Сомсиков А.И.

Проблема иррациональных чисел

Предложено решение проблемы иррациональных чисел

Проблема иррациональности впервые обнаружена в геометрии при извлечении корня. Она известна еще в эпоху «античности», связываемую с именем Пифагора.

Выявленное логическое противоречие состоит в следующем. С одной стороны имеется доказательство того, что все точки на прямой являются целыми или дробными, т.е. «рациональными» числами.

Это доказательство таково.

Берется отрезок прямой с координатами его концов 0 и 1. Обе эти координаты являются целыми числами.

Отрезок делится пополам и рассматриваются каждый из вновь полученных отрезков.

Концы этих отрезков имеют координаты 0 и 0,5 или 0,5 и 1, являющиеся целыми или дробными, т.е. «рациональными» числами.

Продолжается повторное разбиение пополам, сближающее края последующих отрезков при их сохранении каждый раз заведомо рациональными числами.

В пределе, при бесконечном разбиении, края отрезков сливаются в точку, *оставаясь при этом* рациональными числами.

Логический вывод гласит, что исходный отрезок оказывается заполненным *одними лишь* рациональными числами, иными словами ни для какой "иррациональности" места не остается.

Другое доказательство наоборот приводит к тому, что некоторые точки на прямой не могут быть заданы ни целыми, ни дробными числами, т.е. не являются рациональными.

Это доказательство таково: берется равнобедренный прямоугольный треугольник с длиной каждого катета равной 1. Согласно теореме Пифагора длина гипотенузы при этом составляет $\sqrt{2}$. Это не может быть ни целым числом, ни несократимой дробью $\frac{a}{b}$, поскольку в этом случае $a^2 = 2b^2$. Следовательно, a есть четное число представимое как $a = 2k$. Но тогда $a^2=(2k)^2=4k^2=2b^2$. А значит и $b^2 = 2k^2$, т.е. b – тоже четное число. Получаем логическое противоречие: с одной стороны дробь $\frac{a}{b}$ должна быть несократима (в противном случае ее можно сократить на общий множитель), с другой же стороны обе ее части a и b – четные числа, т.е. имеют общий множитель 2, а значит, дробь является сократимой.

Итак, первому *логически не противоречивому* доказательству противостоит второе – *логически противоречивое* доказательство.

Поскольку первое доказательство не содержит логического противоречия, оно не может вызывать никаких сомнений и должно считаться безусловно верным.

Второе же доказательство напротив содержит внутри себя логическое противоречие. А значит, во-первых, оно ни в коем случае не может служить опровержением первого – логически непротиворечивого доказательства. И, во-вторых, именно оно, как содержащее внутри себя логическое противоречие, должно считаться крайне сомнительным и требующим дополнительного рассмотрения.

Предлагаемое рассмотрение таково.

Прежде всего, что означает это приравнивание длины катетов числу 1? А вот что: это значит, что оба катета измерены с помощью некоторого эталона, и что результат этого измерения равен единице. Естественный вопрос для любого измерения: с какой точностью? Ответ такой: при измерении любым эталоном абсолютная погрешность измерения равна самому эталону, а точность измерения, определяется отношением абсолютной погрешности (величины эталона) к самой измеряемой величине - относительной погрешностью.

Величина эталона относительно себя самой равна единице *с бесконечной степенью точности*, что может быть выражено в виде десятичной дроби: $э = 1,(0)$. А вот величины обоих катетов a и b, измеренных таким эталоном должны выглядеть так: $a = 1 \pm \Delta a = 1 \pm э$, $b = 1 \pm \Delta b = 1 \pm э$, где э – величина эталона.

В данном случае получим: абсолютная погрешность $\Delta a = э = 1$, $\Delta b = э = 1$, $a = 1 \pm 1$, $b = 1 \pm 1$. А относительная погрешность, определяющая точность каждого измерения, равна соответственно

$$\delta\, a(\%) = \frac{\Delta a 100}{a} = \frac{100}{1} = 100\% \text{ и } \delta b(\%) = \frac{\Delta b 100}{b} = \frac{100}{1} = 100\%.$$

И даже если принять в качестве эталона один из катетов, например, а, что означает $\delta\, a(\%) = 0,(0)$, т.е. бесконечную точность его измерений и равенства нулю его относительной погрешности, то все равно относительная погрешность измерения второго катета останется $\delta b = 100\%$.

Вот что означает на практике это небрежное брошенное условие равенства единице длин обоих катетов.

И что же мы получим при измерении гипотенузы таким эталоном э?

Вариантов ответа два: $c = 1 \pm \Delta c = 1 \pm э = 1 \pm 1$ или же $c = 2 \pm \Delta c = 2 \pm э = 2 \pm 1$.

В первом случае погрешность измерения гипотенузы равна 100%, как и в случае катета, а во втором случае – 50%. Ясно, что второй ответ более точен, хотя тоже не очень хорош.

Что мы теперь имеем по теореме Пифагора? Катеты равны 1 ± 1, т.е. их можно считать равными 1 или 2, а гипотенуза и вовсе может быть равной 1 или 2, или даже 3. Причем каждый из этих ответов по-своему верен с известной степенью точности.

Но в то же время $1^2+1^2 \neq 1^2$ или 2^2 и уж тем более 3^2.

И второй возможный вариант тоже дает: $2^2+2^2 \neq 1^2$ или 2^2 или 3^2.

И даже принятие в качестве эталона одного из катетов тоже дает: $1^2+2^2 \neq 1^2$ или 2^2, или 3^2. Другими словами требуемое равенство не достигается *ни при каком* варианте таких измерений.

Точность повышается при уменьшении величины эталона э, например, в 10 раз.

В этом случае $a = 10 \pm 1$, $b = 10 \pm 1$, $c = 14 \pm 1$, $\delta\, a = 10\%$, $\delta\, b = 10\%$, $\delta\, c = \frac{100}{14} = 7\%$.

Или в 100 раз, когда $a = 100 \pm 1$, $b = 100 \pm 1$, $c = 141 \pm 1$, $\delta\, a = 1\%$, $\delta\, b = 1\%$, $\delta\, c = \frac{100}{141} = 0,7\%$, и т.д.

При этом однако все еще остается: $a^2+b^2 \neq c^2$, т.е. теорема Пифагора по-прежнему не выполняется.

Это достигается только при *бесконечной точности* измерений, когда величина эталона $э = 0,(0)$, $a = 10000\ldots = \infty$, $b = 10000\ldots = \infty$,

$c = 14142135623730950488016887242097141\ldots = \infty$,

Или при выражении через исходный эталон э: $a = 1,(0)$, и $b = 1,(0)$,

$c = 1,4142135623730950488016887242097141\ldots$

В этом и только в этом случае теорема Пифагора справедлива, принимая однако вид: $a^2 + b^2 = c^2 \quad \rightarrow \quad \infty^2 + \infty^2 = \infty^2$.

В обычном понимании это может выглядеть сложновато, однако уже не содержит более никакого логического противоречия.

И что же все это значит?

А вот что: теорема Пифагора, как и вообще все теоремы геометрии *без исключения* справедливы при условии выполнения еще одной теоремы.

Ввиду ее всеобщности и исключительной важности, она может быть названа *Великой Геометрической Теоремой* (ВГТ).

Ее содержание таково: *все геометрические теоремы верны при одном обязательном условии - бесконечной точности измерений.*

А значит, в рассматриваемом нами частном случае никаких таких целых чисел 1 обоих катетов *нет и быть не может*, а может быть только лишь бесконечная десятичная дробь вида: $a = 1,(0)$, и $b = 1,(0)$.

При этом все рассуждения о сократимости или несократимости бесконечных дробей и соответственно четности или нечетности с необходимостью сразу же отпадают, т.к. это возможно только в одном единственном случае: *когда рассматриваемая нами дробь является конечной*. Это легко достигается простым обрывом бесконечности, т.е. *нарушением бесконечной точности*. Но именно в этом случае теорема Пифагора тотчас же нарушается, т.е. перестает выполняться.

А значит и вся рассматриваемая проблема сразу и бесповоротно снимается!

Из всего этого следует, что, во-первых, любая точка на геометрической прямой задается в виде *бесконечной дроби*, и здесь нет никакой разницы или особенности ни у катета, ни у гипотенузы.

И что, во-вторых, все числа без исключения, задающие положение любых геометрических точек, должны считаться «иррациональными» ввиду простой бесконечности их дробей, либо же нужно принять, что никаких иррациональных чисел вовсе не существует.

Именно потому, что выполненное рассмотрение приводит к полному снятию логического противоречия, вынудившее некогда их измыслить.