie/Masse k einer physikalischen Vakuumlösung stehen nun alle Mittel zur Verfügung. Es gilt dann folgende Vakuumgleichung für P_{Physik}:

$$\mathrm{i}\, G_0(\boldsymbol{\nabla} Q_{\mathbb{A}})^I\, \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = \mathrm{k}\, o_{\mathbb{A}} \tag{8.1}$$

Um diese zu lösen müssen erst alle erlaubten algebraischen Felder ermittelt werden. Dazu sind zuerst alle bisherigen ermittelten Zwangsbedingungen für das algebraische Feld einzusammeln. Ein beidhändiges Vakuum muss deshalb alle folgenden acht Systeme erfüllen (3.16, 4.4[2], 5.7, 6.7, 7.20[3]). Alle vorkommenden Faktoren können durch die K-Algebra ausgedrückt werden. Topologische Gründe[16] schränken nicht triviale algebraische Lösungen auf die endlichen Freiheitsgrade N=2,4,8 im generellen für diese acht Systeme ein, da die K-Algebren laut den Bedingungen für das Vakuum reelle Divisionsalgebren sein müssen. Da nur nach einer physikalischen Lösung gesucht wird gilt ausschließlich N=4.

Von den acht Systemen sind vier Systeme Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\,((\partial \otimes G)^T + (\partial \otimes G)^{RT} - (\partial \otimes G)^{RRT})(E \otimes G^I)\\
&\left((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\right) \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = 0\\
&\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, \mathrm{i} G_0(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla}\} o_{\mathbb{A}}) = (\boldsymbol{\nabla}(Q)(\mathrm{i}\, G_0 - 2E)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}}\\
&(\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Die restlichen vier Systeme schränken Anfangsbedingungen und Lösungsraum weiter ein:

$$\begin{aligned}
&(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A} = \left((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A}\right)^B\\
&\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^T vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(K_{\mathbb{A}})\\
&\boldsymbol{A}^{BR} \boldsymbol{A}^{BRT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(E)\\
&\boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\, vec(E)
\end{aligned} \tag{8.3}$$

Eine allgemeine Lösung des komplexen Systems (8.2 & 8.3) ist derzeit in Arbeit und damit noch offen. Dazu sind die Verallgemeinerungen der Cauchy Integralformeln auf beliebige K-Algebren hilfreich. Mit den hier vorgebrachten neuen Operatoren ist dieses jetzt möglich, ausgehend von der Definition eines Integrals über die komplexen Zahlen gilt analog für die algebraische Feldtheorie:

$$\int d\,(\tilde{q}\ \otimes_{\mathbb{A}}\ \tilde{p}[f])\ =\ \tilde{f}(\tilde{q}) \tag{8.4}$$

Eine Diskussion diverser Lösungsstrategien oder die konsequente Erweiterung auf Integrale würde den Rahmen, dieser als Einführung gedachten Arbeit, deutlich übersteigen. Ziele sind primär der Einstieg und die Demonstration des Potentials einer algebraischen Feldtheorie und dass man mit den wenigen benötigten Axiomen, die Strukturen der Quantenmechanik und zumindest ähnliche Strukturen der allgemeinen Relativitätstheorie aus einem Prinzip herleiten kann. Zum ersten Mal wird eine Quantentheorie des Vakuums selbst aufgestellt und gleichzeitig die experimentelle Möglichkeit der Falsifizierung von algebraischen Feldern aufgezeigt.

Der Autor vermutet aus ersten Berechnungen, dass der Operator P_{Physik} nach unten und nach oben beschränkt ist. Das würde für das Vakuum eine minimale Masse in einer maximal möglichen, endlichen Ausdehnung bedeuten bzw. umgekehrt ist in der minimalen Ausdehnung nur eine maximale Masse möglich. Dies kann ansatzweise aus den Strukturen entnommen werden. Wegen der vierten Zeile in (8.2) kann $\boldsymbol{\nabla Q}$ nie verschwinden. In (8.1) muss der Term dann $\boldsymbol{\nabla o}_{\mathbb{A}} = 0$ sein. Diese Beziehung folgt der Definition des lokalen Rahmens nach (2.12) und führt zur Widersprüchen in (8.2). Die erste und dritte Zeile zusammen scheinen ein endliches $\boldsymbol{\nabla o}_{\mathbb{A}} \neq 0$ zu erfordern. Ein exakter, mathematischer Beweis dieser Vermutung bzw. deren Widerlegung ist ausstehend.

Ω

ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

ANHANG

***A.1)** Kartesische Produkte von K-Algebren*

Die Zahlen für die Domäne $\mathbb{K}$ sollen jetzt auch der Struktur von (2.3) folgen mit eigenen Erzeugenden. Damit sind diese nicht mehr notwendigerweise ein Körper, aber zumindest sollen diese selbst die reellen Zahlen als inneren Subraum besitzen. Seien jetzt $\beta_{\mathbb{A}}, \beta_{\mathbb{K}}$ die jeweiligen Basen der Erzeugenden für die K-Algebren $\mathbb{A}$ und $\mathbb{K}$.

Die kartesische Produkt K-Algebra $\mathbb{A}'$, im Bezug zur Basis $\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}$ ist dann:

$$(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{A}'} (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) = \boldsymbol{A}' (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})$$

Nach (2.3) müssen die beiden Basen per Definition kommutieren. Zusätzlich wird ein Operator ‚B‘ benötigt, um die Faktoren im Kronecker-Produkt zu vertauschen. ‚B‘ ist eine Verallgemeinerung der Definition (2.6) für zwei unterschiedliche dimensionale Basen.

$$\beta_{\mathbb{A}} \otimes (\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} = \beta_{\mathbb{A}} \otimes \big(B\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\big) \otimes \beta_{\mathbb{K}}$$

$$B \coloneqq \Sigma_j \left(e_j(Dim\,\beta_{\mathbb{K}}) \otimes E(Dim\,\beta_{\mathbb{A}}) \otimes e_j^T(Dim\,\beta_{\mathbb{K}})\right)$$

Mit Hilfe von Standard Kronecker Identitäten ergibt sich:

$$\begin{aligned}(E \otimes B)\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} &= (E \otimes B \otimes E)\,(\boldsymbol{A}\beta_{\mathbb{A}} \otimes \boldsymbol{K}\beta_{\mathbb{K}}) \\ &= (E \otimes B \otimes E)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\end{aligned}$$

Zusammenfassend kann jede kombinierte komplexe Struktur (z.B. Bi-Quaternionen) zu einer höher dimensionalen K-Algebra mit den reellen Zahlen als Körper abgebildet werden. Die entsprechende K-Algebra ist dann gegeben:

$$\boldsymbol{A}' = \left(E_{Dim(\beta_{\mathbb{A}})} \otimes B_{Dim(\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}})} \otimes E_{Dim(\beta_{\mathbb{K}})}\right)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})$$

***A.2)** Shift Operator Relationen für B, I, R, T*

$$BRB = RR \qquad BRR = RB \qquad RRB = BR \qquad RBR = B$$

$$BB = II = RRR = TT = E$$

$$[T, B] = [T, I] = [T, R] = [B, I] = 0$$

$[B, R]$ und $[I, R]$ kommutieren nicht im Allgemeinen!

***A.3)** Kronecker Shift Operator Identitäten*

Die gelisteten Identitäten können aus den Shift Operator Definitionen in Kombination mit Standard Kroneckerprodukt Identitäten abgeleitet werden.

F.1 $\quad (\partial \otimes E)(\boldsymbol{A}^T(q \otimes E)) = \boldsymbol{A}^{BR} \Leftrightarrow (\partial \otimes E)\boldsymbol{A}^T = 0$

F.2 $\quad (q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^{BR} = \boldsymbol{A}^T(q \otimes E)$

F.3 $\quad \beta^T\boldsymbol{A}^T(p \otimes q) = p^T\boldsymbol{A}^{RT}(q \otimes \beta) = q^T\boldsymbol{A}^{RRT}(\beta \otimes p) = \beta^T\boldsymbol{A}^{BT}(q \otimes p) = q^T\boldsymbol{A}^{BRT}(p \otimes \beta) = p^T\boldsymbol{A}^{RBT}(\beta \otimes q)$

F.4 $\quad p^T\boldsymbol{A}^{BRT}(Q \otimes q)q = q^T\boldsymbol{A}^T(Q \otimes p)\,q$

F.5 $\quad vec(\boldsymbol{A}^T\,(q \otimes Q)) = (Q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^R q$

F.6 $\quad \boldsymbol{A}^{RRT}(E \otimes q) = \Sigma_{\mathrm{j}}[\boldsymbol{A}]_{\mathrm{j}}\,q_{\mathrm{j}}$ mit $[\boldsymbol{A}]_{\mathrm{j}} \coloneqq \boldsymbol{A}^T\left(e_{\mathrm{j}} \otimes E\right)$ (ergibt die j-te Sub Matrix von oben)

F.7 $\quad (\boldsymbol{A}^T(p \otimes q))_{\mathrm{j}} = p^T[\boldsymbol{A}^{RR}]_{\mathrm{j}}\,q$

F.8 $\quad (E \otimes \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \otimes E)\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}$ ist assoziativ

F.9 $\quad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^B + \boldsymbol{A}^R - \boldsymbol{A}^{BR} + \boldsymbol{A}^{RR} - \boldsymbol{A}^{RB}) = \Sigma_{\mathrm{jkl}}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{jkl}}\varepsilon_{\mathrm{jkl}}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor)

***A.4)** Lokaler Rahmen*

$$(G\nabla) \otimes \beta = e_{\mathrm{j}} \otimes (\mathrm{G}^{\mathrm{jl}}\nabla_{\mathrm{l}}\,e_{\mathrm{k}})\beta^{\mathrm{k}} = \Gamma_{\mathrm{l}}^{\mathrm{jk}}\beta^{\mathrm{l}}(e_{\mathrm{j}} \otimes e_{\mathrm{k}}) = \Gamma_{\mathrm{l}}^{\mathrm{jk}}(e_{\mathrm{j}} \otimes e_{\mathrm{k}} \otimes e^{l})\,e_{\mathrm{l}}\beta^{\mathrm{l}}) = \boldsymbol{\Gamma}\,\beta$$

A.5) Standard komplexe Zahlen $\mathbb{C}$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_2^{11} \\ a_1^{12} & a_2^{12} \\ a_1^{21} & a_2^{21} \\ a_1^{22} & a_2^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^R = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_1^{21} \\ a_2^{11} & a_2^{21} \\ a_1^{12} & a_1^{22} \\ a_2^{12} & a_2^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{RI} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_{\mathbb{C}} := \boldsymbol{A}^{RI}(\partial \otimes E) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 \\ \partial_2 f_2 - \partial_1 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

$$K_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.6) Vektor Kreuzprodukt

K-Algebra $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor) des Vektor Kreuzprodukts (Symbol $\times$)

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^T{:}\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{RI} = -\tfrac{1}{2} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{BRI}$$

Hier existieren dann zwei händische P Operatoren:

$$\Rightarrow \quad P_r{:}\times = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_l{:}\times = -P_r{:}\times$$

Die verallgemeinerten Cauchy-Riemann Zwangsbedingungen sind für beide händischen Operatoren identisch:

$$\Leftrightarrow CR_r = CR_l = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 = \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 = \partial_1 f_3 + \partial_3 f_1 = \partial_2 f_3 + \partial_3 f_2 = 0 \end{pmatrix} = (\partial \otimes E \; + E \otimes \partial) f = 0$$

Die algebraische Eins existiert nicht, damit ist auch keine Konjugation möglich.

A.7) Vierdimensionale Dirac K-Algebra

Folgende Darstellung der Dirac'schen Gamma Matrizen wird verwendet:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die K-Algebra $\boldsymbol{D}_4$ lautet dann nach (7.24):

$$\boldsymbol{D}_4^T = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den zugehörigen Dirac Operator,

$$P_0 = \mathrm{i}\,\gamma^{\mathrm{k}}\partial_{\mathrm{k}}$$

ergeben sich dann folgende verallgemeinerte Cauchy Riemann Zwangsbedingungen, wobei der gelistete Vektor gleich dem entsprechenden Nullvektor zu setzen ist:

$$\begin{pmatrix}
3\,\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
3\,\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_3 \\
-\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_4 \\
3\,\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 - \partial_1\varphi_4 \\
-\partial_4\varphi_1 + 3\,\partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
-\partial_1\varphi_2 + 3\,\partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 + (3\,\partial_2 + \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\mathrm{i}(\partial_2\varphi_1 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 - \partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_4\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + \partial_1\varphi_3) \\
\mathrm{i}(\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 - \partial_4\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_1\varphi_1 + \partial_4\varphi_3 + (\partial_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4) \\
3\,\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
\partial_2\varphi_1 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4 \\
-\partial_1\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + 3\,\partial_4\varphi_4
\end{pmatrix} = 0$$

A.8) SU (3) Gell-Mann λ-Matrizen

Die Strukturkonstanten der acht dimensionalen K-Algebra der λ-Matrizen ergeben sich aus der Beziehung:

$$A_l^{jk} = \frac{1}{4\mathrm{i}}\,Spur([\lambda_{\mathrm{j}}\,, \lambda_{\mathrm{k}}]\,\lambda_{\mathrm{l}})$$

Hier existieren dann Gl. (7.21) zwei händische *P* Operatoren mit der Eigenschaft:

$$\Rightarrow P_l : \lambda \;\; = \; -P_r : \lambda$$

$$P_r : \lambda \; =$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{\partial_3}{3} & -\frac{\partial_2}{3} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_3}{3} & 0 & \frac{\partial_1}{3} & \frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 \\
\frac{\partial_2}{3} & -\frac{\partial_1}{3} & 0 & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_6}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 & \frac{\partial_3}{6}+\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\partial_1}{6} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} \\
-\frac{\partial_5}{6} & \frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & 0 & \frac{\partial_8}{2\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{6} & -\frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} & 0
\end{pmatrix}$$

Die verallgemeinerten Cauchy-Riemann Gleichungen sind hier für beide händischen Operatoren identisch wobei der gelistete Vektor gleich Null zu setzen ist:

$$
\begin{pmatrix}
\partial_1\varphi_1 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_2}{3}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_3}{3}-\frac{\partial_6\varphi_4}{6}-\frac{\partial_7\varphi_5}{6}+\frac{\partial_4\varphi_6}{6}+\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{11\,\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_1\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_2}{3}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_2\varphi_2 \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{2\,\partial_2\varphi_3}{3}+\frac{\partial_7\varphi_4}{6}-\frac{\partial_6\varphi_5}{6}+\frac{\partial_5\varphi_6}{6}-\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{11\,\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_2\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_3}{3}+\frac{\partial_6\varphi_4}{6}+\frac{\partial_7\varphi_5}{6}-\frac{\partial_4\varphi_6}{6}-\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{\partial_2\varphi_3}{3}-\frac{\partial_7\varphi_4}{6}+\frac{\partial_6\varphi_5}{6}-\frac{\partial_5\varphi_6}{6}+\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
\partial_3\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_3\varphi_8 \\
\frac{11\,\partial_4\varphi_1}{12}-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_4\varphi_4 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{2\,\partial_4\varphi_5}{3}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_6}{12}-\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}-\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1+\frac{11\,\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{2\,\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{\partial_4\varphi_5}{3}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_5\varphi_5 \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}-\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}-\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1+\frac{11\,\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_6\varphi_4}{12}-\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}-\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\partial_6\varphi_6 \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{2\,\partial_6\varphi_7}{3} \\
-\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{3\,\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_7\varphi_1}{12}-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}-\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}-\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{2\,\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{\partial_6\varphi_7}{3} \\
\partial_7\varphi_7 \\
-\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{3\,\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_1 \\
\partial_8\varphi_2 \\
\partial_8\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_8
\end{pmatrix} = 0
$$

Referenzen

[1] Geometrie und Erfahrung, A.Einstein, *Preussische Akadamie der Wissenschaften,* Berlin*,* 1921

[2] Rechnender Raum, K.Zuse, *Elektronische Datenverarbeitung*, Bd. 8, pp 336, 1967

[3] Conference of Physics of Computation, USA Boston 1981 May 6-8

[4] The Theory of Positrons, R.Feynman, *Physical Review* 76, pp 749, 1949

[5] Logik der Forschung, *Buchreihe Wiener Kreis*, K. Popper, 1934

[6] The Quantum Theory of the Electron, P.Dirac, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1928

[7] Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, W.Pauli, *Zeitschrift für Physik*, Bd. 43, S. 601, 1927

[8] Symmetries of baryons and mesons, M.Gell-Mann, *Physical Review 125 (3) 1067,* 1962

[9] A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, J.C. Maxwell, *Royal Society Transactions*, 155, pp 459–512, 1865

[10] Die funktionentheoretischen Beziehungen der Maxwell Aethergleichungen, *Dissertation*, K.Lánczos, Technische Hochschule Budapest, 1919

[11] Über den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Riemannschen und Diracschen Differentialgleichungen, D.Iwanenko und K.Solsky, *K. Z. Physik 63*: 129, Universität Leningrad und Charkow, 1930.

[12] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, A.Einstein, *Annalen der Physik*, 4.Folge Bd. 44, pp50, 1916

[13] Sur la dynamique de l'électron, H.Poincaré, Henri, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 21, S. 129–176,1906

[14] On the reciprocal of the general algebraic matrix, E.H. Moore, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26, 395-395, 1920 / A generalized inverse for matrices, R. Penrose, *Proceedings of the Cambridge Philosophical society*, 51, 406-413, 1955

[15] Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products, H.Neudecker, *Journal American Statistics Assoc*., Volume 64 pp 953-963, 1969

[16] Some consequences of a theorem of Bott, J.Milnor, *Annals of Mathematics*, Band 68, S. 444–449, 1958