ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

EINE MATHEMATISCHE KONSTRUKTION DES VAKUUMS

ROBERT HANS IHDE[†]
MÜNCHEN (DEUTSCHLAND), AUGUST 2018

ZUSAMMENFASSUNG

Alle Algebren der Quantentheorie sind Algebren über einen Körper oder kurz K-Algebren einer binären Operation, welche als konstante Invarianten über der Poincaré Gruppe definiert sind. Die in der klassischen Geodäten-Gleichung vorkommenden Christoffelsymbole können gleichfalls als Darstellung einer K-Algebra aufgefasst werden. Im Unterschied zu den konstanten Algebren der Quantentheorie ist die K-Algebra der Christoffelsymbole eine Funktion der Raum-Zeit. Eine mathematische, konforme Vereinigung von Geometrie und Algebra erfordert für die Quanten Algebren eine entsprechende Abhängigkeit von der Raum-Zeit. Unter der Annahme der Existenz eines algebraischen Feldes, welches auf einer sich ändernden, binären Operation basiert und mit der Domäne rückgekoppelt ist, kann eine quantenmechanische Vakuumgleichung für die Gravitation aufgestellt werden. Die Vakuumgleichung folgt strukturell einem verallgemeinerten, pseudo-linearen Dirac-Maxwell System mit zusätzlichen, algebraischen Zwangsbedingungen. Eine physikalische Existenz des algebraischen Feldes, als Gegenstück zum geometrischen Feld der Gravitation, kann durch das Experiment prinzipiell falsifiziert werden. Der Anteil des Spins am magnetischen Moment eines Teilchens wäre dann abhängig von dessen Beschleunigung, da das algebraische Feld die Spin-Algebra entsprechend beeinflussen sollte.

1. EINLEITUNG

"Wie ist es möglich, daß die Mathematik,
die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens ist,
auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt?"

Auf diese erkenntnistheoretische Frage von Albert Einstein[1] hatte Konrad Zuse[2] eine einfache informationstheoretische These (IT) als Antwort. Die Natur könnte auf kleinster Ebene bereits selbst wie ein algebraischer Rechner funktionieren. Der Ansatz von Zuse eines klassischen Computers berücksichtigt allerdings keine quantenmechanischen Prinzipien[3] und auch die Verbindung zur Gravitation blieb offen. Die Feynman/Stückelberg Y-Graphen[4] der Wechselwirkung von zwei Elementarteilchen, z.B. die Annihilation eines Elektrons mit einem Positron zu einem Photon, wird im IT Bilde als Fingerzeig der Natur auf eine tiefer liegende, binäre Operation verstanden, welche dann auf der Planck Länge ($\approx 10^{-33}$ cm) stattfindet. Bei einer heute verfügbaren Energie von circa 14 Tev, wäre jede heute auflösbare Wechselwirkung dann immer noch ein Paket aus mehreren Billiarden solcher kleinsten Operationen.

Die Welt eines modernen, fast schon Natur getreuen, Computer Spiels auf dem Monitor und was sich dabei parallel auf dem Prozessor und der Hauptspeicher Ebene tut, scheinen zwei komplett getrennte Welten zu sein, doch eine bedingt die andere. Eine ähnliche Situation tritt auf, wenn man die aktuelle Elementarteilchen Physik mit einer spekulativen IT Physik auf der Planck Ebene in Verbindung setzen will. Deswegen werden gleichzeitig mit der Mathematik auch Analogien und neue Sichtweisen vermittelt, um den Einstieg in die algebraische Denkweise im Bezug zur Physik zu erleichtern. Dieses ist nicht unbedingt erforderlich, war aber als Leitbild zur Entwicklung dieser Theorie hilfreich. Letztlich ist aber nur die hier vorgebrachte Mathematik von Bedeutung und das Experiment ist entscheidend, unabhängig vom konkreten Bild.

Beruhen die Begriffe „Realität" und „Virtualität" auf den gleichen mathematischen Grundprinzipien und ist das experimentell beweisbar?

Nach Karl Popper[5] kann eine physikalische Theorie grundsätzlich nicht bewiesen, sondern nur falsifiziert werden. Diese Arbeit soll daher den durch Konrad Zuse inspirierten Weg fortsetzen, hin zu einer falsifizierbaren, algebraischen Feldtheorie.

[†] roberthans.ihde@gmail.com, Entwurf, Änderungen u. Fehlerkorrekturen vorbehalten

ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

Der hier vorgestellte Ansatz liegt abseits aller derzeitigen Hauptrichtungen der Physik. Diese Theorie soll aber nicht im Gegensatz dazu verstanden werden, sondern als Restriktion aus algebraischer Sicht, ähnlich wie höhere Programmiersprachen letztlich in die Maschinensprache münden.

Zur Realisierung dieser Theorie wird eine axiomatische Herangehensweise von unten nach oben gewählt. Es wird nur eine verallgemeinerte binäre Operation vorausgesetzt, welche durch beliebige K-Algebren vermittelt wird, die sich selbst in Abhängigkeit der Domäne ändern können. Alles Weitere wird von diesen wenigen Axiomen abgeleitet.

Binäre Operationen lassen sich verallgemeinern durch K-Algebren, welche durch eine erzeugende Basis konstruiert werden können. K-Algebren tragen in der Quantentheorie wesentlich zu deren Eigenschaften bei, beispielsweise die Dirac'schen γ-Matrizen in der Dirac Gleichung[6] für das Elektron, die Pauli'schen σ-Matrizen[7] für den Spin oder die Gell-Mann'schen λ-Matrizen[8], welche die Quark Farbsymmetrien beschreiben. Es gibt weitere strukturelle Anhaltspunkte in der Physik, welche eine algebraische Sichtweise unterstützen. Die Maxwell-Gleichungen[9] können als verallgemeinerte Cauchy-Riemann Gleichungen aus einem Teilraum der Bi-Quaternionen als Erzeugende hergeleitet werden[10]. Die Dirac Gleichung selbst kann auch als Cauchy-Riemann System[11] der γ-Matrizen aufgefasst werden. In der Physik werden solche Systeme daher auch „Dirac-Maxwell“ Systeme genannt. Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie[12] haben die Eigenschaft der Winkelerhaltung unter physikalischen Transformationen, eine genuine Eigenschaft von konformen Cauchy-Riemann Systemen. Diese mathematischen Fakten weisen bereits in die Richtung, dass die Formelstrukturen der Quantenmechanik und der Gravitation letztlich ihren Ursprung in algebraischen Zwangsbedingungen einer verallgemeinerten binären Operation haben können, die durch K-Algebren bestimmt ist. Dazu muss sich die K-Algebra selbst in Form eines algebraischen Feldes ändern können und zudem eine Rückkopplung zur Domäne vorliegen. Das hierzu komplementäre Bild ist das eines einfachen programmierbaren Transistors (oder auch künstliches Neuron) mit zwei Eingängen und einem Ausgang. Der Ausgang ist determiniert durch die zwei Eingänge aber auch durch die sich ändernden Gewichte der K-Algebra, welche ihrerseits von der Domäne abhängen. Es wird im Folgenden gezeigt, dass so ein Konstrukt einem pseudo-linearen Cauchy-Riemann System (math.) oder Dirac-Maxwell System (phys.) folgt.

Um das Gesamtbild zu verdeutlichen soll dies zunächst am Beispiel der komplexen Zahlen demonstriert werden. Eine komplexe Zahl lässt sich auch als pseudo-skalares Produkt zwischen dem Vektor der Erzeugenden (e, i) und einem Vektor der reellen Körperzahlen umschreiben, wobei der Operator T die Transponierte einer Matrix oder Vektors symbolisiert. Dabei wird oft in der Literatur die komplexe Eins mit der reellen Eins aufgrund der gleichen algebraischen Eigenschaften identifiziert (e ≡ 1). Im mathematischen, strengen Sinne sind alle Erzeugenden immer von anderer Art als die reellen Zahlen.

$$2\,\mathrm{e} + 3\,\mathrm{i} = \begin{pmatrix}\mathrm{e}\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Damit eignet sich dieses Konzept auch für die mathematische Beschreibung eines Speichers (die Erzeugenden repräsentieren hier zwei Zellen) mit den jeweiligen internen Zuständen (den reellen Zahlen).

Die K-Algebra $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann mit Hilfe des Vektors der erzeugenden Basis und des Kronecker/Zehfuss-Produkts (Symbol $\otimes$) wie folgt als binäre Operation abgebildet werden (klassische Konstruktion einer K-Algebra aus den erzeugenden Basiselementen mittels einer Einbettung in die Domäne). Die Erzeugenden erhalten so erst ihre eigentliche Bedeutung. Anmerkung: In der quantenmechanischen Sichtweise wird aus einem Zustand (rechte Seite) mittels der rechteckigen Matrix als Aufsteige Operator dann zwei Zustände (linke Seite) erzeugt (in der Bra-Ket Schreibweise: $|\beta,\beta\rangle = A|\beta\rangle$). Ein algebraisches Feld ist damit auch als Auf- oder Absteigeoperator Feld interpretierbar.

$$\begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Alle acht Gewichte der rechteckigen Matrix bestimmen eindeutig die K-Algebra der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Bei Änderung dieser Gewichte erhält man jeweils andere Zahlensysteme, d.h. eine andere K-Algebra.

Die komplexe Multiplikation kann frei von den Erzeugenden, durch die Kombination der rechteckigen Matrix mit dem Kroneckerprodukt, nur mittels der Vektoren der Körperzahlen bestimmt werden (dies folgt bereits aus der Definition1.2 und 1.1).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T \cdot (p \otimes q) = r \qquad p, q, r \in \mathbb{R}^2 \tag{1.3}$$

Die Geodäten Gleichung folgt der gleichen Struktur, wenn man die Christoffelsymbole in eine entsprechende, rechteckige 16x4 Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ abbildet und dann in Form eines Matrix-Vektor Produkts bringt. Der Zusammenhang $\boldsymbol{\Gamma}$ ist dann als Raum-Zeit abhängige K-Algebra interpretierbar. Der Punkt über den Ortsvektor q bezeichnet die Ableitung nach der Eigenzeit.

$$-\boldsymbol{\Gamma}^T(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \tag{1.4}$$

Ein weiterer heuristischer Hinweis auf eine Verbindung zwischen Algebra und Metrik sind die Dirac'schen γ-Matrizen als Erzeugende. Diese ergeben sich als Divisionsalgebra aus der linearisierten Klein-Gordon-Gleichung aus der Minkowski Metrik. Dabei muss folgende Zwangsbedingung[6] mit Hilfe der Anti-Kommutatoren Klammern erfüllt sein:

$$\frac{1}{2}\{\gamma^j, \ \gamma^k\} = G^{jk}E \tag{1.5}$$

Diese Auffälligkeiten sind jetzt die mathematische Motivation um auf eine allgemeinere physikalische Relation zwischen einer beliebigen K-Algebra als algebraisches Feld und der Metrik zu schließen. Während Dirac von einer definiten, konstanten Metrik ausgegangen ist, um damit auf die notwendige Algebra zu schließen, wird hier der umgekehrte Weg gegangen. Es wird untersucht unter welchen mathematischen Bedingungen ein lokales, algebraisches Feld ein weiteres lokales, metrisches Feld als geometrische Erhaltungsgröße induziert, welches dann für jeden Beobachter eine Erhaltungsgröße ist[13].

2. DEFINITIONEN

Für die Formulierung der algebraischen Feldtheorie ist keine neue Mathematik notwendig, aber der Einsatz von verschiedenen mathematischen Werkzeugen, die in der Physik derzeit nicht sehr verbreitet sind. Das betrifft den Einsatz des rechteckigen Matrizen Calculus im Zusammenspiel mit dem Kroneckerprodukt sowie der Verwendung von Shift Index Operatoren, im Folgenden `RKS Notation` genannt. Die RKS Notation ist für die Programmierung optimiert und reduziert gleichzeitig den Umfang der Formelschreibung für die algebraische Feldtheorie. Folgende weitere Schreibweisen werden angewendet. Standard klein geschriebene Buchstaben wie `x` seien Variablen aus den Körperzahlen, kursiv klein geschriebene Standard Buchstaben wie `$q$` sollen Vektoren darstellen. Kursiv groß geschriebene Buchstaben wie `$M$` sollen Standard quadratische Matrizen bezeichnen, Kursiv fett und groß geschriebene griechische Buchstaben wie `$\boldsymbol{A}$` oder `$\boldsymbol{\Gamma}$` sollen rechteckige Matrizen repräsentieren. Das griechische kleine `$\beta$` wird für den Vektor der erzeugenden Basis reserviert, um zu symbolisieren, dass dieser Vektor von anderer Art ist als die Vektoren, welche über dem Körper definiert sind. Die in der Physik übliche Einstein'sche Summenkonvention sowie die üblichen Symbole für Differentialoperatoren werden verwendet, insoweit keine Mehrdeutigkeiten auftreten. Im Weiteren werden die euklidischen Einheitsvektoren mit `$e$` und die quadratische Einheitsmatrix mit `$E$` bezeichnet. Bei Übergang zu affinen Mannigfaltigkeiten sind diese als ortsabhängiges Vielbein entsprechend zu verallgemeinern, mittels ersetzen von $e_j \rightarrow e_j(q)$, d.h. alle Operatoren sind im Allgemeinen abhängig von der Domäne. Ausnahmen von dieser Schreibweise sind bekannte Entitäten wie z.B. die Dirac'schen Gamma Matrizen `$\gamma$`.

Definition für einen Vektor aus den Körperzahlen

$$q := \mathrm{q}^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\mathrm{j} \in \mathbb{N},\ \mathrm{q}^{\mathrm{j}} \in \mathbb{K},\ e_{\mathrm{j}} \in \mathbb{K}^{\mathrm{n}},\ e^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{k}} = \delta^{\mathrm{j}}_{\mathrm{k}}) \tag{2.1}$$

Definition des Vektors der erzeugenden Basis („atomare Speicherzellen")

$$\beta := \beta^{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}} \qquad (\beta^{\mathrm{j}} \notin \mathbb{K} \wedge \mathrm{d}\beta^{\mathrm{j}} = \partial\beta^{\mathrm{j}} := 0 \in \mathbb{K}) \tag{2.2}$$

Anmerkung: Diese Definition resultiert aus der Verallgemeinerung des Symbols `i` für die komplexen Zahlen. Die infinitesimale Differenz von `i` verschwindet, da dieses Symbol eine atomare Größe ist. Im IT Bild werden die β^{j} als atomare Speicherzellen aufgefasst, die selbst nicht der Raum-Zeit angehören und keine weiteren topologischen Annahmen benötigen. Damit ist der metrische Operator für das hoch- und runterziehen der Indizes nur für (2.1) möglich. Für (2.2) ist ein eigener Konjugationsoperator notwendig, welcher später aus der K-Algebra direkt hergeleitet wird, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind. Die metrische Raum-Zeit wird ausschließlich durch die algebraischen Relationen zwischen den atomaren Speicherzellen virtuell erzeugt, vergleichbar einem Computerspiel. Die einzelnen Zellen dürfen nicht mit einer quantisierten Raum-Zeit gleichgesetzt werden. Diese sind als Freiheitsgrade zu betrachten. Die Postulate für die Quantisierung werden nicht vorausgesetzt, sondern im Folgenden als spezifische Variante aus der Klasse aller algebraischen Feldtheorien identifiziert.

Definition einer verallgemeinerten komplexen Zahl („Speicherzustand")

$$\tilde{q} := \beta^T q = q^T \beta \tag{2.3}$$

Definition der Abbildung von Variablen mit Triple-Indizes zu einer rechteckigen Matrix

$$\boldsymbol{A} := \left(e_{\mathrm{j}} \otimes e_{\mathrm{k}} \otimes e^{l}\right) \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \qquad \mathrm{a}^{\mathrm{jk}}_{\mathrm{l}} \in \mathbb{K} \tag{2.4}$$

Zur Verdeutlichung ein Beispiel für eine beliebige, zweidimensionale K-Algebra:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1^{11} & \mathrm{a}_2^{11} \\ \mathrm{a}_1^{12} & \mathrm{a}_2^{12} \\ \mathrm{a}_1^{21} & \mathrm{a}_2^{21} \\ \mathrm{a}_1^{22} & \mathrm{a}_2^{22} \end{pmatrix} \quad \text{z.B. für die komplexen Zahlen } \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Verwendung von Standard komplexen Zahlen bereits als Körperzahlen, wie in der Physik üblich, hat u.U. Nachteile bei der Behandlung oder bei expliziten Computer Berechnungen mit algebraischen Operatoren. Im Anhang (A.1) ist eine Prozedur beschrieben, die kartesische Produkte von K-Algebren (z.B. Bi-Quaternionen) immer zu einer entsprechenden, höher dimensionalen Algebra über den reellen Zahlen abbildet.

Zusätzlich zum Superscript Operator ´*T*´ der Transponierung werden noch drei weitere Superscript Operatoren für die RKS Notation benötigt.

Der Operator ´*I*´ soll die Moore-Penrose Inverse[14] einer rechteckigen Matrix darstellen, welcher über folgende pseudo-inverse Eigenschaft definiert ist. Bei einer normalen quadratischen Matrix bedeutet das gleiche Symbol die übliche Matrixinverse.

$$\boldsymbol{A}^I = \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^I \quad \wedge \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{A}^I \boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

Aus den sechs möglichen Permutationen der dreiwertigen Indizes (inklusive der Identität) können bereits zwei Index Shift Operatoren als Basis herausgegriffen werden. Der erste Operator tauscht die ersten beiden Indizes bilateral gegeneinander von links aus gesehen aus, der zweite Operator schiebt jeden Index um eine Position nach rechts. Dabei ist zu beachten, dass die klassischen Index-Shifts (in Klammern) nur für euklidische Metriken gültig sind.

Definition Superscript Shift Operator B (“bilateraler Shift”)

$$\boldsymbol{A}^B := \left(e^{\mathrm{j}} \otimes E \otimes e_{\mathrm{j}}\right) \boldsymbol{A} \qquad (\mathrm{a}_\mathrm{l}^{\mathrm{jk}})^B = \mathrm{a}_\mathrm{l}^{\mathrm{kj}} \tag{2.6}$$

Definition Superscript Shift Operator R (“rechter Shift, rotieren mit übertragen”)

$$\boldsymbol{A}^R := ((e^{\mathrm{j}})^T \otimes E)\, \boldsymbol{A}^T \left(E \otimes e_{\mathrm{j}}\right) \qquad (\mathrm{a}_\mathrm{l}^{\mathrm{jk}})^R = \mathrm{a}_\mathrm{k}^{\mathrm{lj}} \tag{2.7}$$

Beim sequentiellen Ausführen der Superscript Operatoren ist auf die Position zu achten bzw. auf deren Vertauschungsregeln (A.2). Die Reihenfolge der Ausführung ist immer von links nach rechts zu lesen.

$$\boldsymbol{A}^{BRI} := ((\boldsymbol{A}^B)^R)^I \tag{2.8}$$

Die Definitionen der Shift Operatoren implizieren bereits Relationen (A.2) und im Zusammenspiel mit den Kroneckerprodukt sind weitere Identitäten ableitbar (A.3).

Die Neudecker Vektor Funktion[15] zur Umformung einer beliebigen Matrix zu einem Vektor, sortiert nach den Spalten, ist wie folgt definiert.

$$vec(\boldsymbol{A}) := \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}_s} \left(e_{\mathrm{j}}(\mathrm{n}_s) \otimes E(\mathrm{n}_z \times \mathrm{n}_z)\right) \boldsymbol{A}(\mathrm{n}_z \times \mathrm{n}_s)\; e_{\mathrm{j}}(\mathrm{n}_s) \tag{2.9}$$

Eine allgemeine Konstruktion einer K-Algebra aus einer erzeugenden Basis kann mit folgender Definition gewährleistet werden. Dabei steht der Sub Index am Kronecker Symbol als Merker für die K-Algebra, mit welcher das Kroneckerprodukt auf der linken Seite mit dem jeweiligen Kontext einer zugehörigen rechteckigen Matrix auf der rechten Seite zu ersetzen ist.

Im Folgenden wird daher der verkürzte Begriff „Algebra“ oder „algebraisches Feld“ verwendet, als Synonym für die Darstellung einer von der Domäne abhängigen K-Algebra, mittels einer rechteckigen Matrix (siehe 1.2 für die komplexen Zahlen).

$$\beta \ \otimes_{\mathbb{A}} \beta \ := \boldsymbol{A}\,\beta \tag{2.10}$$

Ein affiner Zusammenhang kann nun nach dem gleichen Schema definiert werden, mittels des Levi-Cevita Operator ∇ und dem metrischen Tensor G (A.4). Hier wird der erzeugende Basisvektor als lokaler Rahmen zur Definition der Christoffelsymbole als rechteckige Matrix $\boldsymbol{\Gamma}$ verwendet.

$$(G\,\nabla) \otimes \beta := \boldsymbol{\Gamma}\,\beta \tag{2.11}$$

Dieses ermöglicht die Definition einer Ableitung, minimal gekoppelt mit $\boldsymbol{\Gamma}$, welche in die rechteckige Matrizenform gehoben wird, um später zu einer basisfreien Darstellung zu kommen (es folgt hieraus $\boldsymbol{\nabla}\beta = 0$).

$$\boldsymbol{\nabla} := (G\,\nabla) \otimes E - \boldsymbol{\Gamma} \tag{2.12}$$

Das Modell eines Computers mit nur einem Speicher erzwingt die Identifizierung des Dualraums mit dem Ausgangsraum. Anti-Teilchen und Teilchen befinden sich in der gleichen Raum-Zeit. Komplexe Zahlen folgen dem „ein Speicher“-Prinzip, denn der Dualraum der komplexen Zahlen ist identisch mit dem der komplexen Zahlen. Die duale Basis der Erzeugenden wird in der algebraischen Feldtheorie mit der Hilfe der pseudo-inversen Basis formuliert. Aufgrund der Identität des Dualraums mit dem originären Raum ist die pseudo-inverse Basis auch mittels der ursprünglichen Basis ausdrückbar.

Die entsprechende Transformationsmatrix ist dann der gesuchte Operator für die Konjugation und wird hier verallgemeinert.

$$\begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{I} = \tfrac{1}{2}\,(e \quad -i) = \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}^{T} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \tfrac{1}{2} \quad \text{(komplexe Zahlen)} \tag{2.13}$$

$$\beta^{I} := \beta^{T} \cdot K_{\mathbb{A}} \cdot \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \quad (K_{\mathbb{A}}, \mathrm{m}_{\mathbb{A}} \in \mathbb{K})$$

$K_{\mathbb{A}}$ steht dabei für den von der Algebra abhängigen Konjugationsoperator und $\mathrm{m}_{\mathbb{A}}$ steht für den von der Algebra induzierten metrischen Eichkoeffizienten. In Kapitel 5 wird später gezeigt, dass die Existenz einer Konjugation zusätzlichen Zwangsbedingungen unterliegt.

Für den metrischen Eichkoeffizienten der Domänen Basis wird die pseudo-Riemannsche Metrik angenommen, damit strukturell gleich zur algebraischen Basis (2.13), wenn man die Körper-Eins hinzufügt. Der metrische Tensor G wird damit als Konjugationsoperator der Domäne aufgefasst:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{2}(q)\, 1_{\mathbb{K}} := q^{T}\ G\ q \tag{2.14}$$

Wenn eine duale algebraische Basis verfügbar ist, lässt sich analog den komplexen Zahlen eine verallgemeinerte, inverse komplexe Zahl wie folgt definieren:

$$\tilde{q}^{I} := \beta^{I} q\, \mathrm{m}_{\mathbb{K}}^{-2}(q) \tag{2.15}$$

3. ALLGEMEINES

Jede K-Algebra einer binären Operation, welches mittels der Definitionen (2.3) und (2.10) konstruiert ist, kann als Kombination eines rechteckigen Matrizen-Vektor Produkts und des Kronecker-Produkts dargestellt werden.

$$\tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = (\beta^T p) \otimes_{\mathbb{A}} (\beta^T q) = (\beta^T \otimes_{\mathbb{A}} \beta^T)(p \otimes q) = \beta^T \boldsymbol{A}^T (p \otimes q) \tag{3.1}$$

Die binäre Operation kann auch in der Reihenfolge umgedreht werden, in dem man zur bilateral geshifteten K-Algebra übergeht.

$$\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{p} = \tilde{p} \otimes_{\mathbb{A}^B} \tilde{q} \tag{3.2}$$

Daraus folgt, das eine K-Algebra kommutativ ist, wenn gilt:

$$\boldsymbol{A}^B = \boldsymbol{A} \tag{3.3}$$

Lösungen für algebraische Probleme haben daher in der Regel eine links- und rechtshändige Version, wenn die K-Algebra nicht kommutativ ist. Im Folgenden wird jeweils nur eine händische Lösung angegeben. Die jeweils andere kann einfach durch die Ersetzung der rechteckigen Matrix $\boldsymbol{A} \longmapsto \boldsymbol{A}^B$ in der Lösung ermittelt werden.

Mittels der *vec* Funktion und der Jacobi Matrix Darstellung des Levi-Cevita Operators, kann die Beziehung (2.11) symbolisch wie folgt umgeschrieben werden:

$$vec\left(\frac{d\beta}{dq}\right) = vec(\nabla^T \otimes \beta) = \nabla \otimes \beta = (G^I \otimes E)\ \boldsymbol{\Gamma}\,\beta \tag{3.4}$$

Damit lässt sich die infinitesimale, totale Levi-Cevita Differenz von β ermitteln unter Ausnutzung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3):

$$d\beta = ((G^I \otimes E)\ \boldsymbol{\Gamma})^T (dq \otimes E)\,\beta := dQ\,\beta \tag{3.5}$$

Das hat Auswirkungen auf (2.10). Betrachtet man diese infinitesimale Änderung des Ausdrucks, so muss für die um $d\beta$ infinitesimal um dq verschobene, neue Basis gelten:

$$(\beta + d\beta) \otimes_{\mathbb{A}+d\mathbb{A}} (\beta + d\beta) = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})(\beta + d\beta) \tag{3.6}$$

Die Terme der zweiten Ordnung fallen auf beiden Seiten weg, dann folgt:

$$(\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A}\beta = (\boldsymbol{A} + d\boldsymbol{A})\beta + \boldsymbol{A}dQ\beta \tag{3.7}$$

Damit das erfüllt wird muss gelten:

$$\boldsymbol{A}dQ = (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\ \boldsymbol{A} \tag{3.8}$$

Für die totale Differenz der Algebra zusammen mit (3.8) folgt:

$$d\boldsymbol{A} = \partial\boldsymbol{A} + (E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \partial\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{A}dQ \tag{3.9}$$

Im Weiteren gilt auch:

$$d(\beta \otimes_{\mathbb{A}} \beta) = d\boldsymbol{A}\,\beta + \boldsymbol{A}d\beta \tag{3.10}$$

Daraus folgt mittels (3.8):

$$(E \otimes dQ + dQ \otimes E)\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}dQ = \boldsymbol{A}dQ \tag{3.11}$$

Das kann nur erfüllt werden, wenn für die Algebra gilt:

$$d\boldsymbol{A} = 0 \tag{3.12}$$

Daraus folgt aber sofort aus Gleichung (3.9):

$$\partial \boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{A}dQ \tag{3.13}$$

Damit (3.6, 3.10) beide erfüllt sind, muss zwischen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{\Gamma}$ folgendes gelten:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial q}\right) = -\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\Gamma}^T(G^I \otimes E) \tag{3.14}$$

Die Ursache der geometrischen Raum-Zeitverzerrung ist nach der Allgemeinen Relativitätstheorie der Energie-Impuls-Tensor. In der algebraischen Feldtheorie wird die Gravitation mit einem sich ändernden algebraischen Feld gekoppelt, ähnlich der Kopplung eines magnetischen Feldes zu einem elektrischen. Der Operator $\boldsymbol{\Gamma}$ muss nach (3.14) verschwinden, wenn das algebraische Feld konstant und ungleich Null ist oder ein Extremum erreicht.

Die Standard Ableitung des Operators $\boldsymbol{\Gamma}$ aus der Metrik G für eine holonome Basis (hier in der RKS Notation) ist wie folgt:

$$\boldsymbol{\Gamma} = ½\left((G\,\nabla \otimes G) - (G\nabla \otimes G)^R + (G\nabla \otimes G)^{RR}\right) G^I \tag{3.15}$$

Die Gleichung (3.14) kann dann auf der rechten Seite durch diese Beziehung ersetzt werden und ergibt dann eine nicht lineare Differentialgleichung erster Ordnung für das algebraische Feld. Falls der metrische Tensor selbst eine Funktion des algebraischen Feldes ist, sozusagen die „Selbst-Wechselwirkung“ des Vakuumzustandes, dann hängt diese Differentialgleichung nur noch von der Algebra ab (siehe Kapitel 6). Dies ist für die spätere Vakuumlösung als eine Zwangsbedingung zu berücksichtigen. Bei der Wechselwirkung mit einem externen metrischen Feld kann der Tensor G auch alternativ semi-klassisch über die allgemeine Relativitätstheorie bestimmt werden.

$$\frac{\partial A}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\; G^I\left((\,\nabla^T \otimes G) - (\nabla^T \otimes G)^R + (\nabla^T \otimes G)^{RR}\right) \tag{3.16}$$

Die Gleichung muss dann auch gültig für alle Quantenalgebren sein. Diese müssten sich unter hohen Beschleunigungen oder bei starker Gravitation entsprechend ändern und damit kann man diese mathematisch begründete Spekulation der Existenz von algebraischen Feldern physikalisch falsifizieren. Ohne die expliziten Lösungen zu kennen kann man den Effekt zumindest strukturell schon abschätzen.

Für ein Teilchen, welches sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt mit Radiusvektor r, gilt in klassischer Näherung die Geodäten Gleichung:

$$-\boldsymbol{\Gamma}^T(\dot{q} \otimes \dot{q}) = \ddot{q} \;\approx\; \frac{c^2}{|r|^2}\,r \;= -\boldsymbol{\Gamma}^T(c \otimes c)\;\; \text{mit } c^T r = 0 \tag{3.17}$$

Wenn das Teilchen jetzt zwei unterschiedliche Radien durchläuft, sollte die Änderung des geometrischen Feldes damit in erster Näherung abhängig vom Betrag der Differenz der beiden unterschiedlichen Radien sein, wenn die Differenz klein gegenüber dem Gesamtradius ist.

$$|\delta\boldsymbol{\Gamma}| \;\approx \frac{|\delta r|}{|r|^2} \qquad \delta r \ll r \tag{3.18}$$

Diese Relation eingesetzt in Gleichung (3.16) ergibt dann näherungsweise für die Änderung der Algebra mit dabei einem zu bestimmenden experimentellen Faktor n_{exp}:

$$\delta\boldsymbol{A} \approx \mathrm{n}_{exp}\,\boldsymbol{A}\,|\delta r|^2 \tag{3.19}$$

Das magnetische Moment *u* eines Elektrons, ergibt sich als Summe aus dem Moment des Bahndrehimpulses *l* und des Spins *s* und dem Landé-Faktor g_L (mit e=Ladung, m=Masse):

$$u = \frac{e}{2m}(l + g_L \cdot s) \tag{3.20}$$

In der Quantentheorie ist die Differenz des magnetischen Moments zwischen zwei verschiedenen Bahnradien nur vom Bahndrehimpuls abhängig, da der Spin nicht vom Radius bzw. von der jeweiligen Beschleunigung (Zentrifugalkraft) abhängt:

$$\delta u_{QT} = \frac{e}{2m}\delta l \tag{3.21}$$

Die algebraische Feldtheorie sagt einen zusätzlichen Term voraus, welcher von der Änderung der Spin K-Algebra herrührt. Aus Sicht der derzeitigen Quantentheorie würde dies wie eine Änderung des Landé-Faktors in Abhängigkeit des Bahnradius aussehen:

$$\delta u_{AF} \approx \frac{e}{2m}\left(\delta l + g_L n_{exp}|\delta r|^2 s\right) \tag{3.22}$$

4. ALGEBRAISCHE IDENTITÄTEN

In erster Ordnung interagiert das Vakuum nicht mit anderen Zuständen. In der algebraischen Sichtweise kann dies nur ein neutrales Element sein. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten, die algebraische „Eins" oder die algebraische „Null". Letztere kann für das Vakuum ausgeschlossen werden, da der Nullzustand jeden anderen Zustand auslöscht. Innerhalb der Quantentheorie wird der Nullzustand kaum erwähnt, da trivialerweise die Wahrscheinlichkeit dort exakt Null beträgt. Das „Nichts" gibt es nicht. In einer algebraischen Feldtheorie der Gravitation ist dieses aber im Allgemeinen nicht mehr ausgeschlossen. Falls keine weiteren Zusatzannahmen getroffen werden, können neben der „globalen" Null theoretisch noch zusätzliche „lokale" Nullzustände mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit existieren. Das scheint zunächst eine physikalische Abstrusität zu sein. Es würde bedeuten, dass die Raum-Zeit vernichtet werden könnte. In der Quantentheorie können Teilchen aus dem Vakuum erzeugt und wieder vernichtet werden und damit wäre diese Eigenschaft eine verständliche Konsequenz für eine Quantengravitation, die auf die Raum-Zeit selbst übertragen wird. Die andauernde Expansion des Universums ist ein Beleg das Raum und Zeit kontinuierlich erschaffen wird. Was erschaffen werden kann sollte daher auch zerstört werden können. Dieses widerspricht auch nicht der speziellen sowie der allgemeinen Relativitätstheorie, denn beide Theorien setzen klassisch eine stabile und zusammenhängende Raum-Zeit ohne „Löcher" voraus. Der Tunnel Effekt in der Physik der Elementarteilchen findet im IT Bilde dann eine Deutung. Wenn ein kleiner Raum-Zeit Bereich mittels eines Nullzustandsfeldes gelöscht wird, dann könnte dieses ein Springen des Teilchens wegen der Informationserhaltung erzwingen. Ein Universum mit nicht stabiler Raum-Zeit ist automatisch nicht mehr deterministisch, da alle Trajektorien der Teilchen nicht mehr vollständig sind.

ALGEBRAISCHER NULLZUSTAND

Alle K-Algebren teilen sich nach der Definition (3) die „globale" Null, die oft auch mit der Null des Körpers identifiziert wird (im strengen Sinne sind beide wegen der unterschiedlichen Struktur verschieden).

$$\forall \tilde{q}, \mathbb{A}: \quad \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{n} = \tilde{n} \otimes_{\mathbb{A}} \tilde{q} = \tilde{n} := 0 \tag{4.1}$$

Die „globale" Null ist theoretisch der einzige gemeinsame Zustand aller K-Algebren. In der algebraischen Interpretation ist die physikalische Entsprechung der Anfang des Universums, denn nur im Anfang war alles gleich und gemeinsam. Die Wahrscheinlichkeit ist hier exakt gleich Null nach Definition und damit kann das Vakuum diesen globalen Nullzustand nicht annehmen bzw. muss immer einen anderen Zustand haben. Trotzdem eignet sich dieser Punkt für die algebraische Feldtheorie als Ursprung eines ausgezeichneten Bezugssystems, sozusagen die Sicht vom gleichen Anfang aus.

Die algebraischen Zwangsbedingungen für andere Nullen sind:

$$\exists\, \tilde{n} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(q\,\otimes E)\,n = n \,\vee\, \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes q)\,n = n \tag{4.2}$$

Falls die rechteckige Matrix $\boldsymbol{A}$, welche die K-Algebra repräsentiert, vollen Rang besitzt dann sind diese Gleichungssysteme nur für bestimmte q („lokale" Null Zustände) lösbar.

Es liegt nahe lokale Nullzustände mit schwarzen Löchern gedanklich zu verknüpfen, aufgrund des ähnlichen Verhaltens. Die Singularität eines schwarzen Lochs „frisst" jeden anderen Zustand auf, genauso wie der Nullzustand. Der Unterschied besteht in der Mächtigkeit. Wenn aber ein schwarzes Loch nicht auf einen Punkt kollabieren kann, sondern nur auf eine minimale Massenschale, dann würden sich die Kräfte im Zentrum der Massenschale genau aufheben und zu Null werden – zu einem lokalen Nullzustand?

ALGEBRAISCHER VAKUUMZUSTAND

Die Existenzbedingungen für eine rechtshändige Eins sind in Abhängigkeit von einer beliebigen K-Algebra wie folgt:

$$\forall \tilde{q} \neq 0 \,\wedge\, \tilde{o}_{\mathbb{A}} \neq 0 \;\Rightarrow\; \tilde{q}\,\otimes_{\mathbb{A}} \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \tilde{q} \qquad \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \beta^T o_{\mathbb{A}} \tag{4.3}$$

Dieses Problem kann mit Hilfe der Neudecker-Funktion and einer Kronecker/Shift Operator Identität (A.3/F.5) zu einem überdeterminierten Matrix-Vektor Standard-Problem in der RKS Notation umformatiert werden. Der Vorteil der RKS Notation gegenüber einer Index-Notation tritt hier zu Tage.

Folgende RKS Formel gibt jetzt jede Eins für alle K-Algebren aus, wenn die Algebra gewissen Zwangsbedingungen folgt (dritte Zeile, rechte Seite):

$$\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)q = q \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o) = E \;\Rightarrow$$

$$vec\big(\boldsymbol{A}^T\,(E \otimes o)\big) = \boldsymbol{A}^{BR} o = vec(E) \;\Rightarrow$$

$$o_{\mathbb{A}} = \boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{BR}\boldsymbol{A}^{BRI} vec(E) = vec(E) \tag{4.4}$$

Die rechtshändige Eins ist eindeutig und minimal, wenn es keine Nullraumlösung für $\boldsymbol{A}^{BR}$ gibt d.h. $\boldsymbol{A}^{BR}$ hat vollen Rang. Die Lösung für die linkshändige Eins ist strukturell gleich, hier muss die Algebra durch die bilateral, geshiftete ersetzt werden ($\boldsymbol{A}^{BRI} \to \boldsymbol{A}^{BBRI} = \boldsymbol{A}^{RI}$).

Wenn rechts- und linkshändige Eins beide gemeinsam existieren dann sind diese notwendigerweise identisch. Der quantenmechanische Vakuumzustand mit dem üblichen Symbol $|0\rangle$ wird hier mit einem von der Domäne abhängigen, algebraischen Feld $o_{\mathbb{A}}(q)$ identifiziert, da die „Eins" neutral zu jedem anderen Zustand ist. Drei verschiedene händische Vakuum Zustände sind lokal möglich (rechts-, links- oder beidhändig) aber auch lokale Gebiete im algebraischen Feld sind erlaubt, die keinen Vakuumzustand besitzen.

Das eröffnet ein neues Verständnis für Teilchen und Felder. Felder müssen im Vakuum existieren und deswegen einen lokalen Vakuumzustand besitzen. Teilchen umfassen dann Gebiete ohne Vakuumzustand. Die sich ändernden Ränder zwischen Gebiete ohne und mit Vakuumzustand können dann höhere Teilchenzustände in diesem neuen, algebraischen Bild darstellen. Im Folgenden wird gezeigt, dass die Existenz einer Konjugation (Dualraum) von der Existenz des Vakuumzustands abhängt.

5. ALGEBRAISCHER DUALRAUM

Aus der Definition (2.13) folgen bereits folgende Eigenschaften für die Konjugation:

$$K_{\mathbb{A}}{}^{T} = K_{\mathbb{A}} \quad \text{und} \quad K_{\mathbb{A}}^{2} = E \tag{5.1}$$

Um den Konjugationsoperator für eine beliebige K-Algebra zu bestimmen wird das Skalarprodukt der dualen Basis mit der originalen Basis gebildet. Dies ergibt dann die algebraische Eins, falls die K-Algebra eine Eins besitzt (4.4) ansonsten ist keine Konjugation möglich.

$$\beta^{I}\,\beta \;=\; \tilde{o}_{\mathbb{A}} \tag{5.2}$$

Das hat seine physikalische Entsprechung, denn Teilchen und Anti-Teilchen können nur aus einem Vakuum (=algebraische Eins) erzeugt werden, wenn ein Vakuumzustand im algebraischen Ur-Feld existiert. Hieraus folgt dann:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}(\beta\,)\,\tilde{o}_{\mathbb{A}} = \beta^{T} K_{\mathbb{A}}\,\beta = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}(\beta\,\otimes_{\mathbb{A}}\beta) = vec(K_{\mathbb{A}})^{T}\boldsymbol{A}\,\beta \tag{5.3}$$

Unter Ausnutzung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien(A.2/A.3) ergibt sich:

$$K_{\mathbb{A}} = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\,\boldsymbol{A}^{IRR}(o_{\mathbb{A}}\otimes E) \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^{IT}\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.4}$$

Der noch fehlende metrische Koeffizient kann mittels der Involution der Konjugation (5.1) bestimmt werden.

Diese Eigenschaft erfordert folgende Beziehung für die K-Algebra:

$$\boldsymbol{A}^{I} = \boldsymbol{A}^{T}\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{-2} \tag{5.5}$$

Damit ist der metrische Koeffizient mit Hilfe der Spur einer Matrix determinierbar:

$$\mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2} = \frac{Spur(\boldsymbol{A}^{T}\boldsymbol{A})}{Spur(E)} \tag{5.6}$$

Der gesuchte Konjugationsoperator ist dann unter den Bedingungen (4.4) der Existenz einer Eins und unter folgenden zusätzlichen Bedingungen gegeben:

$$K_{\mathbb{A}} = \boldsymbol{A}^{RRT}(o_{\mathbb{A}}\otimes E) \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{T} vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^{2}\, vec(K_{\mathbb{A}}) \tag{5.7}$$

6. ALGEBRAISCHER ZERFALL DES VAKUUMS

Für einen beidhändigen algebraischen Zerfall des Vakuumzustands soll gelten:

$$\tilde{q}^{I}\otimes_{\mathbb{A}}\tilde{q} = \tilde{o}_{\mathbb{A}} = \tilde{q}\otimes_{\mathbb{A}}\tilde{q}^{I} \tag{6.1}$$

Schreibt man dieses aus muss folgende Beziehung gültig sein, um das zu erfüllen:

$$\forall q \neq 0: \quad \boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}}\otimes E - E\otimes K_{\mathbb{A}})(q\otimes q) = 0 \tag{6.2}$$

Eine Lösung ist gegeben, wenn die K-Algebra folgender Zwangsbedingung unterliegt:

$$\forall q,\boldsymbol{X} \neq 0: \quad \boldsymbol{X}^{T}(q\otimes q) = 0 \;\Leftrightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}^{B} \tag{6.3}$$

Es folgt damit:

$$(K_{\mathbb{A}}\otimes E)\,\boldsymbol{A} = ((E\otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.4}$$

Aus (6.1) gilt dann für den gesuchten Operator G:

$$\boldsymbol{A}^{T}(K_{\mathbb{A}}\otimes E)(q\otimes q) = (q^{T}\;G\;\,q)\;o_{\mathbb{A}} = vec(G)^{T}(q\otimes q)\,o_{\mathbb{A}} \tag{6.5}$$

Ein struktureller Vergleich zwischen der rechten und linken Seite ergibt dann unter Anwendung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3) das folgende Identitäten gültig sein müssen:

$$(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A}\, {o_{\mathbb{A}}}^{IT} = vec(G) = vec(\boldsymbol{A}^{RRT}({o_{\mathbb{A}}}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}})) \tag{6.6}$$

Damit bestimmt die K-Algebra auch die Metrik für den Vakuumzustand, wenn eine Eins und eine Konjugation lokal vorhanden sind und unter folgenden zusätzlichen Bedingungen:

$$G_{Vakuum} = \boldsymbol{A}^{RRT}({o_{\mathbb{A}}}^{IT} \otimes K_{\mathbb{A}}) \Leftrightarrow (K_{\mathbb{A}} \otimes E)\, \boldsymbol{A} = ((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A})^{B} \tag{6.7}$$

Theoretisch kann eine der beiden Seiten von den Bedingungen in (6.1) fallen gelassen werden. Das würde dann i.allg. zu zwei verschiedenen händischen Metrik Operatoren führen.

7. ALGEBRAISCHE DIFFERENZIERBARKEIT

In der Einleitung wurde bereits erwähnt, dass aufgrund gemeinsamer Eigenschaften die mathematischen Strukturen der Quantentheorie und die Eigenschaften der allgemeinen Relativitätstheorie aus algebraischen Zwangsbedingungen der binären Operation abgeleitet werden könnten. Die komplexe Differenzierbarkeit mit den Cauchy-Riemannschen Zwangsbedingungen soll hier als Vorlage dienen.

Analog zu dem komplexen Verfahren soll das folgende, pseudo-lineare Funktional gelten:

$$\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = \tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f] \tag{7.1}$$

Bei den komplexen Zahlen ergibt sich dann als Spezialfall die komplexe Ableitung $\tilde{p}$ aus der infinitesimalen Differenz dieses Funktionals in der Darstellung mittels $\tilde{q}$.

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{C}}(q)[f] = d\tilde{q} \otimes_{\mathbb{C}} \tilde{p}[f] = d\tilde{f}(\tilde{q}) \tag{7.2}$$

Diese Beziehung ist nur gültig für konstante K-Algebren und wenn die Ableitung selbst extremal ist ($d\tilde{p}[f] = 0$). Für ein algebraisches Feld muss das komplette totale Differential über das gesamte Produkt samt Algebra gelten:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,(\tilde{q} \otimes_{\mathbb{A}(q,p)} \tilde{p}[f]) \tag{7.3}$$

Im Weiteren wird für die gesuchten, pseudo-linearen Operatoren gefordert, dass die totale infinitesimale Differenz unabhängig von der Reihenfolge der Operatoren im Funktional ist:

$$d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(q,p)[f] = d\,\tilde{l}_{\mathbb{A}}(p,q)[f] \tag{7.4}$$

Dies begründet sich aus den Linearitätsanforderungen, denn zum Vergleich gilt diese Eigenschaft auch für den Kommutator der Standardableitung (sowie später auch für den quantenmechanischen Kommutator).

$$[\partial_j, q^k] = \delta_j^k \quad \Rightarrow \quad d[\partial_j, q^k] = 0 \tag{7.5}$$

Eine quantenmechanische Matrix-Sichtweise nach Werner Heisenberg hilft jetzt weiter um eine Lösung in geschlossener Form für dieses algebraische Problem zu ermitteln. Dazu werden zwei Operatoren *P, Q* als quadratische Matrix aufgefasst mit folgenden Eigenschaften:

$$\beta^T P\, f \coloneqq \tilde{p}[f] \quad \text{und} \quad Q \coloneqq \boldsymbol{A}^T(q \otimes E) \tag{7.6}$$

P spielt dabei die Rolle des Energie-Impuls-Tensors (hier der gesuchte algebraische Differentialoperator) und *Q* die Rolle des algebraischen Ortsoperators.

Damit lässt sich das Problem (7.3) unter zu Hilfenahme des Operators (2.12) in eine von der erzeugenden Basis freien Form wie folgt umformulieren:

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) \text{ mit } \boldsymbol{\nabla}\beta = 0 \tag{7.7}$$

Die rechte Seite ergibt dann folgende Beziehung, wobei der Index c an einem Operator bedeutet, dass dieser als Konstante zu behandeln ist, gegenüber der Aktion des ersten links davon stehenden Differentialoperators.

$$\boldsymbol{\nabla}(QPf) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf + \boldsymbol{\nabla}Q_c(Pf) \tag{7.8}$$

Aus der Gültigkeit von (7.4) folgt gleichzeitig:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}(P(Q_c f)) \tag{7.9}$$

Subtrahiert man Gleichung (7.9) von (7.8) ergibt sich unter Zuhilfenahme der Kommutatoren Klammern:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q_c, P]f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 0 \tag{7.10}$$

Addiert man beide Gleichungen (7.9) und (7.8) dann folgt unter Zuhilfenahme der Anti-Kommutatoren Klammern:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) + \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf = 2\,\boldsymbol{\nabla}f \tag{7.11}$$

Da der Operator P als Differentialoperator pseudo-linear sein muss, geht dieses nur wenn folgende Zusatzbedingung gilt, mit einem noch zu bestimmenden rechteckigen Matrixoperator $\boldsymbol{J}$:

$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, P\}f) = (2\,\boldsymbol{J} - \boldsymbol{\nabla}(Q))Pf \tag{7.12}$$

Denn damit reduziert sich das Problem zu einem bekannten, überbestimmten und pseudo-linearen System:

$$\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{J}\,P\,f \tag{7.13}$$

Die Lösung unterliegt dann verallgemeinerten Cauchy-Riemann Zwangsbedingungen:

$$P = \boldsymbol{J}^I\,\boldsymbol{\nabla} \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{J}^I\boldsymbol{\nabla}f = \boldsymbol{\nabla}f \tag{7.14}$$

Um den Operator $\boldsymbol{J}$ festzulegen betrachtet man zuerst folgende Ableitung des allgemeinen Kommutators zwischen Q und P:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q,P]f) = \boldsymbol{\nabla}(Q)Pf - \boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) + \boldsymbol{\nabla}([Q_c,P]f) \tag{7.15}$$

Diese Gleichung reduziert sich wegen (7.10) zu folgender Relation:

$$\boldsymbol{\nabla}([Q,P]f) = -\boldsymbol{\nabla}(P(Q)f) \tag{7.16}$$

Damit dies erfüllt wird muss für den Kommutator folgendes gelten:

$$[P,Q] = P(Q) \tag{7.17}$$

Man setzt nach (7.5):

$$P(Q) = E \tag{7.18}$$

Damit ist aber gleichzeitig der gesuchte Operator $\boldsymbol{J}$ bereits festgelegt, unter der Bedingung, dass dieser vollen Rang besitzt:

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla}Q \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{\nabla}Q)^I\,\boldsymbol{\nabla}Q = E \tag{7.19}$$

Der algebraisch-affine Ableitungsoperator kann damit vollständig angegeben werden. Dieser unterliegt jetzt drei algebraischen Zwangsbedingungen für die Existenz:

$$P = (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} \qquad \Leftrightarrow \big((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\big)\, \boldsymbol{\nabla} f = 0 \tag{7.20}$$

$$\wedge \quad \boldsymbol{\nabla}\, (Q_c(\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} f)) = 0 \quad \wedge \quad (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0$$

Aufgrund der Symmetrien der Shift Operatoren sind insgesamt sechs verschiedene Varianten für den P-Operator möglich. Diese können in drei verwandte Familien $\{\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{A}^B\}, \{\boldsymbol{A}^R,\ \boldsymbol{A}^{RB}\}, \{\boldsymbol{A}^{RR}, \boldsymbol{A}^{BR}\}$ nach der Händigkeit gruppiert werden.

Die ersten überdeterminierten Zwangsbedingungen im System (7.20) sind die Verallgemeinerung der Cauchy-Riemann Gleichungen, denn diese bilden ein Dirac-Maxwell System im Grenzwert zu verschwindender Gravitation ($\boldsymbol{\Gamma} = 0$ und damit $\partial \boldsymbol{A} = 0$). Damit geht die algebraische Feldtheorie bei verschwindender Gravitation strukturell in die Quantentheorie über. D.h. die algebraische Feldtheorie führt die Gravitation in die Quantentheorie auf Kosten eines zusätzlichen algebraischen Feldes und der damit verbundenen Änderung der Quantenalgebren ein ($\partial \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{\Gamma}$). Allerdings existieren in der algebraischen Feldtheorie sechs verschiedene Versionen, aufgrund der Symmetrie der Shift Operatoren (7.21, die Linksversion als Beispiel), d.h. die Dirac-Gleichung hat noch fünf weitere Geschwister mit jeweiligen, zusätzlichen Zwangsbedingungen. Deren physikalische Bedeutung muss in diesem frühen Stadium der Theorie offengelassen werden.

$$P_0 = \boldsymbol{A}^{RI}(\partial \otimes E) \;\; = \boldsymbol{A}^{RI}(e^{\mathrm{j}} \otimes E)\, \partial_{\mathrm{j}} \tag{7.21}$$

$$\Leftrightarrow \;\; (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

Setzt man in die Zwangsbedingung der Gleichung (7.21) die rechteckige Matrix ein, welche die komplexen Zahlen repräsentiert (siehe Abschnitt Einleitung 1.2, siehe auch A.5), erhält man die klassischen Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Gleichung (7.21) kann jetzt auch für alle anderen Quantenalgebren angewendet werden, z.B. die K-Algebra der Gell-Mann'schen λ-Matrizen. Diese unterliegen jetzt zusätzlichen Bedingungen (A.8). Die physikalische Bedeutung dieser neuen Zwangsbedingungen für die Symmetrien der starken Kraft ist derzeit auch offen.

Zwangsbedingung (7.21, Zeile 2) ist auch für K-Algebren ohne Eins anwendbar, z.B. das Kreuzprodukt zwischen Vektoren (siehe A.6, verallgemeinerte Cauchy-Riemann Gleichungen für das Kreuzprodukt).

Die zweite zusätzliche Zwangsbedingung in (7.20) ist ein gemischtes Differential-Gleichungssytem der zweiten Ordnung, ähnlich den Strukturen der Vakuumgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. Diese schränkt den Lösungsraum der ersten Zwangsbedingung zusätzlich ein. Eine genauere Analyse steht noch aus.

Bisher ist der Operator P noch kein physikalischer Energie-Impuls Operator, sondern nur ein rein generisch, algebraischer Operator. Gleichung (7.18) hat den Freiheitsgrad der freien Wahl einer Konstante für die Gewährleistung der Linearität. Um nun zu einer spezifischen algebraischen Feldtheorie als Variante überzugehen, kann die Konstante durch das quantenmechanische Pendant mittels der Minkowski Metrik G_0 ersetzt werden.

$$\left[\partial_{\mathrm{j}}, q^k\right] = \quad \mathrm{i}\, \hbar\, \mathrm{G_0}{}_j^k \quad \text{mit} \quad G_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.22}$$

Damit wird die definierende Gleichung (7.18) für den physikalischen Operator P_{Physik} zu:

$$P_{Physik}(Q) = \mathrm{i}\,\hbar G_0 \;\;\Rightarrow\;\; P_{Physik} = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, (\boldsymbol{\nabla} Q)^I\, \boldsymbol{\nabla} \tag{7.23}$$

Diese beschreibt dann einen „algebraischen Quantencomputer“ als Variante.

Woher kommt nun die fundamentale Gleichung (7.22) für die Quantentheorie?

Dieses kann mit der Art der Expansion des Vakuums zusammenhängen und der damit verbundenen Lage des Beobachters. Angenommen das Universum ist in sich geschlossen in Form einer entsprechenden S^3-Kugel, welche selbst sich in einem vier dimensionalen euklidischen Raum plus der Zeit befindet. Die „Oberfläche“ (Hyperfläche) dieser S^3-Kugel ist der metrische, dreidimensionale Raum und die Zeit bildet einen gemeinsamen Vektor vom Ursprung zur Oberfläche der S^3-Kugel hin. Wenn sich nun diese Oberfläche nach außen mit der Grenzgeschwindigkeit (mit Lichtgeschwindigkeit) ausdehnt, würden alle Beobachter innerhalb dieser sich ausdehnenden Oberfläche, die zusätzliche Dimension gar nicht im großen Maßstab bemerken, da Wechselwirkungen nur senkrecht zur Ausdehnungsrichtung wirken können, d.h. nur innerhalb der S^3 Oberfläche. Die Beobachter auf der Oberfläche entdecken dann nicht die Euklidische Metrik als Erhaltungsgröße, sondern genau die Minkowski'sche Metrik bzw. aus deren Divisionsalgebra heraus wird auch das \`i\` der komplexen Zahlen benötigt. Aus der Sicht des Ursprungs würde das Universum der folgenden euklidischen Beziehung genügen mit einer zusätzlichen vierten, räumlichen Dimension q^4.

$$(\mathrm{ct})^2 = (\mathrm{q}^1)^2 + (\mathrm{q}^2)^2 + (\mathrm{q}^3)^2 + (\mathrm{q}^4)^2 \tag{7.24}$$

Aus der Sicht der Beobachter würde die vierte Raumdimension sich nur als „Dellen“ $(\delta\mathrm{q}^4)^2$ in ihrer Raum-Zeit bemerkbar machen, verursacht durch materielle Verzerrungen in die vierte Raum Dimension und damit für alle Beobachter in der Kugeloberfläche lokal immer eine Erhaltungsgröße. Daraus folgt dann die Minkowski Metrik, wenn man die Zeit jetzt mit in die Metrik einbezieht:

$$(\delta\mathrm{ct})^2 - (\delta\mathrm{q}^1)^2 - (\delta\mathrm{q}^2)^2 - (\delta\mathrm{q}^3)^2 = (\delta\mathrm{q}^4)^2 = \mathrm{G}_{0\mathrm{jk}}\mathrm{x}^\mathrm{j}\mathrm{x}^\mathrm{k} \text{ mit } x = (\delta\mathrm{ct}, \delta\mathrm{q}) \tag{7.25}$$

Zusammenfassend kommt die Metrik in diesem Bilde dadurch zustande, dass wir wie Surfer auf einer Welle mitreiten, die sich mit Lichtgeschwindigkeit in einem höher dimensionalen euklidischen Raum ausbreitet (im IT Bild eine algebraische Welle im Speicher). Der physikalische *P*-Operator (7.23) gilt dann nur speziell auf der Welle aber nicht mehr im Allgemeinen!

Der Dirac-Operator im Vergleich zum physikalischen *P*-Operator bei verschwindender Gravitation (7.21):

$$P_{Dirac} = \mathrm{i}\,\hbar\;\gamma^\mathrm{j}\,\partial_\mathrm{j} \quad\leftrightarrow\quad P_{Physik}\,(\boldsymbol{\Gamma} = 0) = \mathrm{i}\,\hbar\, G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}(e^\mathrm{j} \otimes E)\,\partial_\mathrm{j} \tag{7.26}$$

Das erfordert die Gültigkeit folgender Beziehung:

$$\gamma^\mathrm{j} = G_0\, \boldsymbol{A}^{RI}(e^\mathrm{j} \otimes E) \tag{7.27}$$

Mittels Umformatierungen und Anwendung von Kronecker/Shift Operator Symmetrien (A.2/A.3) folgt für die Algebra der Dirac'schen Gamma Matrizen (A.7).

$$\boldsymbol{A}_{Dirac} = (\,(e_\mathrm{j} \otimes E)\, G_0\, \gamma^\mathrm{j}\,)^{BRITRR} \tag{7.28}$$

Nun steht man vor einem mathematischen Problem, denn die Gamma Matrizen bilden erst mit 16 unabhängigen 4x4 Matrizen ein vollständiges Erzeugenden System. Die Dirac Gleichung selbst wird aber nur über einen vier dimensionalen Teilraum der ersten vier Gamma Matrizen entwickelt. In vier Raum-Zeit Dimensionen besitzt die mittels (7.28) rückgerechnete K-Algebra (A.7) keine algebraische Eins und damit keinen Vakuumzustand. Das entspricht dem algebraischen Bild, denn die Dirac Gleichung beschreibt ein Elementar-Teilchen ohne äußere Felder, welches in der algebraischen Sichtweise jetzt selbst nicht mehr zerfallen kann, denn dafür wäre ein Vakuumzustand notwendig. Die Anwendung der Beziehung (6.7) für die Metrik ist damit nicht mehr erlaubt, da diese nur für einen existenten Vakuumzustand gültig ist. Für die von der Algebra induzierte Metrik eines Teilchens steht noch die Dirac Bedingung (1.5) zur Verfügung, denn diese verlangt keinen Vakuumzustand. Damit lässt sich mittels (7.27) folgende Relation für die „innere" Metrik eines Teilchens ohne Vakuumzustand aufstellen:

$$G_{Teilchen} = -½\ Spur(\{G_0\boldsymbol{A}^{RI}(e^{\mathrm{j}} \otimes E), G_0\boldsymbol{A}^{RI}(e^{\mathrm{k}} \otimes E)\})\ (e_j \otimes (e_k)^T) \qquad (7.29)$$

Im Innern eines Teilchens befindet sich also gleichermaßen wie außen ein algebraisches sowie ein metrisches Feld. Im Unterschied zu außen existiert allerdings kein Vakuumzustand im Innern eines Teilchens. Damit entzieht sich das Innere eines Teilchens der Messbarkeit, nur der Rand des Teilchens ist messbar, denn ohne Vakuumzustand gibt es keine Nullpunkts-Referenz als Voraussetzung für eine vergleichbare Messung.

8. VAKUUMGLEICHUNG

Für die Berechnung der Energie/Masse k einer physikalischen Vakuumlösung stehen nun alle Mittel zur Verfügung. Es gilt dann folgende Vakuumgleichung für P_{Physik}:

$$\mathrm{i}\ G_0(\boldsymbol{\nabla} Q_{\mathbb{A}})^I\ \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = \mathrm{k}\ o_{\mathbb{A}} \qquad (8.1)$$

Um diese zu lösen müssen erst alle erlaubten algebraischen Felder ermittelt werden. Dazu sind zuerst alle bisherigen ermittelten Zwangsbedingungen für das algebraische Feld einzusammeln. Ein beidhändiges Vakuum muss deshalb alle folgenden acht Systeme erfüllen (3.16, 4.4[2], 5.7, 6.7, 7.20[3]). Alle vorkommenden Faktoren können durch die K-Algebra ausgedrückt werden. Topologische Gründe[16] schränken nicht triviale algebraische Lösungen auf die endlichen Freiheitsgrade N=2,4,8 im generellen für diese acht Systeme ein, da die K-Algebren laut den Bedingungen für das Vakuum reelle Divisionsalgebren sein müssen. Da nur nach einer physikalischen Lösung gesucht wird gilt ausschließlich N=4.

Von den acht Systemen sind vier Systeme Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial q} = -\boldsymbol{A}\ G^I\left((\nabla^T \otimes G) - (\nabla^T \otimes G)^R + (\nabla^T \otimes G)^{RR}\right) \qquad (8.2)$$
$$\left((\boldsymbol{\nabla} Q)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I - E \otimes E\right) \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = 0$$
$$\boldsymbol{\nabla}(\{Q_c, \mathrm{i}G_0(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla}\} o_{\mathbb{A}}) = (\boldsymbol{\nabla}(Q)(\mathrm{i}\ G_0 - 2E)(\boldsymbol{\nabla} Q)^I \boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}}$$
$$(\boldsymbol{\nabla} Q)^I\ \boldsymbol{\nabla} Q - E = 0$$

Die restlichen vier Systeme schränken Anfangsbedingungen und Lösungsraum weiter ein:

$$(K_{\mathbb{A}} \otimes E)\ \boldsymbol{A} = \left((E \otimes K_{\mathbb{A}})\boldsymbol{A}\right)^B \qquad (8.3)$$
$$\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{A}^T vec(K_{\mathbb{A}}) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\ vec(K_{\mathbb{A}})$$
$$\boldsymbol{A}^{BR} \boldsymbol{A}^{BRT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\ vec(E)$$
$$\boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RT} vec(E) = \mathrm{m}_{\mathbb{A}}^2\ vec(E)$$

Eine allgemeine Lösung des komplexen Systems (8.2 & 8.3) ist derzeit in Arbeit und damit noch offen. Dazu sind die Verallgemeinerungen der Cauchy Integralformeln auf beliebige K-Algebren hilfreich. Mit den hier vorgebrachten neuen Operatoren ist dieses jetzt möglich, ausgehend von der Definition eines Integrals über die komplexen Zahlen gilt analog für die algebraische Feldtheorie:

$$\int d\,(\tilde{q}\ \otimes_{\mathbb{A}}\ \tilde{p}[f])\ =\ \tilde{f}(\tilde{q}) \tag{8.4}$$

Eine Diskussion diverser Lösungsstrategien oder die konsequente Erweiterung auf Integrale würde den Rahmen, dieser als Einführung gedachten Arbeit, deutlich übersteigen. Ziele sind primär der Einstieg und die Demonstration des Potentials einer algebraischen Feldtheorie und dass man mit den wenigen benötigten Axiomen, die Strukturen der Quantenmechanik und zumindest ähnliche Strukturen der allgemeinen Relativitätstheorie aus einem Prinzip herleiten kann. Zum ersten Mal wird eine Quantentheorie des Vakuums selbst aufgestellt und gleichzeitig die experimentelle Möglichkeit der Falsifizierung von algebraischen Feldern aufgezeigt.

Der Autor vermutet aus ersten Berechnungen, dass der Operator P_{Physik} nach unten und nach oben beschränkt ist. Das würde für das Vakuum eine minimale Masse in einer maximal möglichen, endlichen Ausdehnung bedeuten bzw. umgekehrt ist in der minimalen Ausdehnung nur eine maximale Masse möglich. Man sieht dies bereits ansatzweise aus den Strukturen. Wegen der vierten Zeile in (8.2) kann $\boldsymbol{\nabla} Q$ nie verschwinden. Deswegen muss in (8.1) der Term $\boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} = 0$ sein. Diese Beziehung ist aber die Definition des lokalen Rahmens nach (2.12) und führt zur Widersprüchen in (8.2). Die erste und dritte Zeile zusammen scheinen ein endliches $\boldsymbol{\nabla} o_{\mathbb{A}} \neq 0$ zu erfordern. Ein exakter, mathematischer Beweis dieser Vermutung bzw. deren Widerlegung ist ausstehend.

Ω

ALGEBRAISCHE FELDTHEORIE

ANHANG

A.1) Kartesische Produkte von K-Algebren

Die Zahlen für die Domäne $\mathbb{K}$ sollen jetzt auch der Struktur von (2.3) folgen mit eigenen Erzeugenden. Damit sind diese nicht mehr notwendigerweise ein Körper, aber zumindest sollen diese selbst die reellen Zahlen als inneren Subraum besitzen. Seien jetzt $\beta_{\mathbb{A}}, \beta_{\mathbb{K}}$ die jeweiligen Basen der Erzeugenden für die K-Algebren $\mathbb{A}$ und $\mathbb{K}$.

Die kartesische Produkt K-Algebra $\mathbb{A}'$, im Bezug zur Basis $\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}$ ist dann:

$$(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes_{\mathbb{A}'} (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) = \boldsymbol{A}' (\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})$$

Nach (2.3) müssen die beiden Basen per Definition kommutieren. Zusätzlich wird ein Operator ‚B' benötigt, um die Faktoren im Kronecker-Produkt zu vertauschen. ‚B' ist eine Verallgemeinerung der Definition (2.6) für zwei unterschiedliche dimensionale Basen.

$$\beta_{\mathbb{A}} \otimes (\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} = \beta_{\mathbb{A}} \otimes \big(B\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\big) \otimes \beta_{\mathbb{K}}$$

$$B \coloneqq \Sigma_j \left(e_j(Dim\,\beta_{\mathbb{K}}) \otimes E(Dim\,\beta_{\mathbb{A}}) \otimes e_j^T(Dim\,\beta_{\mathbb{K}})\right)$$

Mit Hilfe von Standard Kronecker Identitäten ergibt sich:

$$\begin{aligned}(E \otimes B)\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}}) \otimes \beta_{\mathbb{K}} &= (E \otimes B \otimes E)\,(\boldsymbol{A}\beta_{\mathbb{A}} \otimes \boldsymbol{K}\beta_{\mathbb{K}}) \\ &= (E \otimes B \otimes E)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})\,(\beta_{\mathbb{A}} \otimes \beta_{\mathbb{K}})\end{aligned}$$

Zusammenfassend kann jede kombinierte komplexe Struktur (z.B. Bi-Quaternionen) zu einer höher dimensionalen K-Algebra mit den reellen Zahlen als Körper abgebildet werden. Die entsprechende K-Algebra ist dann gegeben:

$$\boldsymbol{A}' = \left(E_{Dim(\beta_{\mathbb{A}})} \otimes B_{Dim(\beta_{\mathbb{K}} \otimes \beta_{\mathbb{A}})} \otimes E_{Dim(\beta_{\mathbb{K}})}\right)(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{K})$$

A.2) Shift Operator Relationen für B, I, R, T

$$BRB = RR \qquad BRR = RB \qquad RRB = BR \qquad RBR = B$$

$$BB = II = RRR = TT = E$$

$$[T, B] = [T, I] = [T, R] = [B, I] = 0$$

$[B, R]$ und $[I, R]$ kommutieren nicht im Allgemeinen!

A.3) Kronecker Shift Operator Identitäten

Die gelisteten Identitäten können aus den Shift Operator Definitionen in Kombination mit Standard Kroneckerprodukt Identitäten abgeleitet werden.

F.1 $\quad (\partial \otimes E)(\boldsymbol{A}^T(q \otimes E)) = \boldsymbol{A}^{BR} \Leftrightarrow (\partial \otimes E)\boldsymbol{A}^T = 0$

F.2 $\quad (q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^{BR} = \boldsymbol{A}^T(q \otimes E)$

F.3 $\quad \beta^T\boldsymbol{A}^T(p \otimes q) = p^T\boldsymbol{A}^{RT}(q \otimes \beta) = q^T\boldsymbol{A}^{RRT}(\beta \otimes p) = \beta^T\boldsymbol{A}^{BT}(q \otimes p) = q^T\boldsymbol{A}^{BRT}(p \otimes \beta) = p^T\boldsymbol{A}^{RBT}(\beta \otimes q)$

F.4 $\quad p^T\boldsymbol{A}^{BRT}(Q \otimes q)q = q^T\boldsymbol{A}^T(Q \otimes p)\,q$

F.5 $\quad vec(\boldsymbol{A}^T\,(q \otimes Q)) = (Q^T \otimes E)\boldsymbol{A}^R q$

F.6 $\quad \boldsymbol{A}^{RRT}(E \otimes q) = \Sigma_j[\boldsymbol{A}]_j\, q_j$ mit $[\boldsymbol{A}]_j \coloneqq \boldsymbol{A}^T\left(e_j \otimes E\right)$ (ergibt die j-te Sub Matrix von oben)

F.7 $\quad (\boldsymbol{A}^T(p \otimes q))_j = p^T[\boldsymbol{A}^{RR}]_j\, q$

F.8 $\quad (E \otimes \boldsymbol{A})\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A} \otimes E)\boldsymbol{A} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}$ ist assoziativ

F.9 $\quad (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^B + \boldsymbol{A}^R - \boldsymbol{A}^{BR} + \boldsymbol{A}^{RR} - \boldsymbol{A}^{RB}) = \Sigma_{jkl}\left(A_{jkl}\varepsilon_{jkl}\right)\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor)

A.4) Lokaler Rahmen

$$(G\nabla) \otimes \beta = e_j \otimes (G^{jl}\nabla_l\, e_k)\beta^k = \Gamma_l^{jk}\beta^l(e_j \otimes e_k) = \Gamma_l^{jk}(e_j \otimes e_k \otimes (e^l)^T e_l\beta^l) = \boldsymbol{\Gamma}\,\beta$$

A.5) *Standard komplexe Zahlen* $\mathbb{C}$

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathrm{e} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_2^{11} \\ a_1^{12} & a_2^{12} \\ a_1^{21} & a_2^{21} \\ a_1^{22} & a_2^{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^R = \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_1^{21} \\ a_2^{11} & a_2^{21} \\ a_1^{12} & a_1^{22} \\ a_2^{12} & a_2^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{RI} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; P_{\mathbb{C}} := \boldsymbol{A}^{RI}(\nabla \otimes E) = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_1 & \partial_2 \\ -\partial_2 & \partial_1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (E \otimes E - \boldsymbol{A}^R \boldsymbol{A}^{RI})(\partial \otimes E) f = 0$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 - \partial_2 f_2 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 \\ \partial_2 f_1 + \partial_1 f_2 \\ \partial_2 f_2 - \partial_1 f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Cauchy-Riemann)}$$

$$K_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad G_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad o_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.6) *Vektor Kreuzprodukt*

K-Algebra $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (Levi-Civita Tensor) des Vektor Kreuzprodukts (Symbol $\times$)

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^T{:}\times = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{RI} = -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{\mathcal{E}}^{BRI}$$

Hier existieren dann zwei händische P Operatoren:

$$\Rightarrow \; P_r{:}\times = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \partial_3 & -\partial_2 \\ -\partial_3 & 0 & \partial_1 \\ \partial_2 & -\partial_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_l{:}\times = -P_r{:}\times$$

Die verallgemeinerten Cauchy-Riemann Zwangsbedingungen sind für beide händischen Operatoren identisch:

$$\Leftrightarrow CR_r = CR_l = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 = \partial_2 f_2 = \partial_3 f_3 = 0 \\ \partial_1 f_2 + \partial_2 f_1 = \partial_1 f_3 + \partial_3 f_1 = \partial_2 f_3 + \partial_3 f_2 = 0 \end{pmatrix} = (\partial \otimes E + E \otimes \partial) f = 0$$

Die algebraische Eins existiert nicht, damit ist auch keine Konjugation möglich.

A.7) *Vierdimensionale Dirac K-Algebra*

Folgende Darstellung der Dirac'schen Gamma Matrizen wird verwendet:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die K-Algebra $\boldsymbol{D}_4$ lautet dann nach (7.24):

$$\boldsymbol{D}_4^T = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für den zugehörigen Dirac Operator,

$$P_0 = \mathrm{i}\,\gamma^{\mathrm{k}}\partial_{\mathrm{k}}$$

ergeben sich dann folgende verallgemeinerte Cauchy Riemann Zwangsbedingungen, wobei der gelistete Vektor gleich dem entsprechenden Nullvektor zu setzen ist:

$$\begin{pmatrix}
3\,\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
3\,\partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_3 \\
-\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 + 3\,\partial_1\varphi_4 \\
3\,\partial_2\varphi_1 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + \partial_4\varphi_2 - \partial_1\varphi_4 \\
-\partial_4\varphi_1 + 3\,\partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
-\partial_1\varphi_2 + 3\,\partial_2\varphi_3 - \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + \partial_4\varphi_4 \\
-\partial_1\varphi_1 - \partial_4\varphi_3 + (3\,\partial_2 + \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\mathrm{i}(\partial_2\varphi_1 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 - \partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_4\varphi_1 + \partial_2\varphi_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 + \partial_1\varphi_3) \\
\mathrm{i}(\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 - 3\mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 - \partial_4\varphi_4) \\
-\mathrm{i}(\partial_1\varphi_1 + \partial_4\varphi_3 + (\partial_2 + 3\mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4) \\
3\,\partial_4\varphi_1 - \partial_2\varphi_2 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_2 - \partial_1\varphi_3 \\
\partial_2\varphi_1 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_2 + \partial_1\varphi_4 \\
-\partial_1\varphi_1 + 3\,\partial_4\varphi_3 - (\partial_2 - \mathrm{i}\,\partial_3)\varphi_4 \\
\partial_1\varphi_2 + \partial_2\varphi_3 + \mathrm{i}\,\partial_3\varphi_3 + 3\,\partial_4\varphi_4
\end{pmatrix} = 0$$

A.8) *SU (3) Gell-Mann λ-Matrizen*

Die Strukturkonstanten der acht dimensionalen K-Algebra der λ-Matrizen ergeben sich aus der Beziehung:

$$A_l^{jk} = \frac{1}{4\mathrm{i}}\,Spur([\lambda_{\mathrm{j}}\,,\lambda_{\mathrm{k}}]\,\lambda_{\mathrm{l}})$$

Hier existieren dann Gl. (7.21) zwei händische *P* Operatoren mit der Eigenschaft:

$$\Rightarrow P_l\colon\lambda \;\;=\; -P_r\colon\lambda$$

$$P_r\colon\lambda \;=$$

$$\begin{pmatrix}
0 & \frac{\partial_3}{3} & -\frac{\partial_2}{3} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_3}{3} & 0 & \frac{\partial_1}{3} & \frac{\partial_6}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 \\
\frac{\partial_2}{3} & -\frac{\partial_1}{3} & 0 & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_6}{6} & 0 \\
-\frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_5}{6} & 0 & \frac{\partial_3}{6}+\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_7}{6} & \frac{\partial_4}{6} & -\frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\partial_1}{6} & \frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} \\
-\frac{\partial_5}{6} & \frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_7}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_1}{6} & 0 & \frac{\partial_8}{2\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{6} & -\frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4}{6} & \frac{\partial_5}{6} & -\frac{\partial_6}{6} & -\frac{\partial_1}{6} & -\frac{\partial_2}{6} & \frac{\partial_3}{6}-\frac{\partial_8}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\partial_5}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_4}{2\sqrt{3}} & \frac{\partial_7}{2\sqrt{3}} & -\frac{\partial_6}{2\sqrt{3}} & 0
\end{pmatrix}$$

Die verallgemeinerten Cauchy-Riemann Gleichungen sind hier für beide händischen Operatoren identisch wobei der gelistete Vektor gleich Null zu setzen ist:

$$
\begin{pmatrix}
\partial_1\varphi_1 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_2}{3}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{2\,\partial_1\varphi_3}{3}-\frac{\partial_6\varphi_4}{6}-\frac{\partial_7\varphi_5}{6}+\frac{\partial_4\varphi_6}{6}+\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{11\,\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_1\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_2\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_2}{3}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_2\varphi_2 \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{2\,\partial_2\varphi_3}{3}+\frac{\partial_7\varphi_4}{6}-\frac{\partial_6\varphi_5}{6}+\frac{\partial_5\varphi_6}{6}-\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}-\frac{\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{11\,\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_2\varphi_8 \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_1}{3}+\frac{\partial_1\varphi_3}{3}+\frac{\partial_6\varphi_4}{6}+\frac{\partial_7\varphi_5}{6}-\frac{\partial_4\varphi_6}{6}-\frac{\partial_5\varphi_7}{6} \\
\frac{2\,\partial_3\varphi_2}{3}+\frac{\partial_2\varphi_3}{3}-\frac{\partial_7\varphi_4}{6}+\frac{\partial_6\varphi_5}{6}-\frac{\partial_5\varphi_6}{6}+\frac{\partial_4\varphi_7}{6} \\
\partial_3\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}-\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{12}+\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{12}-\frac{\partial_1\varphi_7}{12}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_5\varphi_1+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{11\,\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_3\varphi_8 \\
\frac{11\,\partial_4\varphi_1}{12}-\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_2}{12}-\frac{\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_6\varphi_1+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\partial_4\varphi_4 \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{2\,\partial_4\varphi_5}{3}+\frac{\partial_7\varphi_6}{6}-\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_6}{12}-\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}-\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_5\varphi_1}{12}+\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{\partial_7\varphi_3}{12}-\frac{\partial_2\varphi_4}{12}+\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_7-\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_4\varphi_1+\frac{11\,\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{\partial_6\varphi_3}{12}+\frac{\partial_1\varphi_4}{12}+\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_3}{12})\varphi_6-\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{2\,\partial_5\varphi_4}{3}+\frac{\partial_4\varphi_5}{3}-\frac{\partial_7\varphi_6}{6}+\frac{\partial_6\varphi_7}{6} \\
\partial_5\varphi_5 \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}-\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{\partial_7\varphi_5}{12}-\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{11\,\partial_5\varphi_7}{12} \\
-\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_8}{4})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{\partial_7\varphi_2}{12}-\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4+\frac{\partial_1\varphi_6}{12}-\frac{\partial_2\varphi_7}{12}-\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{12}\partial_7\varphi_1+\frac{11\,\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{12}+\frac{\partial_5\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_3}{12}-\frac{\partial_1\varphi_4}{12}-\frac{\partial_2\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_6\varphi_4}{12}-\frac{\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_2}{6}-\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_6\varphi_5}{12}+\frac{\partial_5\varphi_6}{12}-\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\partial_6\varphi_6 \\
-\frac{1}{6}\partial_2\varphi_1+\frac{\partial_1\varphi_2}{6}+\frac{\partial_5\varphi_4}{6}-\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{2\,\partial_6\varphi_7}{3} \\
-\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_6+\frac{3\,\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{11\,\partial_7\varphi_1}{12}-\frac{\partial_6\varphi_2}{12}-\frac{\partial_5\varphi_3}{12}+(\frac{\partial_3}{12}+\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_5+\frac{\partial_2\varphi_6}{12}+\frac{\partial_1\varphi_7}{12}-\frac{\partial_5\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_2}{12}+\frac{\partial_4\varphi_3}{12}+(-\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{12}+\frac{\partial_2\varphi_7}{12}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{12}-\frac{\partial_4\varphi_2}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_3}{12}+\frac{\partial_2\varphi_4}{12}-\frac{\partial_1\varphi_5}{12}+(\frac{\partial_3}{12}-\frac{\partial_8}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4\sqrt{3}} \\
-\frac{1}{6}\partial_3\varphi_2+\frac{\partial_2\varphi_3}{6}+\frac{11\,\partial_7\varphi_4}{12}+\frac{\partial_6\varphi_5}{12}-\frac{\partial_5\varphi_6}{12}+\frac{\partial_4\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_3\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_3}{6}-\frac{\partial_6\varphi_4}{12}+\frac{11\,\partial_7\varphi_5}{12}+\frac{\partial_4\varphi_6}{12}+\frac{\partial_5\varphi_7}{12} \\
\frac{\partial_2\varphi_1}{6}-\frac{\partial_1\varphi_2}{6}-\frac{\partial_5\varphi_4}{6}+\frac{\partial_4\varphi_5}{6}+\frac{2\,\partial_7\varphi_6}{3}+\frac{\partial_6\varphi_7}{3} \\
\partial_7\varphi_7 \\
-\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_7+\frac{3\,\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_1 \\
\partial_8\varphi_2 \\
\partial_8\varphi_3 \\
\frac{\partial_6\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_4-\frac{\partial_1\varphi_6}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_4\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_7\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_6\varphi_2}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_3}{4\sqrt{3}}+(\frac{3\,\partial_8}{4}-\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}})\varphi_5-\frac{\partial_2\varphi_6}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_7}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_4\varphi_1}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_5\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_6\varphi_3}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_2\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_6+\frac{\partial_6\varphi_8}{4} \\
\frac{\partial_5\varphi_1}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_4\varphi_2}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_7\varphi_3}{4\sqrt{3}}+\frac{\partial_2\varphi_4}{4\sqrt{3}}-\frac{\partial_1\varphi_5}{4\sqrt{3}}+(\frac{\partial_3}{4\sqrt{3}}+\frac{3\,\partial_8}{4})\varphi_7+\frac{\partial_7\varphi_8}{4} \\
\partial_8\varphi_8
\end{pmatrix} = 0
$$

Referenzen

[1] Geometrie und Erfahrung, A.Einstein, *Preussische Akadamie der Wissenschaften,* Berlin, 1921

[2] Rechnender Raum, K.Zuse, *Elektronische Datenverarbeitung*, Bd. 8, pp 336, 1967

[3] Conference of Physics of Computation, USA Boston 1981 May 6-8

[4] The Theory of Positrons, R.Feynman, *Physical Review* 76, pp 749, 1949

[5] Logik der Forschung, *Buchreihe Wiener Kreis*, K. Popper, 1934

[6] The Quantum Theory of the Electron, P.Dirac, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1928

[7] Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, W.Pauli, *Zeitschrift für Physik*, Bd. 43, S. 601, 1927

[8] Symmetries of baryons and mesons, M.Gell-Mann, *Physical Review 125 (3) 1067,* 1962

[9] A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, J.C. Maxwell, *Royal Society Transactions*, 155, pp 459–512, 1865

[10] Die funktionentheoretischen Beziehungen der Maxwell Aethergleichungen, *Dissertation*, K.Lánczos, Technische Hochschule Budapest, 1919

[11] Über den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Riemannschen und Diracschen Differentialgleichungen, D.Iwanenko und K.Solsky, *K. Z. Physik 63*: 129, Universität Leningrad und Charkow, 1930.

[12] Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie, A.Einstein, *Annalen der Physik*, 4.Folge Bd. 44, pp50, 1916

[13] Sur la dynamique de l'électron, H.Poincaré, Henri, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 21, S. 129–176,1906

[14] On the reciprocal of the general algebraic matrix, E.H. Moore, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26, 395-395, 1920 / A generalized inverse for matrices, R. Penrose, *Proceedings of the Cambridge Philosophical society*, 51, 406-413, 1955

[15] Some theorems on matrix differentiation with special reference to Kronecker matrix products, H.Neudecker, *Journal American Statistics Assoc*., Volume 64 pp 953-963, 1969

[16] Some consequences of a theorem of Bott, J.Milnor, *Annals of Mathematics*, Band 68, S. 444–449, 1958