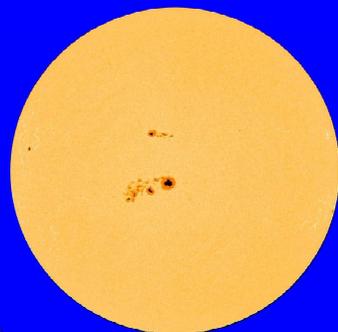


Movimientos de la Luna y el Sol

Una introducción



Wenceslao Segura González

ε **WT**
Ediciones

Movimientos de la Luna y el Sol

Una introducción

WENCESLAO SEGURA GONZÁLEZ

ε WT
Ediciones

Movimientos de la Luna y el Sol

Una introducción

© Wenceslao Segura González

Primera edición: 2018

Edita: ε **WT** Ediciones

ISBN: 978-84-09-04565-5

Depósito Legal: CA 377-2018

Contenido

Introducción

Primera parte: Conceptos preliminares

1	Día juliano	3
2	Tiempo sidéreo, tiempo universal y tiempo terrestre	13
3	Precesión, nutación, aberración, paralaje, refracción y extinción atmosférica	23

Segunda parte: Movimiento del Sol

4	El problema de los dos cuerpos	49
5	Movimiento del Sol	63
6	Efemérides solares	77
7	Periodos solares	93

Tercera parte: Movimiento de la Luna

8	Perturbaciones: ecuaciones de Gauss	107
9	Aceleraciones perturbativas	123
10	Variación, desigualdad paraláctica y ecuación anual	135
11	Aceleración secular, movimiento del pericentro y evección	147
12	Variación de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente. Distancia Tierra-Luna	157

13	Cálculo de las coordenadas de la Luna	163
14	Periodos lunares	171
15	Fracción iluminada de la Luna, ángulo de fase, edad de la Luna, magnitud estelar y semidiámetro	187
16	Fenómenos lunares locales	211
17	Calendarios computacionales	225
	Tablas	239
	Apéndices	251

Introducción

Se puede entender que este es un libro de astronomía general pero centrado exclusivamente en los movimientos aparentes del Sol y de la Luna.

Hemos dividido la obra en tres partes bien distintas. En la primera nos centramos en temas genéricos, como la determinación del día juliano de una fecha, la descripción de los distintos tipos de tiempos, la relación entre ellos, y las correcciones a realizar a los valores astronómicos geométricos para convertirlos en aparentes: precesión, nutación, paralaje, refracción, aberración y extinción atmosférica.

La segunda parte está dedicada al movimiento del Sol. Desarrollamos una teoría simplificada, donde sólo tenemos en cuenta las variaciones seculares de los parámetros orbitales y no sus movimientos periódicos, que son suficientemente pequeños para no ser considerados en la aproximación perseguida en este libro.

Utilizamos tres sistemas de coordenadas: eclíptico, ecuatorial y horizontal; las técnicas para cambiar de uno otro son descritas con detalle.

La tercera y última parte, más amplia que las restantes, está dedicada en exclusiva al movimiento de la Luna. Astro que se ve fuertemente perturbado por el Sol, lo que significa que el estudio de su movimiento requiere numerosos términos. En una primera aproximación como la planteada en este libro, sólo hemos tenido en cuenta los términos más importantes.

El libro ha sido preparado para que sea autosuficiente. No se necesita el concurso de otras obras complementarias, salvo un conocimiento de los conceptos más básicos de astronomía.

Nos hemos esforzado para que las demostraciones sean lo más clara posible. Numerosos ejemplos numéricos aparecen a través de libro, lo que permite familiarizarse con las técnicas expuestas.

Prácticamente todos los tópicos básicos de astronomía son tratados: determinación de las coordenadas celestes de la Luna y el Sol; transformación de coordenadas; ortos y ocasos; tránsito por el meridiano; cálculo de las fechas de las estaciones; fases lunares; etc.

Tres excelentes monografías nos han sido de permanente utilidad y es obligado dejar constancia de nuestro agradecimiento: ANDRÉ DANJON, *Astronomie générale*, Albert Blanchard, 1986; JEAN MEEUS, *Astronomical Algorithms*, Willmann-Bell, 1991 y TEODORO J. VIVES, *Astronomía de posición*, Alhambra, 1971.

Primera parte

Conceptos preliminares

1

Día juliano

1.1 El periodo juliano

El periodo juliano es una técnica de datación cronológica introducido por Scaliger en el año 1582 y posteriormente aplicado al cómputo de los días por el astrónomo William Herschel en 1851. Scaliger dejó constancia de las razones para darle el nombre de juliano a su ciclo: «Le he llamado periodo juliano porque se ajusta al año juliano».

El periodo juliano es el producto de los tres ciclos siguientes: el solar (de 28 años de duración), el de Meton (de 19 años) y el de indicción (de 15 años). El producto de los tres periodos es 7890 años, que es la duración del periodo juliano.

Los orígenes de cada uno de los tres periodos anteriormente citados son tales que al año 1 de la era cristiana le corresponde el 2 del ciclo de Meton, el 10 del ciclo solar y el 4 de la indicción. Por tanto, los comienzos de los tres ciclos coincidieron en el año -4712 (o 4713 antes de Cristo), que se toma como el origen del primer periodo juliano. El segundo ciclo comenzará en el año 3178.

2.1 El día juliano

La cuenta de los días julianos astronómicos comienza el 1 de enero del año 4713 a.C. del calendario juliano a las 12 horas de tiempo universal (o de otra escala de tiempo), aunque el día juliano cronológico empieza al igual que el día civil, es decir a medianoche; o sea, a las 0 horas del día 1 de enero del año 4713 a. C.

La cuenta de los días julianos comienza con el número 0, por tanto, el día 1 de enero del 4713 a. C. fue el día juliano 0.

El día juliano cronológico siempre toma un valor entero, no así el astronómico que puede tener cifras decimales correspondientes a la fracción del día.

Vamos a utilizar dos tipos de días julianos, el que está medido en la escala de tiempo universal *UT* (ver epígrafe 4.2), que denominaremos *JD* y el que usa el tiempo terrestre *TT* (ver epígrafe 8.2) que llamaremos *JDT*.

3.1 Calendario auxiliar

Para facilitar los cálculos vamos a definir un calendario auxiliar. En este

calendario la cuenta de los días, meses y años nos dice directamente los días transcurridos en el mes, los meses transcurridos en el año y los años que han pasado desde el origen, quiere esto decir que el calendario auxiliar comienza a contar con el día, mes y año cero.

El calendario auxiliar del calendario juliano * tiene como primer mes aquel que es posterior al mes donde se coloca el bisiesto, es decir el mes 0 de este calendario es el mes de marzo y el mes 11 es el de febrero. Suponemos que el ciclo de cuatro años del calendario juliano comienza después del año bisiesto, o sea el año bisieto es el último del ciclo de cuatro años.

Tomamos como origen del calendario auxiliar el comienzo del ciclo de cuatro años que es inmediatamente anterior al origen de los días julianos, es decir el año siguiente al que tiene el día bisiesto anterior al año -4712, por tanto el origen del calendario auxiliar es el 1 de marzo de -4716.

Representamos por D, M, Y la fecha de un día en el calendario juliano, entonces la correspondiente fecha D', M', Y' en el calendario auxiliar que tiene asociado, viene dado por las fórmulas

$$\begin{aligned} D' &= D - 1 \\ M' &= (M + 9) \bmod 12 \\ Y' &= Y + 4716 - \text{int} \left(\frac{14 - M}{12} \right), \end{aligned} \quad (1.1)$$

con la primera de las fórmulas anteriores se consigue que el primer día del mes tenga la numeración 0; la segunda ecuación adjudica el número 0 al mes de marzo; finalmente la tercera ecuación hace comenzar la cuenta de los años en el -4716 (4717 a.C.) que es el año bisiesto inmediatamente anterior al origen del periodo juliano **. El último sumando de la tercera ecuación tiene la función de hacer comenzar el año con el mes de marzo. Si la fecha fuera el mes de enero o febrero, este término valdría uno y estos meses corresponderían al año anterior.

4.1 Día juliano de una fecha del calendario juliano

El origen del calendario auxiliar juliano es la 0 horas del día 1 de marzo del año -4716, es decir algo más de tres años anterior al origen de la cuenta de los días julianos, que como hemos dicho, es las 12 horas del día 1 de enero de -4712. El número de días entre ambas fechas es

$$365 \cdot 3 + 306,5 = 1401,5$$

donde 306,5 son los días que van desde las 0 horas del 1 de marzo del año -4713 a las 12 horas del 1 de enero de -4712.

El número de días que van desde el origen del calendario auxiliar hasta el

* El calendario juliano está compuesto por años de 365 días. Cada cuatro años se coloca un día de más, llamado día bisiesto, por lo que esos años alcanzan la duración de 366 días. Los años bisiestos son los divisibles entre 4.

** Con int representamos la función entero y mod es la función módulo, es decir el resto de la división.

comienzo del año Y' es la siguiente relación

$$\text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right)$$

1461 son los días de un ciclo de cuatro años.

El número de días transcurridos desde el inicio del año del calendario auxiliar hasta el comienzo del mes M' es dado por la relación

$$\text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right). \quad (2.1)$$

Reuniendo los resultados anteriores encontramos que el día juliano a las 0 horas de la fecha del calendario auxiliar D' , M' , Y' es

$$JD(0^h) = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - 1401,5.$$

Si H , M y S son las horas, minutos y segundos transcurridos en ese día, entonces el día juliano correspondiente es

$$JD = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - 1401,5 + \frac{1}{24}\left[H + \frac{1}{60}\left(M + \frac{S}{60}\right)\right]. \quad (3.1)$$

5.1 Fecha del calendario juliano de un día del calendario auxiliar

El problema que planteamos es obtener las expresiones inversas de (1.1), es decir, hallar la fecha del calendario juliano dada la fecha en el calendario auxiliar. Es fácil comprobar que las ecuaciones buscadas son

$$\begin{aligned} D &= D' + 1 \\ M &= (M' + 2) \bmod 12 + 1 \\ Y &= Y' - 4716 + \text{int}\left(\frac{14 - M}{12}\right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

6.1 Determinación de la fecha del calendario juliano conocido su día juliano

El problema que planteamos es dado un día juliano determinar la fecha del calendario juliano que le corresponde.

El número de años y transcurridos en un ciclo de cuatro años, conocido el número d de días transcurridos en ese ciclo es

$$y = \text{int}\left(\frac{4d + 3}{1461}\right)$$

donde 1461 son los días que hay en un ciclo de 4 años. Si han transcurrido x ciclos de 4 años desde el comienzo del calendario auxiliar y d días en el ciclo presente, entonces los años transcurridos desde la fecha de inicio del

calendario auxiliar es *

$$\begin{aligned} Y' &= 4x + \text{int}\left(\frac{4d+3}{1461}\right) = \text{int}\left(\frac{4d+3+1461 \cdot 4x}{1461}\right) = \\ &= \text{int}\left[\frac{4(d+1461x)+3}{1461}\right] = \text{int}\left(\frac{4J'+3}{1461}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde J' son los días enteros transcurridos desde el comienzo del calendario auxiliar, que corresponde al día 0-0-0, o bien el 1 de marzo del año -4716; en J' están incluidos los d días que han pasado del ciclo $x+1$. Existe la siguiente relación

$$J' = \text{int}(JD + 0,5) + 1401$$

donde JD es el día juliano, es decir los días y fracción contados desde las 12 horas del 1 de enero de -4712. Por tanto (5.1) queda

$$Y' = \text{int}\left\{\frac{4[\text{int}(JD + 0,5) + 1401] + 3}{1461}\right\}. \quad (6.1)$$

Lo siguiente es determinar el número de días T que han transcurrido en el año $Y'+1$

$$T = \text{int}\left\{\frac{\{4[\text{int}(JD + 0,5) + 1401] + 3\} \bmod 1461}{4}\right\} \quad (7.1)$$

el numerador de la anterior expresión es el exceso de días en un ciclo de cuatro años, por eso hay que dividir entre 4, para que al tomar la parte entera obtengamos los días transcurridos en el año en curso.

Ahora es necesario hallar la relación inversa de (2.1) que nos da los meses M' transcurridos en el calendario auxiliar en función de los días T transcurridos en el año

$$M' = \text{int}\left(\frac{5T+2}{153}\right) \quad (8.1)$$

que son los meses transcurridos, que coincide con el mes en curso en el calendario auxiliar.

Ya sólo queda hallar el número de días que han transcurrido en el mes en curso

$$D' = \text{int}\left[\frac{(5T+2) \bmod 153}{5}\right] \quad (9.1)$$

* Sobre la forma de obtener este tipo de relaciones véase SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: «Zeller's Congruence Theorem», <http://vixra.org/abs/1402.0029>, 2014. Sobre el algoritmo para calcular el día juliano véase SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *Hemerología. La Ciencia de los calendarios*, Acento 2000, 2006, pp. 163-180 y SEGURA GONZÁLEZ, Wenceslao: *Calendario hebreo*, eWT Ediciones, 2017, pp.105-120

es necesario dividir entre 5 puesto que el numerador son cinco veces los días transcurridos.

Conocida la fecha en el calendario auxiliar se aplica (4.1) y se determina, finalmente, la fecha en el calendario juliano.

Para determinar la fracción de día que ha transcurrido, calculamos la parte fraccionaria del día juliano, teniendo presente que comienza a las 12 horas y no a las 0 horas

$$T' = JD - 0,5 - \text{int}(JD - 0,5)$$

de donde se obtiene las horas, minutos y segundos transcurridos

$$\begin{aligned} H &= \text{int}(24T') \\ M &= \text{int}[60(24T' - H)] \\ S &= 60\{60(24T' - H) - M\}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

7.1 Día juliano de una fecha en el calendario gregoriano

El calendario gregoriano no es un calendario regular en cuanto a la colocación de los bisiestos se refiere. En efecto, la regla gregoriana establece que en un periodo de 400 años hay que eliminar 3 bisiestos. Concretamente, aquellos años centenarios (terminados en dos ceros) cuyas restantes cifras no sean divisibles entre 4 dejarán de ser bisiestos.

Por esta falta de regularidad no podemos obtener una relación simple entre los días transcurridos en función de los años.

El método que vamos a seguir para tratar el calendario gregoriano consiste en introducir un coeficiente, que denominaremos s , que nos va a permitir transformar las fechas julianas en gregorianas y viceversa.

El coeficiente s representa la diferencia que hay entre las fechas julianas y gregorianas de un mismo día. Por ejemplo, la fecha juliana del 1 de agosto de 2000 corresponde al día de fecha gregoriana 14 de agosto de 2000 (o sea, 13 días de diferencia), por lo que el coeficiente s vale 13 en ese momento.

Como a medida que pasa el tiempo se van suprimiendo más y más días bisiestos del calendario gregoriano, el coeficiente s va aumentando, o sea, las fechas julianas y gregorianas de un mismo día se van separando entre sí, de tal forma que las fechas julianas quedan más y más rezagadas con respecto a las correspondientes gregorianas.

El coeficiente s se puede también definir de otra forma que nos será de utilidad más adelante. Sea $D-M-Y$ una fecha en el calendario juliano, al que le corresponde el día juliano JD_j . Consideremos ahora que la misma fecha sea del calendario gregoriano, a la que le corresponderá el día juliano JD_g , entonces el coeficiente s es

$$s = JD_j - JD_g. \quad (11.1)$$

Un asunto que hay que considerar es el relativo al comienzo de los ciclos de 400 años del calendario gregoriano. Vamos a suponer que estos ciclos comienzan en el mes de marzo del año centenario en que no se elimina el

bisiesto. Por tanto, entendemos que el primer ciclo comenzó el 1 de marzo de 1600 y el siguiente lo hizo el 1 de marzo de 2000, ambas son fechas del calendario gregoriano.

El 1 de marzo de 1600 gregoriano corresponde a una fecha del calendario juliano diez días antes según se estableció en la reforma gregoriana de 1582, es decir el 20 de febrero de 1600 juliano a las 0 horas, al que le corresponde el día juliano $JD_0 = 2\,305\,507,5$.

Si llamamos h a los siglos transcurridos desde el origen del primer ciclo de 400 años, s se calcula por la tabla 1.1. La tercera fila de esta tabla da los siglos para el cuales es válido el valor de s que está sobre él, entendiendo que los siglos comienzan con el 1 de marzo de los años centenarios. De la tabla 1.1 se obtiene la relación

$$s = \text{int}\left(\frac{3h+3}{4}\right) + 10. \quad (12.1)$$

El coeficiente h se calcula mediante la fórmula

$$h = \text{int}\left(\frac{Y' - Y'_0}{100}\right)$$

siendo Y'_0 el año de comienzo del primer ciclo de 400 años (o sea, el año 1600) medido en el calendario auxiliar, es decir

$$Y'_0 = 1600 + 4716 = 6316,$$

por tanto

$$\begin{aligned} s &= \text{int}\left\{\frac{3}{4}\left[1 + \text{int}\left(\frac{Y' - 6316}{100}\right)\right]\right\} + 10 = \\ &= \text{int}\left\{\frac{3}{4}\left[1 + \text{int}\left(\frac{Y - 1600}{100}\right)\right]\right\} + 10. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Entonces dada una fecha D - M - Y del calendario gregoriano, hallamos el

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s	10	11	12	13	13	14	15	16	16
Siglos	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Tabla 1.1.- Relación entre los coeficientes h y s . El coeficiente h son los siglos transcurridos desde el inicio del primer ciclo del calendario gregoriano que entendemos fue el 1 de marzo de 1600 (fecha gregoriana). s son los días de diferencia entre el calendario juliano y el gregoriano. En la tercera fila están los siglos durante los que será válido este valor de s , entendiendo que los siglos comienzan con el 1 de marzo del año centenario. Cada cuatrocientos años se eliminan tres bisiestos, de aquí que el coeficiente s aumente en 3 cada ciclo de 400 años. En los años centenarios 1600, 2000, 2400,... no se eliminan los bisiestos, porque el número resultante tras eliminar los dos ceros son números divisibles entre cuatro.

día juliano JD_j que tendría si la fecha fuera del calendario juliano, para lo cual aplicamos (1.1) y hallamos la fecha del calendario auxiliar y posteriormente aplicamos (3.1). Ahora usamos (11.1) y hallamos el día juliano correspondiente a la fecha gregoriana

$$JD_g = JD_j - s.$$

donde s es calculada por (13.1). O bien usamos directamente la siguiente fórmula utilizando como dato la fecha del calendario auxiliar correspondiente a la fecha

$$JD_g = \text{int}\left(\frac{1461Y'}{4}\right) + \text{int}\left(\frac{153M' + 2}{5}\right) + D' - 1401,5 + \frac{1}{24}\left[H + \frac{1}{60}\left(M + \frac{S}{60}\right)\right] - \text{int}\left\{\frac{3}{4}\left[1 + \text{int}\left(\frac{Y' - 6316}{100}\right)\right]\right\} - 10. \quad (14.1)$$

Hay que advertir que este método no solamente es válido para hallar el día juliano de una fecha posterior a la implantación del calendario gregoriano, sino también para cualquier fecha anterior.

8.1 Fecha del calendario gregoriano conocido el día juliano

Vamos a definir un nuevo parámetro

$$I = JD - JD_0$$

JD es el día juliano y JD_0 es el día juliano del inicio del primer ciclo de 400 años (0 horas del 1 de marzo de 1600 del calendario gregoriano, $JD_0 = 2\,305\,507,5$), entonces I son los días transcurridos desde el comienzo del primer ciclo de 400 años hasta el día de la fecha.

Con la letra K representamos los días que hay en un siglo gregoriano «normal», que son aquellos a los que se les quita uno de los bisiestos y cuyo valor numérico es

$$K = 365 \cdot 100 + \frac{100}{4} - 1 = 36524.$$

En la tabla 2.1 relacionamos los parámetros h e I . En la tercera columna se da el intervalo de años, teniendo presente que los años comienzan con el 1 de marzo. En la última columna se dan los días que hay en cada siglo gregoriano, obsérvese que es una cantidad diferente, dependiendo de si se elimina o no un día bisiesto.

Podemos comprobar que es de aplicación la siguiente relación entre h e I

$$h = \text{int}\left(\frac{4I + 3}{4K + 1}\right)$$

que al llevarla a la ecuación (12.1) se obtiene

$$s = \text{int}\left\{\frac{3}{4}\left[1 + \text{int}\left(\frac{4I + 3}{4K + 1}\right)\right]\right\} + 10$$

o bien

I	h	Periodo	Días
0 a $K-1$	0	1600-1700	K
K a $2K-1$	1	1700-1800	K
$2K$ a $3K-1$	2	1800-1900	K
$3K$ a $4K$	3	1900-2000	$K+1$
$4K+1$ a $5K$	4	2100-2200	K
$5K+1$ a $6K$	5	2200-2300	K
$6K+1$ a $7K$	6	2300-2400	K
$7K+1$ a $8K+1$	7	2400-2500	$K+1$

Tabla 2.1.- I son los días transcurridos desde el comienzo del primer ciclo de 400 años (1 de marzo de 1600 gregoriano) hasta la fecha. K son 36524 días, o sea un siglo gregoriano «normal». h son los siglos transcurridos desde el comienzo del primer ciclo de 400 años. En la última columna están los días de cada siglo.

$$s = \text{int} \left\{ \frac{3}{4} \left[1 + \text{int} \left(\frac{4 \cdot JD - 9\,222\,033}{146\,097} \right) \right] \right\} + 10. \quad (15.1)$$

Con este resultado ya se puede resolver el problema de averiguar la fecha asociada a un día juliano. Si JD_g es el día juliano de la fecha dada en el calendario gregoriano aplicamos (11.1)

$$JD_j = JD_g + s, \quad (16.1)$$

la fecha juliana asociada a JD_j es idéntica a la fecha expresada en el calendario gregoriano. s se calcula a partir de (15.1). Para hallar la fecha de JD_j seguimos lo expuesto en los epígrafe 5.1 y 6.1.

9.1 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1.1.- Calcular el día juliano del 10 de febrero de 1320 del calendario juliano a las 13^h 15^m.

- Se aplica (1.1) y se obtiene

$$D' = 9; \quad M' = 11; \quad Y' = 6035.$$

- Se aplica (3.1) y se halla el día juliano

$$JD = 2\,203\,228,05208.$$

Ejemplo 2.1.- Hallar la fecha en el calendario juliano que tiene el día juliano 2 200 000,78.

- Se aplica (6.1), (7.1), (8.1) y (9.1) y se determina la fecha en el calendario auxiliar juliano

$$Y' = 6027; \quad M' = 1; \quad D' = 10; \quad T = 41.$$

- De (4.1) se obtiene la fecha en el calendario juliano

$$D = 11; \quad M = 4; \quad Y = 1311.$$

- Finalmente de (10.1) se obtiene la fracción de día

$$H = 6; \quad M = 43; \quad S = 12.$$

- Por tanto la fecha juliana buscada es el día 11 de abril de 1311 a las $6^h 43^m 12^s$.

Ejemplo 3.1.- Calcular el día juliano del 20 de abril de 2127 del calendario gregoriano a las $5^h 20^m 32^s$.

- Se aplica (1.1) y obtenemos

$$D' = 19; \quad M' = 1; \quad Y' = 6843.$$

- Se aplica (14.1) y se determina el día juliano

$$JD = 2\,498\,039,72259.$$

Ejemplo 4.1.- Hallar la fecha en el calendario gregoriano que tiene el día juliano $2\,400\,000,32$.

- Se calcula s por (15.1)

$$s = 12.$$

- Por (16.1) se calcula JD_j

$$JD_j = 2\,400\,000,32 + 12 = 2\,400\,012,32.$$

- Se aplica (6.1), (7.1), (8.1) y (9.1) y obtenemos la fecha en el calendario auxiliar

$$Y' = 6574; \quad M' = 8; \quad D' = 15.$$

- Por (4.1) se halla la fecha del calendario gregoriano

$$D = 16; \quad M = 11; \quad Y = 1858.$$

- Finalmente a partir de (10.1) se calcula la fracción de día

$$H = 19^h; \quad M = 40^m; \quad S = 48^s.$$

- Por tanto el día $2\,400\,000,32$ corresponde al 16 de noviembre de 1858 a las $19^h 40^m 48^s$ del calendario gregoriano.

2

Tiempo sidéreo, tiempo universal y tiempo terrestre

1.2 Tiempo sidéreo

Se define el tiempo sidéreo verdadero T_v como el ángulo horario del equinoccio verdadero, o ángulo medido en el ecuador comprendido entre el meridiano superior del lugar y el equinoccio verdadero en el sentido retrógrado, es decir medido en el sentido el este-sur-oeste-norte.

El tiempo sidéreo no es un tiempo uniforme porque depende de la rotación terrestre, de la aceleración secular del equinoccio y de la nutación, todos ellos movimientos no uniformes. A los que hay que añadir el movimiento del meridiano respecto a la superficie de la Tierra, consecuencia del movimiento del eje de rotación respecto a la Tierra u oscilación de Chandler, que hace cambiar la posición del polo norte.

Se le llama tiempo sidéreo medio T_m al ángulo horario del equinoccio medio, o sea el equinoccio desprovisto de la nutación y por tanto sólo afectado por su desplazamiento secular de precesión.

El tiempo sidéreo depende del meridiano, por lo tanto son tiempos locales. Si no se indica lo contrario, en lo sucesivo nos referiremos al tiempo sidéreo en el primer meridiano, que tiene de longitud geográfica 0° .

La diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y el medio se le llama ecuación de los equinoccios EE

$$T_v - T_m = EE$$

que puede tomar como valor máximo 1,179 segundos de tiempo. La ecuación de los equinoccios es una medida del efecto de la nutación, que dota al equinoccio de un movimiento periódico.

Como el tiempo sidéreo medio no tiene términos periódicos se representa por una función polinómica del tiempo

$$T_m = T_0 + T_1 t + T_2 t^2 + \dots \quad (1.2)$$

Indicar que el tiempo sidéreo viene medido en horas, minutos y segundos sidéreos, que son diferentes de las correspondientes unidades solares. El día sidéreo medio, tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del equinoccio medio por el meridiano superior, tiene una duración por definición de 24 horas sidéreas. Cada una de estas horas se divide en 60 minutos sidéreos y cada uno de estos minutos se divide en 60 segundos sidéreos.

2.2 Tiempo solar

Se define el tiempo solar verdadero H_v como el ángulo horario del centro del Sol. Por definición de la ascensión recta resulta

$$H_v = T_v - \alpha_s$$

donde α_s es la ascensión recta del Sol, que tiene la siguiente estructura

$$\alpha_s = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \Sigma(P)$$

los primeros términos se refieren a la variación secular y el último sumando agrupa a los términos periódicos. Al coeficiente A_2 se le llama aceleración secular del Sol (aunque en realidad la aceleración es el doble de esta cantidad), esta aceleración es resultado tanto de la aceleración del equinoccio (respecto al cual se mide la ascensión recta) y de una aceleración propia del Sol (o sea, una aceleración respecto a un equinoccio fijo).

El tiempo solar verdadero es

$$H_v = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)t + (T_2 - A_2)t^2 + EE - \Sigma(P)$$

que no es uniforme, porque además de las aceleraciones seculares, se encuentran los términos periódicos de los dos últimos sumandos.

Se define el tiempo solar medio como la parte uniforme del tiempo solar verdadero, es decir

$$H_m = (T_0 - A_0) + (T_1 - A_1)t$$

que es por definición uniforme. A la diferencia entre el tiempo solar verdadero y el medio se le llama ecuación del tiempo E

$$H_v - H_m = E.$$

Se define el Sol medio a un astro ficticio que describe el ecuador con una ascensión recta definida por

$$\alpha_m = T_m - H_m = A_0 + A_1 t + T_2 t^2,$$

que lleva un movimiento acelerado respecto al equinoccio medio, pues este punto está acelerado; pero lleva un movimiento uniforme respecto al meridiano (movimiento que viene dado por H_m). Por tanto, en la ascensión recta del Sol medio aparece la aceleración del equinoccio T_2 , pero no la aceleración propia del Sol.

Ya hemos indicado que A_2 es el resultado de dos aceleraciones, la que lleva el ángulo horario del equinoccio medio y la que tendría la ascensión recta del Sol medio si estuviera referida a un equinoccio fijo. Como el sentido de la medida de los ángulos horarios es contraria al sentido de medida de las ascensiones rectas, encontramos que el efecto debido a la aceleración propia del Sol es

$$A_2 - T_2$$

medida en el sentido de las ascensiones rectas.

3.2 Longitud media del Sol

Llamamos Sol promedio a un astro ficticio que recorre la eclíptica con una longitud geométrica dada por

$$L_m = A'_0 + A_1 t + A_2 t^2.$$

referida al equinoccio medio de la fecha, es decir no tiene en cuenta el efecto de la nutación.

Hay que notar que la ascensión recta del Sol medio es un valor aparente y la anterior longitud es geométrica, es decir en el primer caso se tiene en cuenta la aberración pero no en el segundo. Debemos señalar que la ascensión recta del Sol promedio no coincide con la ascensión recta del Sol medio, no solamente por el efecto de la aberración y aceleración, sino porque ambos astros recorren trayectorias diferentes inclinadas entre sí (uno el ecuador y el otro la eclíptica) y entonces el círculo horario del Sol promedio no pasa, en general, por la posición del Sol medio, aunque ambos astros ficticios se mueven con la misma velocidad angular.

La longitud geométrica media del Sol referida al equinoccio medio de la fecha como fue obtenida por Newcomb en el siglo XIX es

$$L_m = 270^\circ 41' 48'',04 + 129\,602\,768'',13T + 1'',089T^2 \quad (2.2)$$

siendo T los siglos julianos transcurridos desde la época J1900.0, o sea las 12 horas UT del día 0 de enero de 1900 (o sea el 31 de diciembre de 1899). La ascensión recta del Sol medio se identifica con esta longitud media, siempre y cuando tomemos valores aparentes y no geométricos y que en el último término sólo aparezca la aceleración secular del equinoccio. El antiguo valor que se tomó de la constante de aberración fue de 20,501 segundo de arco (actualmente el valor adoptado es de 20,49552), entonces

$$A'_0 = A_0 + 20'',501,$$

por tanto la ascensión recta del Sol medio según Newcomb es

$$\alpha_m = 18^h 38^m 45^s,836 + 8\,640\,184^s,542T + 0^s,0929T^2. \quad (3.2)$$

4.2 Tiempo civil

El tiempo civil es por definición el tiempo solar medio aumentado en doce horas, por lo que se comienza a contar a medianoche y no a mediodía que es cuando se empieza a contar el tiempo solar medio.

El tiempo universal UT es por definición el tiempo civil en el primer meridiano, es decir

$$UT = H_m + 12^h = T_m - \alpha_m + 12^h \quad (4.2)$$

donde T_m es el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano. A las 0 horas de tiempo universal el tiempo sidéreo medio del primer meridiano es dado por la ecuación

$$T_m(0^h UT) = 6^h 38^m 45^s,836 + 8\,640\,184^s,542T + 0^s,0929T^2 \quad (5.2)$$

donde T son los siglos julianos en UT transcurridos desde la época J1900.0.

5.2 Nuevo sistema de referencia astronómico

En el año 1984 se modificó el sistema de referencia astronómico, lo que obligó a modificar la expresión que relaciona el tiempo universal con el

tiempo sidéreo. Este nuevo sistema usa el equinoccio definido por el catálogo estelar FK5, pero mantiene la continuidad con la escala de tiempo universal.

La corrección que hay que aplicar al equinoccio del catálogo FK4 para pasar al catálogo FK5 es

$$C = 0^s,06390 + 0^s,08500T_{1984} \quad (6.2)$$

T_{1984} son los siglos julianos transcurridos desde las 0 horas UT del 1 de enero de 1984 (que es el día juliano 2 445 700,5) y T_{1900} son siglos julianos contados desde las 12 horas UT del 31 de diciembre de 1899 (día juliano 2 415 020). Para un día juliano JD , tenemos

$$T_{1984} = \frac{JD - 2\,445\,700,5}{36\,525}; \quad T_{1900} = \frac{JD - 2\,415\,020}{36\,525}$$

de donde se deduce la relación

$$T_{1900} = T_{1984} + \frac{2\,445\,700,5 - 2\,415\,020}{36\,525}.$$

(3.2) viene expresada en función de T_{1900} por tanto al cambiar esta variable a T_{1984}

$$\alpha_m = 18^h39^m22^s,64 + 8\,640\,184^s,698\,069T_{1984} + 0^s,0929T_{1984}^2,$$

expresión sobre la que podemos aplicar la corrección (6.2)

$$\alpha_m = 18^h39^m22^s,7039 + 8\,640\,184^s,783\,069T_{1984} + 0^s,093\,104T_{1984}^2,$$

nótese que hemos actualizado el valor de la aceleración del equinoccio. Finalmente vamos a expresar la ascensión recta del Sol medio en función de los siglos desde la época J2000.0 (las 12 horas UT del 1 de enero de 2000), que representaremos con la letra T , tal que se cumple

$$T = T_{2000} = T_{1984} + \frac{2\,445\,700,5 - 2\,451\,545}{36\,525},$$

encontrándose

$$\alpha_m = 18^h41^m50^s,54841 + 8\,640\,184^s,812\,866T + 0^s,093\,104T^2. \quad (7.2)$$

Finalmente de (7.2) y (4.2) encontramos el tiempo sidéreo en el primer meridiano a las 0 horas UT

$$T_m(0^hUT) = 6^h41^m50^s,54841 + 8\,640\,184^s,812\,866T + 0^s,093\,107T^2, \quad (8.2)$$

recordamos que T son los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0, es decir que se trata de tiempo medido en UT .

6.2 Unidades de tiempo sidéreo y de tiempo medio

Ya hemos indicado que existen dos unidades de tiempo: el segundo sidéreo y el segundo solar, se trata de averiguar la relación que existe entre ambos.

Lo que se incrementa el tiempo sidéreo en un día solar medio es dado por

$$\delta T_m = 24 + \frac{dT_m}{dT} \delta T$$

donde δT es un día solar expresado en siglos julianos y T_m viene dado por

(8.2), entonces

$$\begin{aligned}\delta T_m &= 24 + (8\ 640\ 184^s, 812\ 866 + 0^s, 186\ 208T) \frac{1}{36525} = \\ &= 24 + 236^s, 555\ 368 + 5^s, 098 \cdot 10^{-6} T\end{aligned}$$

lo que significa que en un día solar medio el intervalo de tiempo sidéreo habrá aumentado en

$$\delta T_m = 86\ 636^s, 555\ 368 + 5^s, 098 \cdot 10^{-6} T$$

expresado en unidades de tiempo sidéreo. Despreciando la variación secular que es del orden de millonésimas de segundo por siglo, encontramos que 24 horas de tiempo solar (o 86400 segundos solares) corresponden a 86 636,555368 segundos sidéreos.

Entonces para convertir tiempo solar en tiempo sidéreo es necesario multiplicar por el coeficiente

$$\frac{86\ 636,555\ 368}{86\ 400} = 1,002\ 737\ 90935. \quad (9.2)$$

Ya tenemos el procedimiento para hallar el tiempo sidéreo medio conocido el tiempo universal. Dada la fecha calculamos el día juliano JD de ese día a las 0 horas utilizando (1.1) y (14.1). Con este valor se determina los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0 (12 horas de UT del día 1 de enero de 2000) utilizando la fórmula

$$T = \frac{JD - 2\ 451\ 545}{36525} \quad (10.2)$$

donde 2 451 545 es el día juliano de la época J2000.0 y 36 525 son los días que tiene un siglo juliano, o sea 100 años de una duración promedio de 365,25 días. Hay que notar que (10.2) puede ser negativo si la fecha es anterior al comienzo del año 2000.

A continuación se calcula el tiempo sidéreo a las 0 horas UT del día considerado por mediación de (8.2), a lo que se añade el tiempo transcurrido en ese día expresado en tiempo sidéreo, para lo que multiplicamos la fracción de día por el coeficiente numérico (9.2).

En el cálculo inverso se conoce la hora sidérea y el día de la fecha y se trata de averiguar la hora universal que le corresponde. Primeramente se determina el día juliano a las 0 horas del día considerado y con este dato se calculan los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0. Luego se determina el tiempo sidéreo a las 0 horas del día en cuestión. Este resultado se resta a la hora sidérea que se quiere transformar y el resultado es el tiempo sidéreo desde las 0 horas UT hasta la hora sidérea que se quiere determinar. El último paso consiste en dividir el anterior resultado entre el coeficiente numérico (9.2) y ya tenemos el tiempo UT .

7.2 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1.2- Hallar el tiempo sidéreo en el primer meridiano a las $1^h\ 15^m\ 32^s$ de UT del día 15 de agosto de 2020.

- Se determina la fecha en el calendario auxiliar por (1.1)

$$D' = 14; \quad M' = 5; \quad Y' = 6736.$$

- Se determina el día juliano de la fecha 15 de agosto de 2020 a las 0 horas UT por (14.1)

$$JD = 2\,459\,076,5.$$

- Se calcula los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0 por (10.2)

$$T = 0,206\,201\,232.$$

- Se calcula el tiempo sidéreo a las 0 horas UT por (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 21^h 35^m 27^s,3.$$

- Se halla el tiempo sidéreo de la fracción del día utilizando el coeficiente (9.2)

$$\begin{aligned} 1^h 15^m 32^s (\text{tiempo universal}) \cdot 1,002\,737\,909\,35 = \\ = 1^h 15^m 44^s,4 (\text{tiempo sidéreo}). \end{aligned}$$

- Y finalmente se calcula el tiempo sidéreo buscado

$$21^h 35^m 27^s,3 + 1^h 15^m 44^s,4 = 22^h 51^m 11^s,5.$$

Ejemplo 2.2.- Averiguar el tiempo universal correspondiente a las $15^h 13^m 44^s$ de tiempo sidéreo del día 20 de marzo de 2050.

- Se averigua la fecha del calendario auxiliar por mediación de (1.1)

$$D' = 19; \quad M' = 0; \quad Y' = 6766.$$

- Se halla el día juliano del 20 de marzo de 2050 a las 0 horas UT usando (14.1)

$$JD = 2\,469\,885,5.$$

- Se calcula los siglos julianos transcurridos desde J2000.0 para lo que se utiliza (10.2)

$$T = 0,502\,135\,5236.$$

- Se halla el tiempo sidéreo a las 0 horas del día 20 de marzo de 2050 por (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 11^h 50^m 54^s,3.$$

- Se resta a la hora sidérea que se quiere transformar el tiempo sidéreo anteriormente calculado

$$15^h 13^m 44^s - 11^h 50^m 54^s,3 = 3^h 22^m 49^s,7.$$

- Finalmente se divide este resultado por el coeficiente (9.2)

$$\frac{3^h 22^m 49^s,7 (\text{tiempo sidéreo})}{1,002\,737\,909} = 3^h 22^m 16^s,5 (\text{tiempo universal}).$$

Si el resultado hubiera salido negativo se convierte en un número positivo sumándole 24 horas.

8.2 Frenado secular de la Tierra

Según su definición, el tiempo solar es un tiempo uniforme, pero no lo es si se compara con el tiempo atómico o incluso con el tiempo marcado por

relojes astronómicos mecánicos de alta precisión. La explicación a esta diversidad es el frenado que sufre la rotación de la Tierra por efecto de las mareas. El tiempo universal o tiempo rotacional no es una escala de tiempo uniforme y sufre de una variación secular y de variaciones irregulares.

El tiempo terrestre TT es una escala de tiempo uniforme que materializa su medida por los relojes atómicos, que definen el tiempo atómico internacional TAI . Por definición la diferencia entre ambas escalas de tiempo es *

$$TT = TAI + 32^s,184 \quad (11.2)$$

diferencia que permanece inalterada, lo que significa que tanto el TT como el TAI utilizan la misma unidad de tiempo: el segundo atómico internacional.

El tiempo terrestre es un tiempo uniforme que cabe identificar con el tiempo uniforme de la dinámica; es decir, que es la variable temporal en las magnitudes que determinan el movimiento orbital de los astros.

El tiempo universal se acompaña con el movimiento aparente del Sol y por tanto es el que regula nuestra actividad diaria; pero es más, el tiempo universal lo utilizamos para calcular las coordenadas horizontales de los astros.

Necesitamos por tanto ambas escalas de tiempo. La solución que se ha adoptado es definir una nueva escala: el tiempo universal coordinado UTC , que es un tiempo uniforme, en el sentido de que usa como unidad el segundo atómico, pero que siempre está muy cercano al tiempo universal. De tal forma que la diferencia máxima entre el UTC y el UT no puede superar los 0,9 segundos, cuando se espera que esto ocurra se coloca un segundo intercalar,** lo que hace aumentar en un segundo la escala de tiempo universal coordinado.

Los segundos intercalares hacen aumentar la diferencia del UTC con el TAI , en la actualidad (año 2019) la diferencia entre ambas escalas es

$$TAI - UTC = 37^s .$$

El movimiento orbital del Sol y de la Luna, que veremos más adelante, está en función del tiempo terrestre. La escala oficial de tiempo en la vida cotidiana es el tiempo universal coordinado, sin embargo los calendarios se basan en el tiempo universal. Esto nos plantea dos problemas.

Uno de ellos es que no se puede predecir con antelación cuándo se introducen los segundos intercalares, ya que el frenado de la rotación de la Tierra es muy irregular y tan poco se sabe a ciencia cierta cómo será el frenado

* El origen del TAI se tomó haciéndolo coincidir con el tiempo universal el día 1 de enero de 1958 a las 0 horas. En ese momento la diferencia entre el tiempo universal y el tiempo de las efemérides era 32,184 segundos. La relación (11.2) consigue que el tiempo terrestre sea continuación del tiempo de las efemérides.

** Es posible que en vez de frenarse la rotación de la Tierra, lo que exista sea una aceleración, entonces sería necesario disminuir un segundo el tiempo universal coordinado. Esta circunstancia no ha ocurrido desde la introducción del UTC en 1972.

en un futuro lejano.

El otro problema es que el *UTC* no coincide con el *UT*, pudiendo haber entre ellos una diferencia máxima de 0,9 segundos.

9.2 Alargamiento del día

Se denomina alargamiento del día (que representamos por A_D) al tiempo que la duración del día solar medio * excede las 24 horas de tiempo uniforme. El día solar medio siempre tiene 24 horas de tiempo universal, pero tiene una duración que va variando cuando se mide en tiempo uniforme.

Sean 1 y 2 dos instantes entre los que hay una duración de un día solar medio. Si UT_2 y UT_1 son los tiempos de esos dos momentos expresados en tiempo universal se cumple

$$UT_2 - UT_1 = 24.$$

Si TT_2 y TT_1 son los tiempos de los momentos 1 y 2 expresados en tiempo terrestre se cumple

$$TT_2 - TT_1 = 24 + A_D.$$

Combinando las dos últimas expresiones queda

$$A_D = (TT_2 - UT_2) - (TT_1 - UT_1) = \Delta T_2 - \Delta T_1$$

donde hemos definido

$$\Delta T = TT - UT \quad (12.2)$$

que suponemos expresado en segundos. Hay que observar que estamos restando dos cantidades expresadas en unidades diferentes, TT está en segundos atómicos y UT en segundos solares medios, por tanto suponemos que 24 horas de tiempo uniforme restado de 24 horas de horas de tiempo solar es igual a cero.

Como los momentos 1 y 2 están separados por un día queda

$$A_D = \Delta T \left(T + \frac{1}{36525} \right) - \Delta T(T) = \frac{1}{36525} \frac{d\Delta T}{dT}$$

medido en segundos por día, siempre y cuando T se mida en siglos julianos contados a partir de una época determinada, por ejemplo desde J2000.0. Expresada la anterior fórmula en días por día queda

$$A_D = \frac{1}{86400} \frac{1}{36525} \frac{d\Delta T}{dT}. \quad (13.2)$$

Stephenson analizando observaciones astronómicas antiguas halló que se cumple la siguiente relación empírica

$$\Delta T = 80,44 + 111,6T + 31T^2 \quad (14.2)$$

T son siglos julianos contados a partir de la época J2000.0. Al aplicar este resultado en (13.2) encontramos como valor aproximado para el alargamiento

* El día solar medio es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del centro del Sol medio por el meridiano.

del día

$$A_D = u + wT = 3,5364 \cdot 10^{-8} + 1,9647 \cdot 10^{-8}T \quad (15.2)$$

expresado en días por día. *

Si con d representamos la duración de una día solar medio de 24 horas de tiempo UT y con D representamos un intervalo de 24 horas en tiempo TT , entonces por definición del alargamiento del día

$$d = D + A_D \Rightarrow D = d - u - wT, \quad (16.2)$$

relación que nos permite hacer la conversión de fórmulas en tiempo terrestre a tiempo universal. En efecto, sea una función cualquiera l

$$l = a + bT + cT^2$$

expresada en días de tiempo terrestre, es decir expresada en unidades D , entonces por (16.2) lo podemos poner en función de las unidades d , es decir en función de días de tiempo universal

$$l = a(D) + b(D)T + c(D)T^2 = a(d) + b(d)T + c(d)T^2 + (a + bT + cT^2)(-u - wT)$$

por tanto

$$l = (a - au) + (b - bu - aw)T + (c - cu - bw)T^2, \quad (17.2)$$

tenemos que anotar que las unidades del parámetro a son días, la de b días/siglo y las de c días/siglo².

Como hemos dicho, vamos a utilizar dos días julianos diferentes, el basado en el tiempo universal que identificamos con JD y el que se mide en tiempo terrestre TT que llevará la identificación JDT . El primero tiene como origen las 0 horas UT del día 1 de enero de -4712, mientras que el origen del segundo es las 0 horas TT del mismo día.

La época J2000.0 es la que tiene por origen las 12 horas de UT del día 1 de enero de 2000 y se utiliza en (10.2) para calcular los siglos julianos transcurridos desde esa época. Llamaremos época JT2000.0 a la que tiene su inicio a las 12 horas TT del día 1 de enero de 2000 y es utilizada en la misma fórmula (10.2). El origen de ambas épocas tienen el mismo día juliano: 2 451 545,0 JD y 2 451 545,0 JDT , respectivamente.

Por la tabla 1 encontramos para el comienzo del año 2000

$$TT - TAI = 32^s,184; \quad TAI - UTC = 32^s; \quad TT - UT = 63^s,82,$$

entonces la hora de comienzo de la época JT2000.0 es en las distintas escalas de tiempo

* Para el periodo comprendido entre 2004 y 2017 el ajuste de las medidas de ΔT se acomoda a la función cuadrática

$$\Delta T = 64,525 + 0,1921t + 0,008955t^2$$

que puede ser aplicada para conocer ΔT en los años inmediatamente posteriores. t son años transcurridos desde el 2004.

$$12^h 00^m 00^s TT = 11^h 59^m 27^s,816 TAI = \\ = 11^h 58^m 55^s,816 UTC = 11^h 58^m 56^s,18 UT.$$

La diferencia entre JD y JDT en cualquier momento viene dada por

$$\Delta T = JDT - JD.$$

10.2 Tiempo civil, oficial y legal

Como ya hemos dicho, el tiempo civil de un lugar es el tiempo solar medio aumentado en 12 horas, por tanto los lugares con longitudes geográficas diferentes tienen tiempos civiles también diferentes.

Para evitar el inconveniente de que incluso lugares cercanos tengan tiempos civiles distintos, se define el tiempo oficial, que es el que corresponde a un huso horario. La Tierra queda dividida en 24 husos horarios, cada uno con una extensión de 15° . De tal forma que el primer meridiano divide al primer huso en dos partes iguales.

El uso del tiempo oficial crea dificultades cuando un mismo país tiene territorios en varios husos. Para solucionar este problema se define el tiempo legal que es el que rige en una determinada zona, que resulta de alterar el huso horario al objeto de unificar lo mejor posible las horas en el interior de un territorio. Por ejemplo, parte de Galicia se encuentra en el segundo huso horario, sin embargo para unificar el tiempo dentro de España, se hace que Galicia quede dentro del tiempo del primer huso horario.

3

Precesión, nutación, aberración, paralaje, refracción y extinción atmosférica

1.3 Introducción

Se define la eclíptica verdadera como el plano donde se encuentran el centro del Sol, el baricentro Tierra-Luna y su vector velocidad respecto al Sol. Se define el ecuador verdadero como el plano normal al eje instantáneo de rotación. Con iguales nombres se conocen a los círculos máximos resultantes de los cortes de dichos planos con la esfera celeste.

La eclíptica y el ecuador se mueven por la acción de las perturbaciones que sobre la Tierra ejercen el Sol, la Luna y los planetas. El ecuador verdadero se ve afectado por el movimiento de precesión, que consiste en un movimiento real del eje de rotación de la Tierra, que describe un movimiento cónico de centro en la Tierra y que tiene un periodo de rotación de aproximadamente 26000 años.

A consecuencia del movimiento de precesión los polos celestes sufren un movimiento de rotación respecto al fondo estrellado, de tal forma que con el paso del tiempo se encuentran en sitios diferentes de la esfera celeste. La precesión es el fruto de la acción del Sol, y principalmente de la Luna, que actúan sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra, de aquí el nombre de precesión lunisolar con la que se le conoce.

El ecuador celeste (y sus polos) se ve también afectado por la nutación. Mientras que los polos celestes realizan la rotación por la precesión, describen simultáneamente un pequeño movimiento elíptico (elipse de nutación) con un periodo de 18,6 años, tiempo que tardan los nodos lunares en dar una vuelta completa con respecto al equinoccio.

De resultas de ambos movimientos, precesión y nutación, los polos celestes describen órbitas onduladas, compuestas de un movimiento secular y otro periódico, al primero se le llama precesión y al segundo nutación.

El plano de la eclíptica se ve influenciado por las perturbaciones de los planetas. Hay que distinguir dos tipos de perturbaciones: una de ellas es una variación secular y la otra es una variación de corto periodo producida principalmente por la acción de Venus y Júpiter. Esta última es una perturbación similar a lo que es la nutación para el ecuador. A la variación

secular de la eclíptica se le llama precesión planetaria, que resulta ser de valor mucho menor que la precesión lunisolar.

Se le llama eclíptica media a la eclíptica que sólo es influida por las perturbaciones seculares, por lo que hacemos abstracción de las perturbaciones periódicas. Se llama equinoccio verdadero al nodo ascendente del ecuador verdadero respecto a la eclíptica media.

Por efecto de la precesión, el equinoccio adquiere un movimiento del mismo sentido que el movimiento diurno de la esfera celeste, es decir en sentido retrógrado*, lo que significa un movimiento contrario al movimiento propio del Sol, de la Luna y de los planetas, los cuales tienen un sentido directo.

2.3 Precesión lunisolar y planetaria

La consecuencia del giro que experimenta el eje de rotación terrestre en torno al polo de la eclíptica por efecto de la precesión lunisolar, es que el ecuador rota con respecto a la eclíptica, manteniéndose constante el ángulo

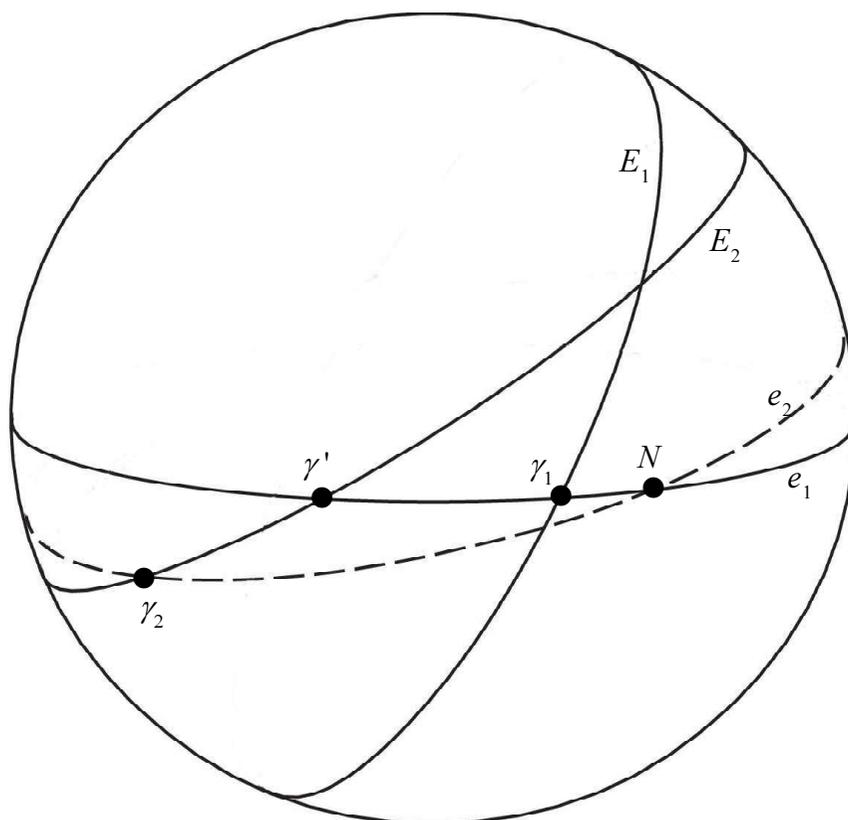


Figura 1.3.- Se muestra el ecuador E y la eclíptica e en dos momentos diferentes 1 y 2, así como los equinoccios γ_1 y γ_2 en esos instantes. El desplazamiento de γ_1 a γ' es efecto de la precesión lunisolar y el de γ' a γ_2 es el producto de la precesión planetaria.

* El movimiento directo es el de oeste a este mirando hacia el sur, es decir oeste-sur-este-norte.

entre ellos (que es la oblicuidad de la eclíptica). Por tanto el punto de corte de ambas curvas, llamado equinoccio, se va desplazando a lo largo de la eclíptica, con un movimiento retrógrado como hemos dicho.

La figura 1.3 hace referencia a dos momentos 1 y 2. E_1 y E_2 son los ecuadores en esos dos instantes y γ_1 y γ' los correspondientes equinoccios. Consideramos, de momento, la precesión lunisolar exclusivamente, por tanto suponemos fija la eclíptica e_1 . Vemos que el equinoccio por efecto de la precesión lunisolar ha retrocedido un ángulo, que al cabo de un año juliano tiene de valor

$$\psi = \gamma_1 \gamma' = 50'',3878 + 0'',0049T$$

donde T son los siglos julianos (de una duración de 36 525 días) transcurridos desde el comienzo del año 2000 o época JT2000.0 (12 horas TT del día 1 de enero de 2000).

Por efecto de la precesión planetaria la eclíptica se desplaza. Sea e_1 y e_2 las eclípticas en los momentos 1 y 2. A causa de esta precesión el equinoccio se desplaza de γ' a γ_2 , describiendo anualmente un ángulo

$$\lambda = \gamma' \gamma_2 = 0'',1055 - 0'',0189T.$$

El desplazamiento de la eclíptica y el ecuador por efecto de la precesión ocasiona que el ángulo formado por ambos planos u oblicuidad de la eclíptica varíe con el tiempo según la ley

$$\varepsilon = 23^\circ 26' 21'',45 - 46'',81T.$$

El punto N de la figura 1.3 es el punto de corte de las dos eclípticas, que nos permite calcular la precesión general en longitud por año

$$p = \gamma_2 N - \gamma_1 N \approx \psi - \lambda \cos \varepsilon \approx 50'',290\,966 + 0'',022\,2226T,$$

Llamamos equinoccio medio aquel que sólo se ve afectado por la precesión general y no por la nutación. Reservando el nombre de equinoccio verdadero cuando consideramos tanto la precesión como la nutación.

En lo que sigue expresaremos la longitud del Sol y de la Luna respecto al equinoccio medio (es decir considerando la precesión) por lo que sólo tendremos que añadirle la nutación.

3.3 Nutación

Como hemos dicho, además del movimiento secular del equinoccio existe un movimiento periódico, fruto de un pequeño movimiento del eje de rotación instantáneo alrededor de su posición media tal como es definida por la precesión.

En la figura 2.3 se indica la posición del equinoccio medio γ_m y del equinoccio verdadero γ_v el cual oscila alrededor de γ_m con un periodo de aproximadamente 18,6 años, el mismo tiempo que tarda el nodo ascendente lunar en dar una vuelta completa alrededor de la órbita lunar, lo que manifiesta que es la Luna la principal responsable de la nutación.

Por causa de la nutación se produce una variación igualmente periódica de la oblicuidad de la eclíptica. De tal forma que podemos descomponer la

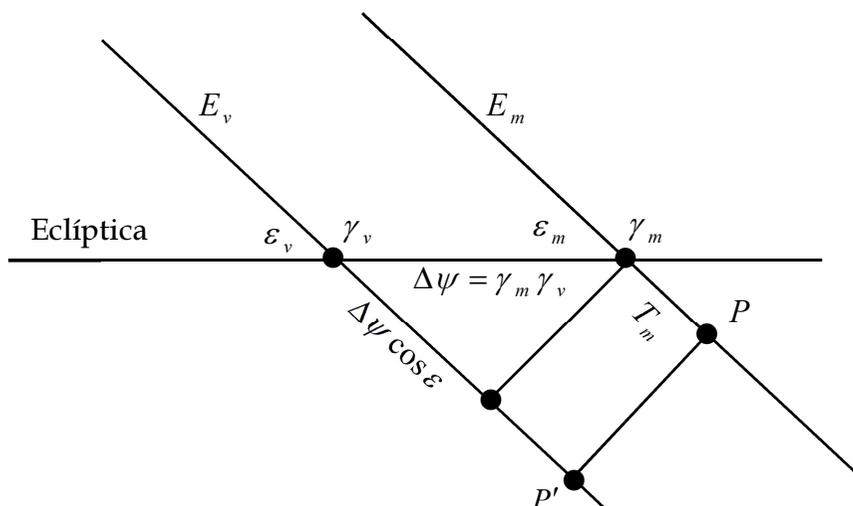


Figura 2.3.- Por el efecto de la nutación el equinoccio verdadero γ_v oscila en torno a la posición media del equinoccio γ_m . Otro efecto de la nutación es que varía la oblicuidad de la eclíptica. E_m es el ecuador medio, E_v el ecuador verdadero y la línea horizontal es la eclíptica.

nutación en dos componentes. Una de ellas es la nutación en longitud

$$\Delta\psi = \gamma_m \gamma_v = -17'', 20 \sin \Omega'_m - 1'', 32 \sin 2L_m, \quad (1.3)$$

más otros términos que vamos a despreciar por su pequeñez. Ω'_m es la longitud media del nodo ascendente de la órbita lunar y L_m es la longitud media del Sol, ambas magnitudes referidas al equinoccio medio de la fecha y que en función del tiempo son

$$\begin{aligned} \Omega'_m &= 125^\circ, 04436 - 1934^\circ, 136 185T + 0^\circ, 002 0761T^2 \\ L_m &= 280^\circ, 46645 + 36 000^\circ, 769 82T + 0^\circ, 000 3037T^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

midiéndose T en siglos julianos de TT desde la época JT2000.0. La nutación en longitud (1.3) tiene valor positivo cuando su sentido es retrógrado. (1.3) es la cantidad que hay que sumar a las longitudes medidas respecto al equinoccio medio para que vengan dadas respecto al equinoccio verdadero.

La otra componente es la nutación en oblicuidad

$$\Delta\epsilon = \epsilon_v - \epsilon_m = 9'', 20 \cos \Omega'_m \quad (3.3)$$

más otros términos que despreciamos. (3.3) es la cantidad que hay que sumar a la oblicuidad media de la eclíptica para obtener la oblicuidad verdadera.

En el epígrafe 1.2 se definió la ecuación de los equinoccios como la diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y el medio. De la figura (2.3) vemos que si P es el origen de los tiempos sidéreos, entonces $T_m = P\gamma_m$ mientras que el tiempo sidéreo verdadero es $T_v = P'\gamma_v$ por tanto

$$T_v = T_m + \frac{1}{15} \Delta\psi \cos \epsilon$$

donde se ha dividido entre 15 para pasar de segundos de ángulo a segundos

de tiempo. Por tanto la ecuación de los equinoccios es

$$EE \approx \frac{1}{15} \Delta\psi \cos \varepsilon. \quad (4.3)$$

expresado en segundos de tiempo si $\Delta\psi$ es dado en segundos de arco.

4.3 Aberración

La aberración consiste en la desviación que experimenta la orientación de los rayos luminosos cuando son vistos por un observador en movimiento. El fenómeno se puede interpretar en sentido contrario, es decir suponer que el observador está fijo y el objeto que emite la luz se encuentra en movimiento.

Cuando desde la Tierra es observado el Sol se produce el fenómeno de la aberración. En la figura 3.3 está representada la órbita elíptica del Sol y T es la Tierra situada en uno de los focos de la elipse. Desde S_1 el Sol emite un rayo, que dado el carácter finito de la velocidad de la luz c , tarda un tiempo t en llegar a la Tierra. Durante este intervalo de tiempo el Sol se habrá desplazado hasta la posición S_2 . A σ se le llama ángulo de aberración. Para determinar σ tengamos presente que dada lo elevada que es la velocidad de la luz, durante el tiempo t el Sol se habrá movido un arco pequeño en su órbita, pudiendo considerar que se ha estado moviendo con velocidad constante v , entonces si r es la distancia de la Tierra al Sol se cumple

$$r\sigma = vt \Rightarrow \sigma = \frac{v}{c} \quad (5.3)$$

puesto que en el intervalo de tiempo t la luz ha recorrido la distancia r . Nótese que v es la velocidad perpendicular al radio vector, es decir la velocidad que hace cambiar la dirección del Sol; la otra componente de la velocidad, la radial, hace cambiar la distancia de la Tierra al Sol, por lo

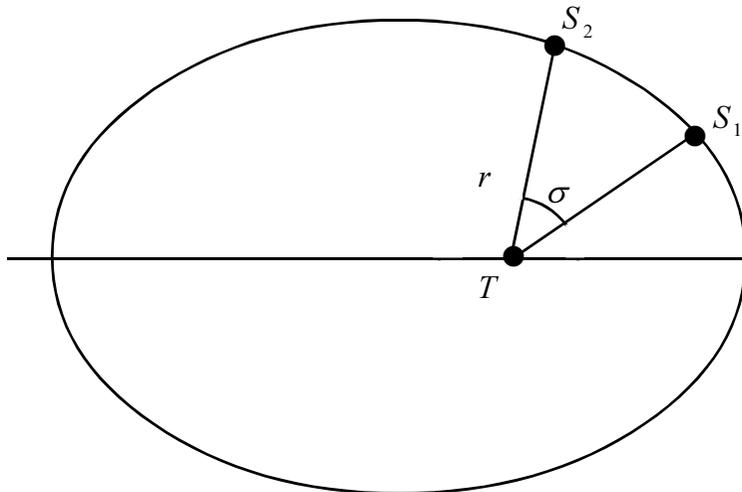


Figura 3.3.- Cuando el Sol está en S_1 emite un rayo de luz. Al llegar el rayo a la Tierra T , el Sol ya se encuentra en la posición S_2 . S_1 es la posición aparente y S_2 la posición geométrica. El ángulo σ es el ángulo de aberración.

tanto no interviene en el fenómeno de aberración.

Entonces cuando desde la Tierra se observa el Sol en la posición S_1 , en realidad se encuentra en la posición S_2 , es decir desplazado un ángulo σ . A S_1 se le llama la posición aparente y a S_2 la posición geométrica del Sol. Es decir, que la longitud calculada a partir de la mecánica celeste es un valor geométrico, al que habrá que restar el ángulo de aberración para obtener la longitud aparente.

Notemos que la definición de (5.3) no tiene en consideración la corrección relativista, que no la necesitamos en los cálculos aproximados que vamos a hacer más adelante.

Para calcular el ángulo de aberración se necesita conocer la componente normal al radio vector que une Tierra y Sol. Como el Sol describe una órbita elíptica obedece a la ecuación (ver epígrafe 2.4)

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

donde a es el semieje mayor de la órbita, e la excentricidad y θ es la anomalía verdadera (ángulo desde el pericentro de la órbita hasta donde se encuentra el Sol en el sentido de su movimiento). El vector velocidad orbital del Sol es

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{u}_r) = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_p = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_p$$

donde \mathbf{u}_r y \mathbf{u}_p son los vectores unitarios radial y perpendicular. Las ecuaciones (8.4), (14.4) y (18.4) que se deducirán en el capítulo 4 son

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}; \quad L^2 = \mu k a(1-e^2); \quad n = \sqrt{\frac{k}{\mu a^3}}$$

donde L es el módulo del momento angular, μ es la masa reducida del sistema Tierra-Sol, n es el movimiento medio y $k = Gm_{Tierra}m_{Sol}$, entonces la velocidad normal que estamos buscando es

$$\mathbf{v}_p = r\dot{\theta}\mathbf{u}_p = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}(1+e\cos\theta)\mathbf{u}_p.$$

Por tanto el ángulo de aberración (5.3) es

$$\sigma = K(1+e\cos\theta) \quad (6.3)$$

donde K es la constante de aberración definida por

$$K = \frac{na}{c\sqrt{1-e^2}}$$

que para el caso del Sol tiene el valor

$$K = 20'',49552. \quad (7.3)$$

El mayor y menor valor que puede tomar el ángulo de aberración (6.3) para el caso del Sol es

$$\sigma_{\max} = K(1+e) = 20'',83797; \quad \sigma_{\min} = K(1-e) = 20'',15307$$

una pequeña diferencia de 0,68 segundos de arco, por lo que no se cometerá

error apreciable si se toma la aberración del Sol constante y de valor (7.3).

5.3 Latitudes geográficas y geocéntricas

La Tierra no es una esfera ya que tiene un achatamiento resultado de su rotación. Su figura puede asimilarse a la de un elipsoide de revolución. Si a es el semieje mayor o radio ecuatorial R , b es el semieje menor o radio polar y f es el aplantamiento, tenemos según la Unión Astronómica internacional

$$a = R = 6\,378,160\text{ km}$$

$$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298,25},$$

entonces $b = 6\,356,775\text{ km}$.

Consideremos un punto A de la superficie terrestre (ver figura 4.3). La línea perpendicular a la superficie de la Tierra que pasa por ese lugar, no pasa por el centro de la Tierra. Al ángulo φ que forma esta línea con el plano ecuatorial se le llama latitud geográfica del lugar. Esta línea está dirigida hacia el cénit Z . El plano que pasando por A es normal a la anterior línea perpendicular es el plano del horizonte H .

La línea que pasa por el centro de la Tierra C y por el punto A forma con el plano del ecuador un ángulo φ' al que llamamos latitud geocéntrica. Esta línea se dirige hacia el punto Z' , que no coincide con el cénit.

La distancia del centro de la Tierra al punto A depende de la latitud del lugar y la representaremos por $CA = \rho R$, donde R es el radio ecuatorial y ρ es un coeficiente adimensional cercano a la unidad, cuyo valor es 1 para un punto del ecuador y $b/R = 0,996\,647$ para un punto situado en los polos.

Para relacionar las latitudes φ y φ' vamos a considerar un sistema de coordenadas, tal que el eje y esté en la dirección del polo norte, y el eje x sea

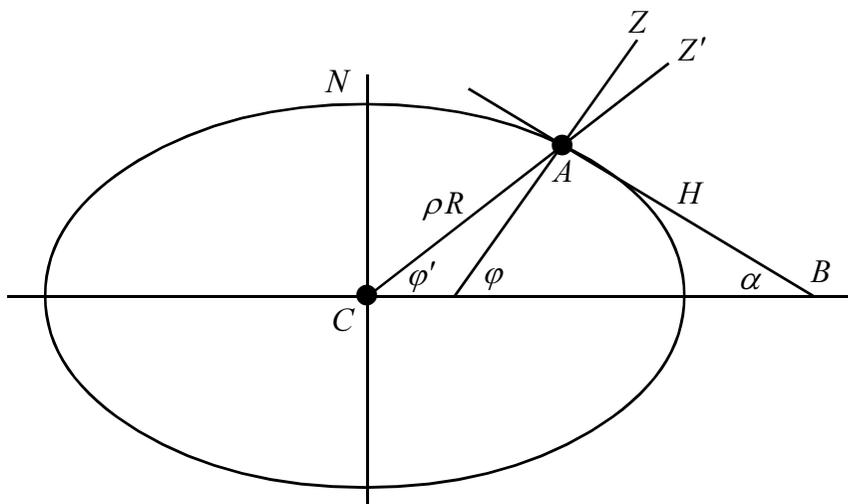


Figura 4.3.- Elipsoide de revolución terrestre. C es el centro de la Tierra, φ y φ' son las latitudes geográfica y geocéntrica, Z es el cénit, H es el plano del horizonte y N es el polo norte terrestre.

tal que en el plano $y-x$ se encuentren los puntos C y A . Entonces según la figura 4.3

$$\tan \varphi' = \frac{y}{x},$$

siendo x, y las coordenadas del punto A . Por la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{\tan \varphi'}.$$

Ahora bien dy/dx es la tangente trigonométrica de la tangente geométrica AB en el punto A . Del triángulo CAB de la figura 5.3 se encuentra

$$\frac{dy}{dx} = \tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha = -\tan(90 - \varphi) = -\frac{1}{\tan \varphi}$$

puesto que $\varphi = 90 - \alpha$. Entonces encontramos la relación entre ambas latitudes

$$\tan \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi. \quad (8.3)$$

Como b/a es cercano a la unidad podemos utilizar la fórmula (23.4) que deduciremos más adelante, obteniéndose

$$\varphi' = \varphi + g \sin 2\varphi + \frac{1}{2} g^2 \sin 4\varphi + \dots$$

donde

$$g = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} = -0,003\,358\,469 \text{ rad},$$

y encontramos

$$\varphi' = \varphi - 692'',73 \sin 2\varphi + 1'',16 \sin 4\varphi + \dots \quad (9.3)$$

Finalmente vamos a determinar el valor de ρ para un punto cualquiera A de la superficie de la Tierra que tiene de latitud geocéntrica φ' . La distancia ρR del centro C de la Tierra, de coordenadas $(0,0)$, al punto A de la superficie de coordenadas (x,y) es

$$\rho^2 R^2 = x^2 + y^2,$$

por la ecuación de la elipse

$$\rho^2 R^2 = x^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) + b^2$$

y como

$$x = \rho R \cos \varphi'$$

tenemos

$$\rho = \frac{b/R}{\sqrt{1 - (1 - b^2/R^2) \cos^2 \varphi'}}. \quad (10.3)$$

Por (9.3) se conoce la latitud geocéntrica en función de la geográfica, entonces

por (10.3) se determina la distancia del centro de la Tierra a un punto de su superficie si conocemos su latitud geográfica.

Ejemplo 1.3.- Determinar la latitud geocéntrica de un punto de latitud geográfica $35^{\circ} 24' 30''$.

- Por (8.3) o (9.3) se calcula la latitud geocéntrica

$$\varphi' = 35^{\circ} 13' 36''.$$

- Por (10.3) se determina ρR

$$\rho R = 6\,371,02 \text{ km}.$$

6.3 Paralaje

El paralaje es la desviación angular de un objeto cuando es observado desde puntos distintos. Las posiciones de los astros se calculan respecto al centro de la Tierra (posiciones geocéntricas), pero la observaciones se hacen desde la superficie de la Tierra (posiciones topocéntricas). El ángulo de visión topocéntrico es distinto del geocéntrico por efecto del paralaje.

El efecto del paralaje es más acusado cuanto más cerca esté el astro del punto de observación, siendo por tanto la corrección mayor con la Luna que con el Sol.

El paralaje ecuatorial horizontal de un astro π (ver figura 5.3) se define por

$$\sin \pi = \frac{R}{r} \quad (11.3)$$

r es la distancia desde el centro de la Tierra al astro y R es el radio ecuatorial de la Tierra. Como la distancia del centro de la Tierra al astro cambia, también variará el paralaje ecuatorial horizontal.

De la figura 6.3 se deduce

$$r_T \cos \alpha' = r \cos \alpha - \rho R$$

$$r_T \sin \alpha' = r \sin \alpha$$

introduciendo en el cálculo el paralaje ecuatorial horizontal y el coeficiente $q = r_T/r$, nos queda

$$q \cos \alpha' = \cos \alpha - \rho \sin \pi$$

$$q \sin \alpha' = \sin \alpha.$$

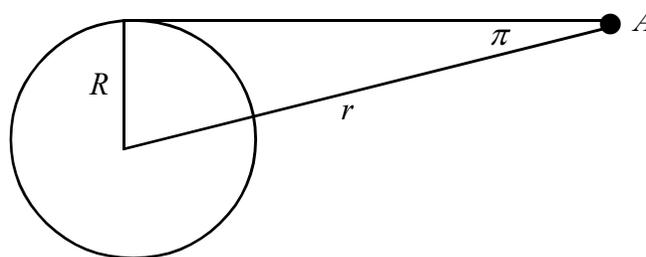


Figura 5.3.- Paralaje ecuatorial horizontal de un astro A . R es el radio ecuatorial de la Tierra.

De esta expresión despejamos α' y q

$$\tan \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \rho \sin \pi}$$

$$q = \sqrt{1 - 2\rho \sin \pi \cos \alpha + \rho^2 \sin^2 \pi}.$$

También se deduce que

$$q \sin(\alpha' - \alpha) = \rho \sin \pi \sin \alpha$$

$$q \cos(\alpha' - \alpha) = 1 - \rho \sin \pi \cos \alpha.$$

De la figura 6.3 se encuentra que el ángulo de paralaje es $p = \alpha' - \alpha$ y por las ecuaciones anteriores

$$\tan p = \frac{\rho \sin \pi \sin \alpha}{1 - \rho \sin \pi \cos \alpha}. \quad (12.3)$$

Para determinar el ángulo α se aplica la fórmula (17.5) que deduciremos más adelante

$$\sin(90 - \alpha) = \cos \alpha = \sin \varphi' \sin \delta + \cos \varphi' \cos \delta \cos H$$

donde δ es la declinación del astro y H su ángulo horario, que se determina como veremos más adelante.

7.3 Corrección de la altura y el acimut por el paralaje

A partir de la posición eclíptica (longitud y latitud) de un astro se determina (como se verá más adelante) la ascensión recta y la declinación geocéntricas; y de estas coordenadas ecuatoriales se determinan las coordenadas horizontales (altura y acimut) igualmente geocéntricas. El problema que ahora nos planteamos es el cálculo de la corrección que hay que hacer a estos valores geocéntricos para obtener la altura y el acimut topocéntricos.

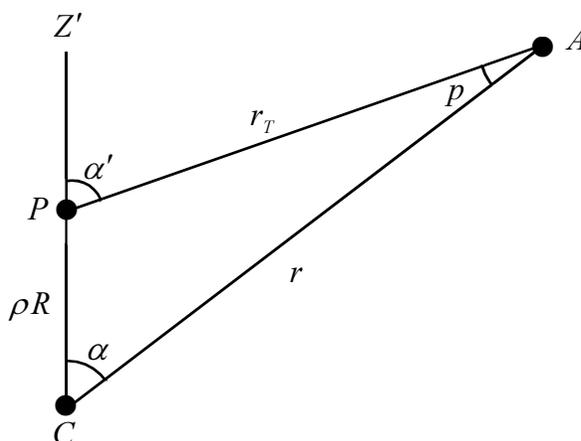


Figura 6.3.- C es el centro de la Tierra, P es la posición de observación sobre la superficie terrestre y A es el astro que se observa. r y r_T son las distancias geocéntrica y topocéntrica de A . Al ángulo p se le llama paralaje. El complementario del ángulo α no es la altura geocéntrica del astro. Ni α' es el ángulo complementario de la altura topocéntrica. Z' no es el cénit del observador P .

Consideremos dos sistemas de referencias K y K_T . El primero con origen en el centro de la Tierra y K_T con centro en la posición del observador sobre la superficie terrestre. Como se aprecia en la figura 7.3 el eje x_T se encuentra en el plano del horizonte y dirigido hacia el sur; el eje z_T se dirige hacia el cénit y el eje y_T es perpendicular a los anteriores. Los ejes x, y, z del sistema de coordenadas geocéntricas son paralelos a los anteriores, siendo coincidentes los planos $x-z$ y x_T-z_T .

Un astro situado a la distancia geocéntrica r y a la distancia topocéntrica r_T , tiene de altura y acimut geocéntrico h y A ; siendo la altura y acimut topocéntrico h_T y A_T . Las coordenadas cartesianas del astro respecto a los dos sistemas de coordenadas son

$$\begin{aligned} x &= r \cos h \cos A; & y &= r \cos h \sin A; & z &= r \sin h \\ x_T &= r_T \cos h_T \cos A_T; & y_T &= r_T \cos h_T \sin A_T; & z_T &= r_T \sin h_T \end{aligned}$$

donde el acimut lo entendemos medido desde el meridiano superior en sentido retrógrado. Las coordenadas del punto P de observación sobre la superficie terrestre respecto al sistema geocéntrico son (ver figura 7.3)

$$\begin{aligned} x_P &= \rho R \cos[90 - (\varphi - \varphi')] = \rho R \sin(\varphi - \varphi') \\ y_P &= 0 \\ z_P &= \rho R \sin[90 - (\varphi - \varphi')] = \rho R \cos(\varphi - \varphi'). \end{aligned}$$

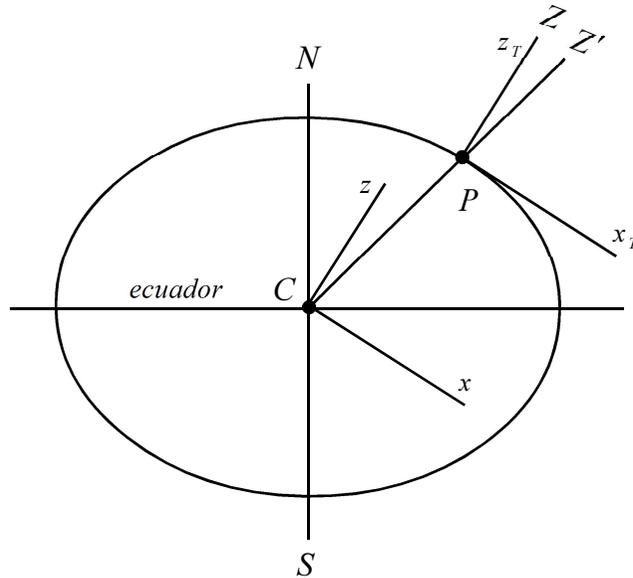


Figura 7.3.- Se representa la Tierra con centro en C . N y S son los polos terrestres norte y sur. P es el punto de observación sobre la superficie terrestre. Z es la dirección del cénit, que es perpendicular al horizonte que es donde se encuentra el eje x_T . Los ejes y e y_T son perpendiculares al plano del papel, es decir dirigidos hacia el oeste. Z' es la dirección de la línea que une el punto P con el centro C . La línea CZ' forma un ángulo φ' con el ecuador; mientras que la línea PZ forma un ángulo φ con el ecuador. Por tanto la línea CP forma un ángulo $90 - (\varphi - \varphi')$ con el eje x .

Si \mathbf{r}_P y \mathbf{r}_T son los vectores de posición del observador P y el astro con respecto al sistema K y \mathbf{r}_T es el vector de posición del astro respecto a K_T , entonces se cumplirá

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_P + \mathbf{r}_T,$$

como los ejes de los dos sistemas de referencia son paralelos entre sí nos queda

$$x_T = x - x_P \Rightarrow r_T \cos h_T \cos A_T = r \cos h \cos A - \rho R \sin(\varphi - \varphi')$$

$$y_T = y - y_P \Rightarrow r_T \cos h_T \sin A_T = r \cos h \sin A$$

$$z_T = z - z_P \Rightarrow r_T \sin h_T = r \sin h - \rho R \cos(\varphi - \varphi'),$$

o poniéndolo en función del paralaje ecuatorial horizontal

$$\begin{aligned} q \cos h_T \cos A_T &= \cos h \cos A - \rho \sin \pi \sin(\varphi - \varphi') \\ q \cos h_T \sin A_T &= \cos h \sin A \\ q \sin h_T &= \sin h - \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi'), \end{aligned} \quad (13.3)$$

fórmulas con las que se determinan las coordenadas horizontales topocéntricas conocidas las correspondientes coordenadas geocéntricas y viceversa. *Ejemplo 2.3.-* Hallar las coordenadas horizontales topocéntricas de la Luna en una posición de latitud geográfica $36^\circ 20' 18''$, siendo las altura y acimut geocéntrico $32^\circ 6' 2''$ y $62^\circ 56' 13''$ y la distancia geocéntrica del centro de la Luna 383 688 kilómetros.

- Por (8.3) o (9.3) se determina la latitud geocéntrica del punto de observación

$$\varphi' = 36^\circ 9' 17'', 35.$$

- Por (11.3) se calcula el paralaje horizontal ecuatorial

$$\pi = 0^\circ 57' 8'', 96.$$

- Se aplica (10.3) y se calcula

$$\rho = 0,998\ 829.$$

- Dividiendo las dos primeras ecuaciones (13.3) hallamos el acimut topocéntrico

$$A_T = 62^\circ 56' 24'', 5.$$

- De la segunda y tercera ecuación (13.3) se halla

$$\tan h_T = \frac{\sin h - \rho \sin \pi \cos(\varphi - \varphi')}{\cos h \sin A} \sin A_T$$

determinándose la altura topocéntrica

$$h_T = 31^\circ 17' 17'', 8.$$

- De (13.3) se determina el parámetro q y la distancia topocéntrica del centro de la Luna

$$q = \frac{\cos h \sin A}{\cos h_T \sin A_T} = 0,991\ 256 \Rightarrow r_T = 380\ 333\ km.$$

Hay que tener precaución al realizar la operación de la función arcotangente, pues algunas máquinas de calcular sólo devuelven ángulos com-

prendidos entre 90° y -90° . Si la calculadora o el programa utilizado tiene el problema antes señalado, debe seguirse la siguiente norma: si el numerador es + y el denominador es -, al resultado se le suma 180° ; si el numerador es - y el denominador es +, se le suma 360° y si el numerador es - y el denominador es -, entonces se le suma 180° .

Si el observador estuviera a una altura f sobre la superficie del elipsoide, seguirían siendo válidas las anteriores ecuaciones con tal de hacer la sustitución

$$\rho \rightarrow \rho + \frac{f}{R}.$$

8.3 Ley general de la refracción atmosférica

Cuando la luz (y en general cualquier otra radiación electromagnética) entra en la atmósfera sufre el efecto de la refracción, a consecuencia del cambio del valor del índice de refracción de los dos medios por donde se desplaza (vacío y atmósfera). Pero es más, la atmósfera no tiene un índice de refracción homogéneo sino que cambia a medida que aumenta la densidad atmosférica, por lo que el rayo durante su propagación por la atmósfera va sufriendo continuamente la refracción.

Para tratar este fenómeno vamos a suponer que el índice de refracción de la atmósfera terrestre tiene simetría esférica, es decir que sólo depende de la distancia al centro de la Tierra $n = n(r)$. Es como suponer que la Tierra está rodeada de capas esféricas concéntricas de espesor infinitesimal, teniendo cada una de ellas un valor definido del índice de refracción sólo dependiente del radio de esa concha esférica.

En la figura 8.3 aparece una de estas capas, limitada por las esferas $i+1$ e i , de índice de refracción n_i , mientras que n_{i+1} es el índice de refracción de la capa exterior. Un rayo que la atraviesa incide en el punto A , con un ángulo

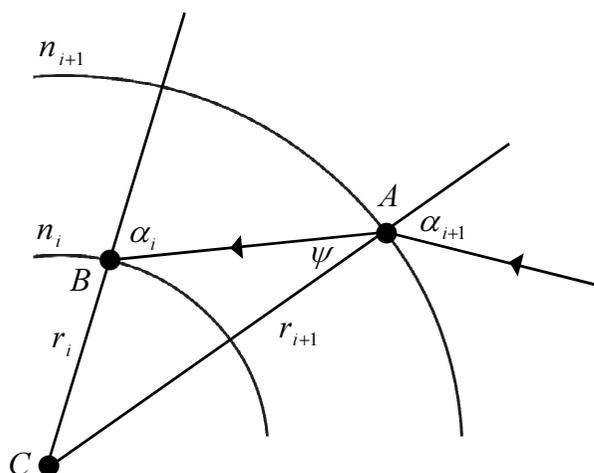


Figura 8.3.- Se muestra una de las capas de grosor infinitesimal de la atmósfera terrestre. Un rayo de luz incide en el punto A y se refracta al punto B .

α_{i+1} siendo el ángulo de refracción ψ , entonces por la ley de la refracción de Snell

$$n_{i+1} \sin \alpha_{i+1} = n_i \sin \psi . \quad (14.3)$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo ACB se encuentra

$$\frac{r_i}{\sin \psi} = \frac{r_{i+1}}{\sin(180 - \alpha_i)} = \frac{r_{i+1}}{\sin \alpha_i} \quad (15.3)$$

donde r_{i+1} y r_i son las distancias de los puntos B y A al centro de la Tierra C . De (14.3) y (15.3) se deduce

$$r_i n_i \sin \alpha_i = r_{i+1} n_{i+1} \sin \alpha_{i+1}$$

lo que quiere decir que la cantidad $r n \sin \alpha$ es una constante a lo largo de la trayectoria de la luz por la atmósfera. Por tanto si n_0, r_0 y α_0 son los valores en el punto de observación sobre la superficie terrestre y n, r y α son los valores en cualquier otro punto se cumple

$$r n \sin \alpha = r_0 n_0 \sin \alpha_0 \quad (16.3)$$

donde α_0 es la distancia cenital aparente del astro en el lugar de observación sobre la Tierra. Derivando (16.3) se encuentra

$$\frac{dn}{n} + \frac{dr}{r} + \cot \alpha d\alpha = 0. \quad (17.3)$$

En la figura 9.3 se representa la trayectoria de un rayo de luz que incide

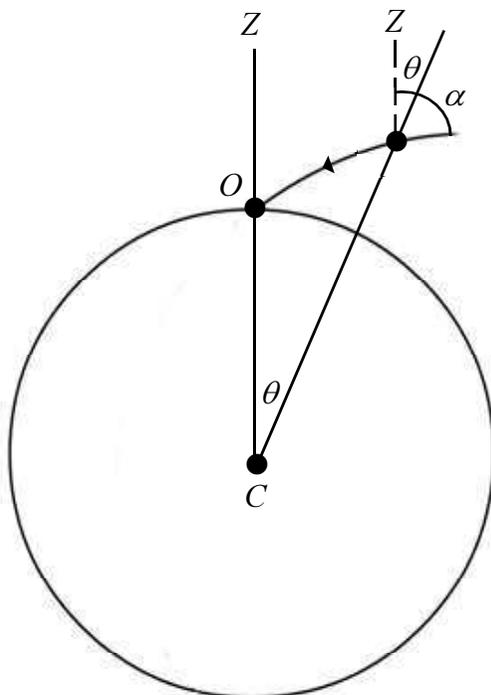


Figura 9.3.- Trayectoria curva de un rayo refractándose en la atmósfera. La distancia cenital z es el ángulo entre la dirección cenital AZ y la tangente de la trayectoria de la luz, es decir $z = \theta + \alpha$.

en la atmósfera, en donde vemos que la distancia cenital en A es

$$z = \alpha + \theta, \quad (18.3)$$

por otra parte, como muestra la figura 10.3, si $d\theta$ es el desplazamiento angular de posición del rayo medido desde el centro de la Tierra tenemos

$$\tan(90 - \alpha) = \cot \alpha = \frac{dr}{rd\theta}. \quad (19.3)$$

De (17.3), (18.3) y (19.3) se encuentra

$$\frac{dn}{n} = -\cot \alpha dz. \quad (20.3)$$

Se llama ángulo de refracción total a

$$R_T = z_1 - z_0 \quad (21.3)$$

donde z_1 es la distancia cenital geométrica, es decir la que existiría en ausencia de refracción y z_0 es la distancia cenital aparente, es decir tal como se observa en la superficie terrestre después de que el rayo haya sido refractado. El ángulo de refracción respecto a un punto cualquier de la atmósfera es

$$R = z - z_0.$$

donde z es el ángulo cenital aparente con que se observa el astro en un punto determinado de la atmósfera.

Teniendo en cuenta la definición (21.3), (20.3) se pone como

$$\frac{dn}{n} = -\cot \alpha dR$$

e integrando

$$\int_0^1 dR = R_T = -\int_{n_0}^1 \frac{dn}{n} \tan \alpha. \quad (22.3)$$

Vamos seguidamente a poner el ángulo de incidencia α en función de n

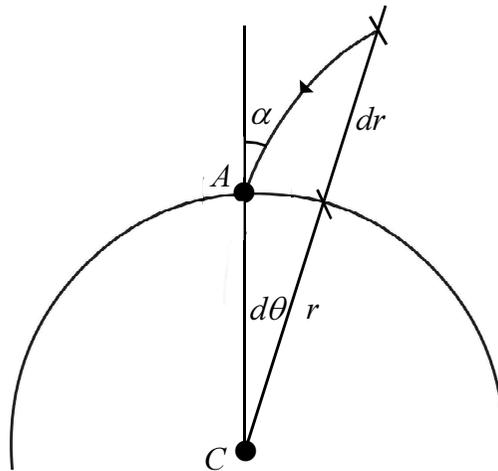


Figura 10.3.- Un rayo de luz incide en el punto A de una de las capas esféricas en que suponemos constituida la atmósfera. En el dibujo se representa el ángulo infinitesimal $d\theta$ recorrido por el rayo. C es el centro de la Tierra.

y r . De (16.3) se pone α en función de n y r

$$\sin \alpha = \frac{n_0 r_0}{nr} \sin z_0,$$

y por tanto

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\sin z_0}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z_0}}$$

y poniendo este resultado en (22.3) queda finalmente

$$R_T = \sin z_0 \int_1^{n_0} \frac{dn}{n} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 r_0}\right)^2 - \sin^2 z_0}}, \quad (23.3)$$

que es la ley general de la refracción atmosférica, establecida con la única suposición de que el índice de refracción dependa exclusivamente de la distancia r al centro de la Tierra. Notemos que para poder resolver la integral es necesario conocer la función $n = n(r)$.

9.3 Fórmula de Laplace de la refracción atmosférica

Vamos a utilizar la ley empírica de Gladstone-Dale que nos dice que el índice de refracción de la atmósfera varía linealmente con su densidad, es decir

$$n = 1 + \chi_0 \rho = 1 + \frac{\rho}{\rho_0} (n_0 - 1), \quad (24.3)$$

ρ es la densidad del aire en un punto de la atmósfera de índice de refracción n y ρ_0 es la densidad en el punto de observación sobre la superficie de la Tierra donde el índice de refracción es n_0 y χ_0 es una constante de valor

$$\chi_0 = \frac{n_0 - 1}{\rho_0}.$$

Derivando (24.3) se encuentra

$$\frac{dn}{n} = \frac{\chi_0 d\rho}{1 + \chi_0 \rho}.$$

Podemos considerar pequeño el espesor de la capa atmosférica con relación al radio de la Tierra, de tal forma que si f es la altura sobre la superficie de la Tierra y r_0 es el radio terrestre, vamos a suponer que se cumple

$$\frac{f}{r_0} \ll 1.$$

Con las suposiciones anteriores podemos poner

$$\frac{nr}{n_0 r_0} = \frac{(1 + \chi_0 \rho)(r_0 + f)}{(1 + \chi_0 \rho_0)r_0} \approx 1 + \frac{f}{r_0} - \chi_0 (\rho_0 - \rho),$$

suponiendo que $\chi_0 \rho_0$ es una cantidad pequeña. Entonces

$$\frac{nr}{n_0 r_0} \approx 1 + u$$

u es una función de h y ρ , dada por

$$u = \frac{f}{r_0} - \chi_0 (\rho_0 - \rho),$$

poniendo (23.3) en función de u obtenemos

$$R_T = \chi_0 \tan z_0 \int_1^0 \frac{d\rho}{1 + \chi_0 \rho} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2u}{\cos^2 z_0}}}, \quad (25.3)$$

representando el 0 un punto de la superficie terrestre y 1 un punto exterior de la atmósfera. En (25.3) hemos despreciado el término en u^2 . Si suponemos que la distancia cenital z_0 es pequeña, entonces el segundo sumando del radicando de (25.3) es una cantidad pequeña, lo que nos permite hacer

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2u}{\cos^2 z_0}}} \approx 1 - \frac{u}{\cos^2 z_0} = 1 - u(1 + \tan^2 z_0)$$

y el ángulo de refracción total (25.3) se reduce a

$$R_T = \chi_0 \tan z_0 \left[\int_1^0 (1 - \chi_0 \rho) d\rho - \frac{1}{\cos^2 z_0} \int_1^0 u d\rho \right], \quad (26.3)$$

suponiendo, una vez más, que $\chi_0 \rho$ es un valor pequeño. La primera de las anteriores integrales se resuelve por partes

$$\int_1^0 (1 - \chi_0 \rho) d\rho = \left(\rho - \frac{1}{2} \chi_0 \rho^2 \right) \Big|_1^0 = \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right)$$

ρ_1 es la densidad del aire del espacio exterior y por tanto nula. En cuanto a la segunda integral tenemos

$$\int_1^0 u d\rho = \frac{1}{r_0} \int_1^0 f d\rho - \chi_0 \int_1^0 (\rho_0 - \rho) d\rho,$$

la primera de las anteriores integrales se resuelve por descomposición en partes

$$\int_1^0 u d\rho = \frac{1}{r_0} f \rho \Big|_1^0 - \int_1^0 \rho df - \chi_0 \left(\rho_0 \rho - \frac{1}{2} \rho^2 \right) \Big|_1^0 = - \int_1^0 \rho df - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0^2$$

donde hemos tenido en cuenta que en el punto 0 la altura sobre la superficie terrestre es nula.

La diferencia de presión entre dos capas de aire infinitamente cercanas es

$$dP = -\rho g df$$

donde g es la aceleración de la gravedad. El signo menos aparece para indicar que la presión en la capa superior de la atmósfera es menor que la presión en la capa inferior. Entonces

$$-\int_1^0 \rho df = \frac{1}{g} \int_1^0 dP = \frac{P_0}{g}$$

donde P_0 es la presión atmosférica en la superficie de la Tierra.

Reuniendo todos los resultados escribimos (26.3) de la forma

$$R_T = \chi_0 \rho_0 \tan z_0 \left[1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 - \frac{1}{\cos^2 z_0} \left(\frac{P_0}{g \rho_0 r_0} - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \right].$$

o bien

$$R_T = \chi_0 \rho_0 \left(1 - \frac{P_0}{g \rho_0 r_0} \right) \tan z_0 - \chi_0 \rho_0 \left(\frac{P_0}{g \rho_0 r_0} - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \tan^3 z_0 \quad (27.3)$$

donde hemos utilizado la relación trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2 z_0} = 1 + \tan^2 z_0.$$

A (27.3) se le llama fórmula de Laplace de la refracción atmosférica. (27.3) la ponemos como

$$R_T = A \tan z_0 - B \tan^3 z_0, \quad (28.3)$$

donde A y B son dos constantes numéricas cuyo valor podemos determinar. Bajo condiciones normales de presión y temperatura (28.3) queda

$$R_T = 60'', 27 \tan z_0 - 0'', 067 \tan^3 z_0. \quad (29.3)$$

Si en vez de la distancia cenital aparente se conociese la distancia cenital geométrica z , entonces para calcular R_T se utiliza (29.3) por aproximaciones sucesivas. Como primera aproximación de z_0 se toma $z_{0-1} = z$ y se obtiene una primera aproximación de R_T por mediación de (29.3): R_{T1} . Con este valor se halla una segunda aproximación de z_0 : $z_{0-2} = z + R_{T1}$ y de nuevo se aplica (29.3) obteniendo una segunda aproximación de R_T : R_{T2} . Y así seguimos hasta que alcancemos el grado de precisión que deseemos.

Ejemplo 3.3.- Determinar el ángulo de refracción para un astro que se encuentra a una distancia cenital geométrica de 45° .

- Como primera aproximación tomamos $z_{0-1} = 45^\circ$.

- Se aplica (29.3) y se encuentra $R_{T-1} = 60'', 203$.

- Se toma una segunda aproximación

$$z_{0-2} = 45^\circ + 60'', 203/3600 = 45^\circ, 016\ 723.$$

- De nuevo se aplica (26.3) y $R_{T-2} = 60'', 238$.

- En una nueva aproximación

$$z_{0-3} = 45^\circ + 60'', 238/3600 = 45^\circ, 016\ 733.$$

- La aplicación de (26.3) da $R_{T-3} = 60'', 238$. Que podemos entender que es una aproximación más que suficiente.

- Entonces encontramos para la distancia cenital aparente

$$z_0 = 45^\circ, 0167.$$

y el ángulo de refracción $R_T = 60'', 238$. Podemos comprobar la corrección del resultado aplicando (29.3) con el resultado numérico hallado para z_0 y viendo que se encuentra el anterior ángulo de refracción, dentro de la aproximación deseada.

10.3 Refracción cerca del horizonte

La fórmula de Laplace (29.3) se ha deducido con la suposición de que la distancia cenital z_0 es pequeña, por tanto deja de tener aplicabilidad para astros situados cerca del horizonte donde la distancia cenital es grande. (29.3) se puede aplicar con un error de pocos minutos de arco hasta $z_0 = 75^\circ$. Para alturas más bajas respecto al horizonte es necesario modificar la ley de refracción.

Seguimos admitiendo la ley de Gladstone-Dale y que la altura f del punto considerado de la atmósfera es mucho menor que el radio de la Tierra; entonces seguirá vigente la ecuación (25.3).

Al deducir la fórmula de Laplace no se ha supuesto ninguna ley de variación de la densidad atmosférica con la altura, pero en el siguiente razonamiento vamos a suponer que se cumple la ley empírica

$$\rho = \rho_0 e^{-u/a} \quad (30.3)$$

donde tal como hemos definido anteriormente

$$u = \frac{f}{r_0} - \chi_0 (\rho_0 - \rho), \quad (31.3)$$

y a es una constante. Al derivar (28.3) queda

$$\rho df = r_0 \rho du - r_0 \chi_0 \rho d\rho$$

ahora se integra entre 0 e ∞ teniendo en cuenta que a partir del punto 1, que es la capa superior de la atmósfera, la densidad es nula, por lo tanto es indiferente poner en el límite superior de la integral 1 que ∞

$$\int_0^\infty \rho df = r_0 \int_0^\infty \rho du - r_0 \chi_0 \int_0^\infty \rho d\rho, \quad (32.3)$$

por definición de presión se tiene como habíamos visto que

$$\int_0^\infty \rho df = - \int_1^0 \rho df = \frac{P_0}{g},$$

en cuanto a la primera integral del segundo término de (32.3)

$$r_0 \int_0^\infty \rho du = r_0 \rho_0 \int_0^\infty e^{-u/a} du = r_0 \rho_0 a$$

y la segunda integral del segundo miembro de (32.3) es

$$r_0 \chi_0 \int_0^\infty \rho d\rho = -\frac{1}{2} r_0 \chi_0 \rho_0^2.$$

Reagrupando todos los resultados se encuentra a partir de (32.3)

$$a = \frac{P_0}{\rho_0 g r_0} - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \quad (33.3)$$

lo que nos muestra que a es función de constantes ya conocidas.

Ahora volvemos a la ecuación (25.3). Como $\chi_0 \rho$ es pequeña podemos sustituir $1/(1 + \chi_0 \rho)$ por su valor medio, entonces aplicando el teorema integral del valor medio se encuentra

$$\overline{\left(\frac{1}{1 + \chi_0 \rho} \right)} = \frac{1}{\rho_1 - \rho_0} \int_0^1 \frac{d\rho}{1 + \chi_0 \rho} \approx \frac{1}{\rho_1 - \rho_0} \int_0^1 (1 - \chi_0 \rho) d\rho = 1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0$$

donde hemos puesto $\rho_1 = 0$ pues el punto 1 ya corresponde al espacio exterior. Entonces (25.3) queda

$$R_T = \chi_0 \left(1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \sin z_0 \int_1^0 \frac{d\rho}{\sqrt{2u + \cos^2 z_0}},$$

cambiamos de variable de integración usando para ello (30.3)

$$R_T = \frac{\chi_0 \rho_0}{a} \left(1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \sin z_0 \int_0^\infty \frac{e^{-u/a} du}{\sqrt{2u + \cos^2 z_0}},$$

al igual que en otras ocasiones, hemos puesto ∞ en vez de 1, puesto que, como queda dicho, a partir del punto 1 la densidad es nula.

Para resolver la anterior integral introducimos una nueva variable

$$v^2 = \frac{u}{a} + \frac{\cos^2 z_0}{2a} \Rightarrow \frac{du}{a} = 2 \sqrt{\frac{u}{a} + \frac{\cos^2 z_0}{2a}} dv = \sqrt{2a} \sqrt{2u + \cos^2 z_0} dv.$$

si introducimos una nueva constante definida por

$$\eta = \frac{\cos z_0}{\sqrt{2a}}$$

(25.3) queda

$$R_T = \chi_0 \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin z_0 e^{\eta^2} \int_\eta^\infty e^{-v^2} dv$$

definiendo la función matemática

$$\Psi(z_0) = e^{\eta^2} \int_\eta^\infty e^{-v^2} dv$$

el ángulo de refracción queda finalmente

$$R_T = \chi_0 \rho_0 \left(1 - \frac{1}{2} \chi_0 \rho_0 \right) \sqrt{\frac{2}{a}} \sin z_0 \Psi(z_0). \quad (34.3)$$

que nos da el ángulo de refracción total en función de la distancia cenital aparente. Notemos que (34.3) depende de la presión, temperatura, densidad e índice de refracción en la superficie terrestre.

Si suponemos condiciones normales (presión de 760 mm de Hg y temperatura de 0° centígrado) las constantes son

$$P_0 = 101325 \text{ N/m}^2$$

$$n_0 = 1,00029255$$

$$\rho_0 = 1,2932 \text{ Kg/m}^3$$

entonces las constantes derivadas son

$$\chi_0 = 2,26222 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3/\text{Kg}$$

$$a = 1,10737 \cdot 10^{-3}$$

por tanto (30.3) queda

$$R_T = 2\ 564",1 \sin z_0 \Psi(z_0), \quad (35.3)$$

que en el horizonte toma un valor de 37,87 minutos de arco, algo superior al valor de 34 minutos que se toma para hacer los cálculos de los ortos y ocasos de los astros.

Ya hemos dicho que la fórmula (35.3) depende de la presión y temperatura de la atmósfera pero también de la longitud de onda, por ser el aire un medio dispersivo. No obstante, la incertidumbre de la refracción en astros muy cercanos al horizonte llega a alcanzar hasta los 18 minutos de arco, por lo que en vista de determinar el tiempo de los ortos y ocasos no necesitamos una excesiva exactitud.

En un día un astro recorre aparentemente unos 360° aproximadamente, lo que quiere decir que cada segundo de tiempo se mueve en el cielo a consecuencia del movimiento diario 15 segundos de arco, o sea recorre un minuto de arco en 4 segundos. Como el orto y ocaso del Sol y de la Luna basta determinarlo con una exactitud de un minuto de tiempo, no se produciría error apreciable al suponer que la refracción es algunos minutos más o menos.

11.3 Fórmula de Bennet

Bennet obtuvo una fórmula empírica que da con muy buena aproximación el ángulo de refracción para todos los valores de la altura aparente (incluida la refracción) h_0 de un astro sobre el horizonte

$$R_T = \frac{1}{\tan\left(h_0 + \frac{7.31}{h_0 + 4.4}\right)} \quad (36.3)$$

válido para la presión atmosférica normal y 10 °C, estando h_0 expresado en grados. En (36.3) el ángulo de refracción viene en minutos y la altura aparente en grados. Por su simplicidad la anterior será la fórmula que utilizemos para calcular la refracción.

En el caso de que se conozca la altura geométrica h (no incluida la refracción) y no la aparente h_0 , se sigue utilizando (36.3) para calcular el ángulo de refracción, utilizando aproximaciones sucesivas, de manera similar a como se describe en el ejemplo 2.3.

Ejemplo 4.3.- Calcular el ángulo de refracción para un astro situado a una altura geométrica de 20°.

- Por aproximaciones sucesivas se encuentra que el ángulo de refracción es

$$R_T = 2' 42''.$$

- Por tanto la altura aparente es

$$h_0 = 20^\circ 2' 42''.$$

12.3 Extinción atmosférica

La extinción atmosférica es el debilitamiento que experimenta la luz al pasar por la atmósfera. Es causada por la dispersión de Rayleigh y la absorción molecular del ozono y del vapor de agua, a lo que añadir la dispersión por aerosoles. Aunque la dispersión de Rayleigh se puede calcular con precisión, no ocurre lo mismo con la absorción por la capa de ozono que puede variar significativamente en un intervalo de algunas horas, siendo además dependiente de la latitud y de la estación. En cuanto a la absorción por el vapor de agua y la dispersión por aerosoles no pueden ser calculados de forma precisa por las variaciones que experimentan de un lugar a otro.

La disminución de la iluminación (ver 8.15) obedece a la ley de Lambert-Beer, que expresa un decaimiento exponencial

$$I = I_0 e^{-\beta x}$$

siendo I_0 la iluminación observada fuera de la atmósfera, x la distancia recorrida por la luz en la atmósfera y β un parámetro llamado opacidad, con unidades de inversa de la distancia.

Vamos a suponer una atmósfera uniforme y sea d el espesor que debe tener para que produzca una extinción idéntica a la producida por la atmósfera real. Es evidente que en este modelo, d será diferente para situaciones diferentes. En este modelo D (ver figura 11.3) será la distancia recorrida por el rayo a través de la atmósfera uniforme. Entonces definimos el parámetro X que recibe el nombre de air-mass, por la relación

$$X = X(z) = \frac{D}{d}.$$

Para relacionar la extinción con la variación de la magnitud estelar, vamos a redefinir la ley de Lambert-Beer de la siguiente forma

$$I = I_0 10^{-0,4kX}$$

donde k es un parámetro que se le llama coeficiente de extinción.

La magnitud estelar m de un objeto viene dada por la fórmula

$$m = -2,5 \log I - 13,988 \quad (37.3)$$

donde el log es el logaritmo de base decimal, entonces la ley de Lambert-Beer se pone

$$m = m_0 + kX \quad (38.3)$$

m_0 es la magnitud del objeto como observado fuera de la atmósfera y m la magnitud del astro después de haber sufrido la extinción a través de la atmósfera. Al igual que ocurre con la magnitud estelar, el coeficiente de extinción depende de la frecuencia luminosa.

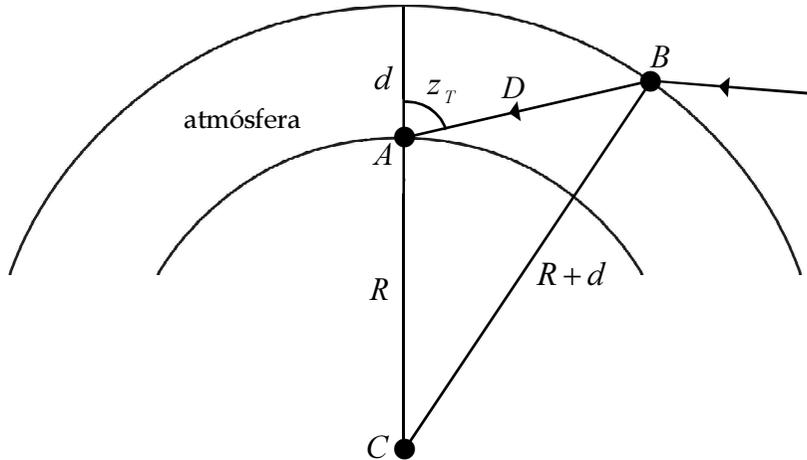


Figura 11.3.- Trayectoria de un rayo de luz que penetra en el atmósfera por el punto B e incide en la superficie terrestre en el punto A , después de haber recorrido una distancia D por la atmósfera terrestre. d es el espesor de la capa atmosférica.

El coeficiente de extinción varía sensiblemente. Para zonas marítimas toma valores entre 0,11 y 0,17; el valor medio en zonas continentales es de 0,17-0,24 y en zonas urbanas alcanza de 0,27-0,42, teniendo un valor más alto en verano. Las variaciones que puede experimentar el coeficiente de extinción en una noche pueden ser muy altas, dependiendo de la estabilidad de la atmósfera del lugar de observación. Se alcanzan valores que superan el 100% del valor medio, lo que puede ocurrir sin que se aprecie ningún cambio a simple vista.

z_T aparente	X
0	1
10	1,0154
20	1,0641
30	1,1545
40	1,3048
50	1,5543
60	1,9962
70	2,9101
80	5,6453

Tabla 1.3.- El air-mass X en función de la distancia cenital z_T , como se deduce de la fórmula (40.3).

Al aplicar al triángulo CAB de la figura 11.3 el teorema del coseno se deriva la fórmula

$$X(z_T) = \sqrt{(a \cos z_T)^2 + 2a + 1 - a \cos z_T} \quad (39.3)$$

que nos determina el valor de X conocido el parámetro $a = R/d$ y la distancia cenital topocéntrica z_T . La fórmula (39.3) da buenos resultados en el intervalo de 0 a 80° de distancia cenital si se toma $a = 740$.

Una fórmula que nos permite determinar el parámetro X en función de la distancia cenital topocéntrica es dada por Hardie

$$X(z_T) = \sec z_T - 0,0018167(\sec z_T - 1) - 0,002875(\sec z_T - 1)^2 - 0,0008083(\sec z_T - 1)^3. \quad (40.3)$$

donde ahora z_T es la distancia cenital topocéntrica verdadera, no la aparente que es afectada por la refracción.

El coeficiente de extinción para un lugar dado se determina experimentalmente midiendo la magnitud de una estrella a lo largo de una noche. El coeficiente X se calcula por (40.3), tras lo que se traza la gráfica magnitud- X que de acuerdo con (38.3) es una recta cuya pendiente es el coeficiente de extinción k .

Segunda parte

Movimiento del Sol

4

El problema de los dos cuerpos

1.4 Planteamiento del problema

Consideremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , que están sometidos exclusivamente a la acción mutua de la gravedad. Respecto a un sistema de referencia cualquiera la posición de los dos cuerpos viene dada por los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 . El vector de posición del cuerpo 2 respecto al cuerpo 1 es dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1.$$

Se define el centro de masas o baricentro del sistema de los dos cuerpos como el punto que tiene de vector de posición

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.4)$$

Si llamamos \mathbf{r}_{c1} y \mathbf{r}_{c2} a las posiciones relativas de los dos cuerpos respecto al centro de masas, o sea vectores que van desde el centro de masas a cada uno de los dos cuerpos, entonces

$$\mathbf{r}_{c1} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c ; \quad \mathbf{r}_{c2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c. \quad (2.4)$$

Combinando las expresiones (1.4) y (2.4) es fácil encontrar que

$$m_1 \mathbf{r}_{c1} + m_2 \mathbf{r}_{c2} = 0. \quad (3.4)$$

Los vectores de posición relativos al centro de masas se pueden poner en función de \mathbf{r}

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{c1} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_{c2} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

La energía cinética del sistema de dos partículas es

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\mathbf{r}}_{c2}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_c^2 + (m_1 \dot{\mathbf{r}}_{c1} + m_2 \dot{\mathbf{r}}_{c2}) \dot{\mathbf{r}}_c$$

donde el último sumando es nulo por (3.4), por tanto por (4.4) nos queda

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_c^2 = \frac{1}{2} \mu \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_c^2 \quad (5.4)$$

donde μ es la masa reducida del sistema de partículas y definida por

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

De (5.4) se calcula la lagrangiana del sistema de partículas

$$\mathcal{L} = E_c - E_p = \frac{1}{2} \mu \dot{r}_c^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_c^2 - E_p$$

siendo E_p la energía potencial del sistema de partículas dada por

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Como \mathbf{r}_c es una coordenada ignorada, es decir no aparece explícitamente en la lagrangiana, significa que el momento lineal asociado a esta coordenada es constante

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_c} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_c} = (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{r}}_c = cte$$

o bien que la velocidad del centro de masas es constante. Entonces un sistema de referencia fijo respecto al centro de masas es un sistema inercial y en este sistema la lagrangiana del conjunto de las dos partículas es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 - E_p$$

puesto que respecto a este nuevo sistema de coordenadas $\mathbf{r}_c = 0$. Entonces hemos reducido el problema de los dos cuerpos a uno equivalente caracterizado por la anterior lagrangiana, donde las únicas coordenadas son la de posición relativa de la partícula 2 con respecto a la 1, es decir el problema de los dos cuerpos es equivalente al de un cuerpo de masa μ que se encuentra sometido a una energía potencial kepleriana E_p .

De la lagrangiana se deduce la aceleración relativa entre los dos cuerpos, es decir $\ddot{\mathbf{r}}$. Al aplicar la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

se obtiene

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}$$

y teniendo en cuenta la definición de masa reducida queda

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 + m_2}{r^3} \mathbf{r}. \quad (6.4)$$

2.4 Ecuación de la trayectoria

El problema que nos planteamos a continuación es averiguar la trayectoria que siguen las partículas 1 y 2. Notemos en primer lugar que la trayectoria que sigue la partícula de masa μ cuyo movimiento es descrito por (6.4) se encuentra en un plano. En efecto, como la fuerza gravitatoria es radial, su momento mecánico \mathbf{M} es nulo y por tanto el momento angular \mathbf{L} de la

partícula μ es constante.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M} = 0 \Rightarrow \mathbf{L} = cte,$$

ahora bien, por definición de momento angular, su dirección es perpendicular al vector velocidad, que al ser tangente a la trayectoria siempre se encuentra en el plano de la órbita. Por tanto como el momento angular es constante, se mantiene en el tiempo su dirección y como ésta es perpendicular al plano de la trayectoria también éste se mantendrá constante y la partícula siempre se encontrará en el mismo plano.

Refiriendo los vectores a un triedro móvil de vectores básicos radial (\mathbf{u}_r), perpendicular al radio vector y en el plano orbital (\mathbf{u}_p) y normal a los dos vectores anteriores (\mathbf{u}_n) tenemos

$$\mathbf{r} = r \mathbf{u}_r \Rightarrow \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{u}_r + r \dot{\theta} \mathbf{u}_p \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \quad (7.4)$$

donde θ es la coordenada polar angular, medida desde el pericentro de la órbita y que más llamamos anomalía verdadera.

El módulo del momento angular en coordenadas polares es

$$L = |\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}| = \mu r^2 \dot{\theta}$$

por tanto

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}. \quad (8.4)$$

Por (7.4) y (8.4) la energía total de la partícula de masa μ es

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r} \quad (9.4)$$

donde $k = Gm_1 m_2$ y G es la constante de gravitación. Despejando de (9.4)

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right)}, \quad (10.4)$$

pero nos interesa, no la evolución temporal, sino la ecuación de la trayectoria, por tanto eliminamos el tiempo de la ecuación anterior

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{\mu r^2} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\mu r^2}{L} \dot{r} \Rightarrow d\theta = \frac{L}{\mu r^2} \frac{1}{\dot{r}} dr$$

entonces

$$d\theta = \frac{\frac{L}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right)}} dr = \frac{-d(L/r)}{\sqrt{2\mu \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right)}} \quad (11.4)$$

que es la ecuación diferencial de la trayectoria, de cuya integración obtendremos la trayectoria en coordenadas polares $r = r(\theta)$. El radicando del denominador de la anterior expresión se puede poner como

$$\begin{aligned}
 2\mu \left(E - \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \right) &= 2\mu E - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2\mu k}{r} + \frac{\mu^2 k^2}{L^2} - \frac{\mu^2 k^2}{L^2} = \\
 &= 2\mu E + \frac{\mu^2 k^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{\mu k}{L} \right)^2
 \end{aligned}$$

entonces (11.4) queda

$$d\theta = \frac{-d(L/r)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 k^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{\mu k}{L} \right)^2}} = \frac{\frac{-d(L/r - \mu k/L)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 k^2}{L^2}}}}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{L}{r} - \frac{\mu k}{L} \right)^2}{2\mu E + \frac{\mu^2 k^2}{L^2}}}}$$

que es una integral inmediata que tiene por solución

$$\theta = \arccos \frac{L/r - \mu k/L}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2 k^2}{L^2}}} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \cos \theta \right)$$

que corresponde a la ecuación de una cónica, cuya excentricidad es

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}. \quad (12.4)$$

Cuando las dos partículas 1 y 2 están ligadas gravitacionalmente, la energía total del sistema es negativa, es decir

$$E_c < \frac{k}{r} \Rightarrow E = E_c - \frac{k}{r} < 0$$

y las dos partículas no pueden alejarse indefinidamente una de la otra, sino que están obligadas a estar unidas gravitacionalmente. Entonces por (12.4) $e < 1$ y la cónica es una elipse, que es el caso que nos interesa. Entonces la ecuación de la trayectoria es

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta}, \quad (13.4)$$

donde

$$a(1-e^2) = \frac{L^2}{\mu k} \Rightarrow L^2 = \mu k a(1-e^2) \quad (14.4)$$

y combinando (12.4) y (14.4)

$$E = -\frac{k}{2a} \quad (15.4)$$

que es la energía total del sistema de las dos partículas. Debemos notar que

\mathbf{r} es el vector de posición del cuerpo 2 respecto al 1, por tanto el cuerpo 1 se encuentra en el foco de la elipse que describe el punto 2.

3.4 Problema en función del tiempo

Ahora vamos a determinar la evolución en el tiempo de los cuerpos 1 y 2, para lo que partimos de las ecuaciones (14.4) y (15.4) que permiten poner (10.4) como

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu}{2k}} \int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \frac{a(1-e^2)}{2}}},$$

para hacer la integral anterior definimos la anomalía excéntrica χ

$$r = a(1 - e \cos \chi) \quad (16.4)$$

haciendo el cambio de variables llegamos a

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} \int (1 - e \cos \chi) d\chi = \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} (\chi - e \sin \chi) \quad (17.4)$$

suponemos que cuando $t = t_0$ $\chi = 0$ lo que significa que por (16.4) se encuentra el cuerpo en el pericentro o punto más cercano al foco. Un periodo completo va de $\chi_1 = 0$ a $\chi_2 = 2\pi$ por tanto el tiempo transcurrido entre ambos eventos es el periodo orbital T

$$T = t_2 - t_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\mu a^3}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G(m_1 + m_2)}}.$$

Se le llama movimiento medio n a la velocidad angular en el caso de que el movimiento fuera uniforme, es decir

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{\mu a^3}} = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}}. \quad (18.4)$$

Si se define la anomalía media por

$$M = n(t - t_0)$$

entonces la ecuación (17.4) queda

$$M = \chi - e \sin \chi \quad (19.4)$$

a la que se llama ecuación de Kepler. A partir de (19.4) se determina la anomalía excéntrica en función del tiempo y de (16.4) se determina la distancia r entre los dos cuerpos que interactúan entre sí.

Para completar el problema de averiguar la posición en función del tiempo, es necesario hallar la anomalía verdadera en función del tiempo, es decir relacionar la anomalía excéntrica con la verdadera.

Igualando (13.4) y (16.4) encontramos

$$a(1 - e \cos \chi) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow 1 + e \cos \theta = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \chi},$$

despejando

$$\cos \theta = \frac{\cos \chi - e}{1 - e \cos \chi}, \quad (20.4)$$

por la relación trigonométrica (10.A) del apéndice A tenemos

$$\tan^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

obteniendo de (20.4)

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{\chi}{2} \quad (21.4)$$

que nos permite calcular la anomalía verdadera en función del tiempo conocida la anomalía excéntrica.

4.4 Desarrollo en serie de la anomalía verdadera respecto a la anomalía excéntrica

La fórmula (21.4) es del tipo

$$\tan y = p \tan x$$

donde suponemos que $y - x$ es suficientemente pequeño, tal como ocurre con $\theta - \chi$ cuando la excentricidad es pequeña. Queremos desarrollar y en series de potencias de x .

Partimos de

$$\tan(y - x) = \frac{\tan y - \tan x}{1 + \tan y \tan x} = \frac{(p-1) \tan x}{1 + p \tan^2 x} = \frac{(p-1) \sin x \cos x}{\cos^2 x + p \sin^2 x}$$

usando las relaciones trigonométricas (6.A) del apéndice A queda

$$\tan(y - x) = \frac{1/2(p-1) \sin 2x}{1/2(1 + \cos 2x + p - p \cos 2x)} = \frac{\frac{p-1}{p+1} \sin 2x}{1 - \frac{p-1}{p+1} \cos 2x} = \frac{q \sin 2x}{1 - q \cos 2x}$$

donde hemos definido

$$q = \frac{p-1}{p+1}.$$

Como y es muy cercano a x , entonces p tiene que ser muy cercano a la unidad y q tiene que ser un número pequeño, entonces

$$\tan(y - x) = \frac{\sin(y - x)}{\cos(y - x)} \approx \frac{(y - x) - \frac{1}{6}(y - x)^3}{1 - \frac{1}{2}(y - x)^2} \approx (y - x) + \frac{1}{3}(y - x)^3,$$

y también

$$\tan(y - x) = \frac{q \sin 2x}{1 - q \cos 2x} = q \sin 2x (1 + q \cos 2x + q^2 \cos^2 2x)$$

igualando los dos últimos resultados

$$y = x - \frac{1}{3}(y-x)^3 + q \sin 2x \left(1 + q \cos 2x + q^2 \cos^2 2x\right),$$

como en primera aproximación

$$y - x = q \sin 2x$$

entonces queda

$$y = x + q \sin 2x + q^2 \sin 2x \cos 2x + q^3 \left(\sin 2x \cos^2 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x \right), \quad (22.4)$$

finalmente encontramos

$$\begin{aligned} \sin 2x \cos^2 2x - \frac{1}{3} \sin^3 2x &= \sin 2x \left(\cos^2 2x - \frac{1}{3} \sin^2 2x \right) = \\ \frac{1}{3} \sin 2x (4 \cos^2 2x - 1) &= \frac{1}{3} \sin 2x (2 + 2 \cos 4x - 1) = \\ &= \frac{1}{3} (\sin 2x + 2 \sin 2x \cos 4x) = \frac{1}{3} \sin 6x \end{aligned}$$

en el último paso hemos usado la relación trigonométrica derivada de (7.A).

Con este resultado se encuentra que (22.4) queda

$$y = x + q \sin 2x + \frac{1}{2} q^2 \sin 4x + \frac{1}{3} q^3 \sin 6x + \dots \quad (23.4)$$

Ahora aplicamos este resultado a la ecuación (21.4) al objeto de desarrollar la anomalía verdadera en función de la anomalía excéntrica. Para esto notemos

$$p = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \Rightarrow q = \frac{p-1}{p+1} = \frac{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} - 1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} + 1} = \frac{\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e}}$$

multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e}$

$$q = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{e} \approx \frac{e}{2} + \frac{e^3}{8},$$

teniendo en cuenta (23.4), la ecuación (21.4) queda

$$\theta = \chi + \left(e + \frac{e^3}{4} \right) \sin \chi + \frac{e^2}{4} \sin 2\chi + \frac{e^3}{12} \sin 3\chi + \dots \quad (24.4)$$

donde hemos puesto el desarrollo hasta la tercera potencia de la excentricidad.

5.4 Movimiento respecto al centro de masas

El movimiento de la partícula 2 respecto a la 1 tiene una trayectoria elíptica dada por (13.4) donde la partícula 1 está en el foco. Y viceversa, el movimiento de 1 respecto a 2 es una elipse de las mismas características de la anterior, por tanto la partícula 2 ocupa el foco de la elipse que describe la partícula 1.

Cabe estudiar el movimiento de 1 y 2 respecto al baricentro. De las ecuaciones (4.4) encontramos

$$r_{c1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

$$r_{c2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e \cos \theta}$$

notemos que θ es el ángulo medido desde la partícula 1 (o desde la partícula 2), pero no el ángulo medido desde el centro de masas. Las trayectorias de las partículas 1 y 2 son siempre elipses, con independencia del sistema de coordenadas, pero el centro de masas no es el foco de ninguna de las dos elipses.

6.4 Solución aproximada de la ecuación de Kepler

En los casos que vamos a considerar la excentricidad va a ser muy pequeña, por lo tanto podemos resolver la ecuación de Kepler (19.4) desarrollando la anomalía excéntrica en serie de potencias de la excentricidad

$$\chi(e) = \chi(0) + \chi'(0)e + \frac{1}{2}\chi''(0)e^2 + \frac{1}{6}\chi'''(0)e^3 + \dots \quad (25.4)$$

donde

$$\chi'(e) = \frac{d\chi}{de}.$$

De la ecuación de Kepler (19.4) obtenemos haciendo $e = 0$

$$\chi(0) = M.$$

Para hallar el siguiente término en el desarrollo (25.4), derivamos la ecuación (19.4) con respecto a la excentricidad

$$\chi'(e) - \sin \chi(e) - e \cos \chi(e) \chi'(e) = 0 \Rightarrow \chi'(0) = \sin \chi(0) = \sin M.$$

Si volvemos a derivar la ecuación de Kepler obtenemos el tercer coeficiente de (25.4)

$$\chi''(e) - \cos \chi(e) \chi'(e) - \cos \chi(e) \chi'(e) + e \sin \chi(e) \chi'^2(e) - e \cos \chi(e) \chi''(e) = 0$$

poniendo $e = 0$

$$\chi''(0) - 2 \cos \chi(0) \chi'(0) = 0 \Rightarrow \chi''(0) = 2 \cos M \sin M = \sin 2M.$$

Con la tercera derivada de la ecuación de Kepler obtenemos el cuarto coeficiente del desarrollo (25.4)

$$\chi'''(0) + 3 \sin \chi(0) \chi'^2(0) - 3 \cos \chi(0) \chi''(0) = 0$$

utilizando los resultados anteriores

$$\chi'''(0) = -3 \sin^3 M + 3 \cos M \sin 2M, \quad (26.4)$$

con las relaciones trigonométricas (7.A) podemos expresar la anterior

ecuación en función exclusivamente de los senos de $M, 2M, 3M, \dots$

$$\begin{aligned}\sin^3 M &= \sin M \sin^2 M = \frac{1}{2} \sin M - \frac{1}{2} \sin M \cos 2M = \\ &= \frac{1}{2} \sin M - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin M + \frac{1}{2} \sin 3M \right) = \frac{3}{4} \sin M - \frac{1}{4} \sin 3M,\end{aligned}$$

y por otra parte

$$\cos M \sin 2M = \frac{1}{2} \sin M + \frac{1}{2} \sin 3M$$

sustituyendo en (26.4)

$$\chi'''(0) = -\frac{3}{4} \sin M + \frac{9}{4} \sin 3M,$$

con estos resultados el desarrollo (25.4) queda

$$\chi(e) = M + \left(e - \frac{e^3}{8} \right) \sin M + \frac{e^2}{2} \sin 2M + \frac{3}{8} e^3 \sin 3M + \dots \quad (27.4)$$

7.4 Desarrollo de r en función de la excentricidad

De la ecuación de Kepler (19.4) se obtiene la variación de la anomalía excéntrica con respecto a la anomalía media

$$1 = \frac{d\chi}{dM} - e \cos \chi \frac{d\chi}{dM} \Rightarrow \frac{d\chi}{dM} = \frac{1}{1 - e \cos \chi},$$

por definición de anomalía excéntrica (16.4), lo anterior es

$$\frac{d\chi}{dM} = \frac{a}{r}. \quad (28.4)$$

Derivando (27.4) respecto a la anomalía media

$$\frac{d\chi}{dM} = 1 + \left(e - \frac{e^3}{8} \right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M + \dots$$

y por (28.4)

$$\begin{aligned}\frac{a}{r} &= 1 + \left(e - \frac{e^3}{8} \right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{1}{8} e^3 \cos 3M + \dots = \\ &= 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + e^3 \left(\frac{9}{8} \cos 3M - \frac{1}{8} \cos M \right) + \dots\end{aligned} \quad (29.4)$$

que nos relaciona la distancia r con la anomalía media. Como las excentricidades que vamos a considerar suelen ser pequeñas, podemos invertir la ecuación anterior, para lo que sólo vamos a utilizar hasta la potencia segunda de la excentricidad, lo que es más que suficiente para los problemas que vamos a tratar.

La inversa de la ecuación (29.4) tiene la forma

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{1 + Ae + Be^2 + Ce^3} \approx 1 - Ae - Be^2 + A^2e^2$$

limitándonos hasta la segunda potencia de la excentricidad nos queda

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M - e^2 \cos 2M + e^2 \cos^2 M$$

y por la relación trigonométrica (8.A) nos queda

$$r = a \left(1 + \frac{e^2}{2} - e \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M + \dots \right). \quad (30.4)$$

8.4 Anomalía verdadera en función de la anomalía media

Por (8.4) encontramos

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{\mu}$$

que recibe el nombre de ley de las áreas, llamándose a L/μ constante de las áreas, que identificaremos con la letra C . Por (14.4) ponemos

$$C = r^2 \dot{\theta} = \frac{\sqrt{\mu k a (1 - e^2)}}{\mu} = \sqrt{\frac{k}{\mu a^3}} a^2 \sqrt{1 - e^2} = n a^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (31.4)$$

donde hemos tenido en cuenta la definición (18.4).

Utilizando (31.4) calculamos la derivada de la anomalía verdadera respecto a la anomalía media

$$\frac{d\theta}{dM} = \frac{d\theta}{ndt} = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2}, \quad (32.4)$$

de (29.4) calculamos

$$\frac{a^2}{r^2} = 1 + \frac{e^2}{2} + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \dots$$

cuando la excentricidad es pequeña

$$\sqrt{1 - e^2} \approx 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{8}$$

por tanto encontramos de (32.4)

$$\frac{d\theta}{dM} = 1 + 2e \cos M + \frac{5}{2} e^2 \cos 2M + \dots$$

ahora integramos la anterior expresión obteniéndose

$$\theta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots$$

por tanto dado el tiempo se conoce la anomalía media, por la anterior ecuación se determina la anomalía verdadera y por (30.4) la distancia, es decir se llega a conocer la posición de la partícula 2 respecto a la partícula 1. Si desarrollamos hasta el tercer orden en la excentricidad nos queda

$$\theta = M + \left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M + \dots \quad (33.4)$$

Observemos de la ecuación (33.4) que si $M = 0$ entonces $\theta = 0$, es decir el cuerpo se encuentra en el pericentro. O dicho de otra forma, M y θ se cuentan desde el pericentro y en el sentido del movimiento del astro. Como la anomalía media es

$$M = n(t - t_0)$$

entonces cuando $t = t_0$ el astro se encuentra en el pericentro.

9.4 Valor medio de la distancia entre los dos cuerpos

Se trata de encontrar el valor medio de la distancia entre los dos cuerpos 1 y 2 que orbitan entre sí, que no resulta ser el semieje mayor como podría pensarse en un principio.

El valor medio se define por

$$r_m = \frac{1}{T} \int_0^T r dt,$$

donde T es el periodo orbital. Introduciendo la anomalía excéntrica

$$r_m = \frac{1}{T} \int_0^T r dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} r \frac{dt}{d\chi} d\chi = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} a(1 - e \cos \chi) \frac{dt}{d\chi} d\chi,$$

de la ecuación de Kepler calculamos

$$M = \chi - e \sin \chi \Rightarrow n = \frac{d\chi}{dt} (1 - e \cos \chi) \Rightarrow \frac{dt}{d\chi} = \frac{1 - e \cos \chi}{n}$$

entonces

$$r_m = \frac{a}{nT} \int_0^{2\pi} (1 - e \cos \chi)^2 d\chi = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e^2 \cos^2 \chi - 2e \cos \chi) d\chi$$

resultando al hacer la integración

$$r_m = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right). \quad (34.4)$$

10.4 Elementos de la órbita kepleriana

Para determinar la posición de un astro que describe una órbita kepleriana como la antes descrita necesitamos, en general, siete datos. Dos de ellos nos sirven para posicionar el plano orbital, y son la longitud del nodo ascendente o ángulo de la eclíptica comprendido entre el equinoccio y el nodo ascendente, magnitud que se representa por Ω . Para definir el plano orbital también se necesita la inclinación i de la órbita respecto a la eclíptica.

La definición de la elipse exige dos datos, tomándose el semieje mayor a y la excentricidad e . La posición de la elipse en el plano orbital se define a partir del lugar ocupado por el pericentro. Para ello se toma el argumento de latitud del pericentro ω , ángulo que va desde el nodo ascendente al pericentro.

Como alternativa a ω se usa la longitud del pericentro $\bar{\omega}$, ángulo medido

en dos planos: desde el equinoccio al nodo ascendente y desde este punto al pericentro, es decir

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega. \quad (35.4)$$

Para conocer el movimiento del astro en función del tiempo es necesario conocer el movimiento medio n . Y finalmente es necesario conocer la posición del astro en un determinado momento. Se elige la longitud media en el momento inicial.

En una órbita kepleriana como la estudiada en este capítulo, los anteriores elementos orbitales permanecen constantes, pero con la presencia de otros cuerpos estos elementos varían a consecuencia de las perturbaciones.

Por las definiciones anteriores la longitud L del astro es

$$L = \bar{\omega} + \theta \quad (36.4)$$

que es un ángulo medido parte por la eclíptica y parte por la órbita. La anterior ecuación también se puede poner como

$$L = \bar{\omega} + M + (\theta - M) = \bar{\omega} + nt - nt_0 + (\theta - M) = L_m + (\theta - M) \quad (37.4)$$

donde L_m es la longitud media del astro, que resulta ser una función polinómica del tiempo y $M = n(t - t_0)$

$$L_m = \bar{\omega} - nt_0 + nt = L_{m0} + nt$$

L_{m0} es la longitud media en el momento $t = 0$ y t_0 es el momento de paso del Sol medio por el pericentro, que es de donde se mide la anomalía media.

A $\theta - M$ se le llama ecuación del centro y representa la parte periódica de la longitud, término que surge a consecuencia de que el astro sigue una elipse. La ecuación del centro se obtiene de la ecuación (33.4).

11.4 Reducción a la eclíptica

Lo que interesa no es la longitud L , por ser un ángulo medido en dos planos diferentes, sino la longitud eclíptica l que es exclusivamente medida en la eclíptica, es decir es el ángulo en el sentido directo que va del equinoccio al punto de corte del círculo de latitud del astro con la eclíptica. Se puede relacionar ambas longitudes mediante una operación que se llama reducción a la eclíptica.

En la figura 1.4 el círculo máximo horizontal representa la eclíptica y γ es el equinoccio. Ω es el nodo ascendente de la órbita del astro, el cual ocupa la posición P , siendo P' su proyección sobre la eclíptica. La órbita tiene una inclinación i respecto a la eclíptica. La longitud del astro es

$$L = \gamma\Omega + \Omega P = \Omega + \Omega P$$

donde Ω es la longitud del nodo ascendente. La longitud eclíptica del mismo astro es

$$l = \gamma P' = \gamma\Omega + \Omega P' = \Omega + \Omega P'$$

Vamos a introducir dos ángulos A y B para simplificar los cálculos, y que definimos por

$$A = L - \Omega; \quad B = l - \Omega.$$

Consideremos el triángulo esférico rectángulo de vértices Ω , P y P' , que

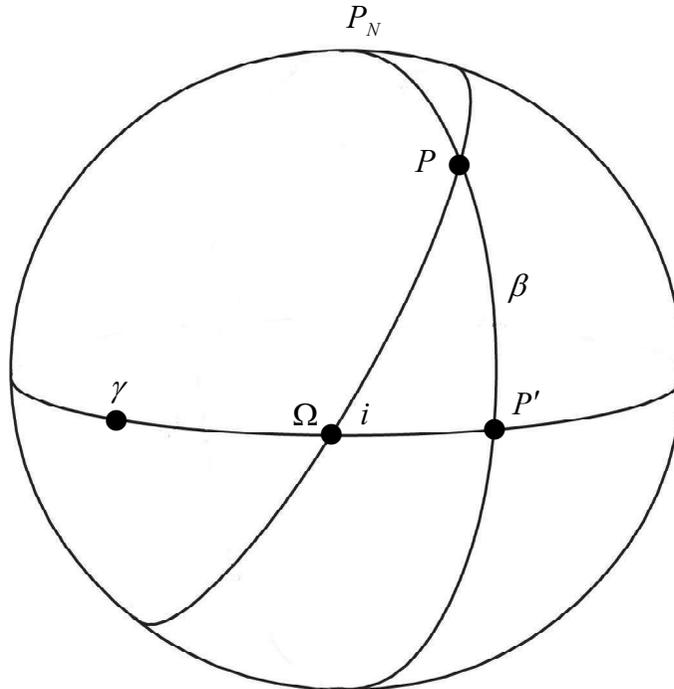


Figura 1.4.- La eclíptica es el círculo máximo horizontal; la órbita se encuentra inclinada un ángulo i y el círculo de latitud es el círculo máximo que pasa por el polo eclíptico norte P_N y por la posición del astro P . Ω es el nodo ascendente de la órbita lunar o ángulo entre γ y Ω , el ángulo entre γ y P' es la longitud y β (ángulo entre P y P') es su latitud eclíptica.

tiene por lados A , B y β (latitud eclíptica) y el ángulo opuesto a A es recto. Al aplicar el teorema del seno tenemos

$$\frac{\sin A}{\sin 90} = \frac{\sin \beta}{\sin i} \Rightarrow \sin \beta = \sin i \sin A. \quad (38.4)$$

Al aplicar al mismo triángulo el teorema del coseno

$$\cos A = \cos \beta \cos B + \sin \beta \sin B \cos 90 \Rightarrow \cos A = \cos \beta \cos B. \quad (39.4)$$

Combinando las dos últimas expresiones se elimina el ángulo β . De (38.4) vemos que

$$1 - \cos^2 \beta = \sin^2 A - \cos^2 i \sin^2 A,$$

y por (39.4) llegamos a

$$1 - \frac{\cos^2 A}{\cos^2 B} = \sin^2 A - \cos^2 i \sin^2 A \Rightarrow 1 - \frac{1}{\cos^2 B} = -\cos^2 i \tan^2 A$$

o bien

$$\tan B = \cos i \tan A,$$

si suponemos que la inclinación de la órbita es pequeña, como ocurre en el caso de la Luna, es de aplicación la fórmula (23.4) donde

$$p = \cos i,$$

entonces

$$q = \frac{p-1}{p+1} = \frac{\cos i - 1}{\cos i + 1}$$

y como

$$\cos i = 2 \cos^2 \frac{i}{2} - 1; \quad \cos i = 1 - 2 \sin^2 \frac{i}{2}$$

tenemos

$$q = -\tan^2 \frac{i}{2}.$$

y por (23.4)

$$B = A - \tan^2 \frac{i}{2} \sin 2A + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{i}{2} \sin 4A + \dots$$

o en función de las longitudes

$$l = L - \tan^2 \frac{i}{2} \sin 2(L - \Omega) + \frac{1}{2} \tan^4 \frac{i}{2} \sin 4(L - \Omega) + \dots \quad (40.4)$$

que es la ecuación que íbamos buscando y que permite calcular la longitud eclíptica en función de la longitud L , operación que se le llama reducción a la eclíptica. Debe notarse que la ecuación (40.4) está expresada en radianes.

5

Movimiento del Sol

1.5 Introducción

El Sol tiene una cierta latitud eclíptica, porque el plano de referencia no es la misma eclíptica, sino un plano paralelo que pasa por el centro de la Tierra. El valor máximo que puede alcanzar es de 1,2 segundos de arco, que vamos a despreciar en los cálculos aproximados que haremos a continuación. Por tanto siempre tomaremos como nula la latitud eclíptica del Sol.

Para describir el movimiento kepleriano aparente del Sol se necesitan cinco parámetros y no siete como en el caso de cualquier otro astro, a saber: el semieje mayor, la excentricidad, el movimiento medio, longitud del pericentro y la longitud en el momento inicial.

El movimiento de la Tierra en torno al Sol está afectado por la perturbación del resto de los astros del sistema solar, que causan que sus elementos orbitales varíen, siendo sometidos a variaciones seculares y periódicas.

Como estas perturbaciones son pequeñas, podemos considerar que el movimiento terrestre, o el equivalente movimiento aparente del Sol, describe una órbita kepleriana en que sus elementos orbitales (excentricidad y longitud del pericentro) van cambiando. Pero solamente tendremos en cuenta las variaciones seculares y despreciaremos las periódicas.

No es la Tierra quien describe una elipse en torno al Sol, sino el baricentro del sistema Tierra-Luna, esto significa que habrá que corregir la órbita kepleriana para que quede referida al centro de la Tierra.

2.5 Elementos medios

La longitud eclíptica del movimiento aparente del Sol se descompone en una parte secular (en forma polinómica en función del tiempo) y en una parte periódica. A la primera le llamamos longitud media. Se trata de un valor geométrico (no afectado por la aberración) y referida al equinoccio medio de la fecha (por tanto no tiene en cuenta la nutación). Según la teoría VSOP82 de Bretagnon esta longitud geométrica y geocéntrica media (o bien baricéntrica media, pues ambas se distinguen por un término periódico que no aparece cuando se hace el promedio) es dada por

$$L_m = 280^{\circ},466\,448\,514 + 36\,000^{\circ},769\,8231T + \\ + 0^{\circ},000\,303\,678T^2 + 0^{\circ},000\,000\,0212T^3, \quad (1.5)$$

donde T son siglos julianos de TT transcurridos desde la época JT2000.0. La

longitud media del pericentro es dada en la misma teoría por la expresión

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_m = & 282^\circ,937\,348 + 1^\circ,719\,5269T + \\ & + 0^\circ,000\,459\,62T^2 + 0^\circ,000\,000\,499T^3, \end{aligned} \quad (2.5)$$

finalmente la variación secular de la excentricidad de la órbita es

$$\begin{aligned} e = & 0,016\,708\,62 - 0,000\,042\,037T - \\ & - 0,000\,000\,1236T^2 + 0,000\,000\,000\,04T^4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se le llama Sol promedio al que lleva una longitud dada por (1.5). Al ángulo de este Sol referido al pericentro medio se le llama anomalía media

$$\begin{aligned} M = & 360 + L_m - \bar{\omega}_m = 357^\circ,529\,101 + \\ & + 35\,999^\circ,050\,296T - 0^\circ,000\,1559T^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde se suma 360 para evitar que el resultado sea negativo y hemos tomado hasta el segundo término en el tiempo.

La unidad de tiempo en que se mide T es TT , para lo cual se calculan los días julianos en tiempo terrestre JDT .

3.5 Ecuación del centro

Como no vamos a considerar los términos periódicos que afectan a los elementos orbitales de la Tierra, consideramos que la anomalía verdadera θ es el ángulo medido desde el pericentro medio al Sol verdadero en el sentido de su movimiento, por tanto

$$\theta = 360 + L_B - \bar{\omega}_m,$$

donde L_B es la longitud geométrica baricéntrica del Sol verdadero respecto al equinoccio medio de la fecha. De la anterior ecuación se obtiene

$$L_B = \bar{\omega}_m - 360 + \theta = (M + \bar{\omega}_m - 360) + (\theta - M)$$

el primer sumando del último miembro es por (4.5) la longitud media y el segundo sumando es la ecuación del centro, es decir los términos periódicos derivados de la ecuación de Kepler que se deducen de (3.4)

$$L_B = L_m + \left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \dots \quad (5.5)$$

fórmula que nos permite calcular L_G conociendo el tiempo T y utilizando (1.5), (3.5) y (4.5).

4.5 Longitud geocéntrica

(5.5) es la longitud baricéntrica del Sol, pero lo que nos interesa es la longitud geocéntrica. Consideremos la figura 1.5 donde T , L , S y B son las posiciones de la Tierra, Luna, Sol y del baricentro del sistema Tierra-Luna. Vamos a suponer para simplificar que tanto la Tierra como la Luna se encuentran en el plano de la eclíptica, lo cual es muy aproximadamente cierto por ser pequeña la inclinación de la órbita lunar. L_G y L_B son las longitudes geocéntrica y baricéntrica del Sol y L' es la longitud geocéntrica de la Luna, que es igual a la baricéntrica. Con γ representamos la dirección

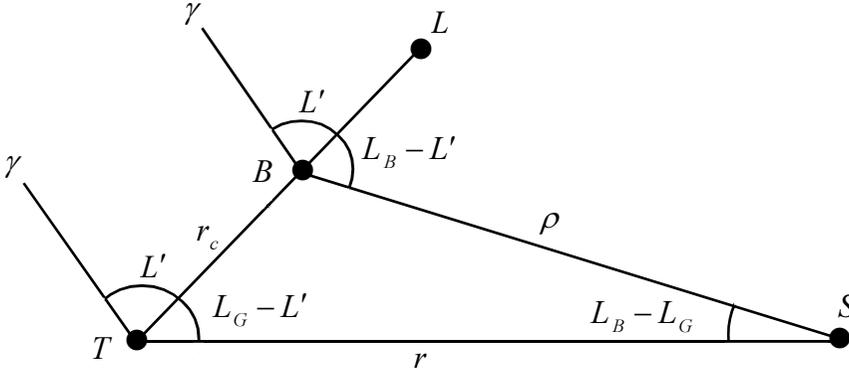


Figura 1.5.- T , L y S son la Tierra, el Sol y la Luna, que suponemos se encuentran en el plano de la eclíptica. B es el baricentro del sistema Tierra-Luna. γ muestra la dirección del equinoccio, desde donde se miden las longitudes. r_c es la distancia de la Tierra al baricentro.

del equinoccio, punto respecto al cual se miden las longitudes. r y ρ son las distancias de Tierra al Sol y del baricentro al Sol respectivamente.

Si consideramos el sistema de referencia geocéntrico la posición del centro de masas o baricentro Tierra-Luna es por (1.4)

$$r_c = \frac{m'}{m+m'} r' \quad (6.5)$$

m y m' son las masas de la Tierra y la Luna y r' es la distancia de la Tierra a la Luna.

Del triángulo TBS se encuentra

$$\sin(L_G - L') = \frac{h}{r_c}; \quad \sin(L_B - L_G) = \frac{h}{\rho}$$

donde h es la altura del triángulo TBS con vértice en B , entonces

$$\sin(L_B - L_G) = \frac{r_c}{\rho} \sin(L_G - L')$$

como las longitudes baricéntrica y geocéntrica del Sol son muy cercanas entre sí podemos sustituir el seno por el ángulo y utilizando (6.5) llegamos a

$$L_G = L_B + \frac{r'}{\rho} \frac{m'}{m+m'} \sin(L' - L_G) \approx L_B + \frac{r'}{\rho} \frac{m'}{m+m'} \sin(L' - L_B)$$

donde hemos identificado en el argumento del seno la longitud geocéntrica y la baricéntrica. Despreciando las variaciones de las distancias entre los astros dado el pequeño valor de las excentricidades, nos queda

$$L_G = L_B + \frac{a'}{a} \frac{m'}{m+m'} \sin(L' - L_B) \quad (7.5)$$

donde a y a' son los semiejes mayores de las elipses terrestre y lunar. (7.5) es la corrección que hay que hacer a (5.5) para pasar de longitudes baricéntricas a geocéntricas. La máxima diferencia entre ambas es

$$\frac{a'}{a} \frac{m'}{m+m'} \approx \frac{3,84 \cdot 10^8}{1,496 \cdot 10^{11}} \frac{7,349 \cdot 10^{22}}{5,972 \cdot 10^{24} + 7,349 \cdot 10^{22}} = 3,12 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 6'',4.$$

En vista del pequeño valor de la reducción al geocentro, es permitido simplificar (7.5) en la siguiente forma

$$L_G = L_B + \frac{a'}{a} \frac{m'}{m+m'} \sin(L'_m - L_m). \quad (8.5)$$

siendo L'_m la longitud media de la Luna que la tomamos de la teoría Efemérides Lunares Parisinas ELP de Chapront-Touzé y Chapront

$$L'_m = 218^\circ,316\ 654\ 36 + 481\ 267^\circ,881\ 342\ 40T - 0^\circ,001\ 3268T^2. \quad (9.5)$$

5.5 Corrección por aberración y nutación

Como queda dicho, (5.5) es la longitud geométrica baricéntrica del Sol respecto al equinoccio medio de la fecha. Esto quiere decir que estamos considerando la precesión, pues la referencia es el equinoccio medio que ya tiene incluida la precesión general. Para pasar (5.5) a una longitud aparente verdadera geocéntrica es necesario hacer la corrección de la nutación para que aparezca referida al equinoccio verdadero y también es necesario hacer la corrección por aberración, es decir

$$L = L_B - \sigma + \Delta\psi + \frac{a'}{a} \frac{m'}{m+m'} \sin(L'_m - L_m), \quad (10.5)$$

σ es la aberración, $\Delta\psi$ es la nutación en longitud y L se representa la longitud eclíptica aparente y geocéntrica del centro del Sol.

Para la teoría aproximada que buscamos podemos suponer un valor fijo para la aberración y sólo considerar los dos primeros términos en la expresión que nos da la nutación, por tanto

$$L = L_m + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M - \quad (11.5)$$

$$-20'',49552 - 17'',20 \sin \Omega'_m - 1'',32 \sin 2L_m + 6'',4 \sin(L'_m - L_m)$$

expresando todos los sumandos en radianes queda

$$L = L_m + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M - 9,9365 \cdot 10^{-5} - \quad (12.5)$$

$$-8,3388 \cdot 10^{-5} \sin \Omega'_m - 6,3995 \cdot 10^{-6} \sin 2L_m + 3,12 \cdot 10^{-5} \sin(L'_m - L_m).$$

Para evaluar la longitud aparente del Sol por (12.5) necesitamos calcular el día juliano para la fecha considerada mediante (1.1) y (14.1) y de este dato se obtiene los siglos julianos transcurridos por (10.2); por medio de (1.5), (3.5), (4.5), (2.3) y (9.5) se calculan los argumentos de (12.5), con lo que se puede calcular la longitud aparente del Sol.

Hay que señalar que el tiempo que aparece en el argumento de las anteriores expresiones es tiempo uniforme o tiempo terrestre y no tiempo universal. Si conocemos el tiempo universal y queremos aplicar las fórmulas anteriores, es previamente necesario calcular el tiempo en la escala de tiempo

terrestre. La diferencia entre ambas escalas sólo se puede conocer por la observación y se tienen datos desde el año 1620 hasta la fecha (ver tabla 1). Para otras fechas en el pasado o bien para el futuro, es necesario recurrir a fórmulas aproximadas como la (14.2)

6.5 Coordenadas ecuatoriales

Conocida la longitud eclíptica por (12.5) y suponiendo nula la latitud del Sol, podemos obtener sus coordenadas ecuatoriales (ascensión recta y declinación). Al aplicar al triángulo recto esférico de la figura 2.5 el teorema del seno se encuentra

$$\sin \delta = \sin L \sin \varepsilon \quad (13.5)$$

que nos permite determinar la declinación conocida la longitud y la oblicuidad de la eclíptica. Aplicando la relación del seno por el coseno, fórmula (3.A), en el mismo triángulo recto se encuentra

$$\sin L \cos \varepsilon = \cos \delta \sin \alpha$$

y por el teorema del coseno se halla

$$\cos L = \cos \delta \cos \alpha$$

y de estas dos últimas fórmulas obtenemos

$$\tan \alpha = \tan L \cos \varepsilon \quad (14.5)$$

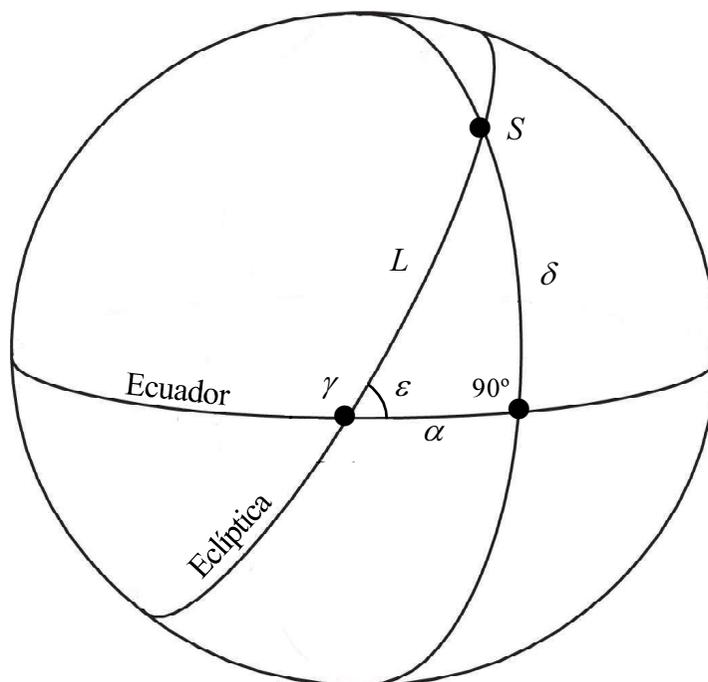


Figura 2.5.- Esfera celeste donde están representadas las coordenadas eclípticas del Sol y sus correspondientes coordenadas ecuatoriales (α y δ). S es la posición del Sol en la eclíptica, γ es el equinoccio verdadero, desde donde se mide la ascensión recta y ε es la oblicuidad de la eclíptica.

que nos da la ascensión recta del Sol. Notemos que los valores de α y δ son valores aparentes geocéntricos. Hay que tener en cuenta que la oblicuidad de la eclíptica varía con el tiempo según la ley

$$\varepsilon = 23^{\circ}26'21",45 - 46",81T \quad (15.5)$$

donde sólo se ha tenido en cuenta hasta el término lineal en T , además hay que hacer la corrección por nutación en oblicuidad (3.3). Por último añadir que la ascensión recta y declinación halladas por (13.5) y (14.5) son valores geocéntricos aparentes, es decir referidos al centro de la Tierra y teniendo en cuenta la aberración y la nutación.

7.5 Coordenadas horizontales

A partir de las coordenadas ecuatoriales y del tiempo sidéreo se calculan las coordenadas horizontales: azimut y altura, que si se utilizan (13.5) y (14.5) serán valores geocéntricos, es decir que no tienen la corrección por paralaje.

En la figura 3.5 está dibujado el triángulo de posición que relaciona las coordenadas ecuatoriales con las horizontales. Previamente es necesario calcular el ángulo horario, para lo que debe conocerse el tiempo sidéreo verdadero local del lugar de observación de longitud geográfica λ (que suponemos positiva hacia el oeste)

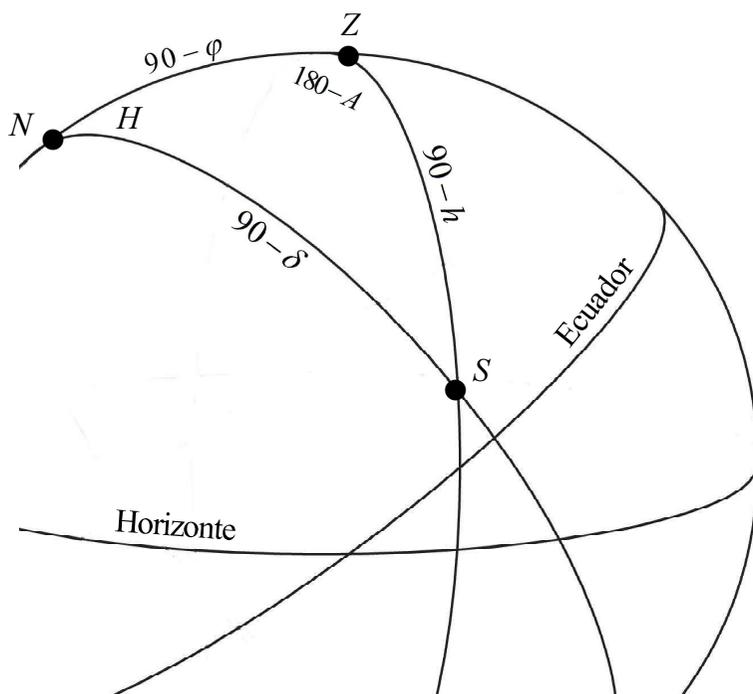


Figura 3.5.- Se representa el horizonte del lugar de observación situado en una latitud geográfica φ . El ecuador se encuentra inclinado respecto al horizonte un ángulo $90 - \varphi$. S es la posición del Sol. El triángulo de posición relaciona las coordenadas ecuatoriales: H (ángulo horario) y δ con las coordenadas horizontales: A (azimut) y h (altura). N es el polo norte celeste y Z es el cenit.

$$H = T_v - \lambda - \alpha = T_m + EE - \lambda - \alpha \quad (16.5)$$

donde el tiempo sidéreo local se halla restandole al tiempo sidéreo en el primer meridiano la longitud geográfica λ ; la ecuación de los equinoccios EE se calcula por (4.3). T_m es el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano, que se calcula por la regla dada en el epígrafe 5.2.

Al aplicar el teorema del coseno al triángulo de posición de la figura 3.5 se obtiene

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \quad (17.5)$$

donde φ es la latitud geográfica (la suponemos positiva si es norte).

En la figura 3.5 el azimut A se ha definido como el ángulo desde el meridiano superior del lugar de observación al punto de corte con el horizonte de la vertical que pasa por el Sol y medida en el sentido retrógrado.

Si se aplica el teorema del seno al triángulo de posición obtenemos

$$\sin A = \frac{\sin H \cos \delta}{\cos h} \quad (18.5)$$

donde la altura h es calculada previamente por (17.5). Con relación a la fórmula (18.5) hay que anotar que el arcoseno tiene dos soluciones posibles A y $180 - A$. Si $90^\circ > H > 270^\circ$ entonces la solución del arcoseno es A , en caso contrario es $180 - A$.

El paralaje horizontal ecuatorial del Sol es el ángulo desde el que se ve el radio ecuatorial terrestre desde el centro del Sol cuando está situado en el horizonte y a una distancia 1 *ua* (unidad astronómica), que se define como la distancia 149 597 870 700 metros.

Como el radio ecuatorial de la Tierra es 6 378 160 metros, entonces por la figura 4.5 se encuentra que el paralaje horizontal ecuatorial π del Sol es

$$\sin \pi = \frac{R}{r_0} \quad (19.5)$$

R es el radio ecuatorial terrestre y r_0 es igual a una unidad astronómica. Como el radio terrestre es muy pequeño en comparación con la distancia al Sol, (19.5) se reduce a

$$\pi = \frac{R}{r_0} = \frac{6\,378\,160}{149\,597\,870\,700} = 8'',79.$$

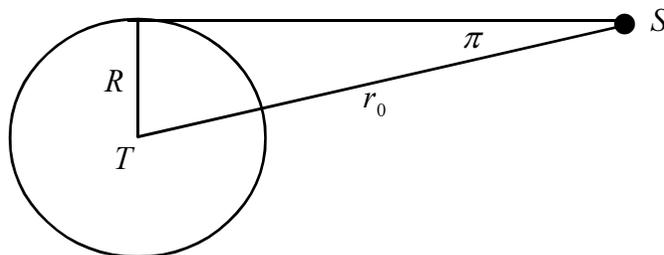


Figura 4.5.- T es la Tierra y S el Sol. En esta construcción π es el paralaje horizontal del Sol.

Si consideramos que la Tierra es una esfera, entonces por la figura 6.3 $p = h - h_T$ y por el teorema del seno

$$h_T = h - \pi \cos h. \quad (20.5)$$

8.5 Semidiámetro

Como primera aproximación podemos suponer que el centro de la Tierra describe una órbita elíptica de ecuación

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \theta} \quad (21.5)$$

donde r es la distancia de la Tierra al Sol, a es el semieje mayor de la elipse y θ es la anomalía verdadera, calculada por la relación (33.4)

$$\theta = M + \left(2e - \frac{e^3}{4}\right) \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \frac{13}{12}e^3 \sin 3M + \dots$$

M es la anomalía media dada por (4.5).

En la precisión que estamos considerando podemos tomar el valor del semieje mayor de la Tierra como exactamente 1 unidad astronómica.

Se le llama semidiámetro aparente del Sol s al ángulo bajo el cual se ve desde la Tierra el radio del Sol, es decir

$$\tan s = \frac{R_S}{r}$$

R_S es el radio del Sol y r la distancia de la Tierra al Sol. Como la distancia al Sol es muy superior a su radio, podemos sustituir la tangente por el ángulo expresado en radianes

$$s = \frac{R_S}{r}.$$

Si llamamos s_0 al semidiámetro del Sol cuando se encuentra a una unidad astronómica

$$s = s_0 \frac{r_0}{r} \quad (22.5)$$

donde $r_0 = 1ua$ y r se calcula por (30.4). Como el radio del Sol es

$$R_S = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m},$$

entonces

$$s_0 = \frac{6,96 \cdot 10^8}{149\,597\,870\,700} \text{ rad} = 15' 59'', 64. \quad (23.5)$$

9.5 Ejemplos

Ejemplo 1.5.- Determinar las coordenadas horizontales topocéntricas del centro del Sol el día 13 de marzo de 2015 a las $3^h 40^m 15^s$ de tiempo terrestre, en una posición geográfica de latitud 35° N y longitud 5° W.

- El día juliano terrestre de la fecha considerada se calcula por las técnicas

expuestas en el capítulo 1

$$JD = 2\,457\,094,652\,951\,39.$$

- Los siglos transcurridos desde JT2000.0 es por (10.2)

$$T = 0,151\,941\,217\,0127.$$

- Por (12.5) se calcula la longitud eclíptica aparente del centro de Sol respecto al equinoccio verdadero

$$L = 352^\circ,2400903622161 = 352^\circ 14' 24'',3.$$

- Para calcular la oblicuidad de la eclíptica en el momento considerado es necesario determinar la longitud media del nodo ascendente de la órbita lunar por (2.3)

$$\Omega'_m = 191^\circ,169\,5504,$$

la nutación en oblicuidad es por (3.3)

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_v - \varepsilon_m = -9'',02574 = -2^\circ,507 \cdot 10^{-3},$$

como la oblicuidad media de la eclíptica es por (15.5)

$$\varepsilon_m = 23^\circ,437\,314\,74 = 23^\circ 26' 14'',34,$$

entonces la oblicuidad verdadera de la eclíptica es

$$\varepsilon_v = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon = 23^\circ,434\,807\,74 = 23^\circ 26' 5'',31.$$

- La declinación aparente geocéntrica se calcula por (13.5)

$$\delta = -3^\circ,078\,212\,069 = -3^\circ 4' 41'',56.$$

- La ascensión recta aparente geocéntrica y referida al equinoccio verdadero se calcula por (14.5)

$$\alpha = -7^\circ,126\,691\,649 = -0^h,4751127766 = 23^h,52488722 = 23^h 31^m 29^s,59.$$

- Para calcular el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas de *UT* tenemos en cuenta que para ese momento el día juliano es

$$JD = 2\,457\,094,5$$

y los siglos que han pasado desde J2000.0 es

$$T = 0,151\,937\,0294.$$

- Al aplicar (8.2) se determina el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas *UT*

$$T_m(0^h UT) = 11^h 21^m 14^s,56.$$

- Para calcular el tiempo sidéreo medio en el momento indicado y en el primer meridiano, se pasa el tiempo *TT* a *UT*, es decir se calcula ΔT , que según la tabla 1 es en la fecha considerada

$$\Delta T = TT - UT = 67^s,86,$$

por tanto la hora en tiempo universal del momento considerado es

$$UT = 3^h 40^m 15^s + 67^s,86 = 3^h 41^m 22^s,86.$$

Ahora se pasa este tiempo que está en unidades de tiempo universal a tiempo con unidades de tiempo sidéreo, para lo que se multiplica por el coeficiente numérico (9.2) encontrándose $3^h 41^m 59^s,23$, entonces el tiempo sidéreo

medio en el primer meridiano en la hora indicada es

$$T_m(3^h 41^m 22^s, 86 \text{ UT}) = 11^h 21^m 14^s, 56 + 3^h 41^m 59^s, 23 = 15^h 3^m 13^s, 79.$$

- Para aplicar la fórmula (16.5) y calcular el ángulo horario del Sol, es necesario determinar la ecuación de los equinoccios (4.3), lo que exige conocer la longitud media del nodo ascendente lunar (2.3) y la longitud media geométrica del Sol (1.5)

$$\Omega'_m = 191^\circ, 169 5504; \quad L_m = 350^\circ, 4672434,$$

y por (4.3) se calcula la nutación en longitud

$$\Delta\psi = 3'', 76304,$$

y conocida la oblicuidad de la eclíptica se determina la ecuación de los equinoccios por (4.3)

$$EE = 0^s, 23.$$

- Ya se puede utilizar (16.5) y determinar el ángulo horario del centro del Sol, teniendo presente que la longitud geográfica es positiva (por estar dirigida hacia el oeste del primer meridiano) y que tiene que expresarse en unidades horarias

$$\begin{aligned} H &= 15^h 3^m 13^s, 79 + \frac{0,23}{3600} - \frac{5 \cdot 24}{360} - 23^h 31^m 29^s, 59 = \\ &= -8^h 48^m 15^s, 6 = 15^h 11^m 44^s, 4. \end{aligned}$$

- El cálculo de la altura del centro del Sol se hace con (17.5)

$$h = -35^\circ 22' 3''.$$

Esta es la altura geocéntrica, para pasarla a topocéntrica h_T hay que tener en cuenta el paralaje del Sol (20.5)

$$h_T = h - 8'', 76 \cos h = -35^\circ 22' 10''.$$

- Para calcular el acimut se utiliza (18.5)

$$A = -65^\circ 22' 27'', 5 = 294^\circ 37' 32'', 5.$$

Si hacemos la corrección por paralaje por las fórmulas exactas (8.3), (10.3) y (13.3) los resultados de la altura y acimut topocéntrica habrían coincidido salvo una diferencia de décimas de segundo de arco.

- Para calcular la distancia Tierra-Sol hallamos la anomalía media y la excentricidad por (3.5) y (4.5)

$$e = 0,016 702; \quad M = 67^\circ, 268 610 68,$$

y con estos datos se calcula la anomalía verdadera por (33.4)

$$\theta = 69^\circ, 048 099 81,$$

con lo que se calcula r por (12.5)

$$r = 0,993 786 \text{ ua}.$$

- El semidiámetro del Sol se calcula con (22.5) y (23.5)

$$s = 16' 5'', 6.$$

Ejemplo 2.5.- Determinar las coordenadas horizontales topocéntricas del centro del Sol el día 22 de junio de 2020 a las $14^h 30^m 55^s$ de tiempo universal,

en una posición geográfica de latitud 30° S y longitud 15° E.

- El día juliano de la fecha es

$$JD = 2\,459\,023,104\,803\,664.$$

- Por la tabla 1

$$\Delta T \approx 70^s,$$

por tanto

$$JDT = JD + \Delta T = 2\,459\,023,105\,613\,849.$$

Los siglos julianos transcurridos en TT desde la época JT2000.0 es

$$T = 0,204\,739\,373.$$

- La longitud aparente del Sol respecto al equinoccio verdadero es por (12.5)

$$L = 91^\circ 37' 23'',4.$$

- La oblicuidad media de la eclíptica se calcula por (15.5)

$$\varepsilon_m = 23^\circ,436\,629\,49.$$

Para calcular la oblicuidad verdadera necesitamos hallar la longitud media del nodo ascendente lunar por (2.3)

$$\Omega'_m = 89^\circ,050\,761\,43,$$

entonces utilizando (3.3) se encuentra

$$\varepsilon_v = 23^\circ,436\,671\,83.$$

- Al aplicar (13.5) y (14.5) se determina la declinación y ascensión recta *

$$\delta = 23^\circ 25' 36'',14; \quad \alpha = 6^h 7^m 4^s,57.$$

- El día juliano a las 0 horas UT del día considerado es

$$JD = 2\,459\,022,5,$$

y los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0 es

$$T = 0,204\,722\,7926,$$

al aplicar (8.2) se determina el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas UT del día de la fecha

$$T_m(0^h UT) = 18^h 2^m 33^s,32,$$

Pasando $14^h 30^m 55^s$ a unidades de tiempo sidéreo multiplicando por el coeficiente (9.2) se encuentra $14^h 33^m 18^s,07$, por tanto el tiempo sidéreo medio a la hora considerada es

* Hay que tener precaución al realizar la operación de la función arcotangente, pues algunas máquinas de calcular sólo devuelven ángulos comprendidos entre 90° y -90° . Refiriéndonos a la ecuación (14.5)

$$\tan \alpha = \tan L \cos \varepsilon = \frac{\sin L \cos \varepsilon}{\cos L},$$

debemos notar que si la calculadora o el programa utilizado tiene el problema antes señalado, debe seguirse la siguiente norma: si el numerador es + y el denominador es - al resultado se le suma 180° ; si el numerador es - y el denominador es +, se le suma 360° y si el numerador es - y el denominador -, entonces se le suma 180° .

$$T_m(14^h 30^m 55^s UT) = 18^h 2^m 33^s,32 + 14^h 33^m 18^s,07 = 8^h 35^m 51^s,39.$$

- El cálculo de la ecuación de los equinoccios exige previamente la longitud del Sol medio que se calcula por mediación de (1.5)

$$L_m = 91^\circ,241\ 502\ 34,$$

entonces la nutación en longitud es por (1.3)

$$\Delta\psi = -17'',2,$$

calculándose por (4.3) la ecuación de los equinoccios

$$EE = -1^s,05.$$

- Ya se puede calcular por (16.5) el ángulo horario del Sol respecto al meridiano del lugar

$$H = 8^h 35^m 51^s,39 - 1^s,05 + 1^h - 6^h 7^m 4^s,57 = 3^h 28^m 45^s,77.$$

- La altura geocéntrica se calcula por (17.5)

$$h = 16^\circ 45' 33'',87.$$

- El acimut se calcula por (18.5)

$$A = 49^\circ 12' 29'',64.$$

- La altura topocéntrica es

$$h_T = h - 8'',76 \cos h = 16^\circ 45' 25'',48.$$

- El ángulo de refracción R_T se calcula por la fórmula de Bennet (36.3). Como se conoce la altura geométrica (o sea, sin refracción) hay que aplicar la ecuación (36.3) por aproximaciones sucesivas encontrándose el ángulo de refracción

$$R_T = 3' 14'',36,$$

y la altura aparente es

$$h_0 = 16^\circ 45' 25'',48 + 3' 14'',36 = 16^\circ 48' 39'',84.$$

- La anomalía media y la excentricidad es por (3.5) y (4.5)

$$e = 0,016\ 700; \quad M = 167^\circ,952\ 080,$$

por (33.4) se calcula la anomalía verdadera

$$\theta = 167^\circ,952\ 6495,$$

con lo que se puede calcular r por (12.4)

$$r = 1,016\ 3218\ ua.$$

- El semidiámetro del Sol se calcula con (22.5) y (23.5)

$$s = 15' 44'',23.$$

10.5 Tablas de Bretagnon y Simon

Exponemos a continuación un método que nos permite conocer la longitud del Sol con un error medio de 2 segundos de arco. Se basa en la teoría VSOP82 de P. Bretagnon completada por la teoría de Laskar.

La longitud geométrica y geocéntrica del Sol respecto al equinoccio medio de la fecha viene dada por la serie

$$L_g = L_0 + L_1 U + 10^{-7} \sum_{i=1}^{50} l_i \sin(\alpha_i + \nu_i U) =$$

$$= 4,935\ 3929 + 62\ 833,196\ 1680 U + 10^{-7} \sum_{i=1}^{50} l_i \sin(\alpha_i + \nu_i U) \quad (24.5)$$

donde todos los ángulos están en radianes. U está medido en unidades de 10 000 años julianos (3 652 500 días) de TT contados desde JT2000.0. El valor de las constantes aparece en la tabla 2.

La distancia geocéntrica del centro del Sol es

$$r = R_0 + \sum_{i=1}^{50} r_i \cos(\alpha_i + \nu_i U) = 1,000\ 1026 + 10^{-7} \sum_{i=1}^{50} r_i \cos(\alpha_i + \nu_i U) \quad (25.5)$$

con R_0 y r_i expresados en unidades astronómicas.

Dentro de la precisión de esta teoría, la latitud eclíptica del Sol se toma como nula.

La longitud aparente respecto al equinoccio verdadero se obtiene haciendo la corrección por aberración y nutación. Las tablas de Bretagnon-Simon proponen para la corrección de aberración

$$\sigma = 10^{-7} [993 - 17 \cos(3,10 + 62\ 830,14 U)]$$

en radianes. Y para la corrección de nutación

$$\Delta\psi = 10^{-7} [-834 \sin A1 - 64 \sin A2]$$

igualmente en radianes, siendo los coeficientes

$$A1 = 2,18 - 3.375,70 U + 0,36 U^2$$

$$A2 = 3,51 + 125\ 666,39 U + 0,10 U^2$$

La longitud aparente del Sol se calcula a partir de

$$L = L_g - \sigma + \Delta\psi.$$

Ejemplo 3.5.- Determinar la longitud aparente del Sol respecto al equinoccio verdadero en la fecha 20 de noviembre de 1930 a las $0^h\ 15^m\ 26^s$ de tiempo terrestre.

- Por aplicación de (24.5) y usando la tabla 2 y haciendo la corrección por nutación y aberración se encuentra la longitud aparente del Sol

$$L = 236^\circ\ 57'\ 16'',6.$$

- La latitud eclíptica del Sol la tomamos nula. Por (13.5) y (14.5) se calculan las coordenadas ecuatoriales del Sol

$$\delta = -19^\circ\ 29'\ 17'',8; \quad \alpha = 15^h\ 38^m\ 40^s,1,$$

para lo que previamente se necesita calcular la oblicuidad verdadera de la eclíptica, utilizando para ello (15.5) y (3.3).

- Por (25.5) se calcula la distancia geocéntrica del Sol

$$r = 0,988\ 0327\ ua.$$

El error estimado de las tablas de Bretagnon-Simon evaluado comparando los resultados de las tablas con integraciones numéricas es

$$2'',0 + 0'',03 \tau^2$$

donde τ son milenios julianos desde la época JT2000.0.

Comparando las tablas de Bretagnon-Simon con la teoría simplificada que antes hemos desarrollado y que se resume en (12.5), encontramos que para el periodo comprendido entre los años 1850 y 2050 la diferencia promedio entre ambas es de 7,4 segundos de arco.

6

Efemérides solares

1.6 Método para determinar el momento del ocaso del Sol

Se denomina ocaso del Sol al momento en que se observa que el limbo superior del Sol desaparece en el horizonte. El cálculo de este fenómeno se complica por el rápido movimiento propio del Sol, que es de aproximadamente un grado por día, lo que significa que también se da una apreciable variación de su ascensión recta y declinación, coordenadas que se necesitan para determinar el momento del ocaso. Es decir, al no conocerse de antemano el momento del ocaso, no se puede determinar la ascensión recta y la declinación en ese momento.

Por este motivo es necesario aplicar un proceso de aproximaciones sucesivas, que consiste en lo siguiente:

-Se calcula la ascensión recta y la declinación del Sol en el instante 0^h de TT y suponemos, como primera aproximación, que estas son las coordenadas que va a tener el Sol en el momento del ocaso.

-Se calcula el tiempo sidéreo medio local en las 0^h UT , que identificamos con el tiempo sidéreo verdadero dado el pequeño valor de la ecuación de los equinoccios.

-Se calcula el ángulo horario verdadero del Sol en el momento del ocaso, mediante las técnicas que luego desarrollaremos.

-Conocido el ángulo horario se calcula el tiempo sidéreo local en el momento del ocaso.

-Gracias al resultado anterior, se calcula el tiempo sidéreo transcurrido entre las 0^h UT y el momento del ocaso. Se convierte este tiempo de sidéreo a tiempo universal y este será el momento del ocaso en primera aproximación.

-Conocido ΔT se determina el tiempo terrestre de la puesta del Sol igualmente en primera aproximación.

-Ahora se recurre a una segunda aproximación. Se vuelve a determinar la ascensión recta y la declinación en el momento de TT aproximado antes determinado y se sigue el mismo procedimiento anterior, con lo que se obtiene una segunda aproximación.

- Los ortos y ocasos del Sol no son acontecimientos que puedan determinarse con precisión, principalmente por la refracción atmosférica, ya que en el horizonte su valor alcanza una inseguridad de unos 18 minutos de arco. Por tanto a lo más que podemos pretender es a determinar el momento de

los ortos y ocasos del Sol con una exactitud de un minuto de tiempo
 - Se pueden hacer cuantas aproximaciones sean necesarias. Por ejemplo, si queremos una aproximación de 0,5 minutos de tiempo, se reitera el procedimiento anterior hasta que la diferencia entre las dos últimas aproximaciones sea inferior a 0,5 minutos.

2.6 Cálculo del momento del ocaso del Sol

A consecuencia de la refracción y el semidiámetro del Sol, su altura en el momento del ocaso no es 0, es decir es necesario distinguir entre la altura geométrica h y la altura aparente h_0 ; para el caso del Sol existe la relación

$$h = h_0 - 16' - 34' = 0 - 50' = -50' \quad (1.6)$$

donde se ha tomado aproximadamente 16' para el semidiámetro y 34' para la refracción en el horizonte. Notemos que no consideramos el paralaje solar, pues apenas afecta al momento del ocaso que, como se ha dicho, sólo podemos prever con una aproximación de un minuto de tiempo. La fórmula (1.6) viene a decirnos que en el momento en que se observa el ocaso del Sol, su centro ya se encuentra a 50' bajo el horizonte verdadero.

Con (1.1) y (3.1) o (14.1) se calcula el día juliano a las 0 horas de tiempo terrestre del día considerado y por (10.2) se calcula los siglos transcurridos desde la época JT2000.0. Con (3.5) y (4.5) se calcula la excentricidad de la órbita y la anomalía media, y por (2.3) y (9.5) se calcula la longitud media del nodo ascendente de la Luna y su longitud media, lo que permite calcular por (12.5) la longitud del Sol. Por (13.5) y (14.5) se calcula la ascensión recta y la declinación del centro del Sol a las 0 horas de TT del día señalado. En vez de (12.5) se puede determinar la longitud del Sol utilizando las tablas de Bretagnon-Simon expuesta en el epígrafe 10.5 .

Por (8.2) se calcula el tiempo sidéreo en el primer meridiano a las 0 horas de UT .

De (17.5) se halla el ángulo horario H_0 referido al meridiano del lugar en el momento del Sol en el ocaso

$$\cos H_0 = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta} \quad (17.5)$$

donde h es dado por (1.6), φ es la latitud del lugar de observación con valor positivo para el hemisferio norte y δ es la declinación antes calculada, es decir la que tiene el Sol a las 0 horas de tiempo terrestre.

Por (16.5) se calcula el tiempo sidéreo en el primer meridiano en el momento del ocaso

$$T_m (\text{ocaso}) = H_0 + \lambda + \alpha \quad (2.6)$$

como antes hemos dicho, identificamos tiempo sidéreo medio y verdadero. λ es la longitud geográfica de donde se hace la observación, considerada positiva hacia el oeste y α es la ascensión recta en el momento 0 horas de TT .

Con los cálculos anteriores determinamos el tiempo sidéreo transcurrido entre las 0^h UT y el momento del ocaso, que se pasa a unidades de tiempo universal dividiendo entre el coeficiente (9.2), con lo que se obtiene el

momento t_1 de la primera aproximación de la puesta del Sol

$$t_1(UT) = \frac{T_m(\text{ocaso}) - T_m(0^h UT)}{1,002\ 737\ 909\ 35} \quad (3.6)$$

Para tiempos pasados podemos conocer ΔT por la tabla 1 y para tiempos futuros podemos usar, por ejemplo, la relación de Stepheson (14.2). Con esta dato podemos averiguar la hora TT de la primera aproximación de la hora de la puesta del Sol

$$t_1(TT) = t_1(UT) + \Delta T.$$

Ahora volvemos a repetir el proceso anterior, comenzando con la determinación de la ascensión recta y la declinación del Sol en el momento $t_1(TT)$. Tras lo cual encontramos la segunda aproximación del momento de la puesta del Sol $t_2(UT)$.

Este proceso se vuelve a repetir las veces necesarias hasta que se cumpla la desigualdad

$$t_n(UT) - t_{n-1}(UT) < 0^m,5$$

con lo que queda concluido el método para encontrar el momento del ocaso del Sol.

Ejemplo 1.6.- Determinar el momento de la puesta del Sol el día 20 de mayo de 2001 en un lugar de latitud 35° N y longitud 20° E.

- Con (14.1) se determina el día juliano a las 0 horas TT del día de la fecha

$$JDT = 2\ 452\ 049,5.$$

- Por (10.2) se calcula los siglos julianos en TT transcurridos desde la época JT2000.0 (12 horas TT del día 1 de enero de 2000).

$$T = 0,013\ 812\ 457\ 22.$$

- La excentricidad media y anomalía media para la fecha se calcula por (3.5) y (4.5)

$$e = 0,016\ 708\ 039\ 34 ; \quad M = 134^\circ,764\ 4432.$$

- La longitud media del nodo ascendente lunar y la longitud media de la Luna se calculan por (2.3) y (9.5)

$$\Omega_m = 98^\circ,329\ 346\ 03 ; \quad L'_m = 25^\circ,808\ 677\ 03 .$$

- Con todo lo anterior se determina la longitud eclíptica aparente verdadera del Sol por (12.5)

$$L = 59^\circ\ 3'\ 12'',0. \quad (4.6)$$

Si el cálculo se hace por el método de Bretagnon-Simon se encuentra un resultado más preciso

$$L = 59^\circ\ 2'\ 49'',9.$$

- La ascensión recta y la declinación se calcula por (13.5) y (14.5)

$$\alpha_1 = 3^h\ 47^m\ 21^s,4 ; \quad \delta_1 = 19^\circ\ 56'\ 51'',4 .$$

donde hemos utilizado el valor de la longitud de Bretagnon-Simon.

- Por (8.2) se calcula el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0

horas de UT

$$T_m(0^h UT) = 15^h 50^m 52^s,732 = 15^h,847 981 11.$$

- Con (17.5) se determina el ángulo horario del centro del Sol en el momento del ocaso en primera aproximación

$$H_{0-1} = 105^\circ,843 9283,$$

hemos tenido en cuenta que la latitud φ es positiva por estar el lugar de observación en el hemisferio norte. (17.5) nos da dos soluciones para H_0 , una de ellas es un ángulo positivo y el otro es negativo, el primero se refiere al ocaso del Sol (por señalar el ángulo horario hacia un punto hacia el este) y el otro es para el orto (punto situado hacia el oeste). Recuérdese que el ángulo horario se mide en el sentido retrógrado (oeste-sur-este-norte), o sea en el mismo sentido que el movimiento diario de los astros.

- Por (2.6) se calcula en primera aproximación el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano en el momento del ocaso

$$T_{m-1}(\text{ocaso}) = 7^h,056 261 887 - 1^h,333 333 + 3^h,789 278 = 9^h,512 207.$$

- El tiempo universal transcurrido desde las 0 horas UT hasta el ocaso es dado por (3.6)

$$t_1(UT) = \frac{9^h,512 207 - 15^h,847 981 11}{1,002 737 909 35} = 17^h,615 995 = 17^h 36^m 57^s,6.$$

donde hemos sumado 24 horas al numerador para obtener un resultado positivo. $t_1(UT)$ es un tiempo aproximado. Ahora es necesario hacer una nueva iteración para encontrar un mejor resultado.

- El TT del momento aproximado del ocaso antes calculado es

$$t_1(0^h TT) = 17^h 36^m 57^s,6 + 64^s \approx 17^h 38^m 2^s,$$

donde $\Delta T \approx 64^s$ se obtiene de la tabla 1.

- Para el tiempo anterior se vuelve a encontrar la ascensión recta y la declinación

$$\alpha_2 = 3^h 50^m 17^s,8; \quad \delta_2 = 20^\circ 5' 59",9.$$

- Con lo que se calcula en segunda aproximación el ángulo horario del Sol en el momento del ocaso

$$H_{0-2} = 105^\circ,970 6811.$$

- El tiempo sidéreo en segunda aproximación para la puesta del Sol es

$$T_{m-2}(\text{ocaso}) = 9^h,569 934 430.$$

- El tiempo universal en segunda aproximación es

$$t_2(UT) = \frac{9^h,569 934 430 - 15^h,847 981 11}{1,002 737 909 35} = 17^h,673 564 57 = 17^h 40^m 24^s,8.$$

- Como la diferencia entre $t_2(UT)$ y $t_1(UT)$ no es menor de 0,5 minutos, que es el criterio que hemos exigido para terminar con el proceso de reiteración, volvemos a hacer una nueva aproximación.

- La puesta del Sol en segunda aproximación en tiempo terrestre es

$$t_2(TT) = 17^h 40^m 24^s,8 + 64^s \approx 17^h 41^m 29^s.$$

- La nueva ascensión recta y declinación es

$$\alpha_3 = 3^h 50^m 18^s,4 ; \quad \delta_3 = 20^\circ 6' 1'',7.$$

- En ángulo horario del Sol en el ocaso en tercera aproximación es

$$H_{0-3} = 105^\circ,971\ 0977.$$

- El tiempo sidéreo del ocaso en la nueva aproximación

$$T_{m-3}(\text{ocaso}) = 9^h,569\ 850\ 958.$$

- Y el tiempo universal del ocaso

$$t_3(UT) = \frac{9^h,569\ 850\ 958 - 15^h,847\ 981\ 11}{1,002\ 737\ 909\ 35} = 17^h,673\ 481 = 17^h 40^m 24^s,5.$$

- Como la diferencia entre $t_3(UT)$ y $t_2(UT)$ es menor que 0,5 minutos que es el criterio que habíamos puesto para dejar el cálculo reiterativo, concluimos que el tiempo universal (o sea, la hora solar en el primer meridiano) del ocaso del Sol el día 20 de mayo de 2001 en un lugar de 35°N y 20°E es las 17 horas 40 minutos. El mismo resultado se obtiene si se usa la longitud del Sol (4.6) derivada de la teoría simplificada.

- Para terminar determinamos el acimut del punto donde se pone el Sol, para lo que se usa (18.5) con los datos ya conocidos

$$\sin A = \frac{\sin H_0 \cos \delta}{\cos h} = \frac{\sin 105^\circ,971\ 098 \cos 20^\circ,100\ 472}{\cos(-0,833\ 333)} = 0,902\ 939,$$

entonces

$$A = \arcsin 0,902\ 939 = 115^\circ 27' 10'',4$$

ángulo medido desde el meridiano superior del lugar hasta el punto de corte de la vertical con el horizonte en sentido retrógrado*.

3.6 Cálculo del momento del orto del Sol

El cálculo a seguir para determinar la hora de la salida del Sol es igual que el indicado en el epígrafe anterior para determinar el momento del ocaso. Salvo que en la ecuación (17.5) tomamos la solución negativa para el ángulo horario del Sol, lo cual significa que el Sol se encuentra al este del lugar de observación.

Ejemplo 2.6.- Determinar el momento de la salida del Sol el día 20 de mayo de 2001 en un lugar de latitud 35°N y longitud 20°E .

* Hay que advertir que la función arcoseno tiene dos soluciones: A y $180-A$ y las máquinas de calcular nos dan la solución de valor más pequeño. Cuando se calcula el arcoseno hay que saber cuál de los dos resultados hay que tomar. La regla es la siguiente: si H_0 está comprendido entre 90° y 270° se toma la segunda solución (o sea, $180-A$), en caso contrario se toma la primera, siempre y cuando queramos medir el acimut desde el meridiano superior en sentido retrógrado como hemos definido nosotros.

- Con los mismos datos calculados en el ejemplo anterior, se determina por (17.5) el ángulo horario aproximado del Sol en el momento de su orto

$$H_{0-1} = -105^{\circ},843\ 9283 \equiv 254^{\circ},156\ 0717.$$

- Por (2.6) se calcula el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano en el momento del orto en primera aproximación

$$T_{m-1}(\text{orto}) = 16^h,943\ 738 - 1^h,333\ 333 + 3^h,789\ 278 = 19^h,399\ 683.$$

- El tiempo universal transcurrido desde las 0 horas UT hasta el orto es dado por (3.6)

$$t_1(UT) = \frac{19^h,399\ 683 - 15^h,847\ 981\ 11}{1,002\ 737\ 909\ 35} = 3^h,542\ 004 = 3^h\ 32^m\ 31^s,2.$$

Ahora es necesario hacer una nueva iteración para encontrar un mejor resultado.

- El TT de la primera aproximación del momento del orto es

$$t_1(0^h\ TT) = 3^h\ 32^m\ 31^s,2 + 64^s \approx 3^h\ 33^m\ 35^s,$$

- Para el tiempo anterior se encuentra la ascensión recta y la declinación

$$\alpha_2 = 3^h\ 47^m\ 57^s; \quad \delta_2 = 19^{\circ}\ 58'\ 43''.$$

- Con lo que se calcula en segunda aproximación el ángulo horario del Sol en el momento del orto

$$H_{0-2} = -105^{\circ},869\ 6914.$$

- El tiempo sidéreo en segunda aproximación para la puesta del Sol es

$$T_{m-2}(\text{orto}) = 19^h,407\ 853\ 91.$$

- El tiempo universal en segunda aproximación es

$$t_2(UT) = \frac{19^h,407\ 853 - 15^h,847\ 981}{1,002\ 737\ 909\ 35} = 3^h,550\ 153 = 3^h\ 33^m\ 0^s,6.$$

Como la diferencia entre $t_2(UT)$ y $t_1(UT)$ no llega a 0,5 minutos no tenemos que hacer una iteración más, llegando a la conclusión de que la hora universal del orto del Sol en el día 20 de mayo de 2001 en la posición geográfica $35^{\circ}N$ y $20^{\circ}E$ es las 3 horas 33 minutos.

- Para terminar determinamos el acimut del punto donde se pone el Sol, para lo que se usa (18.5) con los datos ya conocidos

$$\sin A = \frac{\sin H_0 \cos \delta}{\cosh} = \frac{\sin 105^{\circ},869\ 691 \cos 19^{\circ},978\ 611}{\cos(-0,833\ 333)} = 0,904\ 096,$$

entonces

$$A = 180 - \arcsin 0,904\ 096 = 115^{\circ}17'\ 54''^*$$

ángulo medido desde el meridiano superior del lugar en sentido retrógrado.

* Como H_0 está comprendido entre 90 y 270 entonces entendemos que el arcoseno da la solución $180-A$.

Las horas de iluminación del Sol o tiempo que el Sol está iluminando el lugar de observación se calcula midiendo el tiempo transcurrido entre el ocaso y el orto del Sol en ese día.

Ejemplo 4.6.- Calcular las horas de iluminación el día 20 de mayo de 2001 en un lugar de coordenadas geográficas 35°N y 20°E.

- Utilizando los tiempos del ocaso y orto antes calculado se encuentra

$$17^h 40^m - 3^h 33^m = 14^h 7^m$$

que son las horas de insolación del día considerado.

4.6 Momento de paso del Sol por el meridiano

Se trata de determinar el momento de tránsito del centro del Sol por el meridiano superior del lugar de observación.

Cuando el Sol pasa por el meridiano se cumple por (2.6) la relación

$$T_m (\text{tránsito}) = H_0 + \lambda + \alpha = \lambda + \alpha, \quad (4.6)$$

puesto que H_0 es el ángulo horario del Sol medido desde el meridiano local, que es por definición cero en el momento del tránsito. T_m es el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano, que identificamos con el tiempo sidéreo verdadero lo que no va a alterar los resultados finales y λ es la longitud del lugar de observación.

Para calcular el instante del paso por el meridiano se calcula el tiempo sidéreo a las 0^h de UT el día considerado y por (3.6) se determina el tiempo sidéreo transcurrido desde las 0^h UT hasta el momento del tránsito. Ya sólo hay que pasar de tiempo sidéreo a tiempo universal mediante el coeficiente (9.2). El método a seguir vuelve a ser el de una iteración:

- Se calcula a las 0 horas de tiempo terrestre la ascensión recta del Sol.

- Se aplica (4.6) y se calcula el tiempo universal en el primer meridiano del paso del Sol por el meridiano en primera aproximación.

- Se aplica (3.6) y se calcula el tiempo universal del tránsito en primera aproximación.

- Conocido ΔT se determina el momento en TT de este tránsito.

- Con este dato se vuelve a calcular la ascensión recta del Sol y se inicia de nuevo el anterior procedimiento, que hay que seguir hasta que haya coincidencia entre los dos últimos resultados.

Ejemplo 3.6.- Determinar el momento del paso del centro del Sol por el meridiano el día 20 de mayo de 2001 en un lugar de coordenadas geográficas 35°N y 20°E.

- La ascensión recta del Sol a las 0^h TT del día considerado es

$$\alpha_1 = 3^h 47^m 21^s, 4.$$

este valor es geocéntrico y no topocéntrico. Pero al final del cálculo es indiferente utilizar uno u otro, puesto que al pasar el Sol por el meridiano ambos valores de la ascension recta son idénticos. Es decir, el momento de paso del Sol por el meridiano es el mismo con independencia de que la observación sea topocéntrica o geocéntrica, tal como lo muestra que si el

acimut topocéntrico es nulo (paso por el meridiano) el acimut geocéntrico también lo es, y viceversa.

- El tiempo sidéreo del tránsito es por (4.6)

$$T_{m-1}(\text{tránsito}) = \lambda + \alpha = -1^h,333\,333 + 3^h,789\,278 = 2^h,455\,944.$$

- Al aplicar (3.6) se calcula el tiempo universal del paso en primera aproximación

$$t_1(UT) = \frac{2^h,455\,9444 - 15^h,847\,9801 + 24^h}{1,002\,737\,909\,35} = 10^h\,34^m\,44^s,4,$$

nótese que no se ha tenido en cuenta la ecuación de los equinoccios, pues dada su pequeña variación en pocas horas, podemos suponer que la diferencia de tiempos sidéreos medios es la misma que la diferencia entre tiempo sidéreos verdaderos. Obsérvese también que es necesario obtener un valor positivo de la diferencia de tiempo sidéreo (agregándole 24 horas) antes de cambiar de unidades sidéreas a unidades de tiempo universal, es decir antes de hacer la división.

- A continuación se determina el tiempo terrestre del evento

$$t_1(TT) = 10^h\,34^m\,44^s,4 + 64^s = 10^h\,35^m\,48^s,4.$$

- En la segunda aproximación se obtiene

$$\alpha_2 = 3^h\,49^m\,7^s,4$$

$$T_{m-2}(\text{tránsito}) = 2^h\,29^m\,7^s,4$$

$$t_2(UT) = 10^h\,36^m\,30^s,1$$

$$t_2(TT) = 10^h\,37^m\,34^s,1.$$

- En una tercera aproximación

$$\alpha_3 = 3^h\,49^m\,7^s,7$$

$$T_{m-3}(\text{tránsito}) = 2^h\,29^m\,7^s,7$$

$$t_3(UT) = 10^h\,36^m\,30^s,4$$

$$t_3(TT) = 10^h\,37^m\,34^s,4.$$

- En la cuarta aproximación se encuentran los mismos valores anteriores, por lo que se da por finalizada la iteración. Por tanto el centro del Sol pasa por el meridiano el día 20 de mayo de 2001 en el lugar de latitud 35°N y longitud 20°E a las 10 horas 36 minutos 30,4 segundos de tiempo universal.

5.6 Acimuts máximos en el orto y ocaso del Sol

El acimut de la puesta y salida del centro del Sol varía tanto en función de la latitud de observación como de la época del año. Pretendemos averiguar los acimuts extremos de los ortos y ocasos en un determinado lugar geográfico.

El acimut en el orto y el ocaso se determina por la ecuación (18.5), en donde h es la altura geométrica del centro del Sol, que no coincide con su altura aparente que es nula, mientras que la geométrica es

$$h = -50' = -0^{\circ},833\,333$$

como ya hemos establecido.

La declinación del Sol en los equinoccios es nula, por tanto de (17.5) el correspondiente ángulo horario de la puesta del Sol es

$$\cos H_0 = \frac{\sin h}{\cos \varphi} = \frac{\sin(-0^\circ.833\ 333)}{\cos \varphi}. \quad (5.6)$$

que tiene dos soluciones, una positiva que corresponde al ángulo horario del ocaso y la otra negativa que corresponde al orto.

De (18.5) se calcula el acimut en los equinoccios

$$\sin A = \frac{\sin H_0}{\cos(-0^\circ.833\ 333)}, \quad (6.6)$$

los anteriores cálculos son ciertos si el equinoccio ocurre exactamente en el momento del orto o del ocaso, si no fuera así y el equinoccio viniera en otro momento del día, ya no sería nula la declinación en el instante de la salida y puesta del Sol. Hay que indicar que la declinación tiene una variación aproximada de unos 15 minutos de arco por día, lo que hace cambiar significativamente el acimut.

Ejemplo 4.6.- Determinar los acimuts del orto y el ocaso en los equinoccios en un lugar de latitud 35° norte.

- En los equinoccios la declinación es nula, entonces se utiliza (5.6)

$$\cos H_0 = \frac{\sin(-0^\circ.833\ 333)}{\cos 35^\circ} = -0,017\ 755$$

y se calculan los ángulos horarios del Sol en su ocaso y en su orto

$$H_0(\text{ocaso}) = 91^\circ\ 1'\ 2''; \quad H_0(\text{orto}) = 268^\circ\ 58'\ 58'' = -91^\circ\ 1'\ 2'',$$

que son medidos por el ecuador desde el meridiano del lugar en el sentido retrógrado.

- Por (6.6) se calculan los acimuts correspondientes

$$A(\text{orto}) = 180 - \arcsin \frac{\sin(91^\circ\ 1'\ 2'')}{\cos(-0.833\ 333)} = 90^\circ\ 35'\ 0''$$

$$A(\text{ocaso}) = 180 - \arcsin \frac{\sin(-91^\circ\ 1'\ 2'')}{\cos(-0.833\ 333)} = 269^\circ\ 25'\ 0'',$$

donde hemos tenido en cuenta el criterio establecido al pie de la página 81.

Los acimuts extremos en el orto y el ocaso del Sol tienen lugar en los solsticios, cuando la declinación del Sol coincide con la oblicuidad de la eclíptica. En efecto, en el solsticio de verano la longitud aparente del Sol es 90° y -90° en el solsticio de invierno, entonces por (13.5) se encuentra que en esos momentos $\delta = \pm \varepsilon$, que corresponde al mayor y menor valor de la declinación.

Las fórmulas (17.5) y (18.5) son las que hay que utilizar

$$\cos H_0 = \frac{\sin(-0^\circ,833\ 333) - \sin \varphi \sin(\pm \varepsilon)}{\cos \varphi \cos(\pm \varepsilon)} \quad (7.6)$$

$$\sin A = \frac{\sin H_0 \cos(\pm \varepsilon)}{\cos(-0^\circ, 833\ 333)} \quad (7.6)$$

donde el signo + corresponde al solsticio de verano y – al solsticio de invierno.
Ejemplo 5.6.- Calcular los acimuts del orto y ocaso del Sol en el solsticio de verano en un lugar de latitud 40° norte.

- Para calcular la oblicuidad verdadera de la eclíptica necesitamos conocer la fecha, pero no cometemos mucho error si tomamos para la época actual el valor al comienzo del siglo XXI que por (15.5) es

$$\varepsilon = 23^\circ 25' 35'',$$

por la primera ecuación (7.6) queda

$$H_0(\text{ocaso}) = 112^\circ 35' 52''; \quad H_0(\text{orto}) = 247^\circ 24' 8'' = -112^\circ 35' 52''.$$

Los acimuts se calculan por la segunda ecuación (7.6), donde de nuevo tenemos en cuenta la nota de la página 81

$$A(\text{ocaso}) = 122^\circ 5' 24''; \quad A(\text{orto}) = 237^\circ 54' 36''.$$

Ejemplo 6.6.- Calcular los acimuts del orto y ocaso del Sol en el solsticio de invierno en un lugar de latitud 40° norte.

- Por la primera ecuación (6.6) se encuentra

$$H_0(\text{ocaso}) = 69^\circ 56' 52''; \quad H_0(\text{orto}) = 290^\circ 3' 8'' = -69^\circ 56' 52'',$$

- Por la segunda ecuación (6.6) se determinan los acimuts

$$A(\text{ocaso}) = 59^\circ 32' 47''; \quad A(\text{orto}) = 300^\circ 27' 13'' = -59^\circ 32' 47''.$$

6.6 Inclinación de la trayectoria del Sol en el orto y ocaso

Durante el movimiento diario los astros, incluido el Sol, describen un paralelo celeste. Según se ve en la figura 3.5 el plano del ecuador forma con el horizonte un ángulo de $90 - \varphi$ medidos hacia el sur (hacia el norte en el hemisferio sur), donde φ es la latitud del lugar de observación.

Como los planos de los paralelos celestes son paralelos al ecuador, también formarán un ángulo $90 - \varphi$ con el horizonte. Entonces la inclinación de la trayectoria del Sol en el ocaso o en el orto forma un ángulo de $90 - \varphi$ con el horizonte, medido este ángulo hacia el sur (hacia el norte en el hemisferio sur).

7.6 Solsticios y Equinoccios

El momento del equinoccio de primavera es aquel en que la longitud aparente del Sol (es decir, teniendo en cuenta la nutación y aberración) es 0 grados. Cuando la longitud aparente del Sol alcanza los 90° se estaría en el solsticio de verano, mientras que el equinoccio de otoño y el solsticio de invierno corresponden a las longitudes de 180° y 270° respectivamente.

El método para obtener estos momentos es el de aproximaciones sucesivas, utilizando para ello la teoría simplificada (12.5) o el método de Bretagnon-Simon.

En las tablas 1.6 y 2.6 hemos calculado las fechas de varios equinoccios de primavera y solsticios de verano, según los resultados del método de Bretagnon-Simon, la teoría simplificada y la más completa teoría VSOP87.

Se observa un error de sólo algunos segundos en los resultados basados en las tablas de Bretagnon-Simon y de algunos minutos en los cálculos usando la teoría simplificada dada por (12.5).

8.6 Paso por el pericentro

El Sol medio (que tiene la longitud L_m) pasa por el pericentro medio cuando la anomalía media es un múltiplo entero n de 360° , entonces por (4.5)

$$360n = 357^\circ,529\ 101 + 35\ 999^\circ,050\ 296T - 0^\circ,000\ 1559T^2, \quad (8.6)$$

donde n es el número de pasos por el pericentro contado desde el año 2000, es decir con $n = 1$ se determina el paso del Sol medio por el pericentro medio en el año 2000.

(8.6) es una ecuación de segundo grado, de donde se resuelve T , siglos julianos contados a partir de JT2000.0. De (10.2) se calcula el día juliano

Fecha del equinoccio de primavera			
Año	Bretagnon-Simon	Simplificada	VSOP87
1850	20 de marzo 23 ^h 01 ^m 38 ^s	20 de marzo 22 ^h 56 ^m	20 de marzo 23 ^h 02 ^m 02 ^s
1900	21 de marzo 01 ^h 38 ^m 58 ^s	21 de marzo 01 ^h 40 ^m	21 de marzo 01 ^h 39 ^m 05 ^s
1950	21 de marzo 04 ^h 35 ^m 15 ^s	21 de marzo 04 ^h 35 ^m	21 de marzo 04 ^h 35 ^m 39 ^s
2000	20 de marzo 07 ^h 36 ^m 11 ^s	20 de marzo 07 ^h 32 ^m	20 de marzo 07 ^h 36 ^m 19 ^s
2050	20 de marzo 10 ^h 20 ^m 55 ^s	20 de marzo 10 ^h 13 ^m	20 de marzo 10 ^h 20 ^m 51 ^s
2100	20 de marzo 23 ^h 1 ^m 38 ^s	20 de marzo 23 ^h 4 ^m	20 de marzo 23 ^h 1 ^m 38 ^s

Tabla 1.6.- Fecha del equinoccio de primavera en varios años. En la segunda columna está el resultado obtenido usando las tablas de Bretagnon-Simon, la siguiente columna da los resultados de la teoría simplificada (12.5) y en la última columna las fechas están obtenidas de la teoría VSOP87.

Fecha del solsticio de verano			
Año	Bretagnon-Simon	Simplificada	VSOP87
1850	21 de junio 19 ^h 58 ^m 33 ^s	20 de marzo 19 ^h 50 ^m	21 de junio 19 ^h 58 ^m 53 ^s
1900	21 de junio 21 ^h 39 ^m 51 ^s	21 de marzo 21 ^h 39 ^m	21 de junio 21 ^h 39 ^m 52 ^s
1950	21 de junio 23 ^h 36 ^m 26 ^s	21 de marzo 23 ^h 38 ^m	21 de junio 23 ^h 36 ^m 33 ^s
2000	21 de junio 01 ^h 48 ^m 49 ^s	20 de marzo 01 ^h 46 ^m	21 de junio 01 ^h 48 ^m 46 ^s
2050	21 de junio 03 ^h 34 ^m 34 ^s	20 de marzo 03 ^h 28 ^m	21 de junio 03 ^h 34 ^m 18 ^s
2100	21 de junio 05 ^h 35 ^m 06 ^s	20 de marzo 05 ^h 29 ^m	20 de junio 05 ^h 35 ^m 12 ^s

Tabla 2.6.- Fecha del solsticio de verano en varios años.

correspondiente y por la técnica expuesta en el epígrafe 8.1 se calcula la fecha.

Ejemplo 7.6.- Calcular la fecha en que el Sol medio pasa por el pericentro medio en el año 2050.

- Al año 2050 le corresponde $n = 51$.
- Al resolver (8.6) y por (10.2) se obtiene

$$T = 0,500\ 082\ 4246$$

$$JDT = 2\ 469\ 810,511.$$

- El correspondiente día expresado en tiempo terrestre es el 5 de enero de 2050 a las 0 horas 15 minutos 50 segundos, momento en el que el Sol medio se encuentra en el pericentro medio.

Para calcular el momento en que el Sol verdadero pasa por el pericentro verdadero usamos (25.5) y por un proceso de aproximaciones sucesivas, encontramos el instante en que r (distancia de la Tierra al Sol) es mínimo, ese punto corresponde al pericentro.

Ejemplo 8.6.- Calcular el momento de paso del Sol verdadero por el pericentro verdadero en el año 2050.

- Usando (25.5) y los datos de la tabla 2 se encuentra por aproximaciones sucesivas que el Sol pasa por el pericentro el 5 de enero de 2050 a las 21 horas 3 minutos 42 segundos.

Inicio estación	Fecha más temprana	Fecha más tardía
Equinoccio primavera	19-marzo-2896 12 ^h 21 ^m 34 ^s	21-marzo-2303 18 ^h 05 ^m 46 ^s
Solsticio verano	19-junio-2896 13 ^h 50 ^m 43 ^s	22-junio-2303 06 ^h 47 ^m 52 ^s
Equinoccio otoño	21-septiembre-2896 11 ^h 35 ^m 07 ^s	24-septiembre-2303 01 ^h 00 ^m 14 ^s
Solsticio invierno	20-diciembre-2096 20 ^h 49 ^m 07 ^s	23-diciembre-2703 04 ^h 08 ^m 43 ^s

Tabla 3.6.- Fechas extremas del comienzo de las estaciones hasta el año 3000.

9.6 Fechas extremas de los equinoccios y solsticios

La fecha en que comienza una estación no es fija, a consecuencia del movimiento irregular del Sol y principalmente por la intercalación de los bisiestos, los cuales no se suceden con un patrón uniforme.

Las fechas extremas en que comienzan las estaciones desde la fecha hasta el año 3000 son dadas por la tabla 3.6, donde el tiempo está expresado en unidades de TT .

Es interesante observar que las estaciones acontecen antes en el calendario en el año 96 del siglo centenario donde no se quita el bisiesto (es decir, en los años 1696, 2096, 2496, 2896, etc.) Mientras que las estaciones vienen más tarde en el calendario al tercer año del siglo que es inmediatamente anterior a un siglo donde no se quita el bisiesto (es decir, los años 1903, 2303, 2703, etc.)

En la tabla 3.6 el tiempo es TT . Si nos referimos al tiempo oficial, encontramos que a las fechas más tardías hay que sumarle 12 horas, que nos daría la hora oficial en el lugar más alejado del primer meridiano, es decir en el antimeridiano. Para las fechas más tempranas habría que restarle 12 horas para obtener la hora oficial en el punto más al este del primer meridiano.

Entonces si nos atenemos a las horas oficiales de los comienzos de las estaciones más extremas, encontramos que los días en que se pueden dar estos inicios estacionales son los que recoge la tabla 5.6.

10.6 Meridiano del calendario gregoriano

Cuando un calendario se aplica a nivel mundial es necesario ligarlo a un meridiano de cambio de fechas. En efecto, siempre debe de existir un meridiano que tenga la propiedad de ser el primero en que empieza con el día 1 del año nuevo. En el caso de un calendario computacional, como es el gregoriano, el meridiano de cambio de fechas es arbitrario, ya que este

Equinoccio de primavera	19, 20, 21, 22* de marzo
Solsticio de verano	19, 29, 21, 22 de junio
Equinoccio de otoño	20*, 21, 22, 23, 24 de septiembre
Solsticio de invierno	20, 21, 22, 23 de diciembre

Tabla 5.6.- Días en que pueden comenzar las estaciones hasta el año 3000. El asterisco nos dice que esa fecha sólo puede darse en algunos lugares de la Tierra.

calendario no es más que una cuenta de días, sin ninguna relación a fenómenos astronómicos. Pero cuando se trata de un calendario astronómico o bien observacional, debe de existir otro meridiano singular: aquel respecto al cual se hace el cálculo o la observación astronómica.

Puede ser que este meridiano de referencia y el de cambio de fechas sean distintos. Esto es, por ejemplo, lo que ocurre con el calendario astronómico iraní, que toma como meridiano de cambio de fechas el antimeridiano de Greenwich y como meridiano de referencia para establecer cuándo comienza el nuevo año, el que pasa por Teherán. Así el día de año nuevo es el día civil en que el equinoccio de primavera viene a mediodía o posterior según la hora local de Teherán.

Puede ocurrir que los dos meridianos asociados a un calendario astronómico sean idénticos y además variables de año en año. Esto ocurriría si, por ejemplo, se eligiese como día de inicio del año en una determinada posición geográfica, aquel en que el Sol estuviese en el equinoccio de primavera a las 0 horas o posterior según tiempo local. En este caso el meridiano de cambio de fechas sería aquel en que fuera las 0 horas local cuando se produce el equinoccio de primavera. Aproximadamente, cada año este meridiano se desplaza 90 grados al oeste. En este caso también se daría la circunstancia de que la duración de los años sería variable, de tal forma que aproximadamente en la cuarta parte de la Tierra tendría una duración de 366 días y 365 días en el resto. En este tipo de calendarios el día bisiesto sería impuesto por el cálculo astronómico, aunque siempre debería de estar colocado en el último día del año.

En el caso del calendario gregoriano se puede hablar, en cierta manera, de un meridiano asociado. Esto es así por la relación que tiene el calendario gregoriano con la fecha de la Pascua de Resurrección. Esta fiesta debe celebrarse después del equinoccio de primavera, que según criterio eclesiástico siempre cae en el 21 de marzo. La elección de una fecha concreta para un acontecimiento astronómico nos permite hablar del meridiano gregoriano.

En efecto, podríamos suponer que el calendario gregoriano está diseñado para ser exacto en aquellas zonas de la Tierra donde la primavera caiga en

promedio el día 21 de marzo. Por ejemplo, a comienzo del siglo XXI la primavera viene en promedio el día 20,82 de marzo (donde tomamos la hora del cambio de día las 18 horas como es la práctica eclesiástica).

Entonces el meridiano del calendario se encontraría a $64^{\circ} 48' E$, pues según la hora oficial de ese meridiano, el equinoccio de primavera sería en promedio el día 21 de marzo. Todos los lugares situados al este del indicado meridiano (hasta el antimeridiano) también tendrían la misma propiedad y en promedio la fecha del equinoccio coincidiría con la establecida en el criterio eclesiástico, o sea el 21 de marzo. Naturalmente, este meridiano extremo se está moviendo, ya que la primavera acontece cada vez más pronto.

Esta suposición es poco consistente, habida cuenta, entre otras cosas, que el criterio eclesiástico de la fecha de inicio de la primavera no está explícitamente definida respecto a ningún meridiano, no obstante nosotros hemos supuesto que el meridiano de referencia es el primer meridiano, concepto que no se había definido al comienzo del siglo XVI cuando se hizo la reforma del calendario.

11.6 Depresión del horizonte

Los cálculos para la determinación de la altura de un astro del epígrafe 7.5 fueron hechos suponiendo que la observación se hacía desde su superficie. Ahora vamos a modificar los anteriores resultados al considerar que el observador se encuentra a una cierta altura f sobre la superficie de la Tierra, que suponemos una esfera de radio R .

La situación viene representada en la figura 1.6. En O se encuentra el observador. ON es el horizonte aparente y OM es el horizonte visible o del observador. Al ángulo $d = MOA$ se le llama depresión del horizonte.

Aplicando el teorema del seno al triángulo rectángulo OAC

$$\sin(90 - d) = \cos d = \frac{R}{R + f} = \frac{1}{1 + f/R}$$

como el ángulo d es pequeño

$$\cos d \approx 1 - \frac{1}{2}d^2$$

entonces

$$d = \sqrt{\frac{2f/R}{1 + f/R}} \approx \sqrt{\frac{2f}{R}} \quad (9.6)$$

donde hemos despreciado los términos de segundo orden de f/R y d viene medido en radianes. Por ejemplo, para un observador a 200 metros sobre la superficie de la Tierra, su depresión del horizonte es de 27 minutos de arco.

Cuando se quiere determinar el orto y ocaso aparente de los astros es necesario tener en cuenta la depresión del horizonte, de tal forma que la altura geométrica del Sol que se consideró en el epígrafe 3.6 es necesario corregirla

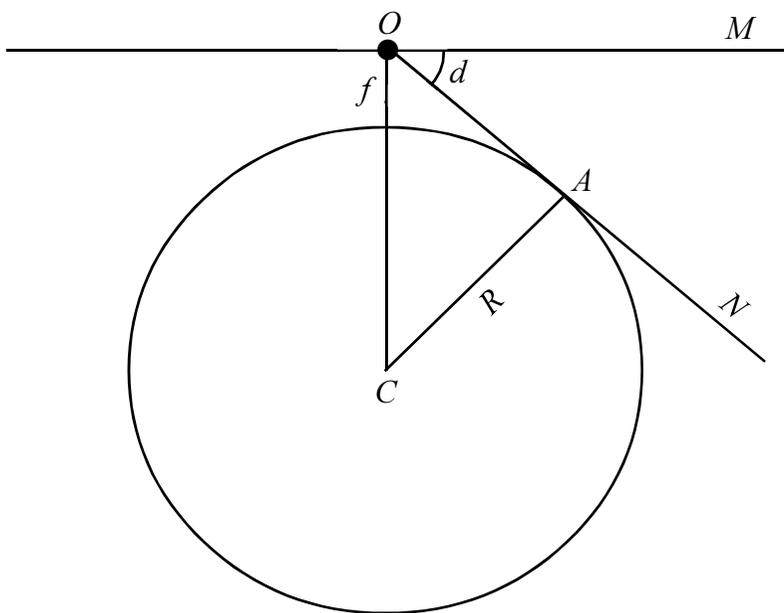


Figura 1.6.- Se representa la Tierra con centro en C , el horizonte aparente OM y el horizonte visible ON . El ángulo d se llama depresión del horizonte.

$$h = -50' - d$$

d está ahora expresado en minutos de arco. Con este dato se sigue el mismo procedimiento de las páginas anteriores referentes al orto y ocaso del Sol.

Periodos solares

1.7 Año trópico

Se le llama año trópico al tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud media geométrica del Sol L_m respecto al equinoccio medio de la fecha aumente en 360 grados.

Supongamos que la longitud geométrica media del Sol respecto al equinoccio medio de la fecha venga dada por la expresión

$$L_m(T) = A + BT + CT^2 + DT^3$$

donde hemos retenido hasta el término de tercer orden y A, B, C, D son parámetros numéricos. El tiempo que tiene que transcurrir a partir del momento T para que la longitud aumente en 360 grados es el año trópico a_T

$$L_m(T) + 360 = A + B(T + a_T) + C(T + a_T)^2 + D(T + a_T)^3$$

donde a_T viene medido en siglos julianos de tiempo terrestre. Combinando las dos últimas ecuaciones se obtiene una ecuación algebraica, que nos permite determinar la duración del año trópico que comienza en el instante dado por T .

Para eludir el engorro de resolver la anterior ecuación de tercer grado, se puede abordar el problema de otra forma. Como la aceleración del Sol medio varía muy lentamente, podemos suponer, sin error apreciable, que el movimiento medio es el mismo durante el periodo de un año y por tanto, supondremos que durante ese tiempo el Sol promedio lleva un movimiento uniforme. El movimiento medio del Sol es

$$n = \frac{3\,600}{36\,525} \frac{dL_m}{dt} = \frac{3\,600}{36\,525} (B + 2CT + 3DT^2) = a + bT + cT^2$$

que lo hemos expresado en segundos de arco por día de 24 horas de tiempo terrestre, siempre y cuando la longitud venga expresada en grados. El año trópico será el tiempo que tarda el Sol promedio en recorrer una circunferencia completa con el anterior movimiento medio, o sea

$$a_T = \frac{1\,296\,000}{n} = \frac{1\,269\,000}{a + bT + cT^2} \approx \frac{1\,296\,000}{a} \left[1 - \frac{b}{a}T + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{c}{a} \right) T^2 \right] \quad (1.7)$$

que viene dado en días de tiempo terrestre.

Si se utiliza la longitud como viene dada en la teoría VSOP82, obtenemos un movimiento medio dado por

$$n = 3\,548'',330\,495\,91 + 5'',986\,2604 \cdot 10^{-5}T + 6'',269 \cdot 10^{-9}T^2 \quad (2.7)$$

expresado en segundos de arco por día, entonces el año trópico calculado por (1.7) es

$$a_T = 365^d,242\,189\,67 - 0^d,000\,006\,1619T - 6^d,4519 \cdot 10^{-10}T^2 \quad (3.7)$$

lo que significa que cada siglo el año trópico disminuye en 0,53 segundos. Insistimos de nuevo que los días en que está medido el año trópico están formados por 24 horas de tiempo terrestre.

A partir de la teoría NGT (Nueva Teoría General) de Laskar se obtiene una duración del año trópico dada por

$$a_T = 365^d,242\,189\,67 - 0^d,000\,006\,1536T - 7^d,285 \cdot 10^{-10}T^2$$

que para efectos prácticos coincide plenamente con la obtenida mediante la teoría VSOP82.

Debemos tener presente que las dos últimas expresiones del año trópico no hay que entenderlas como una función continua con respecto a la variable T . Las anteriores expresiones nos dan la duración del año trópico que comienza en la fecha dada por T . El año trópico sólo volverá a cambiar cuando se inicie el nuevo año trópico. Las ecuaciones anteriores son, por tanto, funciones «escalonadas» de la variable T , ya que elegido un valor de esa variable, los restantes valores se tienen que espaciar entre sí en un año trópico. Hay también que anotar que la variación que sufre el año trópico de año en año, es causada por los términos mayores que el de primer orden en la longitud media del Sol.

Para precisar aún más, vamos a definir el año trópico cronológico, que lo entenderemos como el año trópico que comienza con el año civil. Llamaremos año trópico instantáneo al año trópico que tiene su comienzo en cualquier otro momento del año.

2.7 Año sidéreo y anomalístico

El año sidéreo es el tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud geométrica media del Sol aumente en 360 grados respecto a un equinoccio fijo. Si con p representamos el movimiento medio anual del equinoccio a consecuencia de la precesión o precesión general (que tiene sentido contrario al movimiento propio del Sol), entonces el año sidéreo será igual al año trópico más el tiempo que el Sol medio tarda en recorrer el arco p , suponiendo que la velocidad del Sol permanece constante e igual a n

En el epígrafe 2.3 se encontró que

$$p = 50'',290\,966 + 0'',022\,2226T,$$

ángulo recorrido por año, por tanto el año sidéreo es

$$a_S = a_T + \frac{p}{n}$$

p son los segundos de arco que el equinoccio recorre en un año, y n son los segundos de arco que recorre el Sol en un día, por tanto de (1.7), (2.7) y (3.7) se encuentra

$$a_s = 365^d, 256\ 362\ 805 + 1^d, 006\ 935 \cdot 10^{-7} T, \quad (4.7)$$

en la que solamente hemos retenido la primera potencia del tiempo. El año sidéreo es mayor que el trópico (algo más de veinte minutos) y prácticamente constante en el tiempo (un aumento de algunas milésimas de segundos cada siglo).

Se define el año anomalístico como el tiempo que tarda el Sol promedio en aumentar 360 grados respecto al perigeo medio. El movimiento medio del Sol respecto al perigeo se obtiene a partir de la anomalía media (4.5)

$$n_a = \frac{3\ 600}{365\ 25} \frac{dM}{dT} = 3\ 548'', 161\ 0148 - 3'', 073\ 183 \cdot 10^{-5} T$$

expresado en segundos de arco por día. Si durante el periodo de un año suponemos constante este movimiento medio, el año anomalístico será el tiempo que tarda el Sol en recorrer una circunferencia completa con la velocidad n_a

$$a_a = \frac{1\ 296\ 000}{n_a} = 365^d, 259\ 635\ 793 + 3^d, 163\ 64 \cdot 10^{-6} T \quad (5.7)$$

expresado en días de 24 horas de la escala TT .

3.7 Años estacionales

Entendemos el año estacional como el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol verdadero por un mismo punto estacional. Para ser más precisos, llamaremos a la anterior definición año estacional verdadero; que puede ser de cuatro clases según se elija como referencia el equinoccio de primavera, el solsticio de verano, el equinoccio de otoño o el solsticio de invierno, que para abreviar llamaremos años verdaderos de primavera, verano, otoño e invierno. La duración de estos años es variable, ya que además de los términos seculares hay que considerar los términos periódicos del movimiento solar. Por ejemplo, en el periodo comprendido entre el año 2000 y el 3000, las máximas diferencias entre dos años estacionales del mismo tipo es de 28 minutos, cantidad que es debido casi exclusivamente a las oscilaciones de carácter periódico.

Llamamos año estacional promedio, o simplemente año estacional, al tiempo que tarda el Sol promedio, corregido por la ecuación del centro, en dos pasos consecutivos por un mismo punto estacional y suponiendo que los parámetros orbitales tienen una variación secular, es decir que la longitud del Sol viene dada por la ecuación (12.5) sin el término de la corrección al geocentro. Si con T representamos el momento en que acontece el equinoccio de primavera, tendremos

$$L(T) = 0$$

entonces el año de primavera a_p vendrá dado por la ecuación

$$L(T + a_p) = 360^\circ.$$

Ecuaciones similares se aplican para los demás años estacionales, con tal de poner en la longitud solar en el momento T el valor 90 grados (para el año de verano), 180 (para el año de otoño) y 270 (para el año de invierno). La duración de los años estacionales varía con el paso del tiempo, también es diferente la duración de cada uno de los cuatro años estacionales. Por este procedimiento se obtiene que para el periodo comprendido entre los años -3000 y 10000 la duración del año de primavera viene dado por el siguiente polinomio

$$a_p = 365^d,242\ 374\ 08 + 1^d,037 \cdot 10^{-5} T - 1^d,344 \cdot 10^{-7} T^2 - 2^d,373 \cdot 10^{-9} T^3 + 1^d,732 \cdot 10^{-11} T^3.$$

En la tabla 1.7 aparecen las diferencias entre cada uno de los años estacionales y el año trópico de la fecha. A veces el año trópico es de mayor duración y otras veces ocurre lo contrario. Lo notable es que la suma de las diferencias para los cuatro años estacionales es aproximadamente cero (última columna). Lo que nos viene a decir que, con muy buena aproximación, el año trópico es la media aritmética de la duración de los cuatro años estacionales.

Este resultado se ve de forma más general en la figura 1.7. En el eje horizontal se encuentran representados los años de nuestra era y en el eje vertical los segundos que excede cada uno de los años al año trópico del año 2000. La línea recta descendente es la duración del año trópico, que como ya hemos visto disminuye con el tiempo de forma muy cercana a la lineal.

Años	Segundos de diferencia entre el año estacional y el año trópico de la fecha				Suma de diferencias
	Año de primavera	Año de verano	Año de otoño	Año de invierno	
-1000	-29,8	-44,0	30,2	43,6	0 ^s ,0
0	-14,9	-50,5	16,0	49,5	0 ^s ,1
1000	0,9	-52,1	0,4	50,8	-0 ^s ,1
2000	15,9	-48,7	-14,9	47,6	-0 ^s ,1
3000	28,9	-40,6	-28,4	40,1	0 ^s ,0

Tabla 1.7.- Excesos en segundos de la duración de los años estacionales respecto al año trópico de la fecha. En la última columna se encuentra la suma de las diferencias para cada año expresada en segundos.

Las otras cuatro curvas representan los cuatro años estacionales medios. Se observa que estos años van variando con el tiempo; el año de verano se encuentra en oposición al de invierno y el de primavera al de otoño. Se comprueba que la variación periódica está en torno al año trópico, que resulta ser muy aproximadamente, el promedio de los cuatro años estacionales. Nótese que las diferencias máximas entre cada uno de los años estacionales y el año trópico, van disminuyendo con el tiempo, lo mismo que le ocurre a sus periodos de variación.

4.7 Explicación de la variabilidad de los años estacionales

Para explicar la variación de los años estacionales, vamos a fijarnos en el figura 2.7. La elipse es la trayectoria seguida por el movimiento aparente del Sol. La línea de las ápsides (que es la línea horizontal) está girando, de tal forma que el perigeo se va acercando al equinoccio de primavera γ .

Pero en vez de representar el movimiento del perigeo respecto al equinoccio, vamos a hacerlo al revés, vamos a suponer fija la línea de las ápsides y suponer que es el equinoccio de primavera el que se acerca al perigeo. De tal forma que 1 representa la posición inicial del equinoccio respecto al perigeo y 1' es la posición del equinoccio al cabo de un año. Lo mismo se puede decir para los otros puntos estacionales, que vienen representados por los números 2, 3 y 4. Los ángulos girados por cada uno de los puntos estacionales en un año son iguales entre sí, es decir

$$11' = 22' = 33' = 44'$$

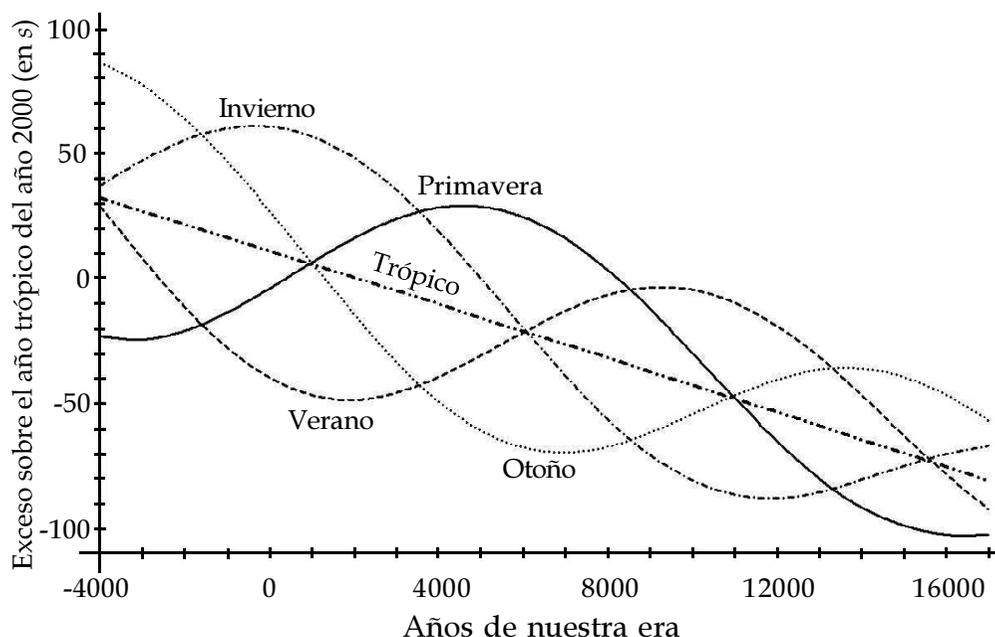


Figura 1.7.- Se representa la variación con el tiempo de los cuatro años estacionales y del año trópico. La escala vertical son segundos de exceso de estos años con respecto al año trópico del año 2000.

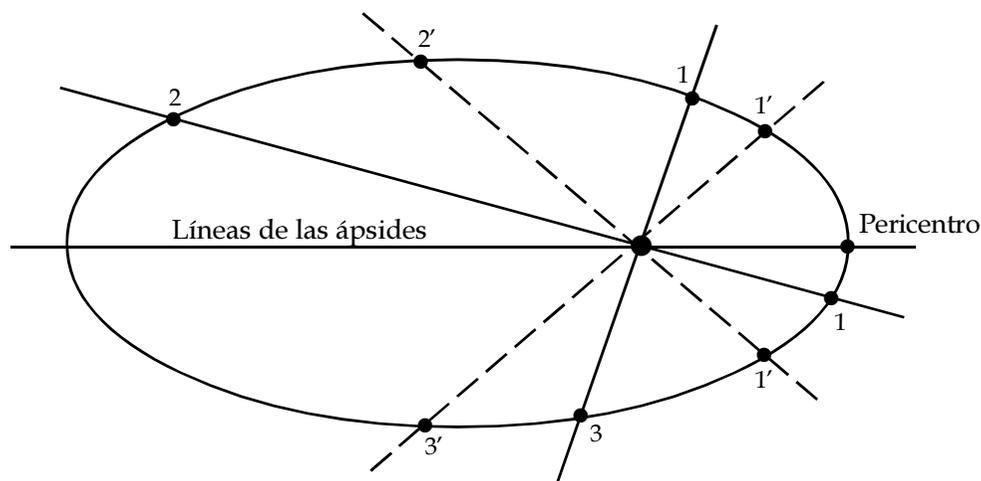


Figura 2.7.- Movilidad de los puntos estacionales con respecto al pericentro.

sin embargo, el tiempo que tarda el Sol en recorrer cada uno de esos ángulos no es el mismo, ya que se encuentran en diferentes puntos de la órbita; de aquí se comprueba que los años estacionales tienen en general duraciones diferentes. Por ejemplo, la velocidad angular del Sol en la cercanía del equinoccio de primavera se calcula de (5.5), siendo en primera aproximación

$$n_p \approx \left(\frac{dL}{dT} \right)_p = \frac{dL_m}{dT} + 2e \left(\frac{dM}{dT} \right)_p \cos M_p \approx n(1 + 2e \cos M_p)$$

considerando solamente el primer término de la ecuación del centro. n es el movimiento medio y M_p es la anomalía media del Sol en el equinoccio de primavera. Fórmulas similares se pueden encontrar para las otras tres situaciones. Estas velocidades angulares serán diferentes, por ser diferentes los valores de la anomalía media del Sol en cada uno de los cuatro puntos estacionales.

El año de primavera se puede expresar aproximadamente como

$$a_p = a_a - \frac{\alpha}{n_p} \quad (6.7)$$

siendo a_a el año anomalístico o tiempo que tarda el Sol de partir de 1 y volver al mismo punto, o sea en recorrer 360 grados respecto al pericentro, y α es el ángulo que recorre el perigeo en un año, es decir el ángulo comprendido entre 1 y 1'

$$\alpha \approx \frac{d\bar{\omega}_m}{dT} a_T \quad (7.7)$$

expresado el año trópico en siglos julianos. A partir de (6.7) se llega a

$$a_p \approx a_a - \frac{\alpha}{n} (1 - 2e \cos M_p) = \left(a_a - \frac{\alpha}{n} \right) + \frac{2\alpha e}{n} \cos M_p \quad (8.7)$$

ahora bien, por definición de año anomalístico

$$a_a = \frac{2\pi}{n_a} = \frac{2\pi}{dM/dT} = \frac{2\pi}{dL_m/dT - d\bar{\omega}_m/dT} = \frac{2\pi}{n \left(1 - \frac{1}{n} \frac{d\bar{\omega}_m}{dT}\right)},$$

suponemos que los movimientos medios tienen las unidades de radianes por siglo. Como el movimiento del pericentro es mucho más pequeño que el movimiento medio del Sol, la anterior expresión se transforma en

$$a_a \approx \frac{2\pi}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \frac{d\bar{\omega}_m}{dT}\right) = a_T + \frac{\alpha}{n},$$

por tanto (8.7) queda

$$a_p = a_T + \frac{2\alpha e}{n} \cos M_p$$

y fórmulas equivalentes para los otros tres años estacionales. En la anterior expresión se comprueba que en la actualidad la máxima diferencia entre el año trópico y un año estacional ocurre cuando el referido punto estacional se encuentra en el perigeo o en el apogeo (M_p valdría 0 o 180). El máximo valor que puede tomar el último sumando de (8.7) es

$$86400 \frac{2\alpha e}{n} \approx 50^s,$$

entonces la máxima diferencia que puede haber en la época actual entre dos años estacionales «opuestos» (primavera-otoño o verano-invierno) es aproximadamente el doble de la anterior cantidad, como efectivamente se aprecia en la figura 1.7.

5.7 Duración variable de las estaciones

Desde la antigüedad se sabe que son diferentes las duraciones de cada una de las cuatro estaciones. Lo que aquí nos interesa es conocer cómo varía la duración de cada una de las estaciones con el tiempo, un resultado que está relacionado con la variación de la duración de los años estacionales. En una primera aproximación podemos simplificar la ecuación (12.5)

$$L_m = L - 2e \sin(L_m - \bar{\omega}_m) - \frac{5}{4} e^2 \sin[2(L_m - \bar{\omega}_m)], \quad (9.7)$$

como L es muy cercano a L_m podemos poner aproximadamente

$$L_m = L - 2e \sin(L - \bar{\omega}_m) - \frac{5}{4} e^2 \sin[2(L - \bar{\omega}_m)],$$

la longitud L es nula en el equinoccio de primavera, por tanto la longitud media cuando el Sol está en el equinoccio de primavera es aproximadamente

$$L_m^p = 2e \sin \bar{\omega}_m + \frac{5}{4} e^2 \sin 2\bar{\omega}_m$$

encontrándose fórmulas parecidas para los otros puntos estacionales

$$\begin{aligned}
 L_m^V &= \frac{\pi}{2} - 2e \cos \bar{\omega}_m - \frac{5}{4}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \\
 L_m^O &= \pi - 2e \sin \bar{\omega}_m + \frac{5}{4}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \\
 L_m^I &= \frac{3\pi}{4} + 2e \cos \bar{\omega}_m - \frac{5}{4}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m.
 \end{aligned}$$

Despreciando la lenta variación secular del movimiento medio del Sol podemos suponer aproximadamente que el movimiento del Sol es uniforme, entonces la longitud del Sol en un intervalo de tiempo aumentará la cantidad

$$L_m^2 - L_m^1 = n(t_2 - t_1).$$

Aplicamos la anterior expresión para determinar el intervalo de tiempo entre el equinoccio de primavera y el solsticio de verano; es decir, la duración en promedio de la primavera

$$I_p = \frac{1}{n}(L_m^V - L_m^P) = \frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} - 2e(\sin \bar{\omega}_m + \cos \bar{\omega}_m) - \frac{5}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \right] \quad (10.7)$$

y fórmulas similares para las duraciones promedios de las demás estaciones

$$\begin{aligned}
 I_V &= \frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} - 2e(\sin \bar{\omega}_m - \cos \bar{\omega}_m) + \frac{5}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \right] \\
 I_O &= \frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} + 2e(\sin \bar{\omega}_m + \cos \bar{\omega}_m) - \frac{5}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \right] \\
 I_I &= \frac{1}{n} \left[\frac{\pi}{2} + 2e(\sin \bar{\omega}_m - \cos \bar{\omega}_m) + \frac{5}{2}e^2 \sin 2\bar{\omega}_m \right].
 \end{aligned} \quad (10.7)$$

Nótese que las duraciones de las estaciones cambian con el tiempo, principalmente por la variación de la longitud del pericentro y en menor medida por la variación de la excentricidad. Para hacer las tablas 2.7 y 3.7 hemos tomado para la inversa del movimiento medio del Sol

$$\frac{1}{n} = \frac{365,242\,189\,67 - 6,1619 \cdot 10^{-6} T}{2\pi} \approx 58,130\,01 - 9,81 \cdot 10^{-7} T$$

medido en días por radianes.

Con nuestra teoría simplificada hemos preparado la tabla 2.7 que da la duración promedio en días de las estaciones en diversas épocas, donde se espera un error de alguna décima de día, dada las simplificaciones que hemos efectuado.

De las fórmulas (10.7) se obtiene

$$I_p + I_V + I_O + I_I = \frac{2\pi}{n} = a_T,$$

también tenemos aproximadamente

$$I_p + I_O \approx I_V + I_I.$$

Nos interesa por último saber en qué momento se alcanzan las máximas y mínimas duraciones de las estaciones. Por ejemplo, para hallar los máximos

Duración promedio aproximada de los estaciones				
Años	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
-4000	93,5	89,2	89,1	93,4
-2000	94,2	90,8	88,3	91,9
0	93,9	92,5	88,6	90,2
2000	92,8	93,6	89,9	89,0
4000	91,2	93,9	91,5	88,7
6000	89,8	93,2	92,8	89,4

Tabla 2.7.- Duración promedio aproximada en días de las estaciones en varias épocas.

y mínimos de la primavera hacemos

$$\frac{dI_p}{d\omega_m} = \frac{1}{n} \left[-2e(\cos \bar{\omega}_m - \sin \bar{\omega}_m) - 5e^2 \cos 2\bar{\omega}_m \right] = 0$$

y fórmulas parecidas para las otras estaciones, todas ellas aproximadas ya que hacen referencia a los valores promedios de las estaciones. El cálculo numérico directo da los resultados de la tabla 3.7 para el periodo comprendido entre los años -4000 y 14000.

En la figura 3.7 se ve más claramente cómo varían las duraciones de las estaciones. La línea horizontal es la duración de la estación promedio, que es igual a la cuarta parte del año trópico, que a la escala de la gráfica no se percibe su variación con el tiempo. Nótese que la primavera, en cuanto a su duración, se contrapone al otoño, mientras que el verano es opuesto al invierno. Véase por último que la suma de la duración de la primavera y el otoño es prácticamente igual a la suma del invierno y el verano.

	Primavera	Verano	Otoño	Invierno
Año del máximo	-1591	3549	8523	13311
Duración del máximo	94 ^d ,34	93 ^d ,96	93 ^d ,54	93 ^d ,01
Año del mínimo	8523	13290	-1637	3526
Duración del mínimo	89 ^d ,14	89 ^d ,65	88 ^d ,37	88 ^d ,72

Tabla 3.7.- Duraciones extremas de las estaciones en el periodo comprendido entre el año -4000 y el 14000.

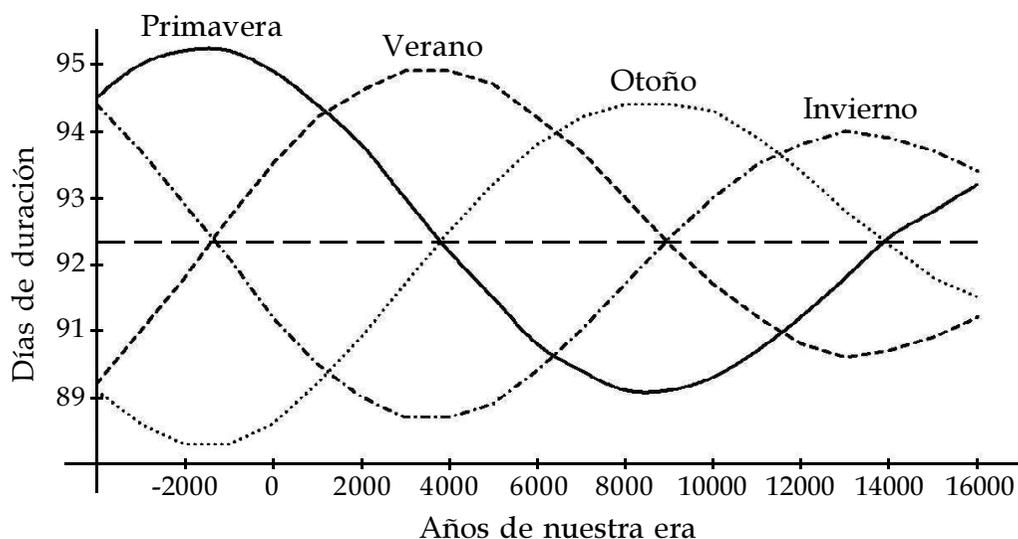


Figura 3.7.- Variación de la duración de las estaciones. La línea horizontal es el año trópico o duración promedio de los cuatro años estacionales.

Digamos por último que la duración de las estaciones depende del punto donde se encuentre su comienzo en relación con el pericentro. Por ejemplo, cuando el equinoccio de primavera se encuentra a 45 grados del perigeo (es decir, la longitud del perigeo es 45 grados), la duración del año de primavera es mínima, ya que el Sol se mueve en la zona del perigeo con mayor velocidad. Al contrario, cuando el Sol tiene que describir los 90 grados correspondientes a la estación de primavera en torno al apogeo (que corresponde a una longitud del perigeo de 225 grados), el año de primavera tomará el máximo valor posible, ya que por esa zona el movimiento solar es más lento. El mismo razonamiento es extensible a los demás años estacionales.

6.7 Conversión de TT a UT

La escala temporal en que se miden los distintos años que hemos manejado es la del tiempo terrestre. Sin embargo, en los calendarios la unidad básica de tiempo es el día solar medio, compuesto de 24 horas de tiempo universal. En realidad la escala civil del tiempo es el *UTC*, pero como esta escala sólo se aparta 0,9 segundos como máximo del tiempo universal, podemos considerar, sin error apreciable, que el calendario utiliza como unidad básica el *UT*.

Es posible que en un futuro se haga una modificación del tiempo civil. Puede ocurrir que el segundo intercalar sea sustituido por otro intervalo de tiempo más grande, ya sea un minuto o una hora. Pero en cualquier caso, llegará el momento en que será necesario hacer una intercalación, para conseguir que el tiempo civil vaya acompasado con el movimiento medio del Sol. De tal forma que, obviando el futuro sistema de intercalación, vamos a suponer que la escala temporal de los calendarios es el *UT*.

Para expresar el año trópico (o cualquier otro tipo de periodo de tiempo)

en UT aplicamos el razonamiento del epígrafe 8.2, de tal forma que si el año trópico es dado por

$$a_T = a + bT + cT^2$$

y el alargamiento del día es dado por (15.2) entonces el año trópico en unidades de tiempo universal es

$$a_T = (a - au) + (b - bu - aw)T + (c - cu - bw)T^2,$$

donde hemos despreciado el término de tercer orden por ser excesivamente pequeño. Para el año trópico que se deriva de la teoría VSOP82 (3.7) obtenemos la expresión

$$a_T = 365^d,242\,176\,754 - 0^d,000\,013\,338T - 6^d,4502 \cdot 10^{-10}T^2 \quad (11.7)$$

donde T es dado en UT . De (11.7) se deduce que el año trópico disminuye 1,15 segundos cada siglo, en vez de los 0,53 segundos de reducción que experimenta cuando se expresa en tiempo terrestre. Al utilizar esta expresión debe tenerse presente que es aproximada, por serlo la fórmula de Stephenson (14.2). Haciendo un cálculo similar, por ejemplo, para la expresión que nos da el año del equinoccio de primavera se obtiene

$$a_p = 365^d,242\,3611 + 3^d,19 \cdot 10^{-6}T - 1^d,344 \cdot 10^{-7}T^2$$

válida para el periodo comprendido entre los años -3000 y 10000.

Tercera parte

Movimiento de la Luna

Perturbaciones: ecuaciones de Gauss

1.8 Introducción

En el capítulo 4 se ha tratado el problema del movimiento de dos cuerpos que se encuentran interactuando por la gravedad y hemos comprobado que para astros ligados gravitacionalmente, es decir cuya energía mecánica total es negativa, el movimiento relativo entre ambos astros es una elipse.

Ahora vamos a considerar la presencia de un tercer astro, que ya sea por encontrarse a mucha distancia o tener poca masa, ejerce una fuerza gravitatoria pequeña sobre los dos astros que orbitan entre sí. Podemos entender esta fuerza como una perturbación que modifica los elementos orbitales que caracterizan la órbita elíptica.

Antes de adentrarnos en el estudio del movimiento lunar, vamos a desarrollar en este capítulo la teoría de las perturbaciones, teniendo en mente que la Luna orbita respecto a la Tierra y el Sol es el cuerpo que perturba este movimiento.

2.8 Aceleración perturbativa

En la figura 1.8 T representa la Tierra que suponemos es el centro del sistema de coordenadas. L es la Luna de coordenadas cartesianas (x'_i) y S es el Sol con coordenadas (x_i) . Los vectores de posición de la Luna y el Sol

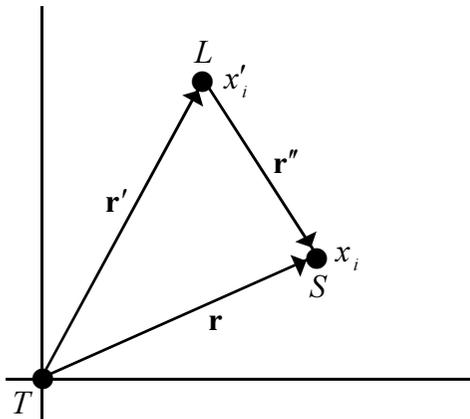


Figura 1.8.- Posiciones de la Tierra (T), Luna (L) y Sol (S) y los vectores de posición entre ellos.

respecto a la Tierra son \mathbf{r}' y \mathbf{r} y el vector de posición del Sol respecto a la Luna es \mathbf{r}'' son

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'' &= (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}.\end{aligned}$$

La aceleración de la Luna respecto a la Tierra en ausencia de perturbaciones es dada por (6.4)

$$-G \frac{m + m'}{r'^3} \mathbf{r}', \quad (1.8)$$

donde m es la masa de la Tierra y m' la masa de la Luna. Advertimos que como regla general las magnitudes referentes a la Luna irán identificadas con una prima.

La perturbación del Sol respecto a la Luna se produce de dos formas. Una de ellas es la acción directa del Sol sobre la Luna, que la aparta de su movimiento kepleriano en torno a la Tierra y la otra es la acción derivada de la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra. En efecto, si por la acción del Sol la Tierra se desplaza una distancia δ , es como si la Luna se desplazara una distancia $-\delta$ respecto a la Tierra, por esta razón de forma indirecta el movimiento de la Luna respecto a la Tierra es perturbado por la fuerza que el Sol ejerce sobre la Tierra. Por tanto la aceleración perturbativa del Sol sobre la Luna es

$$\mathbf{a}_p = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

\mathbf{a}_1 es la aceleración de la Tierra por la fuerza ejercida por el Sol y \mathbf{a}_2 la fuerza que el Sol ejerce sobre la Luna. Por la definición de los vectores de posición como aparecen en la figura 1.8 tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= Gm_S \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ \mathbf{a}_2 &= Gm_S \frac{\mathbf{r}''}{r''^3}\end{aligned}$$

siendo m_S la masa del Sol; por tanto la aceleración perturbativa sobre la Luna es

$$\mathbf{a}_p = Gm_S \left(\frac{\mathbf{r}''}{r''^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (2.8)$$

La aceleración total que sufre la Luna es la suma de (1.8) y (2.8)

$$\mathbf{a}' = \ddot{\mathbf{r}}' = -G \frac{m + m'}{r'^3} \mathbf{r}' + Gm_S \left(\frac{\mathbf{r}''}{r''^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right),$$

que se divide en sus tres componentes

$$\ddot{x}' = -G \frac{m + m'}{r^3} x + Gm_S \left(\frac{x''}{r''^3} - \frac{x}{r^3} \right) = -G \frac{m + m'}{r^3} x + Gm_S \left(\frac{x - x'}{r''^3} - \frac{x}{r^3} \right)$$

$$\ddot{y}' = -G \frac{m+m'}{r^3} y + Gm_s \left(\frac{y''}{r''^3} - \frac{y}{r^3} \right) = -G \frac{m+m'}{r^3} y + Gm_s \left(\frac{y-y'}{r''^3} - \frac{y}{r^3} \right)$$

$$\ddot{z}' = -G \frac{m+m'}{r^3} z + Gm_s \left(\frac{z''}{r''^3} - \frac{z}{r^3} \right) = -G \frac{m+m'}{r^3} z + Gm_s \left(\frac{z-z'}{r''^3} - \frac{z}{r^3} \right).$$

3.8 Función perturbativa

Definimos la función perturbativa por

$$P = Gm_s \left(\frac{1}{r''} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right), \quad (3.8)$$

entonces la aceleración perturbativa de la Luna es dada por

$$\mathbf{a}_p = \nabla P = \frac{\partial P}{\partial x'} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial y'} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial z'} \mathbf{k}, \quad (4.8)$$

donde x' , y' y z' son las coordenadas de la Luna respecto a la Tierra. Es fácil comprobar la anterior expresión. Calculando el primer sumando de (4.8) se encuentra

$$\frac{\partial P}{\partial x'} = Gm_s \left(-\frac{1}{r''^2} \frac{\partial r''}{\partial x'} - \frac{x}{r^3} \right)$$

y como

$$\frac{\partial r''}{\partial x'} = -\frac{x-x'}{r''} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x'} = Gm_s \left(\frac{x-x'}{r''^3} - \frac{x}{r^3} \right)$$

que coincide con la primera de las componentes de \mathbf{a}_p y lo mismo se hace para las demás componentes del vector aceleración perturbativa.

4.8 Componentes de la velocidad orbital

En ausencia de perturbaciones, el movimiento del sistema Tierra-Luna se ajusta a lo expuesto en el capítulo 4, es decir que con respecto a la Tierra la Luna describiría una elipse que estaría situada en un plano inmóvil. Entonces la velocidad orbital de la Luna está formada por dos componentes: la radial y la perpendicular al radio vector que une la Tierra con la Luna, que vienen dadas por (7.4)

$$v'_r = \frac{dr'}{dt}; \quad v'_p = r' \frac{d\theta'}{dt},$$

representando θ' la anomalía verdadera de la Luna. A continuación vamos a expresar estas velocidades en función de los elementos orbitales de la Luna.

Como el movimiento relativo de la Luna respecto a la Tierra en ausencia de perturbaciones es una elipse, se cumple

$$r' = \frac{a'(1-e'^2)}{1+e' \cos \theta'}$$

entonces

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{a'(1-e'^2)e' \sin \theta'}{(1+e' \cos \theta')^2} \frac{d\theta'}{dt}, \quad (5.8)$$

por (31.4)

$$\frac{d\theta'}{dt} = \frac{n'a'^2 \sqrt{1-e'^2}}{r'^2} = \frac{n' \sqrt{1-e'^2}}{(1-e'^2)^2} (1+e' \cos \theta')^2$$

llevando este resultado a (5.8)

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{n'a'e' \sin \theta'}{\sqrt{1-e'^2}}, \quad (6.8)$$

sustituyendo el movimiento medio por (18.4) llegamos finalmente a

$$v'_r = \frac{dr'}{dt} = \frac{G(m+m')e' \sin \theta'}{C'}. \quad (7.8)$$

donde C' es la constante de las áreas dada por (31.4).

Ahora calculamos la velocidad de la Luna perpendicular al radio vector que une la Tierra con la Luna

$$v'_p = r' \dot{\theta}' = \frac{C'}{r'} = \frac{n'a'^2 \sqrt{1-e'^2}}{r'} = \frac{n'a'(1+e' \cos \theta')}{\sqrt{1-e'^2}}, \quad (8.8)$$

y poniéndola en función de la constante de las áreas queda

$$v'_p = r' \frac{d\theta'}{dt} = \frac{G(m+m')(1+e' \cos \theta')}{C'}. \quad (9.8)$$

5.8 Órbita osculatriz

La ecuación de movimiento (2.8) que rige el movimiento relativo de la Luna respecto a la Tierra es una ecuación vectorial (es decir, tres ecuaciones escalares) y de segundo orden. Para resolver esta ecuación se necesitan, por tanto, seis condiciones iniciales, o sea dos por cada una de las tres ecuaciones.

Se suelen tomar como condiciones iniciales la posición y la velocidad en un momento determinado. Dadas estas condiciones se puede resolver (2.8) y determinar la posición relativa de la Luna en cualquier momento, o dicho de otra forma se logra determinar los elementos orbitales de la Luna.

Supongamos que durante un breve intervalo de tiempo δt la Luna sufre una aceleración perturbativa \mathbf{a}_p . Entonces la velocidad lunar \mathbf{v}' sufre un cambio dado por

$$\delta \mathbf{v}' = \mathbf{a}_p \delta t$$

por lo tanto la velocidad lunar cambia de \mathbf{v}' a $\mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}' = \mathbf{v}' + \mathbf{a}_p \delta t$. Esto significa que cambian las condiciones iniciales de la Luna. Si antes de la perturbación eran la posición y la velocidad \mathbf{v}' , después de la acción perturbadora es la posición y la velocidad $\mathbf{v}' + \delta \mathbf{v}'$.

Como la perturbación se entiende que es una fuerza pequeña, la Luna seguirá ligada gravitacionalmente a la Tierra y la órbita después de la

perturbación seguirá siendo una elipse. Pero al cambiar las condiciones iniciales también cambiará la órbita, es decir la órbita lunar tendrá nuevos elementos. Así por ejemplo, si antes la excentricidad era e' , después de la perturbación tendrá una excentricidad $e' + \delta e'$. Por tanto hay que entender que el efecto de la perturbación es modificar los elementos orbitales.

Podemos extender este razonamiento al caso en que la aceleración perturbativa se ejerza permanentemente, entonces los elementos orbitales de la Luna estarán cambiando continuamente. La Luna seguirá una trayectoria elíptica, llamada órbita osculatriz, pero esta elipse irá cambiando al tener en cada momento elementos orbitales distintos.

6.8 Efecto de la aceleración perturbativa radial y perpendicular: variación de la excentricidad y del argumento de latitud del pericentro

La inclinación del plano orbital de la Luna tiene un valor promedio de $5^\circ 8' 43''$ con respecto a la eclíptica. Como vamos a considerar la perturbación del Sol sobre el sistema Tierra-Luna, la aceleración perturbativa estará muy cercanamente en el plano de la eclíptica. Con respecto al radio vector Tierra-Luna esta aceleración se descompone en radial (R , en la misma dirección que el radio vector), perpendicular (S , perpendicular al radio vector y en el plano de la órbita) y normal (T , perpendicular al plano orbital).

Vamos a estudiar cómo afectan a la variación de los elementos orbitales las aceleraciones radial y perpendicular. Estas aceleraciones no alteran el plano de la órbita, por tanto no modifican ni la longitud del nodo ascendente ni la inclinación de la órbita.

Supongamos que durante un breve intervalo dt actúa sobre la Luna la perturbación, por efecto de ella las velocidades radial y perpendicular de la Luna varían según

$$dv'_r = Rdt; \quad dv'_p = Sdt. \quad (10.8)$$

Vamos a calcular la variación logarítmica de (7.8) por la acción exclusivamente de la perturbación

$$\frac{dv'_r}{v'_r} = \frac{de' \sin \theta' + e' \cos \theta' d\theta'}{e' \sin \theta'} - \frac{dC'}{C'}, \quad (11.8)$$

hay que anotar que la variación de la anomalía verdadera $d\theta'$ no es causada por el movimiento de la Luna, ya que sólo estamos considerando la variación ocasionada por la perturbación. Por tanto $d\theta'$ es el resultado de la variación de la posición del pericentro causada por la perturbación, es decir

$$d\theta' = -d\omega'$$

donde ω' es el argumento de latitud del pericentro, o sea el ángulo, medido en la órbita, desde el nodo ascendente al pericentro. En nuestra aproximación $d\theta' = -d\omega'$. Entonces de (11.8) queda

$$\frac{de' \sin \theta' - e' \cos \theta' d\omega'}{e' \sin \theta'} = \frac{dv'_r}{v'_r} + \frac{dC'}{C'}. \quad (12.8)$$

Por otra parte, de (10.8) y (6.8) obtenemos *

$$\frac{dv'_r}{v'_r} = \frac{Rdt}{\frac{n'a'e'\sin\theta'}{\sqrt{1-e'^2}}} = \frac{R\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'\sin\theta'} dt,$$

que al sustituirla en (12.8)

$$\frac{de'\sin\theta' - e'\cos\theta'd\omega'}{e'\sin\theta'} = \frac{R\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'\sin\theta'} + \frac{dC'}{C'}.$$

A continuación hacemos una operación parecida con la velocidad perpendicular. Al hallar la derivada logarítmica de (9.8) se encuentra

$$\frac{dv'_p}{v'_p} = \frac{de'\cos\theta' + e'\sin\theta'd\omega'}{1+e'\cos\theta'} - \frac{dC'}{C'},$$

como

$$v'_p = \frac{C'}{r'} \Rightarrow \frac{dv'_p}{v'_p} = \frac{dC'}{C'}$$

entonces

$$\frac{de'\cos\theta' + e'\sin\theta'd\omega'}{1+e'\cos\theta'} = \frac{2dC'}{C'}. \quad (13.8)$$

Como por definición

$$C' = n'a'^2\sqrt{1-e'^2}$$

y por (8.8)

$$C' = r'v'_p$$

entonces teniendo en cuenta (10.8) resulta

$$\frac{dC'}{C'} = \frac{r'dv'_p}{C'} = \frac{Sr'dt}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}}, \quad (14.8)$$

consideramos que la aceleración perturbativa perpendicular no ocasiona variación de r' . Utilizando (14.8) en las ecuaciones (12.8) y (13.8) quedan

* El argumento de latitud del pericentro varía, como veremos más adelante, a consecuencia de dos factores. Uno de ellos es la variación real del pericentro, es decir su cambio de posición respecto al nodo ascendente fijo. La otra causa de variación es el desplazamiento del nodo ascendente que produce, como veremos, una variación indirecta del argumento del pericentro. La variación de la anomalía verdadera del razonamiento que aparece en el texto es igual a la variación de $\bar{\omega}$ causada exclusivamente por el movimiento real del pericentro.

Hay que advertir que la aceleración perturbativa contribuye a una variación del ángulo entre la Luna y el pericentro, es decir que en rigor tendríamos que poner $d\theta' = d\bar{\omega}' + d\theta''$ donde $d\theta''$ es la variación de la anomalía verdadera de la Luna por la acción directa de la aceleración perturbativa. No obstante, $d\theta''$ es un término de segundo orden y puede ser despreciado frente a $d\bar{\omega}'$.

$$\begin{aligned} \frac{de'}{dt} \sin \theta' - e' \cos \theta' \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'} \left[S \frac{r'}{a'(1-e'^2)} e' \sin \theta' + R \right] \\ \frac{de'}{dt} \cos \theta' + e' \sin \theta' \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{2S\sqrt{1-e'^2}}{n'a'} \end{aligned} \quad (15.8)$$

expresiones que nos dice como varía la excentricidad y el argumento de latitud del pericentro cuando actúa una perturbación con componentes radial y perpendicular.

Al resolver (15.8) se obtiene la variación de e' y ω'

$$\begin{aligned} \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'} \left\{ S \sin \theta' \left[1 + \frac{r'}{a'(1-e'^2)} \right] - R \cos \theta' \right\} \\ \frac{de'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'} \left\{ S \left[\frac{a'(1-e'^2)}{r'} - \frac{r'}{a'} \right] + Re' \sin \theta' \right\}. \end{aligned} \quad (16.8)$$

7.8 Efecto de la aceleración perturbativa radial y perpendicular: variación del semieje mayor y de la longitud

Para determinar la variación que experimenta el semieje mayor a consecuencia de la aceleración perturbativa, tenemos que cuenta que según (31.4) y (18.4) se tiene

$$a'(1-e'^2) = \frac{n'^2 a'^4 (1-e'^2)}{n'^2 a'^3} \approx \frac{C'^2}{G(m+m')},$$

hallando la derivada logarítmica

$$\frac{da'}{a'} - \frac{2e'de'}{1-e'^2} = 2 \frac{dC'}{C'}$$

incluyendo en esta ecuación (14.8) y la segunda (16.8) queda

$$\frac{da'}{dt} = \frac{2}{n'\sqrt{1-e'^2}} \left\{ S \frac{a'(1-e'^2)}{r'} + Re' \sin \theta' \right\}.$$

El otro elemento orbital que varía a consecuencia de la acción de las aceleraciones perturbativas radial y perpendicular es el movimiento medio n' .

La longitud media de la Luna se pone de la forma

$$L'_m = L'_{m0} + n't$$

siendo su variación en un intervalo dt

$$dL'_m = n'dt + dn't = n'dt + d\varepsilon'$$

el primer sumando es la variación de la longitud a consecuencia del movimiento kepleriano, mientras que el segundo miembro es fruto de la perturbación, es decir $d\varepsilon'$ es la variación que experimenta la longitud media

de la Luna por motivo de la perturbación. Entonces

$$d\varepsilon' = dM' + d\omega'$$

dM' es la variación de la anomalía media lunar como resultado de la perturbación, es decir excluimos la variación kepleriana de M' , notemos que en la anterior expresión suponemos que el nodo ascendente lunar permanece inalterable, ya que no tenemos en cuenta la perturbación normal. Por la ecuación de Kepler (19.4)

$$M' = \chi' - e' \sin \chi'$$

χ' es la anomalía excéntrica de la Luna, entonces

$$dM' = d\chi'(1 - e' \cos \chi') - de' \sin \chi',$$

donde hay que insistir que $d\chi'$ se refiere a la variación ocasionada por la perturbación, no por el movimiento kepleriano de la Luna; sin embargo de' es la variación de la excentricidad, la cual es exclusivamente producida por la perturbación y en nada participa el movimiento kepleriano. Por definición de la anomalía excéntrica (16.4) la anterior expresión queda

$$dM' = \frac{r'}{a'} d\chi' - de' \sin \chi'. \quad (17.8)$$

Al aplicar (3.B) del apéndice B a nuestro actual problema tenemos

$$\frac{d\chi'}{\sin \chi'} = -\frac{d\omega'}{\sin \theta'} - \frac{de'}{1 - e'^2},$$

donde de nuevo entendemos que la variación de la anomalía verdadera es sólo consecuencia de la variación del pericentro, por tanto $d\theta' = -d\omega'$. Poniendo el anterior resultado en (17.8)

$$\begin{aligned} \frac{dM'}{dt} &= -\frac{r'}{a'} \frac{\sin \chi'}{\sin \theta'} \frac{d\omega'}{dt} - \frac{r'}{a'} \frac{\sin \chi'}{1 - e'^2} \frac{de'}{dt} - \frac{de'}{dt} \sin \chi' = \\ &= -\frac{r'}{a'} \frac{\sin \chi'}{\sin \theta'} \left[\frac{d\omega'}{dt} + \frac{1}{1 - e'^2} \sin \theta' \frac{de'}{dt} \right] - \frac{de'}{dt} \sin \chi', \end{aligned}$$

utilizando (2.B) y con un poco más de manipulación se llega a

$$\frac{dM'}{dt} = -\frac{r'^2}{a'^2 \sqrt{1 - e'^2}} \frac{d\omega'}{dt} - \frac{r' \sin \theta'}{a' \sqrt{1 - e'^2}} \left[1 + \frac{r'}{a'(1 - e'^2)} \right] \frac{de'}{dt},$$

o bien

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \frac{dM'}{dt} + \frac{d\omega'}{dt} = \left(1 - \sqrt{1 - e'^2} \right) \frac{d\omega'}{dt} + \\ &+ \frac{r'}{a' \sqrt{1 - e'^2}} \left\{ \left[\frac{a'(1 - e'^2)}{r'} - \frac{r'}{a'} \right] \frac{d\omega'}{dt} - \left[1 + \frac{r'}{a'(1 - e'^2)} \right] \sin \theta' \frac{de'}{dt} \right\}, \end{aligned}$$

utilizando las dos ecuaciones (16.8) se llega a

$$\frac{d\varepsilon'}{dt} = \left(1 - \sqrt{1 - e'^2} \right) \frac{d\omega'}{dt} - \frac{2r'}{n'a'^2} R, \quad (18.8)$$

la variación de ω' que aparece en (18.8) es la producida por la acción de las

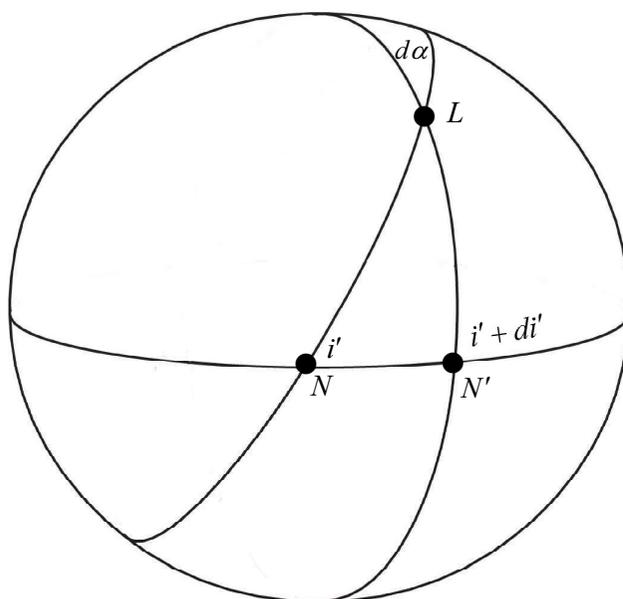


Figura 2.8.- Se representan las órbitas lunares no perturbada y perturbada. Al actuar la aceleración normal T la órbita lunar gira en torno a la posición ocupada por la Luna en el momento de la perturbación, de tal forma que varía la inclinación y la longitud del nodo ascendente. El círculo máximo horizontal es la eclíptica, N es el nodo ascendente de la órbita lunar antes de la perturbación y N' es el nodo ascendente después de la acción perturbadora. L es la posición de la Luna en el punto donde actúa la aceleración perturbativa normal. $d\alpha$ es el ángulo entre las órbitas lunares proyectadas en la esfera celeste. i' es la inclinación inicial de la órbita lunar respecto a la eclíptica e $i' + di'$ es la inclinación después de la perturbación.

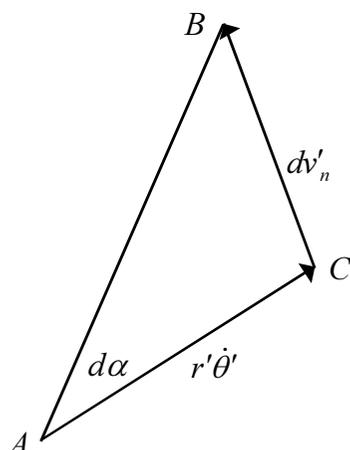


Figura 3.8.- Composición de velocidades. El vector AC es la velocidad de la Luna proyectada sobre la esfera celeste y es tangente a la órbita proyectada; y el vector CB es la variación de la velocidad a causa de la perturbación. El vector AB es la nueva velocidad lunar, igualmente proyectada sobre la bóveda celeste. Las velocidades lunares representadas son tangentes a las órbitas proyectadas en la esfera celeste, aunque no son tangentes a las órbitas reales.

aceleraciones perturbativas radial y perpendicular, es decir la variación que viene dada por la primera ecuación (16.8).

8.8 Efecto de la aceleración perturbativa normal: variación de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente

Consideremos ahora que la Luna sufre una aceleración perturbativa T normal a su plano orbital. Esta perturbación origina una variación tanto de la inclinación de su órbita como de la longitud del nodo ascendente y de manera indirecta una variación del argumento de la latitud del pericentro.

Si durante un intervalo de tiempo dt actúa la aceleración perturbativa normal, la velocidad de la Luna cambia en la cantidad

$$dv'_n = Tdt,$$

que tiene el sentido perpendicular al plano orbital. Si \mathbf{v}_L es el vector velocidad de la Luna antes de la perturbación (que será un vector tangente a la órbita), después de la perturbación tendrá la velocidad $\mathbf{v}_L + d\mathbf{v}'_t$. Consideremos ahora la proyección del movimiento lunar sobre la esfera celeste, o sea nos fijamos en el movimiento aparente de la Luna. La velocidad radial tiene proyección nula, siendo las velocidades perpendicular y normal las únicas que tiene el movimiento que la Luna describe en la esfera celeste.

Entonces la velocidad del movimiento de la Luna en la bóveda celeste antes de la perturbación es $r'\dot{\theta}'$ (velocidad perpendicular al radiovector). La proyección de la velocidad de la Luna después de la perturbación será tangente a la órbita perturbada descrita en la esfera celeste; de tal forma que $d\alpha$ (ver figura 2.8) es el ángulo formado entre las dos órbitas (la no perturbada y la perturbada). Este ángulo se calcula de la gráfica 3.8

$$\tan d\alpha \approx d\alpha = \frac{dv'_t}{r'\dot{\theta}'} = \frac{Tdt}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}/r'} = \frac{\sqrt{1-e'^2}Tdt}{n'a'(1+e'\cos\theta')} \quad (19.8)$$

donde hemos utilizado (31.4).

En la figura 4.8 se representa la posición de la Luna, del nodo ascendente anterior a la perturbación N y del nuevo nodo ascendente N' , que están separados entre sí el ángulo $d\Omega'$. η' es el ángulo medido en el plano orbital

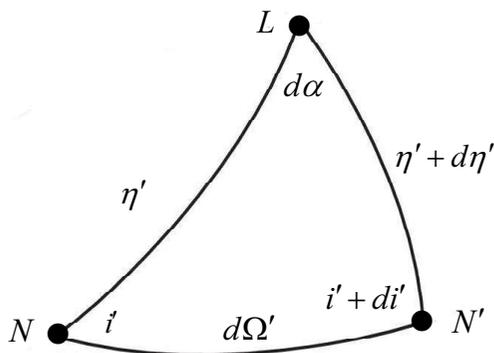


Figura 4.8.- Representación de la órbita perturbada $N'L$ y no perturbada NL . El nodo ascendente de la órbita lunar pasa de N a N' .

anterior a la perturbación desde el nodo N a la Luna y $\eta' + d\eta'$ es el ángulo medido en el nuevo plano orbital desde el nodo perturbado N' a la Luna. $d\alpha$ es el ángulo entre los dos planos orbitales considerados.

Aplicamos el teorema del seno al triángulo esférico de la figura 4.8

$$\frac{\sin d\Omega'}{\sin d\alpha} = \frac{\sin(\eta' + d\eta')}{\sin i'} \Rightarrow d\Omega' \approx \frac{\sin \eta'}{\sin i'} d\alpha$$

y con la ayuda de (19.8) queda

$$\frac{d\Omega'}{dt} = \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2}} \frac{r'}{a'} T \sin \eta' \quad (20.8)$$

que nos dice cómo varía la longitud del nodo ascendente de la órbita lunar a consecuencia de la perturbación.

A continuación vamos a determinar la variación de la inclinación a consecuencia de la perturbación normal que sufre la Luna. De la figura 5.8 se determina a partir del triángulo ANN' la relación

$$d\eta' = -d\Omega' \cos i'. \quad (21.8)$$

En la figura 5.8 tenemos dos triángulos esféricos rectángulos. Aplicando el teorema del seno a cada uno de ellos se obtiene

$$\sin \eta' = \frac{\sin x}{\sin i'}; \quad \sin(\eta' + d\eta') = \frac{\sin x}{\sin(i' + di')}$$

desarrollando y simplificando se llega a

$$\sin \eta' \cos i' di' = -\cos \eta' \sin i' d\eta'$$

utilizando (19.8) y (20.8) queda

$$\frac{di'}{dt} = \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2}} \frac{r'}{a'} T \cos \eta' \quad (22.8)$$

que nos da la variación de la inclinación de la órbita lunar.

Como ya hemos dicho la perturbación normal a la órbita no sólo modifica la inclinación y la longitud del nodo ascendente, sino que contribuye indirectamente a una variación del argumento de latitud del pericentro. En

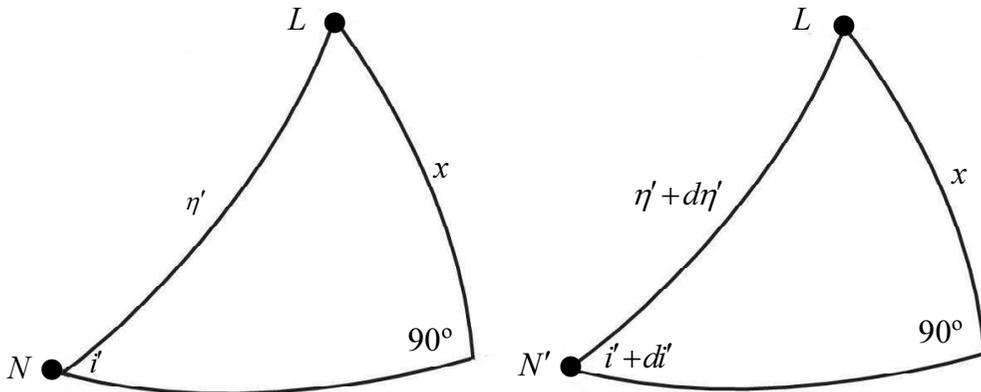


Figura 5.8.- Triángulos esféricos rectángulos con vértices en los nodos y en la Luna.

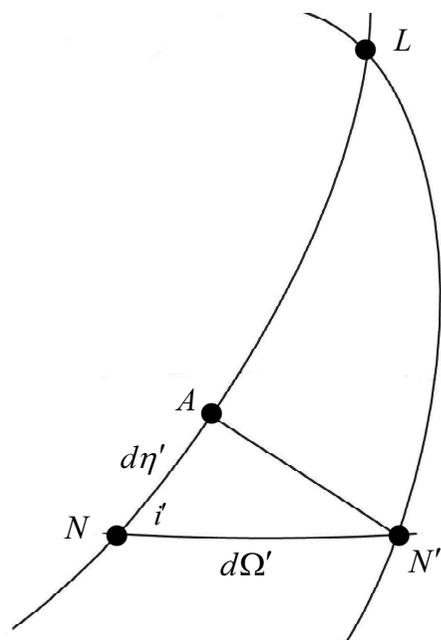


Figura 6.8.- El triángulo infinitesimal de vértices A , N y N' se puede considerar un triángulo plano y de él se determina la relación entre $d\eta'$ y $d\Omega'$. Hay que tener en cuenta que en el dibujo el argumento de la Luna (ángulo del nodo a la Luna) disminuye, por esta razón el incremento de este argumento es negativo.

efecto, en la figura 6.8 vemos que el argumento del pericentro se modifica cuando se desplaza el nodo ascendente, aunque el pericentro se encuentre permanentemente en el mismo lugar del espacio. De la figura 6.8 se ve que la variación de η' a consecuencia de T es la dada por (21.8) cantidad que debe restarse a la primera ecuación (16.8).

Ya podemos dar por terminado el cálculo de la variación de los elementos orbitales, al conjunto de estas ecuaciones, que a continuación ponemos juntas, se le llama ecuaciones de Gauss o de Laplace

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'\sqrt{1-e'^2}} \left[S \frac{a'(1-e'^2)}{r'} + Re' \sin \theta' \right] \\ \frac{d\omega'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'} \left\{ S \sin \theta' \left[1 + \frac{r'}{a'(1-e'^2)} \right] - R \cos \theta' \right\} - \cos i' \frac{d\Omega'}{dt} \\ \frac{de'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'} \left\{ S \left[\frac{a'(1-e'^2)}{r'} - \frac{r'}{a'} \right] + Re' \sin \theta' \right\}. \\ \frac{d\Omega'}{dt} &= \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2}} \frac{r'}{a'} T \sin \eta' \end{aligned} \quad (23.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{di'}{dt} &= \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2}} \frac{r'}{a'} T \cos \eta' \\ \frac{d\varepsilon'}{dt} &= \left(1 - \sqrt{1-e'^2}\right) \left(\frac{d\omega'}{dt} + \cos i' \frac{d\Omega'}{dt}\right) - \frac{2r'}{n'a'^2} R.\end{aligned}\quad (23.8)$$

nótese que en la última ecuación es una corrección de (18.8) donde ahora $d\omega'/dt$ es la variación dada por la segunda de las ecuaciones (23.8).

Naturalmente las ecuaciones (23.8) se pueden usar para cualquier otro astro diferente a la Luna y en particular son aplicables a las perturbaciones que sufre la Tierra de los demás astros del sistema solar.

9.8 Ecuaciones de Gauss en función de las derivadas de la función perturbativa

Las ecuaciones de Gauss (23.8) se han puesto en función de las tres componentes de la aceleración perturbativa. Ahora vamos a modificar estas ecuaciones, en el sentido de que las variaciones de los elementos orbitales se puedan calcular en función de las derivadas de la función perturbativa P definida en (3.8).

Vamos a limitar los cálculos al caso en que despreciamos la inclinación de la órbita lunar, es decir que no tomamos en cuenta a la aceleración perturbativa normal y por consiguiente permanecerán fijas tanto la posición del nodo ascendente lunar como la inclinación de la órbita.

En estas condiciones el movimiento de la Luna se encuentra en un plano inalterable y su posición viene dada por las coordenadas polares η y r , siendo el ángulo η medido desde el nodo ascendente de la Luna y en el sentido de su movimiento.

Sea dW el trabajo por unidad de masa ejercido sobre la Luna por la aceleración perturbativa

$$dW = \mathbf{a}_p \cdot d\mathbf{r}' = Rdr' + Sr'd\eta', \quad (24.8)$$

por (4.8)

$$dW = \nabla P \cdot d\mathbf{r}' = dP = \frac{\partial P}{\partial a'} da' + \frac{\partial P}{\partial e'} de' + \frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'} d\bar{\omega}' + \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} d\varepsilon' \quad (25.8)$$

donde no hemos tenido en cuenta ni i ni Ω porque permanecen constantes.

Vamos a expresar $d\eta$ y dr en función de los elementos orbitales, y tras sustituirlos en (24.8) identificaremos esta ecuación con (25.8), con lo que conseguiremos expresar las derivadas de P en función de las componentes de la aceleración perturbativa. Con este resultado ya podremos poner (23.8) en función de las derivadas de P .

Empecemos calculando la variación de la anomalía excéntrica. De la ecuación de Kepler (19.4)

$$\chi' - e' \sin \chi' = M' = L' - \bar{\omega}'$$

al derivar tenemos

$$d\chi'(1 - e' \cos \chi') = dM' + de' \sin \chi' = d\varepsilon - d\bar{\omega}' + de' \sin \chi'$$

donde $\bar{\omega}'$ es la longitud del pericentro, es decir el ángulo medido en dos planos desde el equinoccio hasta el pericentro de la Luna. Una vez más, no hemos tenido en cuenta la variación del nodo ascendente ya que despreciamos el efecto de la aceleración perturbativa normal al plano orbital. Despejando

$$d\chi' = \frac{a'}{r'}(de' \sin \chi' + d\varepsilon' - d\bar{\omega}'). \quad (26.8)$$

Pasamos a calcular dr' . De la definición de anomalía excéntrica (16.4)

$$dr' = \frac{r'}{a'} da' - a' de' \cos \chi' + a' e' \sin \chi' d\chi'$$

sustituyendo (26.8)

$$dr' = \frac{r'}{a'} da' + de' \left(\frac{a'^2}{r'} e' \sin^2 \chi' - a' \cos \chi' \right) + e' \sin \chi' \frac{a'^2}{r'} (d\varepsilon' - d\bar{\omega}'), \quad (27.8)$$

para calcular la expresión dentro del primer paréntesis utilizamos (1.C) del apéndice C

$$\begin{aligned} \frac{a'^2}{r'} e' \sin^2 \chi' - a' \cos \chi' &= \frac{a' e' (1 + e' \cos \theta') (1 - e'^2) \sin^2 \theta'}{1 - e'^2 (1 + e' \cos \theta')^2} - a' \cos \chi' = \\ &= \frac{a' e' \sin^2 \theta'}{1 + e' \cos \theta'} - a' \frac{\cos \theta' + e'}{1 + e' \cos \theta'} = -a' \cos \theta' \end{aligned}$$

donde θ' es la anomalía verdadera y despreciamos términos mayores que el primero en e' . Insertando este resultado en (27.8) y utilizando (1.C)

$$dr' = \frac{r'}{a'} da' - a' de' \cos \theta' + \frac{e' a'}{\sqrt{1 - e'^2}} (d\varepsilon' - d\bar{\omega}') \sin \theta'. \quad (28.8)$$

Sustituyendo en (3.B) en (2.C)

$$d\theta' = \frac{a'}{r'} \sqrt{1 - e'^2} d\chi' + \frac{de'}{1 - e'^2} \sin \theta'$$

como

$$d\eta' = d\bar{\omega}' + d\theta'$$

entonces encontramos

$$\begin{aligned} d\eta' &= \frac{a'^2}{r'^2} \sqrt{1 - e'^2} (de' \sin \chi' + d\varepsilon' - d\bar{\omega}') + \frac{de'}{1 - e'^2} \sin \theta' + d\bar{\omega}' = \\ &= \left(\frac{a'}{r'} + \frac{1}{1 - e'^2} \right) de' \sin \theta' + \frac{a'^2}{r'^2} \sqrt{1 - e'^2} d\varepsilon' + \left(1 - \frac{a'^2}{r'^2} \sqrt{1 - e'^2} \right) d\bar{\omega}'. \end{aligned} \quad (29.8)$$

para lo que hemos utilizado (26.8) y (2.C).

Las ecuaciones (28.8) y (29.8) nos dan las variaciones de las coordenadas polares de la Luna, que debemos de sustituir en (24.8)

$$dW = \frac{r'}{a'} R da' + a' \left\{ S \left[1 + \frac{r'}{a' (1 - e'^2)} \right] - R \cos \theta' \right\} de' +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(R \frac{a'e'}{\sqrt{1-e'^2}} \sin \theta' + S \frac{a'^2}{r'} \sqrt{1-e'^2} \right) d\varepsilon' + \\
 & + \left[-R \frac{e'a'}{\sqrt{1-e'^2}} \sin \theta' + S \left(r' - \frac{a'^2}{r'} \sqrt{1-e'^2} \right) \right] d\bar{\omega}'
 \end{aligned}$$

comparando esta ecuación con (25.8)

$$\frac{\partial P}{\partial a'} = \frac{r'}{a'} R$$

$$\frac{\partial P}{\partial e'} = a' \left\{ S \left[1 + \frac{r'}{a'(1-e'^2)} \right] \sin \theta' - R \cos \theta' \right\}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} = a' \left(R \frac{e'}{\sqrt{1-e'^2}} \sin \theta' + S \frac{a'}{r'} \sqrt{1-e'^2} \right) = \frac{a'}{\sqrt{1-e'^2}} \left[S \frac{a'(1-e'^2)}{r'} + Re' \sin \theta' \right]$$

$$\frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'} = a' \left[-R \frac{e'}{\sqrt{1-e'^2}} \sin \theta' + S \left(\frac{r'}{a'} - \frac{a'}{r'} \sqrt{1-e'^2} \right) \right] = Sr' - \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'}$$

finalmente sustituimos estos resultados en (23.8) en donde suponemos que la inclinación es nula

$$\begin{aligned}
 \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'a'} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \\
 \frac{d\bar{\omega}'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'^2 e'} \frac{\partial P}{\partial e'} \\
 \frac{de'}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'e'} \left[\frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'} + (1-\sqrt{1-e'^2}) \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} \right] \\
 \frac{d\varepsilon'}{dt} &= (1-\sqrt{1-e'^2}) \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'^2 e'} \frac{\partial P}{\partial e'} - \frac{2}{n'a'} \frac{\partial P}{\partial a'}
 \end{aligned} \tag{30.8}$$

que son las ecuaciones de Gauss pero en función de las derivadas de la función perturbatriz dependiente de los elementos orbitales. Finalmente obtenemos las componentes de la aceleración perturbatriz

$$R = \frac{a'}{r'} \frac{\partial P}{\partial a'}; \quad S = \frac{1}{r'} \left(\frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} + \frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'} \right) \tag{31.8}$$

ecuaciones válidas, al igual que las (30.8), para el caso especial de que sea despreciable la inclinación de la órbita.

Aceleraciones perturbativas

1.9 Introducción

En el epígrafe 2.8 se ha calculado el vector aceleración perturbatriz \mathbf{a}_p que actúa sobre la Luna y que viene expresado por (2.8). En este capítulo vamos a desarrollar este vector y a obtener sus componentes respecto a un triedro móvil Σ unido a la Luna y cuyos ejes son: x (paralelo y con el mismo sentido que el vector de posición de la Luna respecto a la Tierra \mathbf{r}' , véase la figura 1.9); y (perpendicular al radiovector \mathbf{r}' , encontrándose en el plano orbital y cuyo sentido es el del movimiento de la Luna) y z (eje perpendicular a los dos anteriores y con sentido hacia el polo eclíptico norte). Los vectores unitarios respecto a cada uno de esos tres ejes los representamos por $\mathbf{u}_{r'}$, \mathbf{u}_p , \mathbf{u}_n .

El plan de trabajo que seguiremos es el siguiente. Primeramente descompondremos \mathbf{a}_p en una componente radial \mathbf{R}' (paralela a \mathbf{r}') y otra componente paralela a la dirección Tierra-Sol \mathbf{P}' (es decir paralela a \mathbf{r}). Posteriormente descompondremos \mathbf{P}' en función de las componentes respecto a Σ . A partir de estos resultados se podrán calcular las componentes de la aceleración perturbativa respecto al sistema de coordenadas Σ : \mathbf{R} , \mathbf{S} y \mathbf{T} .

Con esta investigación pretendemos obtener unas efemérides aproximadas de la Luna, por tanto iremos haciendo a lo largo del razonamiento algunas simplificaciones, que al final comprobaremos que son permisibles en orden a la exactitud pretendida.

2.9 Cálculo de R' y P'

En la figura 2.9 se representan las posición del Sol, Tierra y Luna y las dos

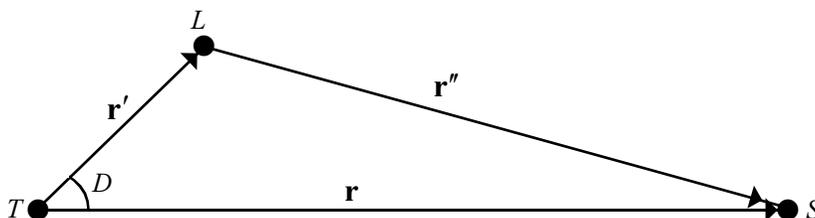


Figura 1.9.- Se representan los vectores \mathbf{r} , \mathbf{r}' y \mathbf{r}'' . T es la Tierra, S el Sol y L la Luna. D es el ángulo entre la Luna y el Sol medido desde la Tierra.

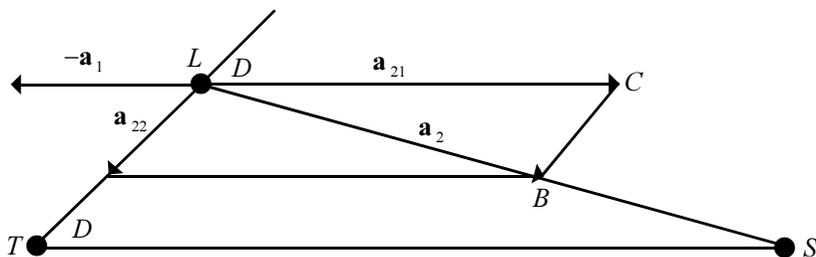


Figura 2.9.- Se representan las posiciones del Sol (S), Tierra (T) y Luna (L). Sobre la Luna actúan las dos aceleraciones perturbativas $-a_1$ y a_2 . D es la separación angular del Sol y la Luna tal como es observado desde la Tierra. a_2 se descompone en a_{21} , paralela a la dirección $T-S$ y a_{22} paralela a la dirección $T-L$.

aceleraciones perturbativas que actúan sobre la Luna. El ángulo D es el que existe entre la Luna y el Sol tal como se mide desde la Tierra *. La aceleración a_2 se descompone en a_{21} (paralela a r) y a_{22} (paralela a r'). Entonces

$$\mathbf{R}' = \mathbf{a}_{22}; \quad \mathbf{P}' = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_{21}. \quad (1.9)$$

Los triángulos TLS y CLB son semejantes, por tanto tienen sus ángulos iguales y sus lados proporcionales, es decir

$$\frac{a_2}{r''} = \frac{a_{21}}{r}; \quad \frac{a_2}{r''} = \frac{a_{22}}{r'} \Rightarrow a_{21} = \frac{r}{r''} a_2; \quad a_{22} = \frac{r'}{r''} a_2,$$

por lo calculado en el epígrafe 2.8 tenemos

$$a_1 = Gm_s \frac{1}{r^2}; \quad a_2 = Gm_s \frac{1}{r''^2}$$

por tanto

$$a_{21} = Gm_s \frac{r}{r''^3}; \quad a_{22} = Gm_s \frac{r'}{r''^3}.$$

y por (1.9)

$$\mathbf{R}' = -Gm_s \frac{r'}{r''^3}; \quad \mathbf{P}' = Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right), \quad (2.9)$$

que son las dos componentes en que hemos dividido la aceleración perturbatriz, donde consideramos un sistema de referencia intermedio, cuyos dos ejes positivos están dirigidos, uno de ellos hacia el Sol (dirección de L a C) y el otro con el mismo sentido de r' .

* Este ángulo no es la elongación Δ o diferencia entre las longitudes eclípticas del Sol y la Luna. El ángulo D hay que identificarlo con el arco luz a_l , o ángulo medido en el círculo máximo que pasa por los centros del Sol y de la Luna. En el caso, como el que se nos presenta, de que la inclinación de la órbita lunar es pequeña y por tanto se puede suponer que se encuentra en el plano de la eclíptica, el ángulo D se puede indentificar con la elongación Δ . No obstante, el valor medio de D , el ángulo D_m , coincide con la elongación media con independencia del valor de la inclinación.

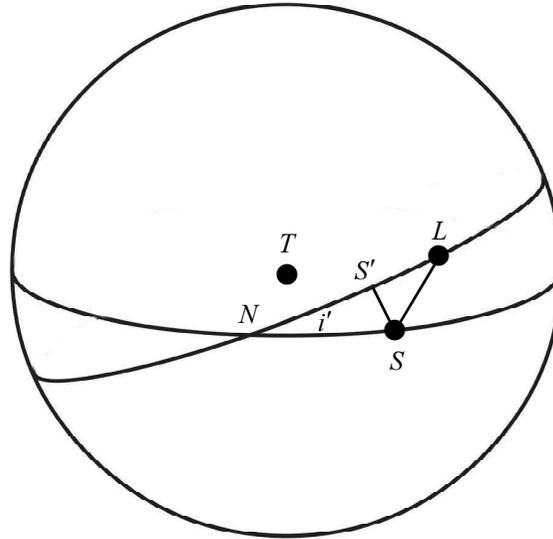


Figura 3.9.- L y S representan la Luna y el Sol. El círculo máximo horizontal es la eclíptica y el otro círculo inclinado es la órbita de la Luna que forma un ángulo i' con la eclíptica. En el centro de la esfera está la Tierra T . S' es la proyección del Sol sobre el plano orbital de la Luna.

3.9 Cálculo de R , S y T

A continuación vamos a hallar las componentes de \mathbf{P}' respecto al triedro Σ que hemos definido en 1.9. El vector \mathbf{P}' no se encuentra en el plano de la órbita lunar o plano x - y , sino que es paralelo al plano de la eclíptica (por ser paralelo al vector \mathbf{r}), por lo tanto forma con el plano de la órbita de la Luna el mismo ángulo que el que mantiene el radio vector Tierra-Sol. Entendemos que el ángulo formado entre \mathbf{P}' y el plano de la órbita de la Luna es el ángulo entre \mathbf{P}' y su proyección normal en el plano de la órbita lunar.

Como se ve en la figura 3.9 la proyección del Sol sobre la órbita lunar es S' , entonces el ángulo que forma \mathbf{P}' con la órbita lunar es el ángulo formado por los radio vectores TS y TS' , ángulo que llamaremos $S'S$, que es medido de S' a S en el sentido positivo del eje z , es decir hacia el polo eclíptico norte. Entonces $S'S$ es el ángulo de \mathbf{P}' con el plano x - y o plano de la órbita lunar.

El ángulo que forma \mathbf{P}'' (vector proyección de \mathbf{P}' en el plano x - y) y el eje x (dirigido en el sentido de la Tierra a la Luna) es el ángulo LS' (ángulo entre TL y TS'), medido en el sentido y dirección del eje y , es decir de L a S' en el sentido del movimiento lunar.

Entonces la componente vertical S (dirigida hacia el eje y) del vector \mathbf{P}' y su componente normal T (dirigida hacia el eje z) son

$$\begin{aligned}
 S &= P'' \sin LS' = Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \cos S'S \sin LS' \\
 T &= P' \sin S'S = Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \sin S'S,
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

y la componente radial de \mathbf{P}' (dirigida hacia el eje x) es

$$P'' \cos LS' = Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \cos S'S \cos LS'. \quad (3.9)$$

Por tanto las tres componentes de la aceleración perturbativa que actúan sobre la Luna son

$$\begin{aligned} R &= -Gm_s \frac{r'}{r''^3} + Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \cos S'S \cos LS' \\ S &= Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \cos S'S \sin LS' \\ T &= Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \sin S'S. \end{aligned} \quad (4.9)$$

El máximo valor que puede tomar el ángulo $S'S$ es $360 - i' \equiv -i'$ donde i' es la inclinación de la órbita lunar y como este ángulo es pequeño podemos hacer el desarrollo

$$\cos S'S \leq \cos i' \approx 1 - \frac{1}{2} i'^2 \approx 1 - 0,004 \approx 1$$

por tanto podemos tomar con muy buena aproximación

$$\cos S'S = 1.$$

Aplicando el teorema del seno al triángulo rectángulo esférico NSS' de la figura 3.9 se encuentra

$$\sin(360 - S'S) = -\sin S'S = \sin i' \sin NS$$

como la inclinación es pequeña podemos poner

$$NS \approx NL + LS \approx \eta - D$$

η es el ángulo desde el nodo ascendente a la posición de la Luna y hemos tenido en cuenta que $D \approx L' - L = -LS$. Como la inclinación de la órbita lunar es pequeña podemos igualar el ángulo LS' con el ángulo LS , es decir con el ángulo $-D$. Entonces las ecuaciones (4.9) se reducen a

$$\begin{aligned} R &= -Gm_s \frac{r'}{r''^3} + Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \cos D \\ S &= -Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \sin D \\ T &= -Gm_s \left(\frac{r}{r''^3} - \frac{r}{r^3} \right) \sin i' \sin(\eta - D). \end{aligned} \quad (5.9)$$

4.9 Desarrollo de R y S

Aplicando el teorema del coseno al triángulo plano de la figura 1.9

$$r''^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos D$$

de donde se deduce

$$\frac{1}{r'^{n^3}} = \frac{1}{r^3} \left[1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{r'}{r} \cos D \right]^{-3/2},$$

como $r' \ll r$ podemos desarrollar la anterior expresión en series de potencia de r'/r y tomar hasta el segundo orden

$$\frac{1}{r'^{n^3}} = \frac{1}{r^3} \left[1 + 3 \frac{r'}{r} \cos D + \frac{9}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{15}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos 2D \right], \quad (6.9)$$

donde hemos utilizado la primera ecuación (8.A) del apéndice A.

Si despreciamos las masas de la Tierra y la Luna frente a la masa del Sol, la ecuación (18.4) queda aproximadamente

$$Gm_s = n^2 a^3 \quad (7.9)$$

donde n y a es el movimiento medio y el semieje mayor de la órbita aparente del Sol*.

Con los resultados (6.9) y (7.9) la componente R de la aceleración perturbativa de la primera ecuación (5.9) queda

$$\begin{aligned} R &= n^2 a^3 \left[-\frac{r'}{r'^{n^3}} + \frac{r}{r'} r' \left(\frac{1}{r'^{n^3}} - \frac{1}{r^3} \right) \cos D \right] = n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left[-\frac{r^3}{r'^{n^3}} + \frac{r}{r'} \left(\frac{r^3}{r'^{n^3}} - 1 \right) \cos D \right] = \\ &= n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left[-1 - 3 \frac{r'}{r} \cos D - \frac{9}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{15}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos 2D + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cos^2 D + \frac{9}{4} \frac{r'}{r} \cos D + \frac{15}{4} \frac{r'}{r} \cos 2D \cos D \right] \end{aligned}$$

de la segunda ecuación (7.A)

$$\cos 2D \cos D = \frac{1}{2} \cos 3D + \frac{1}{2} \cos D$$

y utilizando (8.A)

$$R = n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{9}{8} \frac{r'}{r} \cos D + \frac{3}{2} \cos 2D - \right. \\ \left. - \frac{15}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos 2D + \frac{15}{8} \frac{r'}{r} \cos 3D \right],$$

si nos limitamos a términos de segundo orden en r'/r

* El sistema Tierra-Luna es el que orbita en torno al Sol, por tanto su masa reducida es

$$\mu = \frac{(m+m')m_s}{m+m'+m_s}$$

y por (18.4)

$$G(m+m'+m_s) = n^2 a^3.$$

$$R = n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left[\frac{1}{2} + \frac{9}{8} \frac{r'}{r} \cos D + \frac{3}{2} \cos 2D + \frac{15}{8} \frac{r'}{r} \cos 3D \right]. \quad (8.9)$$

Ahora vamos a desarrollar la componente S de la aceleración perturbativa. Por (6.9) y (7.9) la segunda ecuación (5.9) queda

$$\begin{aligned} S &= -n^2 a^3 \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^3}{r'^3} - 1 \right) \sin D = -n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left(3 \cos D + \frac{9}{4} \frac{r'}{r} + \frac{15}{4} \frac{r'}{r} \cos 2D \right) \sin D = \\ &= -n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left(3 \cos D \sin D + \frac{9}{4} \frac{r'}{r} \sin D + \frac{15}{4} \frac{r'}{r} \cos 2D \sin D \right) = \\ &= -n^2 a^3 \frac{r'}{r^3} \left(\frac{3}{2} \sin 2D + \frac{3}{8} \frac{r'}{r} \sin D + \frac{15}{8} \frac{r'}{r} \sin 3D \right), \end{aligned} \quad (9.9)$$

habiendo utilizado la tercera ecuación (7.A) de donde se obtiene

$$\cos 2D \sin D = \frac{1}{2} \sin 3D - \frac{1}{2} \sin D.$$

Las ecuaciones (8.9) y (9.9) nos dan las componentes R y S de la aceleración perturbativa para el caso de que la inclinación de la órbita sea pequeña, de tal forma que se pueda considerar que el plano de la órbita de la Luna coincide con el plano de la eclíptica, una asunción que es aceptable en la teoría lunar simplificada que estamos desarrollando. Entonces el ángulo D es la diferencia entre las longitudes geocéntricas de la Luna y el Sol.

5.9 Paso del geocentro al baricentro

En nuestra aproximación D es la diferencia entre las longitudes de la Luna y el Sol como se observa desde el centro de la Tierra. Pero para el cálculo siguiente nos será más útil la diferencia de longitudes como es medida desde el baricentro del sistema Tierra-Luna D' .

En la figura 4.9 se representa la Tierra, el Sol, la Luna y el baricentro B del sistema Tierra-Luna. D es la diferencia de longitudes geocéntricas y D' la correspondiente diferencia baricéntrica. ρ es la distancia del Sol al baricentro y r la distancia de la Tierra al Sol. La distancia de la Tierra al baricentro viene dada por (6.5)

$$r_c = \frac{m'}{m + m'} r'$$

m y m' son las masas de la Tierra y la Luna y r' es la distancia de la Tierra a la Luna.

Del triángulo de la figura 4.9 se deduce que

$$\sin(D' - D) \approx D' - D = \frac{r_c \sin D}{\rho} \approx \frac{r_c \sin D'}{\rho}$$

donde hemos tenido en cuenta la poca diferencia entre D y D' .

$$D = D' - \frac{m'}{m + m'} \frac{r'}{\rho} \sin D' = D' - \zeta \frac{r'}{\rho} \sin D', \quad (10.9)$$

donde hemos definido

$$\zeta = \frac{m'}{m + m'}$$

De la figura 4.9 calculamos

$$r = \rho \cos(D' - D) + r_c \cos D,$$

si nos limitamos al primer orden en el cociente r'/ρ entonces

$$r = \rho + \zeta r' \cos D'$$

de donde hallamos hasta el primer orden

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{\rho^3} \left(1 - 3\zeta \frac{r'}{\rho} \cos D' \right). \quad (11.9)$$

Con las fórmulas (10.9) y (11.9) ya estamos en disposición de poner (8.9) y (9.9) en función de la elongación baricéntrica y de la distancia Tierra-Luna. Antes hay que poner las funciones trigonométricas que aparecen en (8.9) y (9.9) en función de D' .

$$\cos D = \cos \left(D' - \zeta \frac{r'}{\rho} \sin D' \right) = \cos D' \cos \left(\zeta \frac{r'}{\rho} \sin D' \right) + \sin D' \sin \left(\zeta \frac{r'}{\rho} \sin D' \right)$$

como el cociente r'/ρ es pequeño lo anterior se nos reduce a

$$\cos D = \cos D' + \zeta \frac{r'}{\rho} \sin^2 D' = \cos D' + \frac{\zeta r'}{2\rho} - \frac{\zeta r'}{2\rho} \cos 2D'. \quad (12.9)$$

De una forma similar obtenemos

$$\sin D = \sin D' - \frac{\zeta r'}{2\rho} \sin 2D', \quad (13.9)$$

también se obtiene

$$\cos 2D = \cos 2D' + 2\zeta \frac{r'}{\rho} \sin D' \sin 2D' = \cos 2D' + \zeta \frac{r'}{\rho} (\cos D' - \cos 3D') \quad (14.9)$$

$$\sin 2D = \sin 2D' - 2\zeta \frac{r'}{\rho} \sin D' \cos 2D' = \sin 2D' - \zeta \frac{r'}{\rho} (\sin D' - \sin 3D')$$

para lo que hemos tenido que utilizar (7.A).

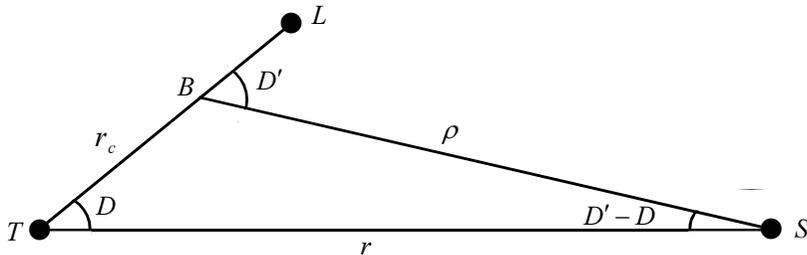


Figura 4.9.- Se muestra la diferencia de las elongaciones Luna-Sol como son medidas desde el geocentro (T) y desde el baricentro (B).

Ya estamos en condiciones de modificar la componente R de la aceleración perturbatriz dada en (8.9)

$$R = \frac{1}{2} n^2 a^3 \frac{r'}{\rho^3} \left(1 - 3\zeta \frac{r'}{\rho} \cos D' \right) \left[1 + \frac{9}{4} \frac{r'}{\rho} \cos D + 3 \cos 2D + \frac{15}{4} \frac{r'}{\rho} \cos 3D \right]$$

donde hemos utilizado (11.9) y en este orden de aproximación hemos hecho la sustitución

$$\frac{r'}{r} \approx \frac{r'}{\rho}.$$

Sustituyendo (12.9) y (14.9) y usando la relación (7.A) queda hasta el segundo orden de r'/ρ

$$R = \frac{1}{2} n^2 a^3 \frac{r'}{\rho^3} \left[\begin{array}{l} 1 + 3 \cos 2D' + \frac{9}{4} \frac{r'}{\rho} \cos D' - \frac{9}{2} \zeta \frac{r'}{\rho} \cos D' - \\ - 3\zeta \frac{r'}{\rho} \cos 3D' + \frac{15}{4} \frac{r'}{\rho} \cos 3D' - \frac{9}{2} \zeta \frac{r'}{\rho} \cos 3D' \end{array} \right]$$

se hacen las simplificaciones

$$\begin{aligned} \frac{9}{4} \frac{r'}{\rho} \cos D' - \frac{9}{2} \zeta \frac{r'}{\rho} \cos D' &= \frac{9}{4} \frac{m - m'}{m + m'} \frac{r'}{\rho} \cos D' \\ - 3\zeta \frac{r'}{\rho} \cos 3D' + \frac{15}{4} \frac{r'}{\rho} \cos 3D' - \frac{9}{2} \zeta \frac{r'}{\rho} \cos 3D' &= \frac{15}{4} \frac{m - m'}{m + m'} \frac{r'}{\rho} \cos 3D' \end{aligned}$$

por tanto

$$R = \frac{1}{2} n^2 a^3 \frac{r'}{\rho^3} \left[1 + 3 \cos 2D' + \frac{m - m'}{m + m'} \frac{r'}{\rho} \left(\frac{9}{4} \cos D' + \frac{15}{4} \cos 3D' \right) \right]. \quad (15.9)$$

Finalmente se hacen los mismos cálculos para la componente S de (9.9), utilizando (11.9), (12.9), (13.9) y (7.A) se encuentra

$$S = -\frac{1}{2} n^2 a^3 \frac{r'}{\rho^3} \left[3 \sin 2D' + \frac{m - m'}{m + m'} \frac{r'}{\rho} \left(\frac{3}{4} \sin D' + \frac{15}{4} \sin 3D' \right) \right]. \quad (16.9)$$

6.9 Componentes de la aceleración perturbativa en función de los elementos orbitales

Ahora vamos a poner R y S en función de los elementos orbitales de la Luna, del Sol y de la elongación media entre la Luna y el Sol. (30.4) aplicado al movimiento del Sol respecto a la Tierra nos da

$$\rho = a \left(1 + \frac{e^2}{2} - e \cos M - \frac{e^2}{2} \cos 2M + \dots \right)$$

invirtiendo la ecuación anterior y conservando hasta los términos de segundo orden en e

$$\frac{a}{\rho} = 1 + e \cos M + e^2 \cos 2M + \dots$$

elevando al cubo

$$\left(\frac{a}{\rho}\right)^3 = 1 + \frac{3}{2}e^2 + 3e \cos M + \frac{9}{2}e^2 \cos 2M + \dots \quad (17.9)$$

Aplicando (30.4) a la Luna en su órbita alrededor de la Tierra

$$r' = a' \left(1 + \frac{e'^2}{2} - e' \cos M' - \frac{e'^2}{2} \cos 2M' + \dots \right). \quad (18.9)$$

Ahora vamos a expresar la elongación baricéntrica D' en función de la elongación media D_m definida por

$$D_m = L'_m - L_m$$

donde L'_m y L_m son las longitudes baricéntricas medias de la Luna y el Sol. Vamos a considerar que la corrección de las longitudes medias vienen dadas exclusivamente por las ecuaciones del centro de la Luna y el Sol, es decir

$$L' = L'_m + EC' = L'_m + 2e' \sin M' + \frac{5}{4}e'^2 \sin 2M'$$

$$L = L_m + EC = L_m + 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M$$

donde EC y EC' representan la ecuación el centro de la Luna y el Sol tomadas hasta el segundo orden en la excentricidad; de la anteriores expresiones se deduce

$$D' = L' - L = D_m + (EC' - EC) =$$

$$= D_m + 2e' \sin M' + \frac{5}{4}e'^2 \sin 2M' - 2e \sin M - \frac{5}{4}e^2 \sin 2M.$$

Vamos a calcular el seno y el coseno de jD' , donde j es un número natural. Como las excentricidades de la Luna y el Sol son pequeñas son admisibles los siguientes desarrollos

$$\cos jD' = \cos [jD_m + j(EC' - EC)] = \left[1 - \frac{j^2}{2}(EC' - EC)^2 + \dots \right] \cos jD_m -$$

$$- [j(EC' - EC) + \dots] \sin jD_m$$

y una fórmula parecida para el seno

$$\sin jD' = \sin [jD_m + j(EC' - EC)] = \left[1 + \frac{j^2}{2}(EC' - EC)^2 + \dots \right] \sin jD_m +$$

$$+ [j(EC' - EC) + \dots] \cos jD_m.$$

Si nos limitamos a términos de primer orden en las excentricidades tenemos

$$\sin D' = \sin D_m + 2(e' \sin M' - e \sin M) \cos D_m$$

$$\cos D' = \cos D_m - 2(e' \sin M' - e \sin M) \sin D_m$$

$$\sin 2D' = \sin 2D_m + 4(e' \sin M' - e \sin M) \cos 2D_m$$

$$\begin{aligned}
 \cos 2D' &= \cos 2D_m - 4(e' \sin M' - e \sin M) \sin 2D_m \\
 \sin 3D' &= \sin 3D_m + 6(e' \sin M' - e \sin M) \cos 3D_m \\
 \cos 3D' &= \sin 3D_m - 6(e' \sin M' - e \sin M) \sin 3D_m \\
 \frac{a}{\rho} &= 1 + e \cos M \\
 \left(\frac{a}{\rho}\right)^3 &= 1 + 3e \cos M \\
 r' &= a'(1 - e' \cos M'),
 \end{aligned} \tag{19.9}$$

que al ser sustituidas en (15.9) y (16.9) nos permiten hallar las componentes R y S en función de los elementos orbitales de la Luna y el Sol.

7.9 Principales componentes de la aceleración perturbativa

En los siguientes capítulos vamos a estudiar por separado las principales perturbaciones al movimiento lunar. A continuación lo que haremos es determinar la parte de las componentes de la aceleración perturbativa que dan lugar a esas perturbaciones principales.

La variación, que estudiaremos en el próximo capítulo, es producida por términos dependientes de la elongación media. Por tanto vamos a obtener la parte de R y S que depende de D_m .

Insertando las ecuaciones (19.9) en (15.9) y (16.9) y limitándonos a los términos que contienen D_m en solitario se encuentra aproximadamente

$$R = \frac{1}{2} n^2 a' (1 + 3 \cos 2D_m); \quad S = -\frac{3}{2} n^2 a' \sin 2D_m. \tag{20.9}$$

La perturbación llamada desigualdad paraláctica es la que tiene el término $(m - m')/(m + m')$ y depende de la elongación media. De nuevo usando (19.9) en (15.9) y (16.9) se encuentra que las componentes radial y perpendicular que la produce son

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{9}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m - m'}{m + m'} \cos D_m \\
 S &= -\frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m - m'}{m + m'} \sin D_m.
 \end{aligned} \tag{21.9}$$

La perturbación conocida como ecuación anual depende de la anomalía media solar y utilizando las mismas técnicas que anteriormente se encuentra que las componentes de la aceleración que originan esta perturbación son

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{3}{2} n^2 a' e \cos M \\
 S &= 0.
 \end{aligned} \tag{22.9}$$

Notemos por último que al desarrollar R encontramos un término constante, que no aparece en el desarrollo de S . Aplicando a (15.9) el desarrollo (17.9) y no considerando los términos periódicos ni la excentricidad

de la Luna se encuentra el término constante

$$R = \frac{1}{2}n^2a' \left(1 + \frac{3}{2}e^2 + \frac{1}{2}e'^2 \right). \quad (23.9)$$

8.9 Componente normal de la aceleración perturbativa

La tercera ecuación (4.9) da el valor de la aceleración perturbativa normal al plano de la órbita lunar T . Lo que haremos a continuación es expresar esta componente en función de los elementos orbitales. Por (5.9) y (6.9) la tercera ecuación (4.9) queda

$$T = -n^2a^3 \frac{1}{r^2} \left(\frac{r^3}{r'^3} - 1 \right) \sin i' \sin(\eta' - D) = -n^2a^3 \frac{r'}{r^3} 3 \sin i' \cos D \sin(\eta' - D),$$

desarrollando los dos últimos factores

$$\cos D \sin(\eta' - D) = \frac{1}{2} \sin \eta' - \frac{1}{2} \sin(2D - \eta')$$

por tanto

$$T = \frac{3}{2}n^2a' \sin i' \left[\sin(2D - \eta') - \sin \eta' \right]$$

donde hemos hecho la suposición $r \approx a$ aceptable en el nivel de nuestra aproximación. Podemos llevar la aproximación más lejos y considerar los valores medios de los ángulos D y η'

$$T = \frac{3}{2}n^2a' \sin i' \left[\sin(2D_m - \eta'_m) - \sin \eta'_m \right] \quad (24.9)$$

siendo η'_m el ángulo desde el nodo ascendente de la Luna a su posición media.

9.9 Ecuaciones de movimiento

Podemos considerar con muy buena aproximación que el movimiento lunar es plano. Elegimos un sistema de coordenadas de origen en la Tierra cuyo eje x se dirija hacia el nodo ascendente de la Luna y la órbita se encuentra en el plano xy . Vamos a calcular la aceleración de la Luna en este sistema. Por (7.4) se conoce la velocidad orbital

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{r}' \mathbf{u}_r + r' \dot{\eta}' \mathbf{u}_p$$

donde η' es el ángulo desde el nodo ascendente a la posición de la Luna. Como no estamos considerando perturbación normal al plano de la órbita, debemos suponer que el nodo ascendente de la Luna permanece invariable, por tanto se cumple

$$d\eta' = dL' \Rightarrow \dot{\mathbf{r}}' = \dot{r}' \mathbf{u}_r + r' \dot{L}' \mathbf{u}_p.$$

Al derivar la anterior expresión obtenemos la aceleración de la Luna

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}' &= \ddot{r}' \mathbf{u}_r + \dot{r}' \dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}' \dot{L}' \mathbf{u}_p + r' \ddot{L}' \mathbf{u}_p + r' \dot{L}' \dot{\mathbf{u}}_p = \\ &= \ddot{r}' \mathbf{u}_r + \dot{r}' \dot{L}' \mathbf{u}_p + \dot{r}' \dot{L}' \mathbf{u}_p + r' \ddot{L}' \mathbf{u}_p - r' \dot{L}'^2 \mathbf{u}_r = \end{aligned}$$

$$= (\ddot{r}' - r' \dot{L}'^2) \mathbf{u}_r + (2\dot{r}' \dot{L}' + r' \ddot{L}') \mathbf{u}_p = (\ddot{r}' - r' \dot{L}'^2) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r'} \frac{d}{dt} (r'^2 \dot{L}') \mathbf{u}_p$$

la aceleración a la que está sometida la Luna es la suma de la que tiene su origen en la interacción Tierra-Luna (6.4) y la perturbatriz

$$\ddot{\mathbf{r}}' = -G \frac{m + m'}{r'^2} \mathbf{u}_r + R \mathbf{u}_r + S \mathbf{u}_p$$

por tanto la ecuación de movimiento de la Luna afectada por la perturbación del Sol y en el supuesto de que la órbita de la Luna se sitúe en el plano de la eclíptica es

$$\begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{L}'^2 &= -G \frac{m + m'}{r'^2} + R \\ \frac{1}{r'} \frac{d}{dt} (r'^2 \dot{L}') &= S. \end{aligned} \tag{25.9}$$

En los capítulos que siguen vamos a aplicar esta ecuación para diversas aceleraciones perturbatrices y determinaremos las correcciones que hay que hacer a la longitud de la Luna y las variaciones que experimentan los elementos orbitales.

10

Variación, desigualdad paraláctica y ecuación anual

1.10 Introducción

Como venimos diciendo, pretendemos hallar una teoría lunar simplificada, que si bien no tenga en cuenta todos los términos, considere los más importantes. Por esta razón nos hemos permitido hacer simplificaciones en el capítulo anterior para obtener las tres componentes de la aceleración perturbativa (15.9), (16.9) y (24.9) y para hallar las ecuaciones de movimiento (25.9).

En lo que sigue vamos a integrar las ecuaciones (25.9) para varias perturbaciones con independencia de las restantes. Es decir, supondremos que las perturbaciones actúan independientemente unas de otras.

Al integrar (25.9) pondremos las componentes de la aceleración perturbativa en función de D_m , M y M' , cantidades que dependen del tiempo. Pues bien, supondremos que estas magnitudes varían linealmente, lo cual nos lleva a despreciar los restantes términos en sus desarrollos en serie en función del tiempo.

También en orden a simplificar los cálculos tomaremos las excentricidades del Sol y la Luna y la inclinación de la órbita lunar como constantes e iguales a sus valores medios.

Cuando al resolver la ecuación de movimiento encontremos términos de diversos periodos, despreciaremos los de periodos cortos pues estos términos son más pequeños. En efecto, supongamos que la aceleración perturbativa es de la forma

$$W = W_0 \cos At$$

por la primera de las ecuaciones de movimiento (25.9) se verá más adelante que r' tendrá la forma

$$r' = r'_0 \frac{1}{A^2} \cos At$$

entonces cuanto mayor sea A más pequeña será la acción perturbadora. Como el periodo es $T = 2\pi/A$, significa que a mayor A menor periodo y perturbación menor, tal como habíamos dicho.

En este capítulo vamos a calcular las perturbaciones llamadas variación, desigualdad paraláctica y ecuación anual, que la entendemos como correc-

ciones que hay que hacer a la longitud de la Luna. En los siguientes capítulos consideraremos las restantes perturbaciones.

2.10 La variación

La variación es una desigualdad del movimiento lunar que tiene un periodo de la mitad de un mes sinódico medio, es decir del tiempo promedio entre dos lunas nuevas consecutivas. La variación se anula en las oposiciones y conjunciones del Sol y la Luna, así como en las cuadraturas de ambos astros. La corrección máxima que la variación puede hacer a la longitud lunar es de unos 39 minutos de arco.

Las componentes de la aceleración perturbativa causantes de la variación son las halladas en (20.9)

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} n^2 a' (1 + 3 \cos 2D_m) \\ S &= -\frac{3}{2} n^2 a' \sin 2D_m. \end{aligned} \quad (20.9)$$

El movimiento medio sinódico de la Luna se define por

$$n_s = \frac{dD_m}{dt} = n' - n$$

donde D_m es en nuestra aproximación

$$D_m = L'_m - L_m = L'_{m0} + n't - L_{m0} - nt = (n' - n)t + (L'_{m0} - L_{m0}),$$

siendo L'_{m0} y L_{m0} las longitudes medias de la Luna y el Sol en el momento inicial. Nótese que en la definición de D_m sólo hemos tenido en cuenta los términos lineales. n_s representa el movimiento de la Luna con respecto al Sol. El periodo medio sinódico de la Luna es por tanto

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s} = \frac{2\pi}{n' - n}$$

mientras que el periodo de los términos periódicos de (20.9) es

$$T = \frac{2\pi}{d(2D_m)/dt} = \frac{\pi}{n_s} = \frac{T_s}{2}$$

es decir, corresponde a la mitad del periodo sinódico como ya habíamos dicho. Si tomamos los valores del movimiento medio de la Luna n' y del Sol n en el año 2000

$$n' = 481\,267,881\,3424^\circ/\text{siglo}; \quad n = 36\,000,769\,8231^\circ/\text{siglo}$$

entonces encontramos que el periodo de la variación es 14,765 días.

3.10 Efecto del término constante de R

Hemos visto en (23.9) que hay un término constante en el desarrollo de la componente radial R de la aceleración perturbativa, sin que exista término constante en la componente perpendicular S . Al aplicar (23.9) a la primera de las ecuaciones (25.9) se encuentra

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 &= -G \frac{m+m'}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' \\ \frac{1}{r'} \frac{d}{dt} \left(r'^2 \frac{dL'}{dt} \right) &= 0.\end{aligned}$$

De la primera ecuación y despreciando la excentricidad de la Luna se tiene

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 = \frac{-G(m+m') + \frac{1}{2} n^2 a'^3}{r'^2}, \quad (1.10)$$

si no existiera el término constante obtendríamos de las ecuaciones de movimiento la relación (18.4)

$$n'^2 a'^3 = G(m+m')$$

pero al existir el término constante se modifica la ley de atracción gravitatoria y el resultado es

$$n'^2 a'^3 = G(m+m') - \frac{1}{2} n^2 a'^3 \quad (2.10)$$

o bien

$$G(m+m') = n'^2 a'^3 F$$

donde F es definida por

$$F = 1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2}.$$

El resultado de esta perturbación es reducir la atracción que la Luna sufre por la Tierra y por tanto aumentar su periodo orbital

$$T' = 2\pi \sqrt{F \frac{a'^3}{G(m+m')}}.$$

4.10 Corrección de la longitud de la Luna por la variación

Al aplicar (25.9) a las componentes (20.9) de la aceleración perturbativa se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 &= -G \frac{m+m'}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' (1 + 3 \cos 2D_m) \\ \frac{1}{r'} \frac{d}{dt} \left(r'^2 \frac{dL'}{dt} \right) &= -\frac{3}{2} n^2 a' \sin 2D_m,\end{aligned} \quad (3.10)$$

por (2.10)

$$\begin{aligned}\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 &= -n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} - \frac{1}{2} n^2 \frac{a'^3}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' (1 + 3 \cos 2D_m) = \\ &= -n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' \left(1 - \frac{a'^2}{r'^2} + 3 \cos 2D_m \right)\end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(r'^2 \frac{dL'}{dt} \right) = \frac{dC'}{dt} = -\frac{3}{2} n^2 a'^2 \sin 2D_m, \quad (4.10)$$

en la segunda ecuación hemos despreciado la excentricidad de la Luna y C' es la constante de las áreas asociada a la órbita lunar (ahora no una constante).

Al integrar la segunda de las ecuaciones anteriores resulta

$$C' - C'_0 = -\frac{3}{2} n^2 a'^2 \int_0^t \sin 2D_m dt$$

de donde resulta

$$\begin{aligned} C' &= C'_0 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n' - n} a'^2 \cos 2D_m - \frac{3}{4} \frac{n^2}{n' - n} a'^2 \cos 2D_{m0} = \\ &= \bar{C}' + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n' - n} a'^2 \cos 2D_m \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde \bar{C}' es el valor medio de la «constante de las áreas». Como por definición

$$C' = r'^2 \frac{dL'}{dt} \quad (6.10)$$

su valor medio es

$$\bar{C}' = n' a'^2$$

entonces

$$C' = n' a'^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \cos 2D_m \right).$$

Por la definición de C' (6.10) tendremos

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 \approx n'^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \cos 2D_m \right) \quad (7.10)$$

donde sólo consideramos los términos periódicos dependientes de $2D_m$. Ahora llevamos (7.10) a la primera ecuación (4.10)

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = n^2 a' \left(1 - \frac{a'}{r'} \right) \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{a'}{r'} \right) - \left(\frac{n'}{n} \right)^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \right] + \frac{3}{2} n^2 a' \left[1 + \left(\frac{a'}{r'} \right)^3 \frac{n'}{n' - n} \right] \cos 2D_m$$

como la excentricidad de la Luna es pequeña no cometemos mucho error si identificamos a' y r' en todos los términos de los dos corchetes, tras lo que queda

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = -a' \left(1 - \frac{a'}{r'} \right) (n'^2 - n^2) + \frac{3}{2} n^2 a' \left[1 + \frac{n'}{n' - n} \right] \cos 2D_m. \quad (8.10)$$

Vamos a investigar la solución

$$r' = a' (1 - \nu \cos 2D_m) \quad (9.10)$$

donde ν es una cantidad a determinar. Al invertir la anterior ecuación y dando por supuesto que r' es muy cercano a a' y por tanto ν es pequeño

$$a' \approx r'(1 + \nu \cos 2D_m) \Rightarrow 1 - \frac{a'}{r'} = -\nu \cos 2D_m, \quad (10.10)$$

al derivar (9.10) se encuentra

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = 4a'\nu(n' - n)^2 \cos 2D_m$$

donde hemos tenido en cuenta que la derivada de D_m es $n' - n$. Llevando el anterior resultado y (9.10) a (8.10)

$$4a'\nu(n' - n)^2 = a'\nu(n'^2 - n^2) + \frac{3}{2}n^2 a' \left[1 + \frac{n'}{n' - n} \right]$$

que nos permite determinar la constante ν

$$\nu = \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n},$$

con lo que hemos resuelto la ecuación diferencial (8.10), que tiene por solución

$$r' = a' \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} \cos 2D_m \right]. \quad (11.10)$$

El ultimo paso es llevar (11.10) a (7.10) y posteriormente integrar

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right) = n' \left\{ 1 + \left[3 \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \right] \cos 2D_m \right\}$$

sólo hemos tenido en cuenta los términos periódicos dependientes de $2D_m$. Al integrar llegamos a

$$\begin{aligned} L' &= L'_0 + n't + \frac{1}{2} \frac{n'}{n' - n} \left[3 \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \right] \sin 2D_m \Big|_0^t = \\ &= L'_{m0} + n't + \frac{n'}{n' - n} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n' - n)} \right] \sin 2D_m \end{aligned}$$

tomando valores numéricos se encuentra

$$L' = L'_{m0} + n't + 35',1 \sin 2D_m$$

pero si se toman todos los términos la amplitud de la variación alcanza los 39,5 minutos de arco o 0,1149 radianes.

Como se ve de la ecuación (9.10) la variación produce que la órbita lunar se estreche en la dirección del Sol. Por efecto de la variación r' toma los menores valores cuando D_m es 0° y 180° (entonces $\cos 2D_m = 1$) y los mayores valores cuando vale 90° y 270° ($\cos 2D_m = -1$). La relación entre las distancias mayores y menores es

$$\frac{1 + \nu}{1 - \nu} = \frac{1 + 0,1149}{1 - 0,1149} = 1,26.$$

5.10 La desigualdad paraláctica

La desigualdad paraláctica es una perturbación de la longitud de la Luna que depende del argumento D_m y por tanto tiene un periodo de un mes sinódico. Como se vio en (21.9) las componentes de la aceleración perturbativa causantes de la desigualdad paraláctica son

$$\begin{aligned} R &= \frac{9}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \\ S &= -\frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m. \end{aligned} \quad (21.9)$$

El procedimiento a seguir para determinar la corrección que hay que hacer a la longitud de la Luna por la desigualdad paraláctica es el mismo que el realizado en el epígrafe anterior. Primero aplicamos las ecuaciones de movimiento (25.9)

$$\begin{aligned} \ddot{r}' - r' \dot{L}'^2 &= -G \frac{m+m'}{r'^2} + \frac{9}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m = \\ &= -n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} - \frac{1}{2} n^2 \frac{a'^3}{r'^2} + \frac{9}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \quad (12.10) \\ \frac{1}{r'} \frac{d}{dt} (r'^2 \dot{L}') &= -\frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m, \end{aligned}$$

a continuación integramos la segunda ecuación

$$C' = r'^2 \dot{L}' = \bar{C}' + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n' - n} \frac{a'^3}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m,$$

al igual que hicimos en el epígrafe anterior identificamos a' y r' , es decir despreciamos la excentricidad de la Luna. Con el mismo razonamiento hecho anteriormente encontramos

$$\bar{C}' = n' a'^2$$

por tanto

$$C' = n' a'^2 \left(1 + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \frac{a'}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \right)$$

y

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 \approx n'^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \frac{a'}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \right) \quad (13.10)$$

donde sólo consideramos los términos periódicos dependientes de D_m . Este resultado lo llevamos a la primera ecuación (12.10)

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} \left(\frac{a'}{r'} - 1 \right) + \frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \left(3 + 2 \frac{a'^3}{r'^3} \frac{n'}{n'-n} \right) \cos D_m$$

haciendo de nuevo $r' \approx a'$ excepto en el primer paréntesis

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = n'^2 a' \left(\frac{a'}{r'} - 1 + \frac{3}{8} \frac{a'}{a} \frac{m-m'}{m+m'} \frac{n^2}{n'^2} \frac{5n'-3n}{n'-n} \cos D_m \right) \quad (14.10)$$

cuya solución es de la forma

$$r' = a' \left(1 + \frac{a'}{a} \nu \cos D_m \right) \quad (15.10)$$

ν es un parámetro a determinar. De (15.10) se deduce

$$\begin{aligned} \frac{a'}{r'} - 1 &= -\frac{a'}{a} \nu \cos D_m \\ \frac{d^2 r'}{dt^2} &= -\frac{a'^2}{a} \nu (n' - n)^2 \cos D_m \end{aligned}$$

que se sustituye en (14.10) y tras simplificar se obtiene el valor de ν

$$\nu = \frac{3}{8} \frac{5 \left(\frac{n}{n'} \right) - 3 \left(\frac{n}{n'} \right)^2}{2 - 3 \left(\frac{n}{n'} \right) + \left(\frac{n}{n'} \right)^2} \frac{m-m'}{m+m'}, \quad (16.10)$$

como una primera aproximación se tiene

$$\nu \approx \frac{15}{16} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'}$$

La solución (15.10) se sustituye en (13.10)

$$\frac{dL'}{dt} = n' + n' \frac{a'}{a} \left[\frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} - \frac{30}{16} \frac{n}{n'} \right] \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m$$

hemos tenido en cuenta solamente los términos periódicos dependientes de D_m . Integrando se tiene

$$\begin{aligned} L' &= L'_0 + n't + \frac{n'}{n'-n} \frac{a'}{a} \left[\frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} - \frac{30}{16} \frac{n}{n'} \right] \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m \Big|'_0 \approx \\ &\approx L'_{m0} + n't - \frac{15}{8} \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m \end{aligned} \quad (17.10)$$

en la aproximación sólo hemos tenido en consideración la primera potencia del cociente n/n' .

En el epígrafe 5.9 definimos el ángulo D entre el Sol y la Luna por

$$D = L' - L$$

que se refiere a longitudes geocéntricas. En el cálculo realizado en el epígrafe 6.9 sólo se tuvieron en cuenta los términos periódicos producidos por las ecuaciones del centro del Sol y de la Luna. Pero en el cálculo de la desigualdad paraláctica no intervienen las excentricidades, es decir podemos tomar tanto la órbita del Sol como de la Luna como circunferencias y por tanto no tenemos que considerar la ecuación del centro. Pero en vista a mejorar el resultado de la corrección por la desigualdad paraláctica vamos a considerar como

única variación periódica de la longitud de la Luna la que previamente hemos calculado en (17.10), es decir

$$D = D_m - \frac{15}{8} \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m = D_m - \chi \sin D_m. \quad (18.10)$$

donde para simplificar hemos definido

$$\chi = \frac{15}{8} \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'}.$$

A continuación tenemos que determinar las componentes de la aceleración perturbativa, para lo que utilizamos (15.9) y (16.9) en donde sustituimos (18.10). Previamente hacemos el cálculo

$$\begin{aligned} \cos D &= \cos D_m + \chi \sin^2 D_m \\ \cos 2D &= \cos 2D_m + \chi \cos D_m - \chi \cos 3D_m \\ \cos 3D &= \cos 3D_m + \frac{3}{2} \chi \cos 2D_m - \frac{3}{2} \cos 4D_m \end{aligned}$$

donde despreciamos términos de χ^2 y hemos usado la primera de las fórmulas (7.A) del apéndice A. Para el cálculo de la desigualdad paraláctica sólo nos interesan los términos en D_m por tanto en (15.9) hay que hacer las sustituciones

$$\begin{aligned} \cos D &= \cos D_m \\ \cos 2D &= \chi \cos D_m = \frac{15}{8} \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \\ \cos 3D &= 0. \end{aligned}$$

Lo mismo hacemos con los senos que hay que sustituir en (16.9)

$$\begin{aligned} \sin D &= \sin D_m \\ \sin 2D &= \frac{15}{8} \frac{a'}{a} \frac{n}{n'} \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m \\ \sin 3D &= 0. \end{aligned}$$

Con estos resultados las componentes (15.9) y (16.9) quedan

$$\begin{aligned} R &= n^2 \frac{a'^2}{a} \left(\frac{9}{8} + \frac{45}{16} \frac{n}{n'} \right) \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \\ S &= -n^2 \frac{a'^2}{a} \left(\frac{3}{8} + \frac{45}{16} \frac{n}{n'} \right) \frac{m-m'}{m+m'} \sin D_m, \end{aligned} \quad (19.10)$$

donde, una vez más, no hemos tenido en cuenta las excentricidades.

A continuación volvemos a repetir el cálculo ya conocido: por las ecuaciones de movimiento se determina la «constante de las áreas»; se calcula la derivada de la longitud de la Luna; se determina r' y finalmente se determina la corrección a la longitud lunar.

La «constante de las áreas» es

$$C' = n' a'^2 \left[1 + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \frac{a'}{a} \left(1 + \frac{15}{2} \frac{n}{n'} \right) \frac{m-m'}{m+m'} \cos D_m \right]$$

despreciando términos de cuarto orden de n/n'

$$C' = n'a'^2 \left\{ 1 + \left[\frac{3}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{51}{16} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 \right] \frac{a' m - m'}{a m + m'} \cos D_m \right\}.$$

Por definición de la «constante de las áreas»

$$\left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 = n'^2 \left(\frac{a'}{r'} \right)^4 \left\{ 1 + \left[\frac{3}{4} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 + \frac{51}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^3 \right] \frac{a' m - m'}{a m + m'} \cos D_m \right\} \quad (20.10)$$

donde sólo hemos retenido el término dependiente de D_m .

De la primera de las ecuaciones de movimiento se llega a

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = n'^2 a' \left(\frac{a'}{r'} - 1 \right) + \frac{3}{8} n^2 \frac{a'^2}{a} \left(5 + \frac{49}{2} \frac{n}{n'} \right) \frac{m - m'}{m + m'} \cos D_m \quad (21.10)$$

que tiene de solución

$$r' = a' \left(1 + \nu \frac{a'}{a} \cos D_m \right) \quad (22.10)$$

de donde se deriva

$$\begin{aligned} \frac{a'}{r'} - 1 &= -\nu \frac{a'}{a} \cos D_m \\ \frac{d^2 r'}{dt^2} &= -\nu \frac{a'^2}{a} (n' - n)^2 \cos D_m \end{aligned}$$

que al sustituir en (21.10) resulta

$$\nu = \left[\frac{15}{16} \frac{n}{n'} + \frac{81}{16} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{m - m'}{m + m'},$$

sustituyendo (22.10) en (20.10)

$$\frac{dL'}{dt} = n' \left\{ 1 - \left[\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{78}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{a' m - m'}{a m + m'} \cos D_m \right\}$$

al integrar

$$L' = L'_{m0} + n't - \left[\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{93}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{a' m - m'}{a m + m'} \sin D_m,$$

tomando valores numéricos

$$L' = L'_{m0} + n't - 106'',2 \sin D_m,$$

si se toman todos los términos el coeficiente del término periódico es 125,5 segundos de arco.

Como resultado de la desigualdad paraláctica la órbita lunar se modifica en el sentido de que la distancia Tierra-Luna es más grande cerca de la Luna nueva $D_m = 0$ y más pequeña cuando se está cerca de la Luna llena $D_m = 180^\circ$, permaneciendo inalterable en los cuartos.

6.10 Ecuación anual

La ecuación anual es una perturbación lunar que tiene el periodo de un año y que refleja la variación de la perturbación solar en ese periodo. En (22.9) se calculó que las componentes de la aceleración que produce esta perturbación son

$$R = \frac{3}{2} n^2 a' e \cos M$$

$$S = 0.$$

para hallar la corrección que por este motivo se le tiene que hacer a la longitud de la Luna seguimos el mismo procedimiento que el realizado en los epígrafes anteriores.

Al aplicar las ecuaciones de movimiento (25.9) se tiene

$$\ddot{r}' - r' \dot{L}'^2 = -G \frac{m+m'}{r'^2} + \frac{3}{2} n^2 a' e \cos M =$$

$$= -n'^2 \frac{a'^3}{r'^2} - \frac{1}{2} n^2 \frac{a'^3}{r'^2} + \frac{3}{2} n^2 a' e \cos M$$

$$\frac{1}{r'} \frac{d}{dt} (r'^2 \dot{L}') = 0,$$

de la segunda ecuación se deriva la constante de las áreas

$$C' = r'^2 \frac{dL'}{dt} = n' a'^2 \quad (23.10)$$

este resultado se lleva a la primera de las ecuaciones de movimiento

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} \approx \frac{n'^2 a'^3}{r'^2} \left(\frac{a'}{r'} - 1 \right) + \frac{3}{2} n^2 a' e \cos M \quad (24.10)$$

poniendo $a'^2/r'^2 \approx 1$; la solución de la anterior ecuación es

$$r' = a' (1 + \nu \cos M), \quad (25.10)$$

de donde se deduce

$$\frac{a'}{r'} - 1 = -\nu \cos M$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} = -a' \nu n^2 \cos M.$$

Sustituyendo los anteriores resultados en (24.10)

$$\nu = \frac{3}{2} \frac{n^2 e}{n'^2 - n^2} \approx \frac{3}{2} e \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right].$$

Llevando (25.10) a (23.10)

$$\frac{dL'}{dt} = n' \left(\frac{a'}{r'} \right)^2 \approx n' (1 - \nu \cos M)^2 \approx n' (1 - 2\nu \cos M)$$

al integrar se encuentra

$$\begin{aligned}
 L' &= L'_0 + n't - 2 \frac{n'}{n} \frac{3}{2} e \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \sin M \Big|_0 = \\
 &= L'_{m0} + n't - 2 \frac{n'}{n} \frac{3}{2} e \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \sin M,
 \end{aligned}$$

conservando sólo el término que contiene n^2/n'^2

$$L' = L'_{m0} + n't - 3 \frac{n}{n'} e \sin M \quad (26.10)$$

que es el término principal de la ecuación anual. El valor numérico de la corrección de la longitud de la Luna por efecto de la ecuación anual es

$$-3 \frac{n}{n'} e = -0,00375 \text{ rad} = -12' 53''$$

un cálculo exacto da un coeficiente de 11,1 minutos de arco.

Por (25.10) podemos comprobar que el efecto de la ecuación anual es que la distancia entre la Tierra y la Luna aumenta cuando el Sol se encuentra en el pericentro de su órbita ($M = 0^\circ$), mientras que la distancia es menor cuando está en la posición opuesta ($M = 180^\circ$).

Aceleración secular, movimiento del pericentro y evección

1.11 Aceleración secular de la Luna

Hemos supuesto anteriormente que la longitud media de la Luna tiene la forma

$$L'_m = L'_{m0} + n't \quad (1.11)$$

pero se conoce desde el siglo XVII que existe una «aceleración» del movimiento medio de la Luna, es decir un término de segundo orden en el tiempo

$$L'_m = L'_{m0} + n't + bt^2, \quad (2.11)$$

hay que notar que la verdadera aceleración de la longitud media de la Luna es $2b$, pero la costumbre hace que se le llame aceleración secular de la Luna al coeficiente b .

Habíamos encontrado en (34.4) la distancia media de la Tierra al Sol es

$$r_m = a \left(1 + \frac{e^2}{2} \right)$$

pero a consecuencia de las perturbaciones planetarias sobre la Tierra, la excentricidad aparente del Sol e varía secularmente -véase (3.5)- el resultado es que la distancia media entre Tierra y Sol también varía.

A resultas de esta variación la acción perturbadora del Sol sobre la Luna también variará de forma secular, apareciendo el término b en (2.11).

2.11 Aceleración secular de la Luna

Habíamos calculado en (23.9) que el término constante de la componente radial de la aceleración perturbativa es

$$R = \frac{1}{2} n^2 a' \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \quad (23.9)$$

donde no vamos a tener en consideración la excentricidad de la Luna, es decir vamos a suponer una órbita circular. Llevando (23.9) a la primera de las ecuaciones de movimiento (25.9)

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 = - \frac{G(m+m')}{r'^2} + \frac{1}{2} n^2 a' \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \approx$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - r' \left(\frac{dL'}{dt} \right)^2 \approx \frac{-G(m+m') + \frac{1}{2} n^2 a'^3 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right)}{r'^2} = \frac{-n'^2 a'^3}{r'^2}$$

Por tanto se modifica la ley de gravitación, de tal forma que se cumple

$$G(m+m') = n'^2 a'^3 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'^2} e^2 \right),$$

como el primer miembro es constante, así lo será también el segundo miembro. Al no existir aceleración perturbativa constante perpendicular se cumple la ley de las áreas

$$n' a'^2 = cte$$

por tanto

$$n'^4 a'^6 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'^2} e^2 \right)^2 = cte \Rightarrow n' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'^2} e^2 \right)^2 = cte.$$

Al derivar la anterior expresión respecto a e y sólo considerando hasta la primera potencia de la excentricidad encontramos

$$\frac{dn'}{de} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} \right)^2 + 2n' \left(1 + \frac{1}{2} \frac{n^2}{n'^2} \right) \left(-\frac{n^2}{n'^3} \frac{dn'}{de} + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'^2} e \right) = 0$$

simplificando

$$\frac{dn'}{de} = -3 \frac{n^2}{n'} e \quad (3.11)$$

donde hemos despreciado los términos de segundo orden en n/n' .

Según (3.5) la excentricidad de la órbita terrestre disminuye con el tiempo con una expresión del tipo

$$e = e_0 - e_1 t.$$

Llevando este resultado a (3.11)

$$dn' = 3 \frac{n^2}{n'} e_1 e dt \approx 3 \frac{n^2}{n'} e_1 e_0 dt$$

tomando sólo la primera potencia de la excentricidad. Integrando se encuentra

$$n' = n'_0 + 3 \frac{n^2}{n'} e_1 e_0 t \quad (4.11)$$

lo que nos viene a mostrar la existencia de una aceleración secular del movimiento medio de la Luna.

Como resultado de (4.11) se encuentra que hay que hacer una corrección a la longitud media de la Luna (1.11)

$$\frac{dL'_m}{dt} = n' = n'_0 + 3 \frac{n^2}{n'} e_1 e_0 t \Rightarrow L'_m = L'_{m0} + n'_0 t + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} e_1 e_0 t^2$$

de donde se deduce un valor de la aceleración secular de la Luna

$$b = \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} e_1 e_0.$$

Un cálculo numérico nos da $b = 10'',3$. El cálculo completo reduce el resultado hasta los 6 segundos. No obstante, los datos observacionales son el doble de la anterior cantidad, incremento que se interpreta por el frenado secular que sufre la Luna con motivo de las mareas terrestres.

3.11 Desarrollo de la función perturbatriz

En (3.8) hemos definido la función perturbatriz

$$P = Gm_s \left(\frac{1}{r''} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r^3} \right), \quad (5.11)$$

de la figura 1.8 se encuentra

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = rr' \cos D \Rightarrow xx' + yy' + zz' = rr' \cos D, \quad (6.11)$$

de la misma gráfica se obtiene por aplicación del teorema del coseno

$$r''^2 = r'^2 + r^2 - 2rr' \cos D \Rightarrow \frac{r}{r''} = \left(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos D \right)^{-1/2},$$

como $r \gg r'$ podemos desarrollar el paréntesis en serie de potencias

$$\frac{r}{r''} = 1 + \frac{r'}{r} \cos D - \frac{1}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \cos^2 D - \frac{3}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos D + \frac{5}{2} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 \cos^3 D + \dots \quad (7.11)$$

utilizando la primera ecuación (8.A) y (9.A)

$$\begin{aligned} \cos^2 D &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2D \\ \cos^3 D &= \frac{3}{4} \cos D + \frac{1}{4} \cos 3D \end{aligned}$$

al sustituir en (7.11)

$$\frac{r}{r''} = 1 + \frac{r'}{r} \cos D + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (1 + 3 \cos 2D) + \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (3 \cos D + 5 \cos 3D) \quad (8.11)$$

llevando (6.11) y (8.11) a (5.11)

$$P = \frac{n^2 a^3}{r} \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (1 + 3 \cos 2D) + \frac{1}{8} \left(\frac{r'}{r} \right)^3 (3 \cos D + 5 \cos 3D) \right] \quad (9.11)$$

donde hemos tenido en cuenta

$$Gm_s \approx n^2 a^3.$$

Como el primer sumando del corchetes de (9.11) no depende de términos relacionados con la órbita de la Luna no produce ninguna aceleración perturbativa, tal como se comprueba por (31.8), por tanto reducimos (9.11) a

$$P = \frac{n^2 a^3}{r^3} r'^2 \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2D + \frac{3}{8} \frac{r'}{r} \cos D + \frac{5}{8} \frac{r'}{r} \cos 3D \right]. \quad (10.11)$$

Vamos a considerar sólo términos que dependan de la excentricidad de la Luna, también supondremos $r \gg r'$ por lo que sólo tomaremos hasta la segunda potencia de r'/r , tampoco vamos a considerar los términos paralácticos, por tanto $D' = D$; por otra parte elevando al cuadrado (30.4) y tomando hasta la segunda potencia de la excentricidad resulta

$$r'^2 = a'^2 \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 - 2e' \cos M' - \frac{1}{2} e'^2 \cos 2M' \right)$$

con todo lo dicho (10.11) queda

$$P = n^2 a'^2 \left(1 + \frac{3}{2} e'^2 - 2e' \cos M' - \frac{1}{2} e'^2 \cos 2M' \right) \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos 2D' \right), \quad (11.11)$$

desarrollando hasta el segundo orden de la excentricidad

$$\begin{aligned} \cos 2D' &= \cos 2(D_m + EC') = \cos 2 \left(D_m + 2e' \sin M' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' \right) = \\ &= \cos 2D_m - 4e' \cos 2D_m + 4e'^2 \cos 2D_m \cos 2M' - \\ &\quad - 4e' \sin 2D_m \sin M' - \frac{5}{2} e'^2 \sin 2D_m \sin 2M' \end{aligned}$$

donde hemos seguido la misma técnica aplicada en el epígrafe 6.9. Llevando este resultado a (11.11), simplificando y agrupando queda

$$P = n^2 a'^2 \left[\begin{aligned} &\frac{3}{8} e'^2 - \frac{1}{2} e' \cos M' - \frac{15}{8} e'^2 \cos 2D_m - \frac{1}{8} e'^2 \cos 2M' + \\ &\quad + \frac{3}{4} e' \cos(2D_m + M') - \frac{9}{4} e' \cos(2D_m - M') + \\ &\quad + \frac{3}{4} e'^2 \cos(2D_m + 2M') + \frac{15}{8} e'^2 \cos(2D_m - 2M') \end{aligned} \right] \quad (12.11)$$

donde sólo consideramos los términos dependientes de la excentricidad de la Luna.

La función perturbatriz (12.11) es una suma de términos periódicos, excepto el primero, que dan lugar a aceleraciones perturbativas igualmente periódicas, las que a su vez van a variar con la misma periodicidad a los elementos orbitales de la Luna.

Consideremos un término periódico de la forma

$$A \cos B(t)$$

como ya habíamos señalado el periodo de este término es

$$T = \frac{2\pi}{dB/dt}$$

entonces el término $\cos M'$ tiene un periodo de un mes anomalístico; $\cos 2D_m$ tiene un periodo de la mitad de un mes sinódico; $\cos 2M'$ tiene la

periodicidad de la mitad de un mes anomalístico; $\cos(2D_m + M')$ es cercano a la tercera parte de un mes; $\cos(2D_m - M')$ le corresponde aproximadamente un mes; $\cos(2D_m + 2M')$ tiene la cuarta parte del mes y finalmente, $\cos(2D_m - 2M')$ tiene un periodo de unos seis meses, por tanto es el término de mayor periodo.

4.11 Variación del argumento de latitud del pericentro

Vamos a aplicar las ecuaciones de Gauss (30.8) a la función perturbatriz (12.11) para obtener la variación del semieje mayor, la excentricidad y el argumento de latitud del pericentro de la Luna. Como ya hemos indicado, todos los términos de (12.11) contribuyen a estas variaciones, pero el más importante de todos, tanto por su intensidad como por su periodo más largo, es

$$P = \frac{3}{8} n^2 a'^2 e'^2 [1 + 5 \cos(2D_m - 2M')] = \frac{3}{8} n^2 a'^2 e'^2 [1 + 5 \cos(2L_m - 2\bar{\omega}')],$$

notemos que al no considerar la perturbación normal al plano orbital, el nodo ascendente lunar queda fijo. Por este motivo ocurrirá que $d\omega' = d\bar{\omega}'$. Por tanto lo que vamos a calcular es la variación del argumento de latitud del pericentro.

Las ecuaciones de Gauss (30.8) despreciando la segunda potencia de la excentricidad

$$\frac{da'}{dt} = \frac{2}{n'a'} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'}; \quad \frac{de'}{dt} = \frac{1}{n'a'e'} \frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'}; \quad \frac{d\bar{\omega}'}{dt} = \frac{1}{n'a'^2 e'} \frac{\partial P}{\partial e'}$$

que al aplicar a nuestro problema da

$$\begin{aligned} \frac{da'}{dt} &= \frac{2}{n'a'} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon'} = 0 \\ \frac{de'}{dt} &= -\frac{1}{n'a'^2 e'} \frac{\partial P}{\partial \bar{\omega}'} = -\frac{15}{4} \frac{n^2}{n'} e' \sin(2L_m - 2\bar{\omega}') \\ \frac{d\bar{\omega}'}{dt} &= \frac{1}{n'a'^2 e'} \frac{\partial P}{\partial e'} = \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} [1 + 5 \cos(2L_m - 2\bar{\omega}')] \end{aligned} \quad (13.11)$$

De la primera de estas ecuaciones se encuentra que en el orden considerado, el semieje mayor de la Luna no se ve alterado por las perturbaciones solares.

Como lo que pretendemos es obtener una teoría simplificada, vamos a integrar (13.11) pero suponiendo que tanto la variación de e' como de $\bar{\omega}'$ es suficientemente lenta, de tal forma que podemos considerarlas constantes al hacer la integración de las dos últimas ecuaciones (13.11).

Por lo dicho

$$\begin{aligned} e' &\approx e'_0 + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} e'_m \cos(2L_m - 2\bar{\omega}') \Big|_{t_0}^t = \\ &= e'_0 - \frac{15}{8} \frac{n}{n'} e'_m \cos(2L_{m0} - 2\bar{\omega}) + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} e'_m \cos(2L_m - 2\bar{\omega}') \end{aligned}$$

despreciando términos de segundo orden en n/n' y e'_m es el valor medio de la excentricidad. Los dos primeros sumandos de la expresión anterior es el valor medio de la excentricidad, que se suma a la parte periódica representada por el tercer sumando, es decir

$$e' = e'_m \left[1 + \nu \cos(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \right], \quad (14.11)$$

con $\bar{\omega}'_m$ representamos el valor medio de la longitud del pericentro, que calcularemos más adelante y

$$\nu = \frac{15}{8} \frac{n}{n'}.$$

Ahora integramos la tercera ecuación (13.11)

$$\begin{aligned} \bar{\omega}' &= \bar{\omega}'_0 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} (t - t_0) + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_m - 2\bar{\omega}') \Big|_{t_0}^t = \\ &= \bar{\omega}'_0 + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} (t - t_0) + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_m - 2\bar{\omega}') - \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_{m_0} - 2\bar{\omega}'). \end{aligned}$$

De lo anterior queda

$$\begin{aligned} \bar{\omega}' &\approx \bar{\omega}'_{m_0} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} t + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) = \bar{\omega}'_{m_0} + \mu t + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \\ &= \bar{\omega}'_m + \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \end{aligned} \quad (15.11)$$

donde hemos hecho las definiciones

$$\begin{aligned} \bar{\omega}'_{m_0} &= \bar{\omega}'_0 - \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} t_0 - \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \sin(2L_{m_0} - 2\bar{\omega}'_m) \\ \bar{\omega}'_m &= \bar{\omega}'_{m_0} + \mu t. \end{aligned}$$

Se puede volver a hacer una nueva aproximación, volviendo a (13.11) y expresando e' y $\bar{\omega}'$ como se ha deducido en (14.11) y (15.11). En efecto, para la longitud del pericentro nos queda

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}'}{dt} &= \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \left\{ 1 + 5 \cos[2L_m - 2\bar{\omega}'_{m_0} - 2\mu t - 2\nu \sin(2L_m - 2\omega'_m)] \right\} \approx \\ &\approx \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \left[1 + 5 \cos(2L_m - 2\bar{\omega}'_{m_0} - 2\mu t) + 10\nu \sin^2(2L_m - 2\omega'_m) \right] \end{aligned}$$

integrando queda

$$\begin{aligned} \bar{\omega}' &= \bar{\omega}'_{m_0} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} t + \frac{15}{4} \frac{n^2}{n'} \frac{1}{2n - 2\mu} \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) + \\ &\quad + \frac{225}{32} \frac{n^3}{n'^2} t - \frac{225}{32} \frac{n^3}{n'^2} \sin 2(2L_m - 2\omega'_m) \approx \\ &\approx \bar{\omega}'_{m_0} + \left(\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} + \frac{225}{32} \frac{n^3}{n'^2} \right) t + \frac{15}{8} \frac{n}{n'} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{n}{n'} \right) \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \end{aligned}$$

donde no tenemos en cuenta términos periódicos diferentes al ya considerado.

De lo anterior vemos que el movimiento secular del pericentro adquiere el valor

$$\mu = \frac{3 n^2}{4 n'} + \frac{225 n^3}{32 n'^2} = 34^\circ, 3686/\text{año} \quad (16.11)$$

mientras que la amplitud de la oscilación periódica es

$$\nu = \frac{15 n}{8 n'} + \frac{45 n^2}{32 n'^2} = 0,1481 \text{ rad} = 8^\circ 30'. \quad (17.11)$$

El cálculo de la segunda aproximación aplicado a la excentricidad nos vuelve a dar la misma ecuación (14.11) pero con un nuevo valor de la amplitud dado por (17.11)

Encontramos de (14.11) que la excentricidad está sometida a una perturbación periódica, aunque no existe variación secular. Esta oscilación tiene de amplitud $\nu = 0,1481$. Si la excentricidad media es $e'_m = 0,0549$ los valores máximos y mínimos son

$$e'_{\max} = (1 + \nu) \bar{e}' = 0,063; \quad e'_{\min} = (1 - \nu) \bar{e}' = 0,047,$$

si se hace el cálculo exacto estos valores extremos son 0,065 y 0,0448, lo que significa $\nu = 0,18397 \text{ rad}$.

La longitud del pericentro está sometida a una variación secular y a otra periódica. El tiempo que por causa de la perturbación secular tarda el pericentro en dar una vuelta completa respecto a la órbita lunar se calcula por

$$T = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi}{\frac{3 n^2}{4 n'} + \frac{225 n^3}{32 n'^2}} = 10,47 \text{ años}$$

donde estamos considerando sólo los dos primeros términos de μ , un cálculo exacto da 8 años y 310 días, lo que corresponde a una velocidad angular del pericentro $\mu = 40^\circ, 68/\text{año}$.

El periodo de la variación periódica tanto de la excentricidad como de la longitud del pericentro es

$$T = \frac{2\pi}{2n - 2\mu} = 201,9 \text{ días}$$

cuyo valor exacto es 205,89 días.

5.11 La evección

Se llama evección a una perturbación del movimiento lunar, que es por su intensidad la segunda mayor corrección a su longitud, teniendo un periodo de 31,81 días y una amplitud de $1^\circ 16' 26''$. El causante de la evección, como ahora veremos, es la variación periódica del pericentro representada por (15.11).

Si M' representa la anomalía media de la Luna respecto a un pericentro medio y M'' es la anomalía media pero respecto al pericentro afectado tanto por el movimiento secular como el periódico dado por (15.11), entonces

$$M'' = L'_m - \bar{\omega}' = L'_m - \bar{\omega}'_{m0} - \mu t - \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) = M' - \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)$$

donde

$$M' = L'_m - \bar{\omega}'_{m0} - \mu t. \quad (18.11)$$

Si consideramos la longitud de la Luna con el primer término de la ecuación del centro

$$\begin{aligned} L' &= L'_m + 2e' \sin M'' = L'_m + 2e' \sin [M' - \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)] \approx \\ &\approx L'_m + 2e'_m \left[1 + \nu \cos(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \right] \left[\sin M' - \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) \cos M' \right] \end{aligned}$$

de donde se deduce

$$L' = L'_m + 2e'_m \sin M' + 2e'_m \nu \sin(M' - 2L_m + 2\bar{\omega}'_m), \quad (18.11)$$

el argumento de la parte periódica es

$$M' - 2L_m + 2\bar{\omega}'_m = L'_m - 2L_m + \bar{\omega}'_m = 2L'_m - 2L_m - M' = 2D_m - M'$$

por tanto

$$L' = L'_m + 2e'_m \sin M' + 2e'_m \nu \sin(2D_m - M'), \quad (19.11)$$

se le llama evección a la corrección a la longitud de la Luna

$$2e'_m \nu \sin(2D_m - M').$$

La evección tiene un periodo dado por

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{d(2D_m - M')/dt} = \frac{2\pi}{n' - 2n + \mu} = \\ &= \frac{360}{4\,812,6788 - 2 \cdot 360,0080 + 36,368} = 0,0872 = 31,85 \text{ días} \end{aligned}$$

siendo el valor exacto 31,812 días.

La amplitud de la evección se calcula del coeficiente de la parte periódica de (18.11)

$$2e'_m \nu = 55' 54''$$

si tomamos el valor corregido de ν se encuentra $2e'_m \nu = 1^\circ 9'$. El cálculo completo nos da una amplitud de $1^\circ 16' 26''$.

6.11 Corrección de la ecuación del centro

La corrección a la longitud de la Luna por la ecuación del centro viene dada por la ecuación (5.5)

$$L' = L'_m + \left(2e' - \frac{e'^3}{4} \right) \sin M'' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M'' + \frac{13}{12} e'^3 \sin 3M'' + \dots$$

M'' es la anomalía media respecto al pericentro verdadero, siendo M' la anomalía media respecto al pericentro medio. Hemos visto en el epígrafe anterior cómo la variación periódica del pericentro afecta al primer sumando de la ecuación del centro, ahora lo que haremos es ver el efecto que tiene en el segundo sumando. Como se ha deducido en el epígrafe anterior la relación entre las dos anomalías media es

$$M'' = M' - \nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)$$

del segundo sumando de la ecuación del centro queda

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M'' &= \frac{5}{4} e'^2 \sin[2M' - 2\nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)] \approx \\ &\approx \frac{5}{4} e'^2 [1 + 2\nu \cos(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)] \sin[2M' - 2\nu \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m)] \end{aligned}$$

como ν es un número pequeño podemos simplificar la expresión anterior resultando

$$\begin{aligned} \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M'' &= \frac{5}{4} e'^2 [\sin 2M' + 2\nu \sin(2M' - 2L_m + 2\bar{\omega}'_m)] = \\ &= \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' + \frac{5}{2} e'^2 \nu \sin 2D_m \end{aligned}$$

reuniendo este resultado con el obtenido en (19.11)

$$L' = L'_m + 2e'_m \sin M' + \frac{5}{4} e'^2 \sin 2M' + 2e'^2 \nu \sin(2D_m - M') + \frac{5}{2} e'^2 \nu \sin 2D_m$$

el último de los sumandos debe añadirse a la corrección por la variación que se calculó en 4.10, resultando

$$\begin{aligned} L' &= L'_{m0} + n't + 35',1 \sin 2D_m + \frac{5}{2} e'^2 \nu \sin 2D_m = \\ &= L'_{m0} + n't + 38',9 \sin 2D_m \end{aligned} \quad (20.11)$$

elevándose la corrección a la longitud por efecto de la variación a 38,9 minutos de arco, muy cerca del valor exacto de 39,1 minutos.

Variación de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente. Distancia Tierra-Luna

1.12 Introducción

En los cálculos realizados en los capítulos anteriores hemos despreciado la aceleración perturbatriz normal T , es decir hemos supuesto que la órbita lunar se encuentra en el plano de la eclíptica, y por tanto nula la inclinación. En este capítulo vamos a estudiar el efecto que tiene la aceleración T , tal como fue calculada en (24.9)

$$T = \frac{3}{2} n^2 a' \sin i' [\sin(2D_m - \eta'_m) - \sin \eta'_m]. \quad (24.9)$$

Según vemos en las ecuaciones de Gauss (23.8) el efecto de T es la variación de la inclinación de la órbita y de la longitud del nodo ascendente

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega'}{dt} &= \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2} \sin i' a'} \frac{r'}{a'} T \sin \eta' \approx \frac{1}{n'a' \sin i'} T \sin \eta' \\ \frac{di'}{dt} &= \frac{1}{n'a'\sqrt{1-e'^2} a'} \frac{r'}{a'} T \cos \eta' \approx \frac{1}{n'a'} T \cos \eta', \end{aligned} \quad (23.8)$$

y también de manera indirecta una variación de la longitud del pericentro. En (23.8) hemos despreciado la excentricidad de la Luna. A partir de (23.8) vamos a calcular las variaciones seculares y periódicas de la inclinación y de la longitud del nodo ascendente.

2.12 Variación de la longitud del nodo ascendente

De (24.9) y de la primera ecuación (23.8) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega'}{dt} &\approx \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} [\sin(2D_m - \eta'_m) - \sin \eta'_m] \sin \eta'_m = \\ &= \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} [\sin 2D_m \cos \eta'_m \sin \eta'_m - \cos 2D_m \sin^2 \eta'_m - \sin^2 \eta'_m] = \\ &= \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} \left[\frac{1}{2} \sin 2D_m \sin 2\eta'_m - \cos 2D_m + \cos 2D_m \cos^2 \eta'_m - 1 + \cos^2 \eta'_m \right] \end{aligned}$$

utilizando la primera ecuación (8.A) queda

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -\frac{3n^2}{4n'} \left[1 - \cos 2\eta'_m - \cos(2D_m - 2\eta'_m) + \cos 2D_m \right],$$

o bien

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -\frac{3n^2}{4n'} \left[1 - \cos 2(L'_m - \Omega'_m) - \cos 2(L_m - \Omega'_m) + \cos 2(L'_m - L_m) \right]$$

de los varios términos periódicos el de mayor periodo es el tercero, que es el único que vamos a considerar, ya que los restantes tienen una menor amplitud; por tanto tenemos que integrar la ecuación

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -\frac{3n^2}{4n'} \left[1 - \cos 2(L_m - \Omega'_m) \right] \quad (1.12)$$

que podemos resolver mediante un cálculo aproximado, suponiendo que la longitud media del nodo ascendente tiene un movimiento despreciable frente al movimiento medio del Sol, como efectivamente luego comprobaremos, por lo tanto la integración da

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega'_{m0} - \frac{3n^2}{4n'} t + \frac{3n}{8n'} \sin 2(L_m - \Omega'_m) = \Omega'_{m0} - \mu t + \nu \sin 2(L_m - \Omega'_m) = \\ &= \Omega'_m + \nu \sin 2(L_m - \Omega'_m) \end{aligned} \quad (2.12)$$

hemos agrupado en Ω'_{m0} todos los términos no dependientes del tiempo y por lo tanto es el valor de la longitud media del nodo Ω'_m en el instante $t = 0$. Podemos obtener una nueva aproximación, para lo cual aplicamos (1.12) y utilizamos el resultado (2.12)

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega'}{dt} &= -\frac{3n^2}{4n'} \left\{ 1 - \cos \left[2L_m - 2\Omega'_{m0} + 2\mu t - 2\nu \sin 2(L_m - \Omega'_m) \right] \right\} \approx \\ &\approx -\frac{3n^2}{4n'} \left[1 - \cos(2L_m - 2\Omega'_{m0} + 2\mu t) - 2\nu \sin^2(2L_m - 2\Omega'_m) \right] \approx \\ &\approx -\frac{3n^2}{4n'} \left[1 - \cos(2L_m - 2\Omega'_m) - \nu + \nu \cos(4L_m - 4\Omega'_m) \right] \end{aligned}$$

al integrar se halla

$$\begin{aligned} \Omega' &= \Omega'_{m0} - \left(\frac{3n^2}{4n'} - \frac{9n^3}{32n'^2} \right) t + \frac{3n^2}{4n'} \frac{1}{2n + 2\mu} \sin(2L_m - 2\Omega'_m) = \\ &= \Omega'_{m0} - \mu t + \nu \sin(2L_m - 2\Omega'_m) = \Omega'_m + \nu \sin(2L_m - 2\Omega'_m) \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde el movimiento secular y la amplitud de la oscilación periódicas son dadas por las expresiones

$$\mu = \frac{3n^2}{4n'} - \frac{9n^3}{32n'^2} = 19^\circ, 63/\text{año}; \quad \nu = \frac{3n}{8n'} - \frac{9n^2}{32n'^2} = 0,0265 \text{ rad} \quad (4.12)$$

nótese que el movimiento secular del nodo ascendente es retrógrado y realiza un vuelta completa en 18,3 años (18,6 si se toman todos los términos). La amplitud del movimiento periódico es $1^\circ 42'$ ($1^\circ 31'$ en la teoría completa). Por último notamos que el periodo de este último término es

$$T = \frac{2\pi}{2n + 2\mu} = 0,4741 \text{ años} = 173,18 \text{ días}.$$

En (15.11) habíamos calculado la variación de la longitud del pericentro en el caso de no existir perturbación normal, es decir al suponer que el nodo ascendente es fijo. Habíamos indicado que en este caso se cumple $d\omega' = d\bar{\omega}'$, entonces lo que en realidad habíamos calculado es la variación del argumento de latitud del pericentro.

Según se discutió en el epígrafe 8.8, la variación del nodo ascendente produce de forma indirecta una variación complementaria de ω' . Corrección que viene recogida en la segunda de las ecuaciones (23.8). Al integrar el primer término del segundo miembro de esta ecuación se encuentra (15.11). Por tanto para completar el cálculo tenemos que integrar el segundo sumando, es decir

$$\int_0^t -\cos i' \frac{d\Omega'}{dt} dt.$$

Como una primera aproximación podemos tomar constante la inclinación de la órbita lunar. Por tanto la variación del argumento de latitud se calcula usando (15.11) y (3.12)

$$\omega' \approx \omega'_m + \nu' \sin(2L_m - 2\bar{\omega}'_m) - \cos i' [\Omega'_m + \nu'' \sin(2L_m - 2\Omega'_m)],$$

los coeficiente ν' y ν'' son dados por (17.11) y (4.12).

3.12 Variación de la inclinación de la órbita

De la quinta ecuación (23.8) y de (24.9) se encuentra

$$\frac{di'}{dt} \approx \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'} \sin i'_m [\sin(2D_m - \eta'_m) - \sin \eta'_m] \cos \eta'_m,$$

simplificando se llega a

$$\frac{di'}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i'_m [\sin 2(D_m - \eta'_m) + \sin 2D_m - \sin 2\eta'_m]$$

o bien

$$\frac{di'}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i'_m [\sin 2(L_m - \Omega'_m) - \sin 2(L'_m - L_m) + \sin 2(L'_m - \Omega'_m)],$$

de nuevo nos limitamos al término de periodo más largo al ser el de mayor amplitud

$$\frac{di'}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{n^2}{n'} \sin i'_m \sin 2(L_m - \Omega'_m),$$

i'_m es la inclinación media. Al integrar la anterior ecuación con las simplificaciones antes expuestas

$$i' \approx i'_m + \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \sin \bar{i}' \cos 2(L_m - \Omega'_m) \approx i'_m \left[1 + \frac{3}{8} \frac{n}{n'} \cos 2(L_m - \Omega'_m) \right]$$

ahora recurrimos a una segunda aproximación

$$i' = i'_m \left[1 + \left(\frac{3}{8} \frac{n}{n'} - \frac{9}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) \cos 2(L_m - \Omega'_m) \right] \quad (5.12)$$

expresada en radianes; por tanto la inclinación tiene una oscilación periódica con el mismo periodo que la longitud del nodo ascendente, a saber 173,18 días. En cuanto a la amplitud de la oscilación se tiene

$$i'_m \left(\frac{3}{8} \frac{n}{n'} - \frac{9}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) = 0^\circ,1363 = 8'11'',$$

donde hemos tomado como inclinación promedio $i'_m = 5^\circ 8' 43''$. Los valores extremos son

$$i'_{\max} = i'_m (1 + 0,0265) = 5^\circ 16' 54''; \quad i'_{\min} = i'_m (1 - 0,0265) = 5^\circ 0' 32''.$$

4.12 Reducción a la eclíptica

La longitud L' es un ángulo medido en dos planos: desde el equinoccio al nodo ascendente lunar y desde este punto a la posición de la Luna. Como se discutió en el epígrafe 11.4 lo que nos interesa es la longitud l' que es medida íntegramente en la eclíptica. La operación de pasar de L' a l' se le llama reducción a la eclíptica, que se encuentra calculada en (40.4). Al aplicar esta ecuación a la Luna se encuentra aproximadamente

$$l' \approx L' - \tan^2 \left(\frac{i'_m}{2} \right) \sin 2(L'_m - \Omega'_m) \quad (6.12)$$

estando incluida en L' todos los términos que hemos calculado en los capítulos 10, 11 y 12.

5.12 Distancia Tierra-Luna

Si la órbita de la Luna respecto a la Tierra obedeciera exclusivamente a las leyes de Kepler la distancia entre ambos astros sería la encontrada en (30.4)

$$r' = a' \left(1 + \frac{e'^2}{2} - e' \cos M' - \frac{e'^2}{2} \cos 2M' + \dots \right) \quad (30.4)$$

pero las distintas perturbaciones que hemos estudiado modifican la órbita kepleriana y cada una de ellas produce una modificación $\delta r'$ a la distancia r' dada por (30.4).

La corrección a realizar en la distancia entre la Tierra y la Luna por la desigualdad paraláctica es dada en 5.10

$$\delta r'_{pa} = \frac{a'^2}{a} v_{pa} \cos D_m \quad (7.12)$$

$$v_{pa} = \left[\frac{15}{16} \frac{n}{n'} + \frac{81}{16} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{m - m'}{m + m'}.$$

La corrección por motivo de la ecuación anual se obtiene de (25.10)

$$\begin{aligned}\delta r'_{an} &= a'v'_{an} \cos M \\ v'_{an} &= \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'^2} e'.\end{aligned}\quad (8.12)$$

Para hallar la corrección que hay que hacer a la distancia Tierra-Luna por efecto de la evección partimos de la segunda ecuación de movimiento (25.9) que podemos tomar aproximadamente como

$$r'^2 \frac{dL'}{dt} = cte,$$

llamando a δ la variación experimentada por la evección

$$\delta r' = -\frac{r'}{2} \frac{\delta(dL'/dt)}{dL'/dt} \quad (9.12)$$

de la expresión (19.11) tenemos la corrección que a la longitud de la Luna hace la evección y por tanto

$$L' = L'_m + 2e'_m v'_{ev} \sin(2D_m - M'),$$

de donde se deduce

$$\delta \left(\frac{dL'}{dt} \right) = 2e'_m v'_{ev} (n' - 2n + \mu) \cos(2D_m - M')$$

y de (10.12) se llega a

$$\delta r' \approx -a' e'_m v'_{ev} \left(1 - 2 \frac{n}{n'} + \frac{\mu}{n'} \right) \cos(2D_m - M') \quad (10.12)$$

donde hemos hecho las aproximaciones

$$r' \approx a'; \quad \frac{dL'}{dt} \approx n'.$$

Si utilizamos el valor corregido de v'_{ev} hallado en (17.11) y el valor de μ dado por (16.11) se encuentra el valor

$$\begin{aligned}\delta r' &= -\frac{15}{8} \frac{n}{n'} a' e'_m \left(1 - \frac{2n}{n'} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'^2} \right) \cos(2D_m - M') = \\ &= -0,008\ 631 a' \cos(2D_m - M').\end{aligned}\quad (11.12)$$

Por (11.10) y (20.11) y utilizando la expresión (9.12) y la corrección por evección (17.11) y usando la misma técnica que en el párrafo anterior encontramos que para la variación la corrección que hay que hacer a la distancia Tierra-Luna es

$$\begin{aligned}\delta r'_{va} &= -a' v'_{va} \cos 2D_m \\ v'_{va} &= \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n' - n} \right)^2 \frac{2n' - n}{3n' - 5n} + \frac{5}{2} e'^2_m \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} - \frac{15}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) \approx\end{aligned}\quad (12.12)$$

$$\approx \frac{n^2}{n'^2} + \frac{19}{6} \frac{n^3}{n'^3} + \frac{5}{2} e_m'^2 \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} - \frac{15}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right). \quad (12.12)$$

Reuniendo los resultados parciales anteriores (30.4), (4.12), (5.12), (7.12), (8.12) y (9.12).

$$r' = a' \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{e_m'^2}{2} - \bar{e}' \cos M' - \frac{e_m'^2}{2} \cos 2M' - \\ - \left[\frac{n^2}{n'^2} + \frac{19}{6} \frac{n^3}{n'^3} + \frac{5}{2} e_m'^2 \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} - \frac{15}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) \right] \cos 2D_m + \\ + \left[\frac{15}{16} \frac{n}{n'} + \frac{81}{16} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{m-m'}{m+m'} \frac{a'}{a} \cos D_m + \frac{3}{2} \frac{n^2}{n'^2} e_m \cos M - \\ - \frac{15}{8} \frac{n}{n'} e_m' \left(1 - \frac{2n}{n'} + \frac{3}{4} \frac{n^2}{n'^2} \right) \cos(2D_m - M') \end{array} \right\} \quad (13.12)$$

que nos da aproximadamente la distancia Tierra-Luna cuando se tiene en cuenta, no solamente el movimiento kepleriano lunar, sino las más importantes perturbaciones solares.

6.12 Latitud eclíptica

Conociendo la longitud de la Luna L' y la inclinación i' del plano orbital, se determina la latitud eclíptica β' . Del triángulo esférico rectángulo de la figura 1.12 se encuentra por aplicación del teorema del seno

$$\sin \beta' = \sin i' \sin(L' - \Omega') \quad (14.12)$$

fórmula que nos permite determinar la latitud eclíptica. La inclinación se determina por (5.12) y la longitud del nodo por (3.12)

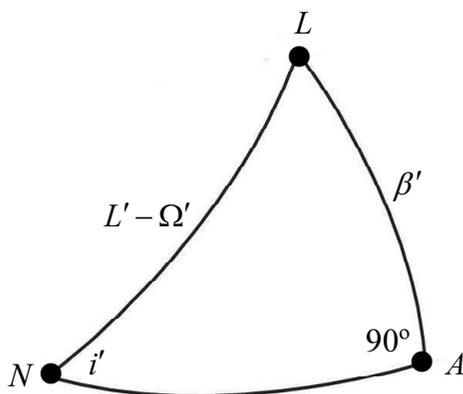


Figura 1.12.- L es la posición de la Luna y N es el nodo ascendente lunar. El arco NL está en la órbita de la Luna, el arco NA está en la eclíptica, desde donde se mide la latitud eclíptica β' . El ángulo en el vértice A es recto.

Cálculo de las coordenadas de la Luna

1.13 Longitud lunar

Analizadas las desigualdades más importantes de la longitud lunar, podemos reunir las y determinar aproximadamente la longitud eclíptica l' de la Luna. Determinada la latitud eclíptica por mediación de (14.12) ya tendremos las coordenadas lunares, que nos permitirán hallar las coordenadas ecuatoriales y las horizontales y con ellas determinar los fenómenos lunares.

Vamos a tomar como valor medio de la longitud y de la anomalía media solar las dadas por la teoría VSOP82 de Bretagnon

$$\begin{aligned} L_m &= 280^\circ,46645 + 36000^\circ,7698231T + 0^\circ,0003037T^2 \\ M &= 357^\circ,52910 + 35999^\circ,05030T - 0^\circ,0001559T^2, \end{aligned} \quad (1.13)$$

donde T son los siglos julianos transcurridos desde la época JT2000. La longitud media, la anomalía media, la longitud media del nodo ascendente, el argumento de la Luna media y la longitud media del pericentro según la teoría Efemérides Lunares Parisinas (ELP) de Chapront-Touzé y Chapront son

$$\begin{aligned} L'_m &= 218^\circ,3164591 + 481\,267^\circ,881\,342T - 0^\circ,0013268T^2 \\ M' &= 134^\circ,9634114 + 477198^\circ,8676313T + 0^\circ,0089970T^2 \\ \Omega'_m &= 125^\circ,0443598 - 1934^\circ,136185T + 0^\circ,0020762T^2 \\ \eta'_m &= L'_m - \Omega'_m = 93^\circ,272\,0993 + 483\,202^\circ,017\,5273T - 0^\circ,003\,403T^2 \\ \bar{\omega}'_m &= L'_m - M' = 83^\circ,353\,0477 + 4069^\circ,013\,711T - 0^\circ,010\,3238T^2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

La longitud media de la Luna lleva incluido el tiempo-luz, que nos mide el retraso de la llegada de la señal luminosa, un efecto equivalente a la aberración. Entonces reuniendo los resultados de los capítulos anteriores nuestra teoría simplificada queda

$$\begin{aligned} l' &= L'_m + \left(2e'_m - \frac{e'^3_m}{4} \right) \sin M' + \frac{5}{4} e'^2_m \sin 2M' + \frac{13}{12} e'^3_m \sin 3M' + \\ &\quad + 2e'_m \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{45}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) \sin(2D_m - M') + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{n'}{n'-n} \left[\frac{3}{2} \left(\frac{n}{n'-n} \right)^2 \frac{2n'-n}{3n'-5n} + \frac{3}{8} \frac{n^2}{n'(n'-n)} \right] + \frac{5}{2} e_m'^2 \left(\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{45}{32} \frac{n^2}{n'^2} \right) \right\} \sin 2D_m - \\
 & - 3 \frac{n}{n'} e \sin M - \left[\frac{15}{8} \frac{n}{n'} + \frac{93}{8} \left(\frac{n}{n'} \right)^2 \right] \frac{a' m - m'}{a m + m'} \sin D_m - \tan^2 \frac{i'_m}{2} \sin(2L'_m - 2\Omega'_m),
 \end{aligned}$$

que es la longitud eclíptica geocéntrica respecto al equinoccio medio de la fecha. Los términos 2, 3 y 4 son los correspondientes a la ecuación del centro; el 5 es la evección; el 6 es la variación; el 7 es la ecuación anual; el 8 es el término paraláctico y el último sumando es la reducción a la eclíptica.

Utilizaremos los datos numéricos siguientes

$$\begin{aligned}
 n' &= 4812,678 \text{ } 813^\circ / \text{año}; & n &= 360,007 \text{ } 698^\circ / \text{año} \\
 m' &= 7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}; & m &= 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\
 a' &= 3,844 \cdot 10^5 \text{ km}; & a &= 1,496 \cdot 10^8 \text{ km} \\
 \bar{e}' &= 0,0549; & e &= 0,016 \text{ } 708 \text{ } 62
 \end{aligned}$$

válidos para el año 2000. El cálculo nos da

$$\begin{aligned}
 l' &= L'_m + 22 \text{ } 639'' \sin M' + 777'' \sin 2M' + 37'' \sin 3M' + \\
 & + 3355'' \sin(2D_m - M') + 2334'' \sin 2D_m - 773'' \sin M - \\
 & - 107'' \sin D_m - 416'' \sin(2L'_m - 2\Omega'_m)
 \end{aligned} \quad (3.13)$$

expresados los coeficientes en segundos de arco.

Podemos plantear una teoría más cercana a la realidad si tomamos para los coeficientes de la expresión anterior los que se obtienen de la teoría ELP

$$\begin{aligned}
 l' &= L'_m + 22 \text{ } 639'',59 \sin M' + 769'',02 \sin 2M' + 36'',12 \sin 3M' + \\
 & + 4586'',50 \sin(2D_m - M') + 2369'',93 \sin 2D_m - 666'',42 \sin M - \\
 & - 124'',99 \sin D_m - 411'',60 \sin(2L'_m - 2\Omega'_m).
 \end{aligned} \quad (4.13)$$

2.13 Latitud lunar

Conocida la longitud lunar se puede determinar la latitud por (14.12). Para hacer este cálculo es necesario calcular por mediación de (5.12) y (3.12) la inclinación y la longitud del nodo ascendente

$$\begin{aligned}
 i' &= 5^\circ 8' 43'' \left[1 + 0,02648 \cos(2L_m - 2\Omega'_m) \right] \\
 \Omega' &= \Omega'_m + 1^\circ 31' \sin(2L_m - 2\Omega'_m).
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

La longitud L' que aparece en (13.12) se determina por (4.13), a la que se le resta la reducción a la eclíptica

$$L' = l' + 411'',60 \sin(2L'_m - 2\Omega'_m). \quad (6.13)$$

3.13 Distancia Tierra-Luna

La distancia entre la Tierra y la Luna se determina por (12.12). Tomando valores numéricos se obtiene

$$\frac{r'}{a'} = \begin{bmatrix} 1,001507 - 0,0549 \cos M' - 0,001507 \cos 2M' - \\ -0,007\,958 \cos 2D_m + 0,0002468 \cos D_m + \\ +0,0001402 \cos M - 0,006\,580 \cos(2D_m - M') \end{bmatrix}$$

los valores han sido tomados de nuestra teoría simplificada de los capítulos anteriores, pero hemos corregido el coeficiente correspondiente a la evección, usando el valor de la teoría ELP, ya que el valor de la teoría simplificada (0,00658) podría dar un error de algo más de mil kilómetros.

4.13 Método de Meuss

Jean Meuss desarrolló una teoría lunar simplificada basada en la teoría lunar ELP-2000/82 de Chapront. La teoría está compuesta de una serie de sesenta términos que nos calcula la longitud y latitud eclíptica de la Luna y la distancia Tierra-Luna. La exactitud de esta adaptación de Meuss es de aproximadamente 10 segundos de arco para la longitud y cuatro para la latitud.

Los términos del desarrollo en serie tienen la forma

$$\begin{aligned} l' &= L'_m + \sum \frac{l'_i}{1000\,000} \sin[a_i 2D_m + b_i M + c_i M' + d_i \eta'_m] \\ \beta' &= \sum \frac{\beta'_i}{1000\,000} \sin[e_i 2D_m + f_i M + g_i M' + h_i \eta'_m] \\ r' &= 385\,000.56 + \sum \frac{r'_i}{1000} \cos[j_i 2D_m + k_i M + l_i M' + m_i \eta'_m] \end{aligned} \quad (7.13)$$

donde l'_i , β'_i y r'_i son coeficientes numéricos que se obtienen de la tabla 3 y que vienen medidos los dos primeros en millonésimas de grado y la distancia Tierra-Luna en metros. Por tanto la longitud eclíptica l' y la latitud β' vienen en (7.13) expresadas en grados y la distancia Tierra-Luna en kilómetros. Los coeficientes a_i , b_i ,... m_i son números enteros adimensionales.

Es necesario hacer algunas correcciones. Hay que tener en cuenta la variación secular de la excentricidad de la Tierra, que aparece en todos los términos que tienen en su argumento la anomalía media solar M . De tal forma que los sumandos de (7.13) que contienen M deben ser multiplicados por el elemento corrector E y los que contienen $2M$ hay que mutiplicarlos por E^2 , siendo

$$E = \frac{e}{e_0} = 1 - 0,002\,516T - 0,000\,0074T^2$$

donde e es la excentricidad de la Tierra dada en (3.5) y e_0 es el valor de la excentricidad en el momento $T = 0$.

Por otra parte, a la longitud eclíptica calculada por (7.13) hay que añadirle los términos

$$14'',25 \sin A_1 + 7'',06 \sin(L'_m - \eta'_m) + 1''14 \sin A_2$$

que reflejan las perturbaciones planetarias de Venus y Júpiter y las producidas

por el achatamiento terrestre, siendo los coeficientes

$$\begin{aligned} A_1 &= 119^{\circ},75 + 131^{\circ},849T \\ A_2 &= 53^{\circ},09 + 479\,264^{\circ},290T \\ A_3 &= 313^{\circ},45 + 481\,266,484T. \end{aligned}$$

A la latitud eclíptica de (7.13) hay que sumarle

$$\begin{aligned} & -8'',05 \sin L'_m + 1'',38 \sin A_3 + 0'',63 \sin(A_1 - \eta'_m) + \\ & + 0'',63 \sin(A_1 + \eta'_m) + 0'',46 \sin(L'_m - M') - 0'',41 \sin(L'_m + M'). \end{aligned}$$

Es necesario hacer la corrección de la nutación, con lo que se obtiene la longitud respecto al equinoccio verdadero. La nutación por longitud viene dada por (1.3), cantidad que hay que sumar a la primera ecuación de (7.13) para obtener la longitud aparente de la Luna.

5.13 Coordenadas ecuatoriales de la Luna

Conocidas las coordenadas eclípticas (longitud y latitud) se determinan las coordenadas ecuatoriales (ascensión recta y declinación). Para hacer esta transformación usamos el triángulo de posición de la figura 1.13.

Por el teorema del seno, del coseno y del seno por el coseno se encuentran las tres relaciones

$$\begin{aligned} \cos \delta' \cos \alpha' &= \cos \beta' \cos l' \\ \sin \delta' &= \sin \beta' \cos \varepsilon + \cos \beta' \sin \varepsilon \sin l' \\ \cos \delta' \sin \alpha' &= -\sin \beta' \sin \varepsilon + \cos \beta' \cos \varepsilon \sin l' \end{aligned} \tag{8.13}$$

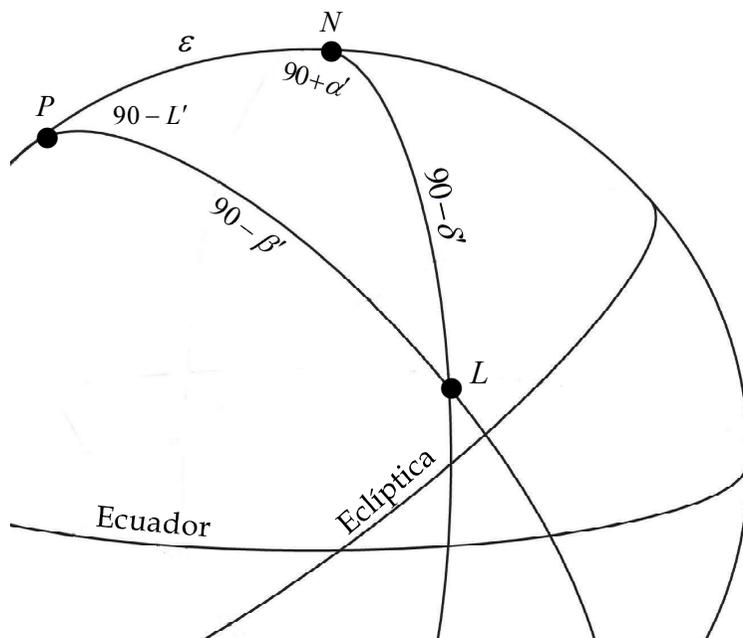


Figura 1.13.- Triángulo de posición que permite transformar las coordenadas eclípticas a coordenadas ecuatoriales. *L* es la posición de la Luna, *N* es el polo norte geográfico y *P* es el polo norte eclíptico.

dividiendo la tercera entre la primera

$$\tan \alpha' = \frac{-\tan \beta' \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \sin l'}{\cos l'} \quad (9.13)$$

y la declinación se determina de la segunda ecuación de (8.13)

$$\sin \delta' = \sin \beta' \cos \varepsilon + \cos \beta' \sin \varepsilon \sin l'. \quad (10.13)$$

Para hacer la transformación de coordenadas primero se determina la oblicuidad verdadera de la eclíptica, es decir la oblicuidad media corregida por la nutación en oblicuidad. De (3.3) y (15.5) se encuentra que la oblicuidad verdadera de la eclíptica es

$$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21'', 45 - 46'', 81T + 9'', 20 \cos \Omega'_m. \quad (11.13)$$

Los valores obtenidos por (9.13) y (10.13) son geocéntricos.

6.13 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1.13.- Determinar las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna el día 20 de agosto de 2020 a las 12 horas 30 minutos de tiempo terrestre.

- Por (1.1) y (14.1) se calcula el día juliano

$$JDT = 2\,459\,082,020\,8333.$$

- Mediante (10.2) se calcula los siglos julianos transcurridos desde la época JT2000.0

$$T = 0,206\,352\,3842.$$

- La longitud eclíptica de la Luna respecto al equinoccio medio de la fecha se calcula por (7.13) haciendo uso de los datos de la tabla 2 y de las correcciones mencionadas en el epígrafe 4.13 obtenemos

$$167^{\circ} 12' 6''.$$

- La nutación en longitud se calcula por (1.3) con el auxilio de (2.3), resultando para la fecha elegida $\Delta\psi = -16''$. Por tanto la longitud eclíptica aparente de la Lunas respecto al equinoccio verdadero es

$$l' = 167^{\circ} 12' 6'' - 16'' = 167^{\circ} 11' 50''.$$

- La latitud lunar se calcula por la segunda ecuación de (5.13) y por las correspondientes correcciones, resultando

$$\beta' = 4^{\circ} 59' 7''.$$

- Por (11.13) y la tercera ecuación (2.13) se halla la oblicuidad verdadera de la fecha

$$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 12'', 4.$$

- La ascensión recta geocéntrica se determina por (9.13)

$$\alpha' = 11^h 20^m 45^s.$$

- Finalmente la declinación geocéntrica se deduce de (10.13)

$$\delta' = 9^{\circ} 38' 40''.$$

Ejemplo 2.13.- Determinar la distancia Tierra-Luna y el paralaje horizontal ecuatorial el día 15 de noviembre de 2031 a las 5 horas de tiempo terrestre.

- El día juliano de la fecha considerada y los siglos julianos transcurridos son

$$JDT = 2\,463\,185,708\,3333; \quad T = 0,318\,705\,2247.$$

- Al aplicar la tercera ecuación (7.13) con los datos numéricos de la tabla 4 resulta que la distancia Tierra-Luna es

$$r' = 370\,369,65 \text{ km.}$$

- El paralaje horizontal ecuatorial π'

$$\sin \pi' = \frac{6378,16}{r'} = 0,172\,210 \Rightarrow \pi' = 59' 12'',3$$

donde 6378,16 km es el radio ecuatorial de la Tierra.

7.13 Coordenadas horizontales de la Luna

Las coordenadas horizontales de la Luna se calculan por el mismo método que el usado para las coordenadas solares desarrollado en el epígrafe 7.5.

Del triángulo de posición de la figura 3.5 aplicada a la Luna se relacionan las coordenadas horizontales (azimut y altura) con las coordenadas ecuatoriales, según se expresan en las ecuaciones (17.5) y (18.5)

$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos H' \quad (17.5)$$

$$\sin A' = \frac{\sin H' \cos \delta'}{\cos h'} \quad (18.5)$$

φ y λ son la latitud y longitud geográfica del punto de observación, positivas hacia el norte y el oeste. El ángulo horario del lugar H' se determina por la ecuación (16.5)

$$H' = T_v - \lambda - \alpha' = T_m + EE - \lambda - \alpha' \quad (16.5)$$

T_m es el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano en el momento de la observación que se calcula por las técnicas que aparecen en 6.2 y 7.2. EE es la ecuación de los equinoccios que se determina por (4.3).

Los coordenadas antes calculadas son geocéntricas, es necesario hacer la corrección de paralaje para obtener los valores topocéntricos. Esta operación se hace con las ecuaciones (8.3), (10.3) y (13.3). De las dos primeras se calculan la latitud geocéntrica φ' y la distancia geocéntrica al punto de observación sobre la superficie de la Tierra y de las ecuaciones (13.3) se calculan las coordenadas topocéntricas y la distancia topocéntrica de la Luna.

Ejemplo 3.13.- Determinar las coordenadas horizontales topocéntricas de la Luna el día 4 de marzo de 2022 a las 13 horas 20 minutos de tiempo universal, en la posición geográfica de 30° norte y 10° este.

- Para el cálculo de la posición horizontal de la Luna se necesita el tiempo en la escala de tiempo terrestre, para hacer la conversión utilizamos la tabla 1 y determinamos ΔT

$$\Delta T = 70^s \Rightarrow TT = UT + 70^s = 13^h 21^m 10^s.$$

- El día juliano en el momento considerado se calcula por (1.1) y (14.1)

$$JDT = 2\,459\,643,056\,365\,728.$$

- Los siglos julianos transcurridos desde la época JT2000.0 se calcula por (10.2)

$$T = 0,221\ 712\ 699\ 9515.$$

- La longitud aparente y latitud, ambas eclípticas, del centro de la Luna se calcula por las técnicas del epígrafe 4.13, resultando

$$l' = 6^\circ 57' 15''; \quad \beta' = -3^\circ 45' 19''.$$

- Las correspondientes coordenadas ecuatoriales geocéntricas son

$$\alpha' = 0^h 31^m 29^s; \quad \delta' = -0^\circ 41' 23''.$$

- El día juliano de la fecha a las 0 horas de UT se calcula con (1.1) y (14.1)

$$JD = 2\ 459\ 642,5.$$

- Los siglos julianos transcurridos desde la época J2000.0 hasta las 0 horas de UT de la fecha se calcula por (10.2)

$$T = 0,221\ 697\ 467\ 488.$$

- El tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas de UT se calcula por (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 10^h 46^m 58^s.$$

- Para convertir el tiempo universal en tiempo sidéreo multiplicamos por el coeficiente (9.2)

$$13^h 20^m UT \cdot 1,002\ 737\ 90935 = 13^h 22^m 11^s,4.$$

-El tiempo sidéreo en el primer meridiano es

$$T_m(13^h 20^m UT) = 10^h 46^m 57^s + 13^h 22^m 11^s,4 = 0^h 9^m 8^s.$$

- Para calcular la ecuación de los equinoccios se determina previamente la longitud del nodo ascendente de la Luna por (2.3), evaluada en el momento considerado medido en TT

$$\Omega'_m = 56^\circ 13' 19''$$

y la longitud media del Sol

$$L_m = 342^\circ 17' 40'',$$

la ecuación de los equinoccios (4.3) es

$$EE = -0^s,83.$$

-El ángulo horario local del centro de la Luna se calcula por (16.5)

$$\begin{aligned} H'_v &= T_m + EE - \lambda - \alpha' = 0^h 9^m 8^s - \frac{0^s,8}{3600} + \frac{10 \cdot 24}{360} - 0^h 31^m 29^s = \\ &= 0^h 17^m 38^s. \end{aligned}$$

- La altura geocéntrica del centro de la Luna se calcula por (17.5)

$$h' = 59^\circ 1' 24''.$$

- El acimut geocéntrico se halla por (18.5)

$$A' = 8^\circ 35' 47''.$$

- La latitud geocéntrica del lugar de observación se determina por (8.3)

$$\varphi' = 29^\circ 50' 1'',08.$$

- Por (10.3) se determina el parámetro ρ

$$\rho = 0,999\ 167.$$

- Para el cálculo del paralaje ecuatorial horizontal necesitamos previamente determinar la distancia geocéntrica del centro de la Luna que lo hacemos por la tercera ecuación (15.13)

$$r' = 383\ 046,47\ km.$$

- El paralaje ecuatorial horizontal se calcula por (11.3)

$$\pi' = 0^\circ\ 57'\ 15''.$$

- Combinando las dos primeras ecuaciones (13.3) se halla el acimut topocéntrico

$$A'_T = 8^\circ\ 35'\ 50''.$$

- De la segunda y tercera ecuación (13.3) calculamos la altura topocéntrica

$$h'_T = 58^\circ\ 31'\ 41''.$$

- Como último paso se determina la refracción astronómica por la fórmula (36.3) para lo que hay que hacer aproximaciones sucesivas, encontrándose $58^\circ\ 32'\ 18''$.

Periodos lunares

1.14 Fases lunares

Definimos los momentos de la Luna nueva, primer cuarto, Luna llena y último cuarto como aquellos en que la diferencia entre las longitudes eclípticas aparentes de la Luna y el Sol son 0° , 90° , 180° y 270° respectivamente.

Al momento de la Luna nueva, que es cuando el Sol y la Luna tienen la misma longitud eclíptica, se le llama conjunción. Llamando oposición cuando la diferencia entre sus longitudes es de 180° , entonces es la Luna llena.

Se llama elongación entre el Sol y la Luna al ángulo

$$\Delta = l' - L \quad (1.134)$$

donde l' es la longitud eclíptica de la Luna corregida por nutación y tiempo luz y L es la longitud eclíptica del Sol corregida por nutación y aberración. Entonces cuando Δ es 0° , 90° , 180° y 270° la Luna se encuentra en Luna nueva, cuarto creciente, Luna llena y cuarto menguante. Hay que advertir que el efecto de la nutación se contrarresta cuando se hace la diferencia de las longitudes, por lo tanto no interviene para la determinación de las fases lunares.

Nótese que el momento de estos eventos lunares están referidos al centro de la Tierra, son por tanto fenómenos geocéntricos y no locales.

De (12.5) y de los resultados de los capítulos 10 y 11 tenemos

$$\Delta = \left[\begin{array}{l} L'_m + \left(2e'_m - \frac{e'^3_m}{4} \right) \sin M' + \frac{5}{4} e'^2_m \sin 2M' + \frac{13}{12} e'^3_m \sin 3M' + \\ + L_{ev} \sin(2D_m - M') + L_{va} \sin 2D_m - L_{an} \sin M - L_{pa} \sin D_m - \\ - \tan^2 \frac{i'_m}{2} \sin(2L'_m - 2\Omega'_m) \end{array} \right] - \left[\begin{array}{l} L_m + \left(2e - \frac{e^3}{4} \right) \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \frac{13}{12} e^3 \sin 3M - \\ - 9,9365 \cdot 10^{-5} + 3,12 \cdot 10^{-5} \sin(L'_m - L_m) \end{array} \right] \quad (2.14)$$

donde $L_{ev}, L_{va}, L_{an}, L_p$ son coeficientes numéricos cuyo valor se calcularon en (3.13) o (4.13).

La anterior expresión se descompone en parte secular (o elongación media) D_m y en los términos periódicos ΣP

$$\Delta = L'_m - L_m + \Sigma P = D_m + \Sigma P.$$

2.14 Mes sinódico medio

El mes sinódico o lunación es el tiempo transcurrido entre dos conjunciones consecutivas del Sol y de la Luna, o sea periodo entre dos Lunas nuevas. Hay que distinguir entre lunación verdadera y media.

La lunación verdadera es el tiempo entre dos conjunciones del Sol y la Luna. A causa de los términos periódicos de los movimientos del Sol y de la Luna, la lunación o mes sinódico verdadero es un tiempo variable.

La lunación media es el tiempo que tiene que transcurrir para que la elongación media entre el Sol y la Luna D_m aumente en 360° . Este mes sinódico medio tiene una variación secular con el tiempo, pero no contiene términos periódicos.

El movimiento medio sinódico o movimiento de la Luna respecto al Sol es

$$n'_s = \frac{dD_m}{dT} = n' - n = 445\,267^\circ,111\,5193 - 0^\circ,003\,260\,958T$$

expresado en grados por siglo juliano de tiempo terrestre. Si lo expresamos en grados por día nos queda

$$n'_s = 12^\circ,190\,749\,118 - 8^\circ,928 \cdot 10^{-8}T.$$

n'_s cambia muy ligeramente con el tiempo, disminuyendo 11,74 segundos de arco por siglo cada siglo, por tanto durante una lunación podemos entender que permanece constante, lo que nos permite calcular la duración del mes sinódico por la relación

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{360^\circ}{n'_s} = \frac{360^\circ}{12^\circ,190\,749\,118 - 8^\circ,928 \cdot 10^{-8}T} = \\ &= \frac{360}{12^\circ,190\,749\,1181 - 7^\circ,323\,586 \cdot 10^{-10}T} \approx \end{aligned} \quad (3.14)$$

$\approx 29^d,530\,58885 \left(1 + 7,323\,586 \cdot 10^{-10}T\right) = 29^d,530\,58885 + 2^d,163 \cdot 10^{-7}T$
con unidades de días de 24 horas de tiempo terrestre. Cada siglo el mes sinódico medio aumenta en 0,0187 segundos, por tanto es un periodo de tiempo prácticamente constante.

Es de utilidad expresar (3.14) en tiempo universal, pues es esta unidad la usada en los calendarios. Al aplicar (17.2) se encuentra que el mes sinódico medio de la Luna en UT es

$$m_s = 29^d,530\,587\,81 - 3^d,6398 \cdot 10^{-7}T$$

es decir que en cada siglo la lunación media astronómica medida en UT disminuye en 0,031 segundos, por lo tanto sigue siendo prácticamente constante.

3.14 Mes anomalístico medio

El mes anomalístico lunar es el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos de la Luna por su pericentro, es decir, el tiempo que tiene que

pasar para que aumente en 360° su anomalía verdadera. Este periodo es variable a consecuencia de los términos periódicos en los movimientos de la Luna y del pericentro.

Se le llama mes anomalístico medio al tiempo que tiene que transcurrir para que la anomalía media de la Luna aumente en 360° . Como la anomalía media sólo tiene términos seculares y no periódicos, lo mismo ocurrirá con el mes anomalístico medio que tiene exclusivamente una variación secular.

El movimiento medio anomalístico de la Luna se calcula por la segunda ecuación (2.13)

$$n'_a = \frac{dM'}{dT} = 477\,198^\circ,867\,6313 + 0^\circ,017\,994T$$

en grados por siglo juliano, o

$$n'_a = \frac{dM'}{dT} = 13^\circ,064\,993 + 4^\circ,926 \cdot 10^{-7}T$$

en grados por día. Entonces el mes anomalístico medio es

$$m_a = \frac{360^\circ}{n'_a} = \frac{360}{13^\circ,064\,993 + 4^\circ,926 \cdot 10^{-7}T} \approx 27^d,554550 - 1^d,039 \cdot 10^{-6}T \quad (4.14)$$

en días de 24 horas de tiempo terrestre. Se comprueba que el mes anomalístico va disminuyendo muy ligeramente con el tiempo, cada siglo disminuye en 0,0898 segundos.

4.14 Mes trópico medio

El mes trópico es el tiempo que tarda la Luna en dos pasos consecutivos por el equinoccio verdadero. Es por tanto un periodo que tiene las irregularidades propias del movimiento lunar y del equinoccio. Además de los términos seculares tiene, por tanto, términos periódicos.

El mes trópico medio es el tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud media de la Luna L'_m aumente en 360° . Como L'_m está referida al equinoccio medio de la fecha, contiene tanto las variaciones seculares de la Luna como las del equinoccio.

El movimiento medio trópico de la Luna es por la primera ecuación (2.13)

$$n'_t = \frac{dL'_m}{dT} = 13^\circ,176\,396 - 7^\circ,265 \cdot 10^{-8}T$$

expresado en grados por día. Entonces el mes trópico medio es

$$m_t = \frac{360^\circ}{n'_t} = 27^d,321\,582 + 1^d,506 \cdot 10^{-7}T. \quad (5.14)$$

que al igual que los restantes meses varía muy lentamente con el tiempo, aumentando 0,013 segundo cada siglo.

5.14 Mes sidéreo medio

El mes sidéreo es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de

la Luna por el equinoccio fijo, es decir un equinoccio no afectado por los movimientos de precesión y nutación. El mes sidéreo no sólo tiene una variación secular, sino también variaciones periódicas, reflejo de las variaciones de este tipo que tiene el movimiento lunar.

Llamamos mes sidéreo medio el tiempo que tiene que pasar para que la longitud media de la Luna aumente en 360° respecto al equinoccio fijo. Este periodo sólo varía a consecuencia de los términos seculares del movimiento lunar.

Por motivo de la precesión el equinoccio se desplaza en sentido retrógrado, es decir en sentido contrario al movimiento propio de la Luna, por tanto el equinoccio va al encuentro de la Luna. Esto quiere decir que el mes sideral es mayor que el mes trópico, la diferencia entre ambos es el tiempo que tarda la Luna en recorrer el arco que se ha desplazado el equinoccio en un mes trópico, es decir

$$m_{sd} = m_t + \frac{pm_t}{n'_t}$$

p es la precesión general en longitud que como se vio en el epígrafe 3.2 es

$$p = 3^\circ,824 \cdot 10^{-5} + 1^\circ,690 \cdot 10^{-8} T$$

medida en grados por día, por tanto

$$m_{sd} = 27^d,321\,661 + 1^d,857 \cdot 10^{-7} T \quad (6.14)$$

que al igual que en los anteriores casos está medido en días de 24 horas de tiempo terrestre.

6.14 Determinación de las fases lunares

Se puede determinar directamente el momento de las fases lunares calculando las longitudes eclípticas de la Luna y el Sol por el método de Meuss que se desarrolla en 4.13 y por la teoría de Bretagnon y Simon de 10.5, averiguando el momento en que la diferencia de las longitudes es 0, 90, 180 o 270 grados.

Meuss ha ideado un procedimiento basado en la teoría lunar ELP-2000/82 y en la teoría solar VSOP87 de Bretagnon y Francou, que permite determinar el momento de las fases lunares con una error de pocos segundos de tiempo.

El momento de las fases medias lunares con las correcciones de aberración del Sol y de tiempo luz de la Luna es dado por

$$JDT' = 2451\,550,09765 + 29,530\,588\,853k + 0,0001337T^2 - \quad (7.14)$$

$$-0,000\,000\,150T^3 + 0,000\,000\,000\,73T^4$$

donde k es un número que si es entero corresponde a la Luna nueva, si el número tiene de cifras decimales 0,25 será el cuarto creciente, si el número k tiene de cifras decimales 0,50 dará la Luna llena y finalmente si k tiene de cifras decimales 0,75 corresponderá al cuarto menguante. El valor $k = 0$ dará el día juliano en tiempo terrestre de la primera Luna nueva del año 2000.

Para los años anteriores al 2000 el valor de k es negativo, entonces habrá que tener en cuenta que si es un entero corresponde a la Luna nueva, pero si sus decimales son 0,75, 0,50 o 0,25 corresponde al cuarto creciente, Luna llena y cuarto menguante respectivamente.

El valor aproximado de k es dado por la fórmula

$$k = 12,3685(Y - 2000) \quad (8.14)$$

donde Y es el año tomado con decimales. k se toma con las cifras decimales antes indicada dependiendo de qué fase lunar se quiera determinar.

Se calcula aproximadamente los siglos julianos transcurridos desde el año 2000 por la fórmula

$$T = \frac{k}{1236,85} \quad (9.14)$$

con la que calculamos las siguientes magnitudes

$$\begin{aligned} E &= 1 - 0,002\,516T - 0,000\,0074T^2 \\ M &= 2^\circ,5534 + 29^\circ,105\,356\,69k - 0^\circ,000\,0218T^2 - 0^\circ,000\,000\,11T^3 \\ M' &= 201^\circ,5643 + 385^\circ,816\,93528k + 0^\circ,010\,7438T^2 + \\ &\quad + 0^\circ,000\,01239T^3 - 0^\circ,000\,000\,058T^4 \\ \eta'_m &= 160^\circ,7108 + 390^\circ,670\,50274k - 0^\circ,001\,6341T^2 - \\ &\quad - 0^\circ,000\,00227T^3 + 0^\circ,000\,000\,011T^4 \\ \Omega'_m &= 124^\circ,7746 - 1^\circ,563\,75580k + 0^\circ,002\,0691T^2 + 0^\circ,000\,00215T^3. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Para obtener el instante de las distintas fases se hace la suma

$$S_1 = \sum_{i=1}^{i=25} \alpha_i \sin(a_i M' + b_i M + c_i \eta'_m + d_i \Omega'_m) \quad (11.14)$$

α_i son valores dados en la tabla 5. Los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i son números enteros.

Para el cálculo de los dos cuartos se determina la expresión

$$\begin{aligned} S_2 &= 0,00306 - 0,00038E \cos M + 0,00026 \cos M' - 0,00002 \cos(M' - M) + \\ &\quad + 0,0002 \cos(M' + M) + 0,0000 \cos 2\eta'_m. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Y para todas las fases lunares se calcula la suma

$$S_3 = \sum_{i=1}^{i=14} \beta_i \sin A_i \quad (13.14)$$

β_i y A_i son los coeficientes que se encuentran en la tabla 6.

El día juliano en que acontece la fase lunar es

$$JDT = JDT' + S_1 \pm S_2 + S_3 \quad (14.14)$$

el signo + en el tercer sumando se usa para el cuarto creciente y el signo - para el cuarto menguante, para la Luna llena y nueva no se usa el sumando S_2 .

Ejemplo 1.14.- Determinar la primera Luna nueva del año 2020.

- El valor de k se calcula por (7.14)

$$k = 247,37,$$

como queremos determinar la Luna nueva elegimos 248.

- Los siglos julianos transcurridos aproximadamente es

$$T = 0,2005.$$

- De k y T se deducen las magnitudes (10.14)

$$E = 0,999\,49522; \quad M = 20^\circ,681\,858; \quad M' = 124^\circ,164\,682$$

$$\eta'_m = 206^\circ,995\,414; \quad \Omega'_m = 96^\circ,963\,242.$$

- La suma S_1 tiene el valor

$$S_1 = -0,278\,492.$$

- La suma S_3 es

$$S_3 = -2,076\,082 \cdot 10^{-4}.$$

- El día juliano aproximado de la Luna nueva se calcula de (7.14)

$$JDT' = 2\,458\,873,683\,6909.$$

- Por tanto, el día juliano en tiempo terrestre de la primera Luna nueva del año 2020 es el

$$JDT = 2\,458\,873,404\,992$$

que corresponde a la fecha 24 de enero de 2020 a las 21 horas 43 minutos 11 segundos de tiempo terrestre.

7.14 Periodo de 412 días de la lunación

La lunación o intervalo de tiempo entre dos conjunciones consecutivas del Sol y la Luna es variable, a consecuencia tanto de las variaciones seculares como periódicas de ambos astros.

La duración de la lunación depende de la posición que ocupa en su órbita la Luna al comienzo de la lunación y de la posición relativa de las líneas de las ápsides del Sol y la Luna.

La figura 1.14 representa la órbita de la Luna. Supongamos que estando la Luna en el punto 1 ha tenido una conjunción con el Sol, que da comienzo a un periodo sinódico o lunación. Mientras que la Luna describe su trayectoria a través de la elipse, el Sol que estaba en un principio en la misma dirección que 1, se desplaza, moviéndose en el mismo sentido que la Luna pero algo más lento. Al cabo de un tiempo las direcciones de ambos astros respecto a la Tierra coinciden en el punto 1', concluyendo la lunación.

La lunación es el tiempo que la Luna tarda en recorrer el arco $11 + 11'$. El primer sumando lo recorre la Luna en un mes anomalístico, el segundo arco se encuentra, según muestra la figura, en la cercanía del perigeo lunar, por tanto será recorrido en un breve tiempo. En la situación que muestra la figura 1.14 la lunación será más corta que la promedio.

La situación inversa a la anterior se da cuando la Luna está en conjunción en el punto 2. En el punto 2' de nuevo coincidirán las direcciones del Sol y la Luna. Al igual que antes la lunación será el mes anomalístico más el tiempo que la Luna tarda en recorrer el arco $22'$, pero como este arco se encuentra

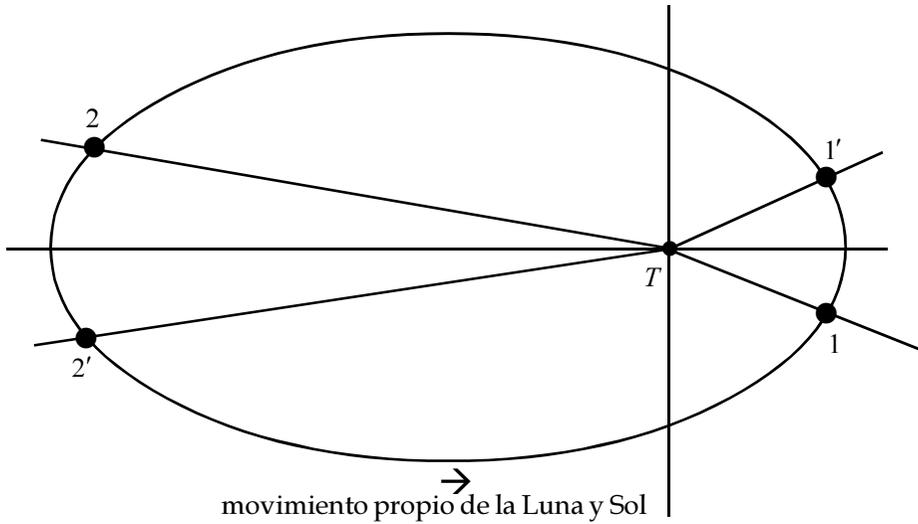


Figura 1.14.- Órbita de la Luna en torno a la Tierra T . La lunación que se inicia con la conjunción en 1 y termina con la conjunción en $1'$ es más corta que la promedio por desplazarse la Luna por el perigeo. La lunación que comienza en 2 y termina en $2'$ es de duración más larga que la promedio, pues en el apogeo la Luna va más lenta.

cerca del apogeo será recorrido con menor velocidad, tardando la Luna más tiempo, por tanto nos encontraremos ante lunaciones de mayor duración que la promedio.

Por lo expuesto cabe decir que las lunaciones más corta se dan cuando el Sol se encuentra alineado con el perigeo de la órbita lunar, si en esta óptima situación se da una conjunción de Sol y Luna, tendremos un máximo relativo de la lunación. Para conocer el periodo de tiempo en que se da esta favorable relación entre Sol y pericentro lunar, es necesario averiguar la velocidad relativa del Sol respecto al pericentro, que en promedio resulta ser la diferencia de los movimientos medios del Sol y del pericentro

$$\dot{L}_m - \dot{\omega}' \approx n - \dot{\omega}'$$

y el periodo de este movimiento o tiempo transcurrido entre dos pasos del Sol por el pericentro lunar es

$$\tau_1 = \frac{360^\circ}{n - \dot{\omega}'} \quad (15.14)$$

que es el primer periodo o periodo corto de variación de la lunación. De (1.5) y (2.13) se determina el denominador de la anterior expresión resultando que para el año 2000 el periodo corto de la lunación es

$$\tau_1 = 411^d, 78 \approx 412^d$$

que son unas 14 lunaciones en promedio. Lo que significa que cada 412 días o 14 lunaciones habrá un periodo de la lunación, pasando sus duraciones por un máximo y un mínimo relativo.

En la figura 2.14 se ve la variación de la duración de la lunación. El eje

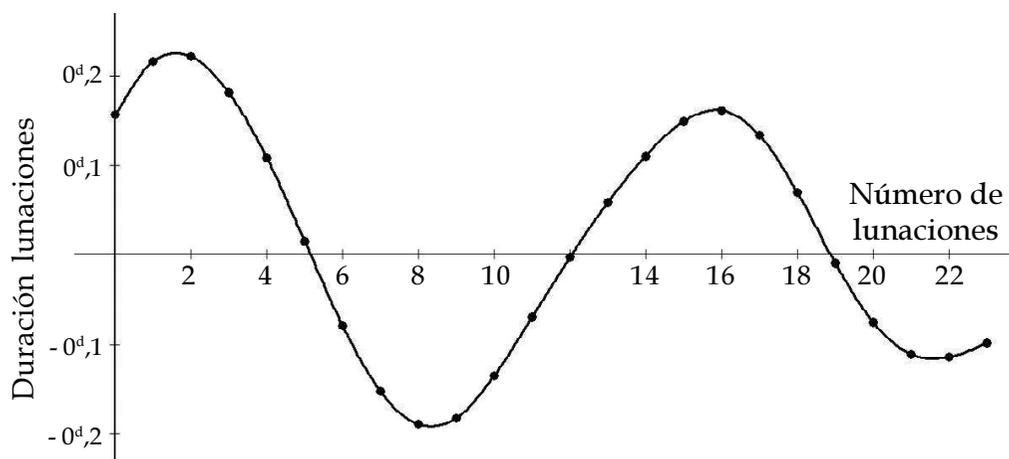


Figura 2.14.- Se dibuja la duración de las 23 lunaciones posteriores al comienzo del año 2020. La línea horizontal marca la duración de la lunación media del año 2000 ($29^{\text{d}} 12^{\text{h}} 44^{\text{m}} 3^{\text{s}}$). El eje vertical da el valor del exceso o defecto en días de la lunación con respecto a la lunación media del año 2000. El primer máximo se encuentra aproximadamente en la lunación 2 y el siguiente máximo en la lunación 16, es decir un periodo de 14 lunaciones aproximadamente: el periodo de 412 días considerado en el texto.

vertical da el exceso (o defecto) de la lunación respecto a la lunación promedio del año 2000. En el eje horizontal están numeradas las lunaciones, empezando a contar desde el año 2020. Vemos que dos máximos consecutivos se dan aproximadamente en la lunación 2 y en la 16, o sea 14 lunaciones como antes hemos calculado. Los mínimos también tienen igual periodicidad, vemos que estas situaciones se dan en las lunaciones 8 y 22 aproximadamente, por tanto un intervalo de 14 lunaciones..

8.14 Periodo de 8,85 años de la lunación

La posición del Sol también interviene en la duración de la lunación. Supongamos que la conjunción tiene lugar en el punto 1 de la gráfica 1.14. Si el Sol se encuentra en su apogeo entonces irá más lento y por tanto el arco $11'$ que recorre durante la lunación será más corto, por lo que será recorrido en más breve tiempo por la Luna. Tendremos entonces lunaciones más corta que la promedio.

La situación contraria la tenemos cuando la conjunción se produce en el punto 2 de la figura 1.14 y el Sol se encuentra en el perigeo, entonces el arco $22'$ será más grande que en promedio y la Luna tardará más tiempo en recorrerlo, teniendo lunaciones más largas.

Por lo dicho, las lunaciones más cortas se darán cuanto estén alineados el perigeo lunar con el apogeo solar. Para conocer en promedio el periodo de tiempo en que se da esta coincidencia, es necesario saber la velocidad relativa del perigeo lunar respecto al apogeo solar, que resulta ser la diferencia de los movimiento medios de los pericentros de ambos astros $\vec{\omega}'_m - \vec{\omega}_m$ y el periodo

o tiempo transcurrido entre dos pasos del perigeo lunar por el apogeo solar es

$$\tau_2 = \frac{360^\circ}{\dot{\omega}'_m - \dot{\omega}_m} \quad (16.14)$$

que es el segundo periodo de la variación de la lunación. De (2.5) y (2.13) obtenemos como valor promedio de este periodo para el año 2000 $\tau_2 = 8,85$ años, que representa aproximadamente unas 109-110 lunaciones. Es decir, en ese tiempo habrá una variación periódica de la duración de las lunaciones, que se superpondrá a la variación de periodo corto antes examinada.

En la figura 3.14 se ha representado un ciclo completo de 8,85 años o 109-110 lunaciones. Este periodo tiene como efecto el amortiguar los máximos del ciclo de 412 días.

En el milenio que comienza en el año 2000 la máxima lunación tendrá una duración de 29^d 19^h 54^m 21^s y que finalizará con la Luna nueva del día 19 de diciembre de 2150. La lunación de menos duración en el mismo periodo tendrá una duración de 29^d 6^h 35^m 5^s y finalizará el día 17 de junio de 2053. Una diferencia de 13 horas y 19 minutos.

Otro factor que interviene en la duración de las lunaciones es la disminución secular que experimenta la excentricidad aparente del Sol. En la figura 4.14 se representa las máximas duraciones de la lunación en periodos

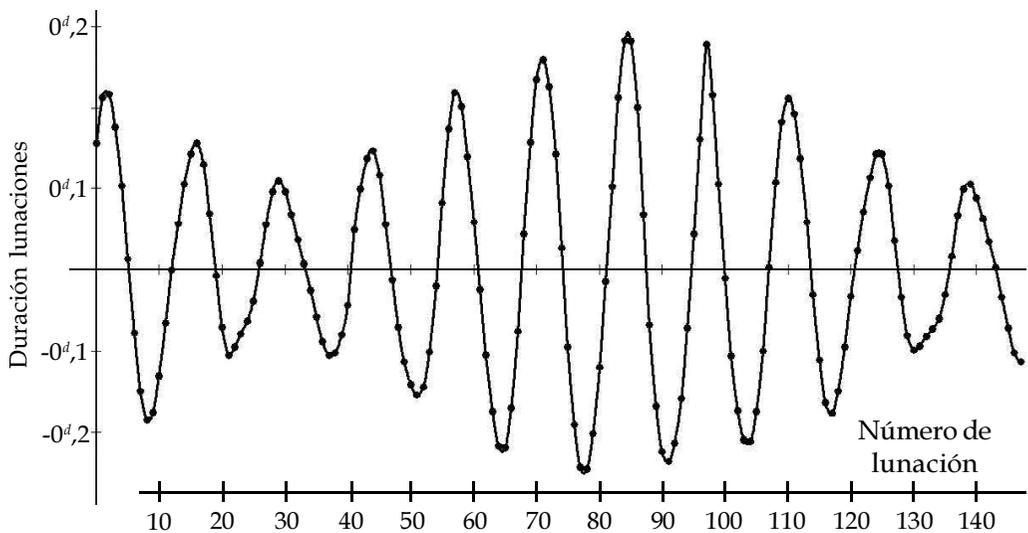


Figura 3.14.- Se representa las 140 lunaciones que comienzan en el año 2020. Además del periodo de 412 días, se ve otro periodo que amortigua los máximos y mínimos de la lunación. Los menores de los máximos corresponden a las lunaciones número 30 y 140, es decir un periodo de unas 110 lunaciones que son aproximadamente los 8,85 años del periodo considerado en el texto. Al igual que en la figura 2.14 el eje horizontal corresponde a la lunación promedio del año 2000 y en el eje vertical están los días de exceso y defecto de cada lunación con respecto a la anterior lunación media. En el eje horizontal está el número de lunación comenzando en el año 2020.

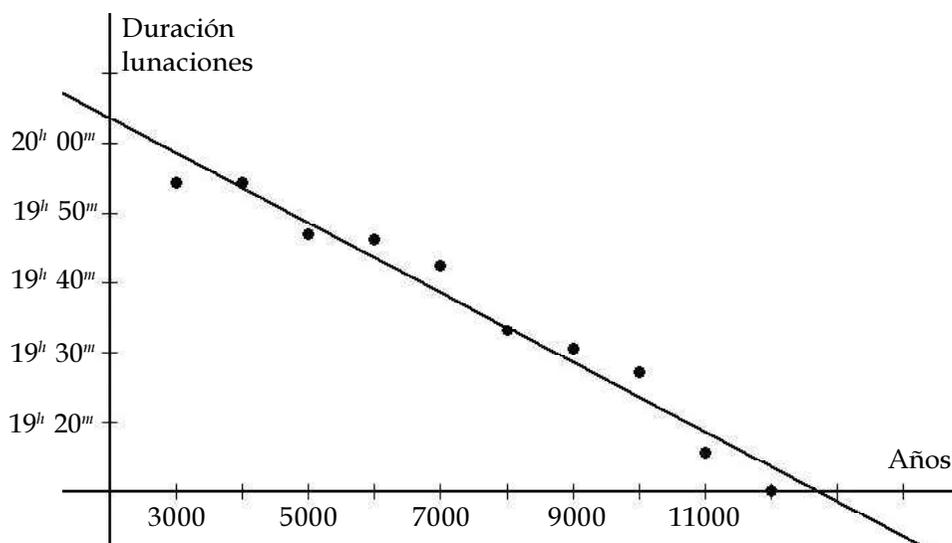


Figura 4.14.- Disminución de las máximas lunaciones. Los puntos son las duraciones más largas en periodos de mil años. El eje horizontal corresponde a la duración máxima de la lunación en el periodo del año 11000 al 12000. La línea recta es la regresión lineal.

de mil años. Se observa que estos valores van disminuyendo de una manera aproximadamente lineal. Al contrario, las mínimas duraciones de las lunaciones siguen una marcha ascendente, también de forma lineal. Lo que significa que con el paso del tiempo los valores extremos de las lunaciones se van acercando.

En la ecuación (2.14) comprobamos que sólo existe una variación secular en las longitudes medias y en la excentricidad de la Tierra, que pueden ser los únicos causantes de la disminución antes comentada de las lunaciones de máxima duración. En (3.14) hemos comprobado que las longitudes medias tienen como efecto un ligerísimo aumento de la duración de las lunaciones, por tanto hay que concluir que es la variación secular de la excentricidad de la órbita terrestre la causante de la paulatina disminución de la duración de las lunaciones extremas, ya sean estas máximas o mínimas.

La excentricidad de la Tierra e disminuye tal como se ve en (3.5), ocasionando que la velocidad sinódica de la Luna también aumente. Por tanto, el periodo sinódico debe de disminuir secularmente, tal como hemos antes afirmado, concluyendo con esta argumentación que la causa de la paulatina disminución de la dispersión de la duración de las lunaciones es consecuencia de la disminución secular de la excentricidad de la órbita de la Tierra.

9.14 Movimiento de la Luna respecto al Sol

La Luna tiene un movimiento propio aparente más rápido que el Sol, por esta razón vamos a estudiar el movimiento relativo eclíptico de la Luna respecto al Sol. La velocidad angular de este movimiento viene dado por la

derivada temporal de la elongación (1.14).

Por (2.14) vemos que el factor que más incide en la velocidad relativa de la Luna respecto al Sol es el primer término de la ecuación del centro de la Luna, que tiene una máxima corrección a la velocidad de 1,43 grados por día, que se alcanza cuando la Luna media pasa por su pericentro, o sea $M' = 0^*$. En efecto, al derivar (2.14) obtenemos la siguiente corrección del movimiento medio de la Luna respecto al Sol n'_s debido al primer término de la ecuación del centro

$$\Delta n' = \left(2e'_m - \frac{e'^3_m}{4} \right) \frac{dM'}{dT} \cos M' = 1^\circ,43 \cos M'$$

hemos usado la derivada de la segunda ecuación de (2.13) y tomado la excentricidad media de la Luna

Debido al movimiento del pericentro de la Luna, este punto puede estar en cualquier lugar de la órbita y por tanto el aumento de velocidad antes señalado no se da en ningún lugar especial respecto al Sol. No obstante, los términos de la elongación Δ que contienen exclusivamente la elongación media D_m originan correcciones en lugares definidos en la órbita de la Luna en torno al Sol, es decir estas correcciones dependen de la fase lunar.

Las correcciones al movimiento medio relativo de la Luna dependientes de la elongación media son

$$\begin{aligned} \Delta n' &= 2 \cdot 2369'', 93 n'_s \cos 2D_m - 124'', 99 n'_s \cos D_m + 4 \cdot 13'', 9 n'_s \cos 4D_m = \\ &= 0,280\ 137 \cos 2D_m - 0,0073\ 872 \cos D_m + 0,003\ 286 \cos 4D_m, \end{aligned}$$

expresado en grados por día y donde hemos tenido en consideración los términos dependientes exclusivamente de D_m del método de Meuss expuesto en 4.13.

Cuando la Luna está en conjunción $D_m = 0$ ** entonces la corrección a la velocidad sinódica de la Luna es en promedio

$$n'_s + \Delta n' = 12,190\ 749 + 0,276\ 036 = 12,466\ 785$$

que son grados por día. Hay que advertir que este es un valor promedio y que según la posición de los perigeos lunar y solar, el movimiento sinódico de la Luna pueden variar sensiblemente la anterior corrección.

Para el caso de la Luna llena $D_m = 180^\circ$ entonces la corrección es

$$n'_s + \Delta n' = 12,190\ 749 + 0,290\ 810 = 12,4816,$$

y para el momento del cuarto creciente $D_m = 90^\circ$ y cuarto menguante $D_m = 270^\circ$ la corrección al movimiento sinódico es la misma

$$n'_s + \Delta n' = 12,190\ 740 - 0,276\ 851 = 11,913\ 898.$$

Concluimos, por tanto, que en el momento de la Luna llena la velocidad

* La Luna verdadera pasa por el pericentro cuando su anomalía verdadera es nula; este momento es algo diferente al paso de la Luna media por el pericentro.

** Hay que recordar que la Luna está en conjunción cuando es nula la elongación Δ , no la elongación media. Por tanto la argumentación del texto es aproximada.

de la Luna respecto al Sol es máxima en promedio y será durante los cuartos cuando la velocidad sinódica tendrá, en promedio, menor valor.

10.14 Movimiento eclíptico de la Luna

La órbita lunar se encuentra inclinada un pequeño ángulo respecto a la eclíptica. Por las leyes de Kepler y por la perturbación solar se determina la longitud de la Luna con relación a su plano orbital. Para conocer la longitud eclíptica se hace la reducción a la eclíptica y encontramos que

$$l' = L' - \tan^2 \frac{i'_m}{2} \sin(2L'_m - 2\Omega'_m) = L' - \tan^2 \frac{i'_m}{2} \sin 2\eta'_m \quad (17.14)$$

donde L' es la longitud de la Luna medida parte en la eclíptica y parte en el plano orbital, tomando como referencia el equinoccio, l' es la longitud eclíptica igualmente referida al equinoccio, i'_m es la inclinación media de la órbita lunar y η'_m es la posición de la Luna media respecto a su nodo ascendente. El segundo sumando de (17.14) es la reducción a la eclíptica.

El movimiento eclíptico de la Luna es la derivada temporal de (2.14) que tiene numerosos términos, tanto seculares como periódicos, siendo el más importante, como ya vimos, el primer término de la ecuación del centro.

Pero en este epígrafe nos interesa la velocidad angular fruto del segundo sumando de (17.14), un término que está relacionado con la posición de la Luna respecto a su nodo ascendente.

Al derivar(17.14) se encuentra

$$\Delta n' = \frac{dL'_m}{dT} - 2 \frac{d\eta'_m}{dT} \tan^2 \frac{\bar{i}'}{2} \cos 2\eta'_m \quad (18.14)$$

donde hemos considerado exclusivamente la corrección que hay que hacer a la longitud de la Luna por motivo de la reducción a la eclíptica. De la primera y cuarta ecuación (2.13) se encuentra que para el año 2000

$$\Delta n' = 13,176\ 396 - 0,053\ 415 \cos 2\eta'_m \quad (19.14)$$

expresado en grados por año. De (19.14) se comprueba que cuando la Luna está en el nodo ascendente $\eta'_m = 0$ entonces la velocidad eclíptica de la Luna alcanza su menor valor promedio 13,122 981 grados por día y el mismo valor alcanzará cuando la Luna se encuentre en el nodo descendente de su órbita. Por tanto, en promedio, la velocidad eclíptica de la Luna con relación al equinoccio es más pequeña cuanto más cerca se encuentre de alguno de sus nodos.

11.14 Periodo de 184 años de la lunación

Como hemos expuesto con anterioridad la variación de velocidades que experimentan el Sol y la Luna a su paso por el perigeo y apogeo produce una variación periódica de la duración de la lunación.

De igual manera la variación de velocidad de la Luna en función de su posición respecto a los nodos, también da lugar a otra periodicidad de la lunación, que como veremos, es de periodo mucho más largo que los otros

dos periodos antes examinados.

La situación más favorable para que haya máximos de lunaciones es cuando la conjunción coincide con la Luna en el perigeo, el Sol en el apogeo y la Luna en uno de sus nodos.

La velocidad del perigeo solar con respecto al nodo ascendente de la Luna es

$$\dot{\omega}_m - \dot{\Omega}'_m$$

donde $\dot{\Omega}'_m$ es la velocidad del nodo ascendente respecto al equinoccio y $\dot{\omega}_m$ es la velocidad del perigeo solar igualmente respecto al equinoccio.

En el intervalo de tiempo τ_2 , calculado en (16.14), se vuelve a reunir el perigeo lunar y el apogeo solar. En este intervalo el perigeo lunar se desplaza el ángulo $\dot{\omega}'_m \tau_2$ con respecto al equinoccio y el apogeo solar se mueve un ángulo $\dot{\omega}_m \tau_2$ también respecto al equinoccio. En este mismo intervalo de tiempo τ_2 el nodo ascendente de la Luna se desplaza

$$\left(\dot{\omega}_m - \dot{\Omega}'_m \right) \tau_2$$

con relación al equinoccio. A este ángulo le falta

$$180 - \left(\dot{\omega}_m - \dot{\Omega}'_m \right) \tau_2 \quad (20.14)$$

para alcanzar los 180° en donde se darían las favorables condiciones para que la lunación alcance el máximo valor. A medida que vayan pasando ciclos de τ_2 años se irán acumulando los ángulos (23.14) hasta llegar a alcanzar los 180°, completando así el ciclo de la lunación que estamos considerando y cuyo periodo τ_3 viene dado por una regla de tres

$$\tau_3 = \frac{180 \tau_2}{180 - \left(\dot{\omega}_m - \dot{\Omega}'_m \right) \tau_2}$$

tomando el valor numérico de $\dot{\omega}_m$ y $\dot{\Omega}'_m$ de (2.5) y de la quinta ecuación (2.13) y el valor de τ_2 de (16.14) se encuentra que este tercer ciclo tiene un periodo de aproximadamente 184 años. Nótese que en el cálculo hemos tenido en cuenta que el nodo lunar tiene sentido retrógrado y por lo tanto su velocidad es negativa. Este ciclo modula los máximos relativos del periodo de 8,85 años.

12.14 La lunación en función del tiempo universal

La duración del mes sinódico (3.14) y de los restantes tipos de meses viene expresada en la escala de tiempo terrestre. Para expresar estas duraciones en tiempo universal usamos (17.2).

Si la duración del mes sinódico viene dada por la expresión

$$m_s = a + bT$$

entonces por (17.2)

$$m_s = (a - au) + (b - bu - aw)T = a' + b'T,$$

donde los coeficientes u y w son dados por (15.2)

$$u = 3,5364 \cdot 10^{-8}; \quad w = 1,9647 \cdot 10^{-8}$$

utilizando los coeficientes numéricos de (3.14) nos queda

$$m_s = 29^d,530\,58781 - 3^d,639 \cdot 10^{-7} T \quad (21.14)$$

medido en días de 24 horas de *UT*. (21.14) muestra que en cada siglo la lunación media en tiempo universal disminuye 0,031 segundos.

13.14 Tiempo entre Luna nueva y Luna llena

El tiempo que media entre una Luna nueva y otra llena de la misma lunación es un intervalo que tiene una variabilidad que alcanza el día y medio y depende de las posiciones ocupadas por el Sol y la Luna al comienzo de la lunación.

Si el recorrido que tiene que hacer la Luna desde la conjunción a la oposición transcurre por la zona en que se encuentra el perigeo lunar, entonces el tiempo entre Luna nueva y llena es menor que la media. Al contrario, si el camino que recorre la Luna desde la conjunción a la oposición es por la zona del apogeo encontramos que el tiempo entre Luna nueva y llena es más que el promedio.

Por tanto nos encontraremos con una oscilación periódica como muestra la figura 5.14. El periodo de este ciclo es de 14 meses aproximadamente, porque al igual que el estudiado en el epígrafe 7.14, depende de la posición del Sol respecto al perigeo lunar.

14.14 Agrupación de lunaciones

Un asunto que está muy relacionado con los calendarios lunares, ya sean empíricos o computacionales, son las máximas y mínimas duraciones que pueden tener varias lunaciones consecutivas.

Se ha hecho esta investigación para el periodo comprendido entre el año

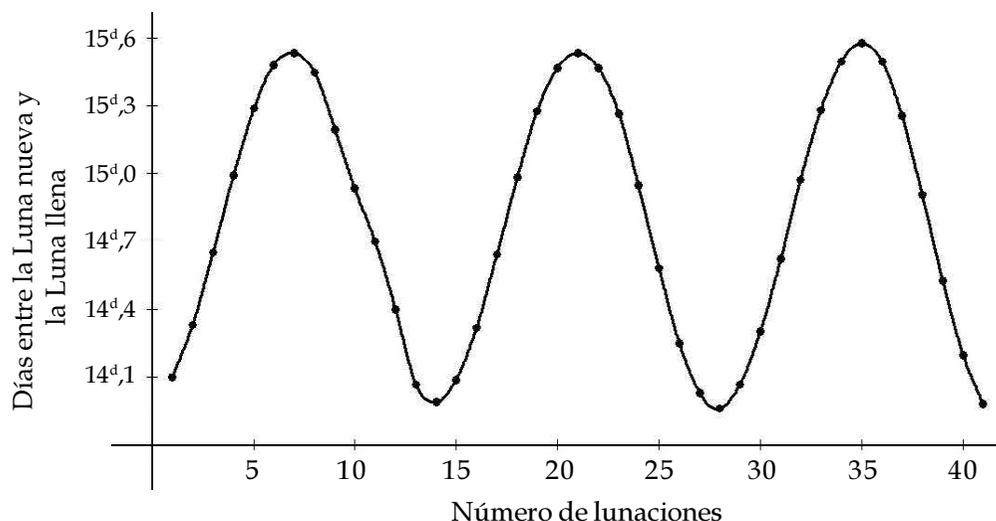


Figura 5.14.- Días que median entre lunas nuevas y llenas. En el eje horizontal están las lunaciones, contadas a partir del año 2020. La medida del eje vertical son los días que hay entre la Luna nueva y la Luna llena. Se observa el periodo de 14 lunaciones.

Lunaciones consecutivas	Máximas duraciones	Mínimas duraciones
2	59 ^d , 65	58 ^d , 56
3	89 ^d , 45	87 ^d , 87
4	119 ^d , 22	117 ^d , 22
12	355 ^d , 46	353 ^d , 72

Tabla 1.14.- Máximas y mínimas duraciones de lunaciones consecutivas.

2000 y el 3000 encontrándose los resultados de la tabla 1.14.

De estos resultados se desprende que en un calendario cuyos meses sigan la Luna nueva, como es el caso del calendario chino, es posible que existan tres meses consecutivos de 30 días cada uno. Incluso en condiciones muy favorables pueden existir cuatro lunaciones consecutivas de 30 días. En efecto, si la Luna nueva viniera al comienzo del día (que será el 1 para los calendarios lunares considerados) es posible que, por ejemplo, los 119,22 días que aparecen en la tabla 1.14 encajen en 120 días o 4 meses de 30 días cada uno.

Por los resultados de la tabla 1.14 vemos que son posibles tres lunaciones consecutivas de 29 días. En efecto, si la Luna nueva se produce al final del día, que sería el primero del mes, es posible que encajen los 87,87 días de la tabla 1.14 en 87 días enteros o 3 meses de 29 días.

No es posible que existan cuatro meses consecutivos de 29 días de duración, pues eso sería 116 días ya que la mínima duración de cuatro lunaciones es 117,22 días.

En cuanto a la duración de un años lunar (es decir 12 lunaciones) es posible que tenga 353, 354, 355 o 356 días, según se desprende de la tabla 1.14, siempre y cuando se establezca que el primer día del mes sea aquel en que comienza la Luna nueva astronómica.

Fracción iluminada, ángulo de fase, edad de la Luna, magnitud estelar y semidiámetro

1.15 Zona iluminada de la Luna

Si tenemos en cuenta que el tamaño real del Sol es mucho mayor que el de la Luna, hay que concluir que siempre más de la mitad de la esfera lunar está permanentemente iluminada.

Vamos a fijarnos en la figura 1.15, donde la línea $A-B$ representa el diámetro del Sol de radio R_s y el círculo es la Luna que suponemos completamente esférica y de radio R' . La distancia del centro de la Luna al centro del Sol es r'' .

Tratamos de averiguar la porción de la Luna que es iluminada por el Sol, que como hemos dicho supera el 50%. En la figura 1.15 hemos dibujado un

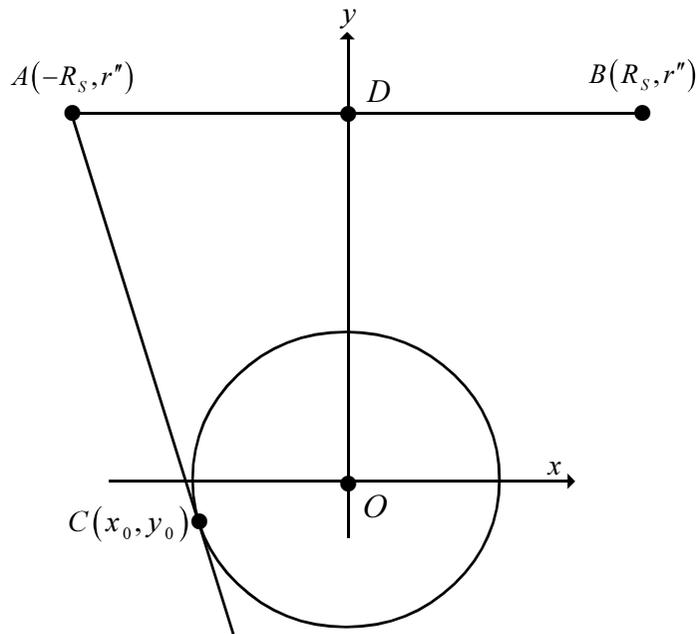


Figura 1.15.- Determinación de la máxima fracción iluminada de la Luna. La línea OD une el centro de la Luna con el centro del Sol.

sistema de coordenadas cartesianas y un rayo que partiendo de uno de los bordes del Sol ilumina la parte más extrema de la Luna, punto que hemos representado por C .

Como la ecuación de la circunferencia lunar es

$$x^2 + y^2 = R'^2$$

la pendiente m_0 de la recta tangente a la circunferencia en el punto C es

$$m_0 = (y')_0 = \frac{-x_0}{y_0} = \frac{-x_0}{\sqrt{R'^2 - x_0^2}}$$

por tanto la ecuación de la recta que une A con C es

$$y = m_0(x + R_S) + r''.$$

Esta recta debe pasar por el punto C de coordenadas (x_0, y_0) por tanto debe cumplirse

$$y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x_0 + R_S) + r'' \Rightarrow y_0^2 = -x_0^2 - x_0 R_S + r'' y_0 \quad (1.15)$$

como el punto (x_0, y_0) pertenece a la circunferencia se cumple

$$y_0^2 = R'^2 - x_0^2$$

llevando este resultado a (1.15) queda

$$R'^2 = -x_0 R_S + r'' y_0 \quad (2.15)$$

que se resuelve por aproximaciones sucesivas. Inicialmente suponemos $x_{0-1} = -R'$, donde el signo - es por la disposición de la figura 1.15, entonces

$$y_{0-1} = \frac{R'^2 - R' R_S}{r''}$$

utilizando los valores numéricos

$$R' = 1,738 \cdot 10^6; \quad R_S = 6,96 \cdot 10^8; \quad r'' = 149,6 \cdot 10^9$$

todos ellos expresados en metros, encontramos en primera aproximación

$$x_{0-1} = 1,738 \cdot 10^6; \quad y_{0-1} = -8065,69$$

igualmente en metros. Para la segunda aproximación utilizamos

$$x_{0-2} = -\sqrt{R'^2 - y_{0-1}^2} = -1,737\,981 \cdot 10^6$$

y de (2.15) se obtiene

$$y_{0-2} = -8065,60$$

resultados estos dos últimos que podemos dar por buenos.

Lo anterior quiere decir que además de la cara de la Luna que mira al Sol, hay una pequeña franja iluminada en la cara opuesta al Sol, se trata de un anillo circular de 19 metros ($= R' - x_0$) tal como sería vista por un observador situado mirando la parte de la Luna opuesta al Sol. Esto significaría que estaría iluminada una franja circular de aproximadamente 8 065 metros ($\approx y_0$) de distancia de la mitad de la Luna y medida en el misma superficie de la Luna.

Por lo deducido hay que concluir que en la situación ideal, que se daría en un eclipse total, una mínima parte de la Luna que mira a la Tierra está iluminada, concretamente el anillo antes calculado de 19 metros de ancho. Sin embargo, esta zona está iluminada sólo por una porción del disco solar, es decir se encuentra en la zona donde está empezando el orto o está concluyendo el ocaso. Además, los rayos del Sol que inciden en esta zona lo hacen con gran inclinación, lo que disminuye aún más la iluminación de este anillo, a lo que hay que añadir que las irregularidades de la superficie lunar con su sombras mermarán todavía más la iluminación de este zona.

Podemos concluir por tanto, que el resultado obtenido es puramente académico y que en los cálculos siguientes podemos suponer que el Sol tiene un tamaño puntual y se encuentra infinitamente alejado, por tanto iluminando exactamente la mitad de la esfera lunar, lo que significa que vamos a suponer que los rayos del Sol llegan a la superficie lunar paralelos al radiovector que une los centros del Sol y de la Luna.

2.15 Fracción iluminada del disco lunar

En la figura 2.15 la circunferencia $ABCD$ divide a la Luna en dos semiesferas, una de ellas, la que está dirigida hacia el Sol, está iluminada.

χ es el ángulo de fase o ángulo selenocéntrico entre los centros del Sol y de la Tierra. θ es el ángulo formado por la línea que une el centro de la Tierra con el centro del Sol y la línea paralela a la que une el centro de la Luna con el centro del Sol, por tanto θ no coincide con la elongación entre Sol y Luna, ni tampoco con el arco-luz o ángulo entre ambos astros, aunque es un ángulo muy cercano a ambos.

Desde la Tierra se verá iluminada la porción $BEDF$ formada por un semicírculo o terminador externo y por una semielipse o terminador interno. El punto F o punto medio de esta semielipse es la proyección del punto A . El ángulo θ coincide con el formado por los planos $ABCD$ y $BEDF$.

La elipse de la que forma parte el terminador interno tiene respecto al sistema de coordenadas que se apoya en al plnao de la figura 2.15 la ecuación

$$\frac{x^2}{R'^2} + \frac{y^2}{R'^2 \cos^2 \theta} = 1 \quad (3.15)$$

siendo R' el radio de la Luna. De la figura 3.15 y de (3.15) se encuentra

$$\tan \psi = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{R'}{\sqrt{\tan^2 \psi + \sec^2 \theta}}, \quad (4.15)$$

llamaremos a ψ el ángulo de posición.

El ancho de la zona iluminada de la Luna ω es la distancia radial que hay entre los dos terminadores (ver figura 3.5). Por tanto el ancho depende de los ángulos ψ y θ . Por el dibujo 3.15 y por (4.15) se encuentra que

$$\omega(\theta, \psi) = R' - \frac{y}{\cos \psi} = R' \left(1 - \frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \theta + \cos^2 \psi}} \right),$$

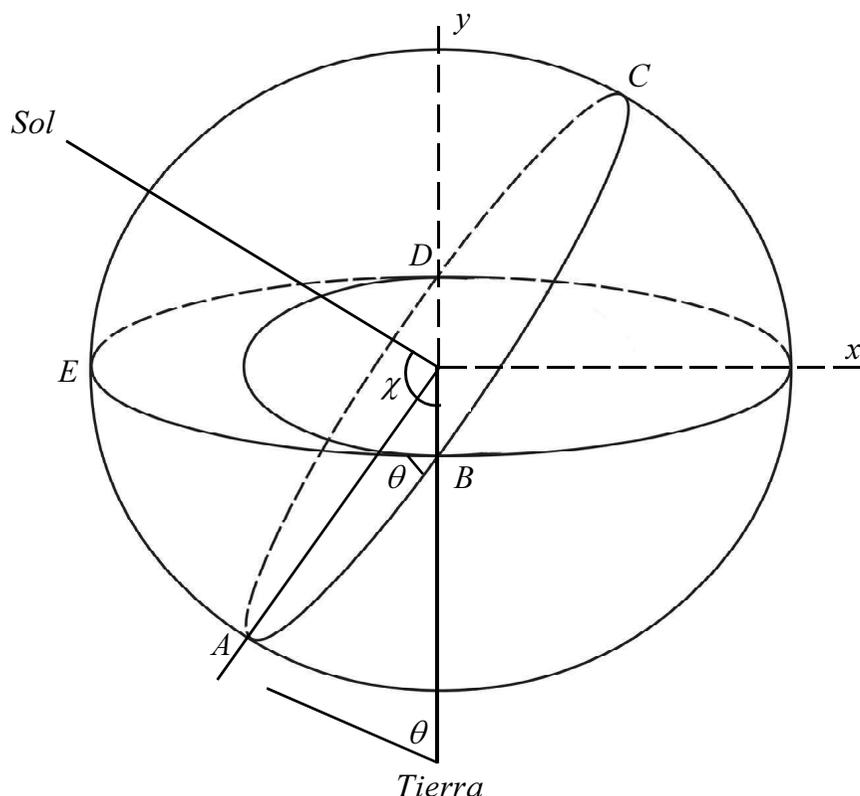


Figura 2.15.- Fase lunar. La esfera es la Luna. La parte iluminada por el Sol es la semiesfera limitada por el círculo $ABCD$. Desde la Tierra la zona iluminada que se observa es la superficie limitada por las líneas $BEDF$. Esta superficie está limitada por dos arcos que son los dos termiadores: exterior uno e interior el otro.

el máximo ancho se encontrará cuando el ángulo de posición sea de 0 grados

$$\omega_{\max}(\theta) = R'(1 - \cos\theta). \quad (5.15)$$

El máximo valor del ancho es nulo en la Luna nueva $\theta = 0$ y máximo en la Luna llena $\theta = 180^\circ$ entonces $\omega_{\max} = 2R'$.

Hay otra forma de expresar la fase lunar y es por la magnitud que llamaremos fase k , que representa la porción del área iluminada de la Luna. El área A de la parte iluminada de la Luna es la diferencia entre el área de un semicírculo y el de una semielipse

$$A = \frac{1}{2}\pi R'^2 - \frac{1}{2}\pi R'R' \cos\theta = \frac{1}{2}R'^2(1 - \cos\theta)$$

entonces la fase k , o cociente entre el área iluminada y el área total de la Luna es

$$k = \frac{A}{\pi R'^2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta). \quad (6.15)$$

cantidad relacionada con la fracción del ancho máximo respecto al diámetro de la Luna $k = \omega_{\max}/2R'$.

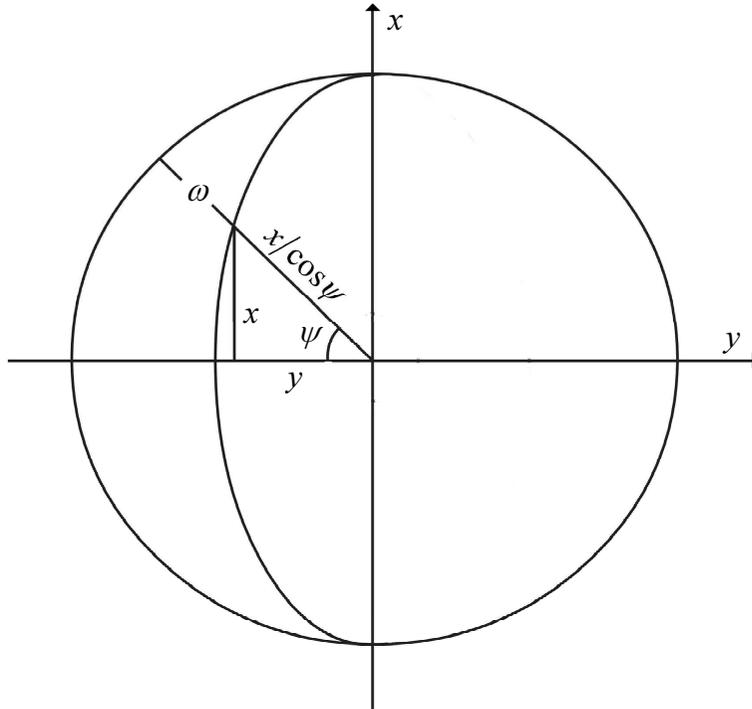


Figura 3.15.- Ancho de la zona iluminada de la Luna. La circunferencia representa la Luna vista desde la Tierra. En su centro está el origen de un sistema cartesianos de coordenadas. El borde izquierdo es el terminador externo y un poco más a la derecha está el terminador interno que tiene la forma de una semielipse. Entre ambos límites está la parte iluminada de la Luna tal como se observa desde la Tierra. ψ es el ángulo de posición y ω el ancho de la zona iluminada, que depende tanto del ángulo ψ como de las posiciones relativas de la Tierra y el Sol respecto la Luna que es dada por el ángulo de fase χ .

El ángulo θ está relacionado con el ángulo de fase χ . Del cuadrilátero de la figura 4.15 se encuentra

$$\theta = 180 - \chi$$

entonces el ancho máximo de la parte iluminada de la Luna (5.15) y su fase (6.15) se ponen en función del ángulo de fase

$$\omega_{\max}(\chi) = R'(1 + \cos \chi); \quad k = \frac{1}{2}(1 + \cos \chi). \quad (7.15)$$

3.15 Cálculo del ángulo de fase

Para determinar el ángulo de fase χ es necesario previamente el cálculo del arco-luz a_L , que es el ángulo geocéntrico entre el Sol y la Luna. Obsérvese que este ángulo no coincide con la elongación, la cual es medida en la eclíptica, mientras que el ángulo-luz es el arco de círculo máximo que une los centros del Sol y la Luna.

De la figura 5.15 se encuentra el arco-luz del triángulo rectángulo SLP

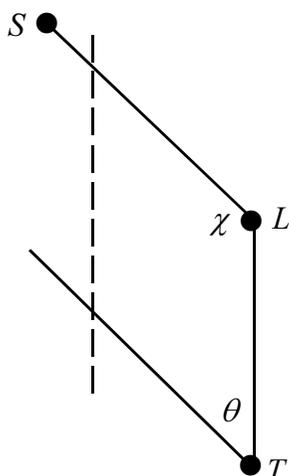


Figura 4.15.- Relación entre los ángulos θ y χ .

aplicando el teorema del coseno

$$\cos a_L = \cos \beta' \cos (l' - L). \quad (8.15)$$

En la figura 6.15 se dibuja un triángulo plano, al aplicar el teorema del seno de la trigonometría plana se obtiene

$$\frac{\sin \chi}{r} = \frac{\sin (180 - \chi - a_L)}{r'}$$

donde r es la distancia de la Tierra al Sol y r' es la distancia de la Tierra a la

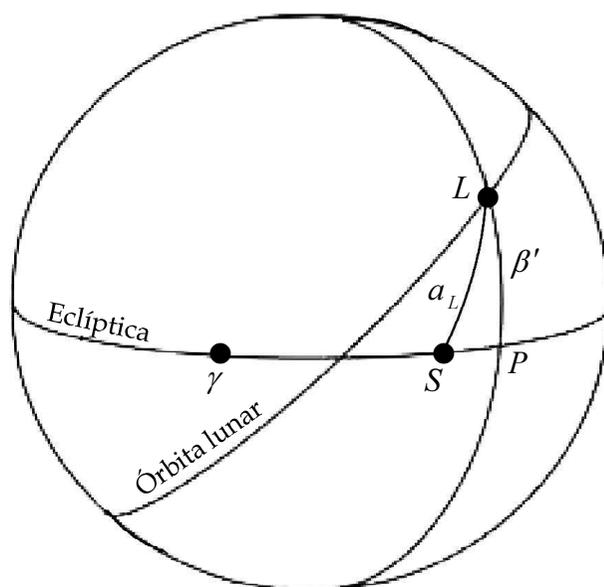


Figura 5.15.- En la esfera celeste hemos dibujado la eclíptica, donde está el equinoccio γ y el Sol S . La órbita lunar se encuentra inclinada respecto a la eclíptica y en ella se encuentra la Luna L . β' es la latitud eclíptica de la Luna. La distancia SP es la diferencia entre las longitudes eclípticas de la Luna y el Sol. El ángulo entre S y L es el arco-luz.

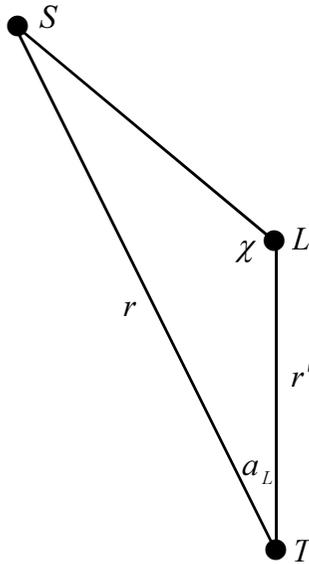


Figura 6.15.- Determinación del ángulo de fase χ a partir del arco-luz a_L . T es la Tierra, L la Luna y S el Sol.

Luna. Simplificando la anterior expresión encontramos

$$\tan \chi = \frac{r \sin a_L}{r' - r \cos a_L} \quad (9.15)$$

entonces (9.15) en combinación con (8.15) determina el ángulo de fase, con el cual se puede aplicar (7.15) y conocer el ancho de la zona iluminada de la Luna y la fase lunar.

Ejemplo 1.15.- Determinar la fase de la Luna y el máximo ancho de su zona iluminada el día 20 de marzo de 2020 a las 6 horas de tiempo terrestre.

- De las tablas de Bretagnon-Simon (epígrafe 10.5) se determina que la longitud eclíptica aparente del Sol y su distancia a la Tierra es

$$L = 0^\circ 5' 21''; \quad r = 0,995\,945 \text{ ua} = 1,489\,912 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

- La longitud y la latitud eclíptica de la Luna, y su distancia a la Tierra se determinan por la teoría de Meuss (epígrafe 4.13)

$$l' = 314^\circ 38' 21''; \quad \beta = -3^\circ 14' 15''; \quad r' = 4,001\,027 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

- Por (8.15) se calcula el arco-luz

$$a_L = 45^\circ 32' 24''.$$

- Por mediación de (9.15) se calcula el ángulo de fase

$$\tan \chi = -1,019\,029 \Rightarrow \chi = 134^\circ 21' 0''.$$

- Por (7.15) se calcula el máximo ancho de la zona iluminada de la Luna y la fase lunar

$$\omega_{\max} = 5,230\,697 \cdot 10^5 \text{ m}; \quad k = 0,150\,480$$

lo que quiere decir que está iluminada un 15% de la superficie lunar.

El ángulo de fase que se determina por (9.15) es geocéntrico y por tanto

determina la fase y el máximo ancho de la zona iluminada de la Luna si el observador se encuentra en el centro de la Tierra. El ángulo de fase topocéntrico es el ángulo selenocéntrico entre el centro del Sol y el observador sobre la superficie de la Tierra, como se ve en la figura 7.15.

El ángulo de fase topocéntrico χ_T está relacionado con el ángulo de fase geocéntrico χ por la relación

$$\chi_T = \chi - p$$

donde p es el paralaje del punto de observación. No vamos a cometer error apreciable si suponemos que la Tierra es una esfera de radio R . Entonces por la figura 7.15 se encuentra por el teorema del seno aplicado al triángulo CPL

$$\frac{\sin p}{R} = \frac{\sin(90 + h'_T)}{r'} \Rightarrow p \approx \frac{R}{r'} \cos h'_T = \pi' \cos h'_T$$

donde h'_T es la altura topocéntrica de la Luna y π' es su paralaje horizontal ecuatorial. Como el ángulo es pequeño hemos identificado el seno con el ángulo en radianes, entonces

$$\chi_T = \chi - \pi' \cos h'_T.$$

Es necesario establecer un criterio para la medida de la altura de la Luna. Para aplicar las fórmulas anteriores la altura se mide desde el horizonte hacia la línea que une observador con la Luna en el sentido contrario de las agujas del reloj. Esto significa que las alturas van de 0° a 180° y por tanto algunas veces el ángulo de fase topocéntrico es mayor que el geocéntrico y

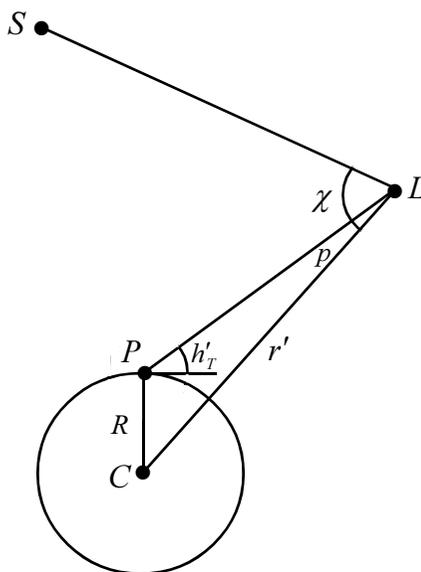


Figura 7.15.- C es el centro de la Tierra, S y L las posiciones del Sol y la Luna. P es el punto de observación sobre la superficie terrestre. El ángulo de fase geocéntrico χ es CLS . El ángulo CLP es el paralaje lunar p . $\chi_T = \chi - p$ (ángulo PLS) es el ángulo topocéntrico del observador situado en el punto P de la superficie terrestre.

en otras ocasiones ocurre lo contrario.

El máximo ancho de la zona iluminada de la Luna $\omega_{T-\max}$ y la fase lunar k_T cuando se observada desde un punto de la superficie de la Tierra en la que se ve la Luna con la altura h'_T es según (7.15)

$$\omega_{T-\max}(\chi_T) = R(1 + \cos \chi_T); \quad k_T = \frac{1}{2}(1 + \cos \chi_T).$$

Como π' es un ángulo pequeño, de valor cercano a un grado, podemos simplificar y obtener para la fase topocéntrica

$$\begin{aligned} k_T &= \frac{1}{2} [1 + \cos(\chi - \pi' \cos h'_T)] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} (1 + \cos \chi + \pi' \cos h'_T \sin \chi) = k + \frac{1}{2} \pi' \cos h'_T \sin \chi \end{aligned}$$

de donde deducimos que la mayor diferencia entre la fase topocéntrica y geocéntrica es del 1,7% aproximadamente.

Otro asunto que hay que considerar es que el ángulo de fase no representa exactamente la fase lunar. En efecto, que χ sea nulo no significa que sea la Luna llena y $\chi = 180^\circ$ no es en general el valor correspondiente a la Luna nueva. Esto es así porque la Luna tiene una latitud eclíptica, que aunque pequeña, hace que se encuentre fuera del plano orbital, a excepción de cuando la Luna pasa por sus nodos.

Entonces en general en la Luna llena no estará iluminada completamente la cara lunar que mira hacia la Tierra. E Igualmente, la Luna nueva tendrá una pequeña porción iluminada.

En la figura 8.15 se representa a la Tierra, Sol y Luna en el momento de la Luna nueva, cuando las longitudes eclípticas del Sol y de la Luna coinciden. El plano de la figura es perpendicular al plano de la eclíptica. Usando el teorema del seno se obtiene

$$\frac{\sin \chi}{r} = \frac{\sin(180 - \beta')}{r''} \Rightarrow \sin \chi = \frac{r}{r''} \sin \beta',$$

r'' es la distancia de la Luna al Sol y r es la distancia de la Tierra al Sol. Como la latitud eclíptica β' no es en general nula, el ángulo de fase χ tampoco será nulo en la Luna llena. El máximo valor que puede alcanzar la latitud eclíptica de la Luna es la inclinación de su plano orbital respecto a la eclíptica que tiene el valor medio de $5^\circ 8' 43''$. Como $r \approx r''$ podemos tomar como una aproximación aceptable $\chi \approx \beta'$ para la Luna llena en el momento que consideramos como el valor máximo del ángulo de fase en el momento de la Luna llena.

Por (7.15) se encuentra que a la Luna llena le puede faltar hasta un 0,20% para estar completamente iluminada.

4.15 Ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna

Para determinar la orientación de los cuernos o extremos de la Luna se utiliza el ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna ζ , que es el

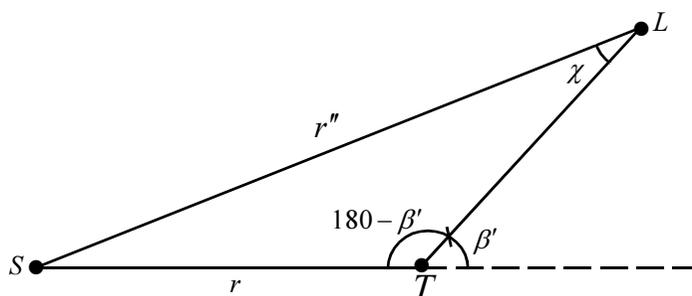


Figura 8.15.- Representación de la Luna llena. En este momento el Sol S , la Luna L y la Tierra T se encuentran en un plano perpendicular a la eclíptica. Los tres astros no están alineados porque existe una latitud eclíptica lunar β' . El ángulo de fase χ en general no es nulo, aunque muy pequeño.

ángulo formado por el círculo horario del centro de la Luna y el radio lunar del punto medio del limbo iluminado de la Luna, medido el ángulo desde el norte y en sentido contrario a las agujas del reloj cuando es visto desde el punto de observación (ver figura 9.15). Este ángulo es también el sustentado entre la dirección de los centros del Sol y la Luna y el círculo horario lunar.

En la figura 10.15 se representa la esfera celeste y las posiciones del Sol y de la Luna. El ángulo en el vértice L del triángulo esférico SNL es $360 - \zeta$ o $-\zeta$ puesto que el ángulo ζ se mide desde el círculo horario hasta la dirección del Sol en el sentido contrario a las agujas del reloj y en la representación del dibujo el Sol está al oeste de la Luna, es decir hemos dibujado la situación de Luna creciente.

Del triángulo SNL aplicando el teorema del seno se encuentra

$$\frac{\sin(360 - \zeta)}{\cos \delta} = \frac{\sin(\alpha' - \alpha)}{\cos a_L} \Rightarrow \sin \zeta = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha')}{\cos a_L}.$$

Aplicando el teorema del seno por el coseno (3.A)

$$\sin a_L \cos \zeta = \sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos(\alpha - \alpha')$$

entonces

$$\tan \zeta = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha')}{\cos a_L \cos \zeta} = \frac{\cos \delta \sin(\alpha - \alpha')}{\sin \delta \cos \delta' - \cos \delta \sin \delta' \cos(\alpha - \alpha')} \quad (10.15)$$

fórmula que nos permite determinar el ángulo ζ en función de las coordenadas ecuatoriales del Sol y la Luna.

Si ζ es mayor que 180 grados significa que el Sol se encuentra al oeste de la Luna, estamos por tanto en el periodo de Luna creciente. Sin embargo, si ζ es menor de 180° entonces el Sol se encuentra al este de la Luna y se encuentra en el periodo decreciente.

La orientación de los cuernos viene dada por los ángulos $90^\circ + \zeta$ y $90^\circ - \zeta$.
Ejemplo 2.15.- Determinar el ángulo de posición del limbo brillante de la Luna el día 15 de abril de 2035 a las 15 horas 30 minutos de tiempo terrestre.

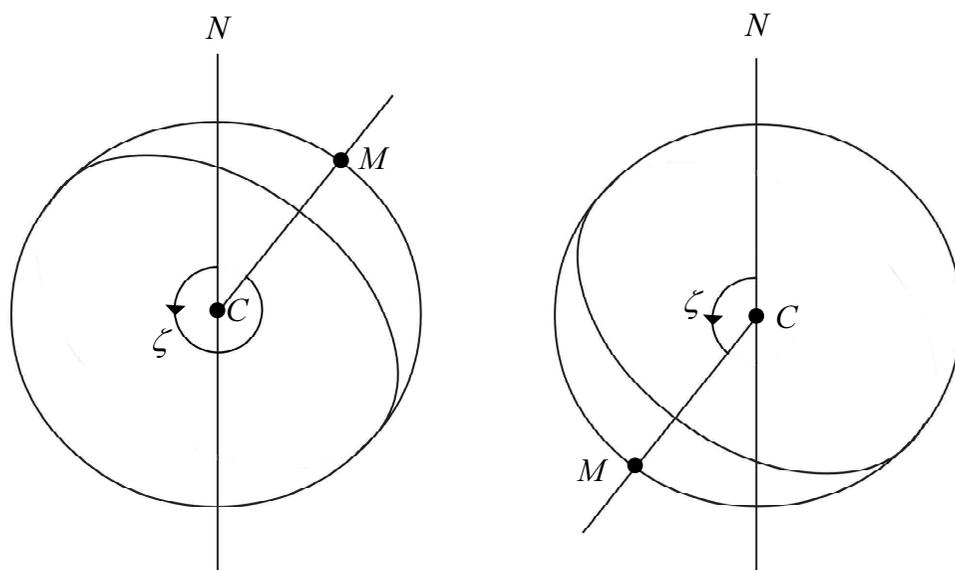


Figura 9.15.- Ángulo de posición del limbo brillante de la Luna ζ . A la izquierda se representa la Luna creciente como es observada desde la superficie de la Tierra. *M* es el punto medio del limbo y el Sol se encuentra en la dirección de *C* a *M*. El ángulo ζ se mide en sentido contrario a las agujas del reloj. En la figura de la derecha se representa la Luna decreciente. El Sol está en la dirección de *C* a *M*. Como en el caso anterior el ángulo ζ se mide desde el norte en sentido contrario a las agujas del reloj. Si el ángulo ζ es mayor que 180 grados la Luna está creciendo y si es menor de 180 grados está decreciendo.

- Se calcula la longitud eclíptica aparente del Sol por el método del epígrafe 10.5

$$L = 25^{\circ} 30' 15'', 1.$$

- Por el método de 4.13 se calcula las coordenadas eclípticas de la Luna

$$l' = 122^{\circ} 15' 56'', 5; \quad \beta' = -3^{\circ} 26' 30''.$$

- Las coordenadas eclípticas del Sol y de la Luna se pasan por la expuesto en 6.5 a coordenadas ecuatoriales

$$\alpha = 1^h 34^m 35^s, 2; \quad \delta = 9^{\circ} 51' 42'', 2$$

$$\alpha' = 8^h 14^m 53^s, 5; \quad \delta' = 16^{\circ} 17' 39'', 3.$$

- Ahora aplicamos (10.15) obteniendo el ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna

$$\zeta = 282^{\circ} 22' 15'',$$

como el ángulo es mayor que 180° entonces estamos en la Luna creciente, es decir que el Sol se encuentra al oeste de la Luna

5.15 Ángulo de posición del limbo de la Luna respecto al cénit

El ángulo de posición ζ está referido al círculo horario y por tanto es indiferente de la posición topocéntrica de observación. Ahora lo que

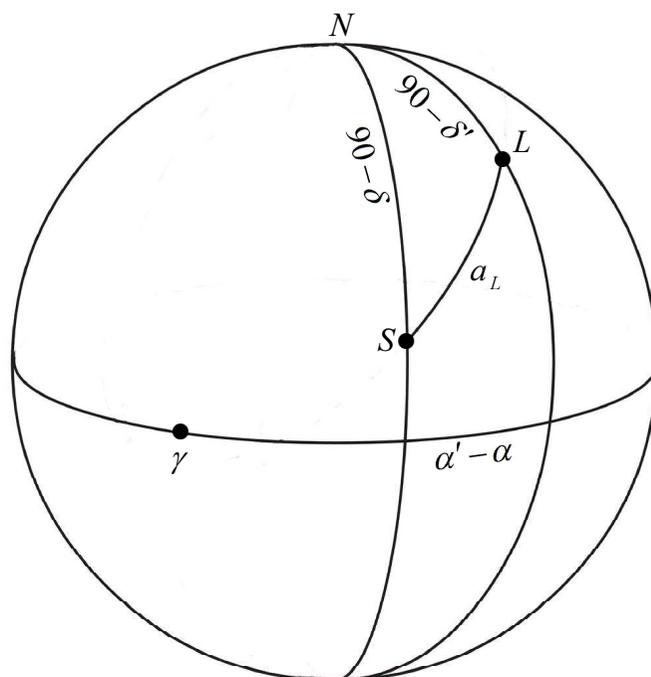


Figura 10.15.- En la esfera celeste hemos dibujado el ecuador, que es el círculo horizontal, y el equinoccio γ . S y L son el Sol y la Luna. N es el polo norte geográfico. Los círculos máximos NS y NL son los círculos horarios de los centros del Sol y de la Luna, que pasando por los polos norte y sur son perpendiculares al ecuador. El arco SL es el arco-luz. El ángulo en N es $\alpha - \alpha'$ y el ángulo en L es $360 - \zeta$ puesto que el ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna ζ se mide desde el círculo horario en el sentido contrario a las agujas del reloj tal como es visto desde el punto de observación; nótese que en el dibujo el Sol está hacia el oeste, es decir que la Luna está creciente. A partir del triángulo NSL se determina el ángulo ζ .

buscamos es una magnitud que nos indique la dirección del limbo y cuernos lunares para un observador topocéntrico, ángulo que llamaremos ζ_T .

El ángulo ζ_T es definido como el ángulo entre la vertical del lugar y el radio vector que une el centro de la Luna con el punto medio del limbo de la zona iluminada de la Luna, medido desde el cénit en sentido contrario de las agujas del reloj como es visto desde el observador.

Para calcular el ángulo ζ_T utilizamos la figura 11.15. Entonces por un cálculo en todo similar al hecho en el epígrafe anterior se llega a

$$\tan \zeta_T = \frac{\cos h \sin(A' - A)}{\sin h \cos h' - \cos h \sin h' \cos(A' - A)} \quad (11.15)$$

donde h , h' y A , A' son las alturas y acimut del Sol y de la Luna donde hemos tenido en cuenta que el acimut lo estamos midiendo en sentido retrógrado, mientras que las ascensiones rectas que aparecen en la fórmula (10.15) se miden en sentido directo.

Ejemplo 3.15.- Determinar el ángulo de posición del limbo brillante de la

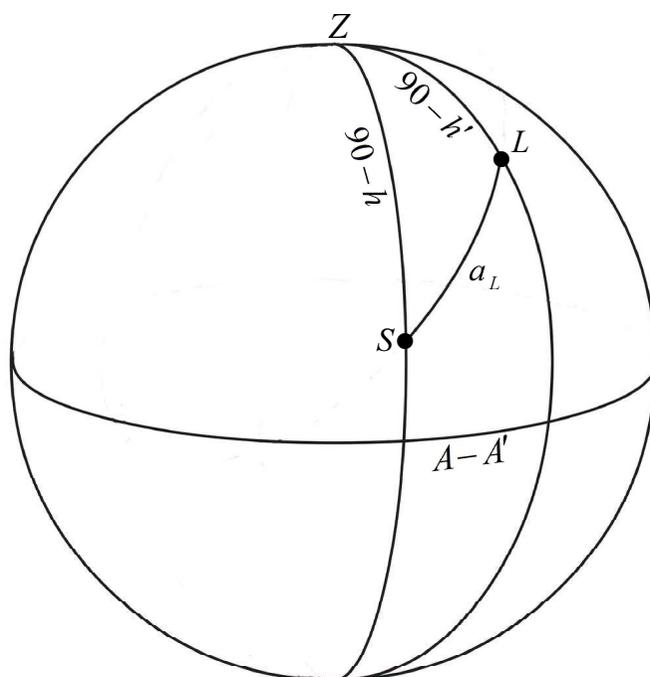


Figura 11.15.- En la esfera celeste hemos dibujado el horizonte, que es el círculo horizontal. *S* y *L* son el Sol y la Luna, *Z* es el cénit del lugar de observación. Los acimuts se miden en sentido retrógrado desde el meridiano superior del lugar hasta el punto de corte del horizonte con la vertical del astro. El arco de círculo máximo entre el Sol y la Luna es el arco-luz.

Luna respecto al cénit para el día 15 de abril de 2035 a las 15 horas y 30 minutos de tiempo terrestre en la posición de 30° norte y 20° oeste.

- Como se vio en el ejemplo anterior las coordenadas ecuatoriales del Sol y la Luna son

$$\alpha = 1^h 34^m 35^s,2; \quad \delta = 9^\circ 51' 42'',2$$

$$\alpha' = 8^h 14^m 53^s,5; \quad \delta' = 16^\circ 17' 39'',3.$$

- El día juliano respecto a la época JT2000 es

$$JDT = 2\,464\,433,145\,833\,313.$$

- Los siglos julianos transcurridos en tiempo terrestre es

$$T = 0,352\,858\,202.$$

- Por (15.5) se determina la oblicuidad media de la eclíptica

$$\varepsilon_m = 23^\circ 26' 4'',93.$$

- Por (3.3) se determina la nutación en oblicuidad, lo que nos permite determinar la oblicuidad verdadera de la eclíptica

$$\varepsilon_v = 23^\circ 26' 4'',93 - 8'',78 = 23^\circ 25' 56'',15.$$

- El día juliano a las 0 horas de *UT* y los siglos transcurridos en tiempo universal son

$$JD(0^h UT) = 2\,464\,432,5; \quad T = 0,352\,840\,520.$$

- El tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas de UT se obtiene de (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 13^h 31^m 57",9.$$

- No podemos saber con antelación el valor de ΔT para el año 2035, se puede conseguir una estimación utilizando la extrapolación de la página 21

$$\Delta T \approx 82^s \Rightarrow UT = 15^h 28^m 38^s.$$

- Se pasa este tiempo universal a tiempo sidéreo por mediación de (9.2)

$$15^h 30^m TT = 15^h 28^m 38^s UT = 15^h 31^m 10",6 \text{ tiempo sidéreo.}$$

- El tiempo sidéreo en el momento considerado de 15 horas 30 minutos de tiempo terrestre es por tanto

$$T_m(15^h 30^m TT) = T_m(0^h UT) + 15^h 31^m 10",6 = 5^h 3^m 8^s,2.$$

- La nutación en longitud se calcula por (1.3)

$$\Delta\psi = -6",1.$$

- La ecuación de los equinoccios se determina por (4.3)

$$EE = -0^s,37.$$

Con los resultados anteriores ya se puede calcular la altura y acimut del Sol y la Luna en el momento considerado.

- Por (16.5) se calculan los ángulos horarios del Sol y la Luna

$$H = 2^h 8^m 32^s,9; \quad H' = 19^h 28^m 14^s,6.$$

- Por (17.5) se calculan las alturas geocéntricas del Sol y de la Luna

$$h = 53^\circ 54' 49",4; \quad h' = 26^\circ 54' 13",1.$$

- Por (18.5) se determinan los acimut del Sol y de la Luna

$$A = 62^\circ 50' 43",9; \quad A' = 180^\circ - 265^\circ 57' 58",9 = -85^\circ 57' 58",9 = 274^\circ 2' 1",1.$$

donde hemos tenido en cuenta el criterio de signo expuesto en el epígrafe 7.5 con relación a la fórmula (18.5).

- Con estos resultados ya se puede aplicar (11.15)

$$\zeta_T = -17^\circ 49' 25",1 = 343^\circ 10' 39",4,$$

que es un ángulo geocéntrico. Como ζ_T es mayor que 180° entonces el Sol se encuentra al oeste de la Luna y estamos en periodo lunar creciente.

6.15 Semidiámetro de la Luna

El ángulo con el que se ve desde el centro de la Tierra la mitad del radio lunar se le llama semidiámetro s' , que se calcula por

$$\tan s' = \frac{R'}{r'} \quad (12.15)$$

R' es el radio de la Luna, que consideramos una esfera y r' es la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. Por definición de paralaje horizontal ecuatorial (11.3)

$$\sin \pi' = \frac{R}{r'} \quad (13.15)$$

R es el radio ecuatorial de la Tierra. Combinando (12.15) y (13.15)

$$\tan s' = \frac{R'}{R} \sin \pi', \quad (14.15)$$

como los ángulos s' y π' son muy pequeños, (14.15) es muy aproximadamente

$$s' = \frac{R'}{r'}. \quad (15.15)$$

expresado en radianes.

(15.15) es el semidiámetro geocéntrico de la Luna, si queremos conocer el semidiámetro topocéntrico s'_T utilizamos la fórmula (12.15) pero ahora ponemos la distancia del lugar de observación a la Luna r'_T

$$\tan s'_T = \frac{R'}{r'_T} = \frac{\tan s'}{q}$$

donde q es el cociente entre las distancias geocéntricas y topocéntricas de la Luna, que se calcula con las técnicas del epígrafe 7.3. Como el semidiámetro es un ángulo muy pequeño, no se comete excesivo error si ponemos

$$s'_T = \frac{s'}{q} \quad (16.15)$$

ambos ángulos medidos en radianes.

Ejemplo 4.15.- Determinar el semidiámetro geocéntrico y topocéntrico de la Luna para el día 13 de agosto de 2019 a las 0 horas de tiempo terrestre, para un punto de coordenadas geográficas 15° N y 22° W.

- La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es para la fecha indicada

$$r' = 399\,774,00 \text{ km}.$$

- Como $R' = 1738 \text{ km}$ obtenemos al aplicar (15.15)

$$s' = 14' 56'',7,$$

e igual resultado se obtiene de (12.15).

- Las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna son

$$\alpha' = 19^h 35^m 53^s,4; \quad \delta' = -22^\circ 2' 27'',3.$$

- El tiempo sidéreo a las 0 horas de UT es

$$T_m(0^h UT) = 21^h 24^m 34^s,9.$$

- Interpolando en la tabla 1 comprobamos que $\Delta T = -69^s,7$ entonces el momento considerado en tiempo universal es

$$UT = TT - \Delta T = -69^s,7,$$

que corresponde a $-69,9$ segundo de tiempo sidéreo, por tanto el tiempo sidéreo en el primer meridiano a las 0 horas de TT es

$$T_m(0^h TT) = 21^h 23^m 25^s.$$

- La ecuación de los equinoccios es

$$EE = -0^s,94 \Rightarrow T_v = 21^h 23^m 24^s,3$$

por tanto el ángulo horario geocéntrico del centro de la Luna es

$$H' = 0^h 19^m 30^s,9.$$

- Con los datos anteriores se determina la altura y el acimut geocéntricos del centro de la Luna

$$h' = 52^\circ 39' 5'',9; \quad A' = 7^\circ 27' 58'',9.$$

- Para el cálculo de q es necesario calcular el paralaje horizontal ecuatorial por (11.3)

$$\pi' = 0^\circ 54' 50'',8.$$

- Por (9.3) se calcula la latitud geocéntrica del observador

$$\varphi' = 14^\circ 54' 14'',6.$$

- Por (10.3) se determina el parámetro ρ

$$\rho = 0,999\ 777.$$

- De las ecuaciones (13.3) se determina el acimut y la altura topocéntrica

$$h'_T = 52^\circ 5' 28'',9; \quad A'_T = 7^\circ 27' 10'',1.$$

- Por (13.3) se determina el coeficiente q

$$q = 0,987\ 351.$$

- Finalmente por (16.15) se encuentra el semidiámetro topocéntrico de la Luna

$$s'_T = 0^\circ 15' 7'',7.$$

7.15 Edad de la Luna

Una forma, un tanto imprecisa, de determinar la edad de la Luna es decir los días transcurridos desde la Luna nueva. Hay varias formas de definir la edad de la Luna, como por ejemplo los días y fracciones de día transcurridos desde el momento de la última Luna nueva. Con este sistema de numeración la edad de la Luna nunca puede sobrepasar los 30 días.

Como sabemos, la Luna nueva acontece cuando la elongación Δ es nula, en este momento las longitudes eclípticas aparentes de la Luna y el Sol coinciden. Para simplificar el cálculo vamos a suponer que la duración de la lunación es igual a la promedio de 29,53 días. Entonces la edad de la Luna E_L es definida por

$$E_L = \frac{29,53\Delta}{360} \quad (17.15)$$

Δ viene expresada en grados.

La edad de la Luna no es parámetro adecuado para indicar el estado de la Luna, como lo podemos ver relacionándolo con la fase lunar k . En la figura 11.15 se representa la edad de la Luna E_L con relación a la fase k expresada en tanto por ciento. Se comprueba que no existe una correspondencia lineal entre ambas magnitudes. Cuando la Luna se

encuentra en la primera parte del creciente, la fase aumenta poco, al igual que ocurre inmediatamente antes o después de la Luna llena. Mientras que en la mayor parte del crecimiento y decrecimiento lunar hay una aproximada relación lineal entre fase y edad de la Luna.

La misma relación que se observa entre k y E_L , se da entre la edad de la Luna y el máximo ancho de la zona iluminada de la Luna.

8.15 Iluminación de la Luna

Entendemos por iluminancia E la potencia luminosa que incide por unidad de superficie. La iluminación I es la potencia luminosa que incide sobre la unidad de área perpendicular a la dirección de la propagación. La diferencia entre ambas magnitudes es la inclinación de los rayos respecto a la superficie donde inciden. La unidad de iluminancia y de iluminación es el lux. La iluminación, al igual que la iluminancia, disminuye con la inversa de la distancia al cuadrado al foco luminoso.

La iluminación recibida de la Luna sobre la superficie terrestre depende de la fase lunar, de la altitud de la Luna, de la extinción atmosférica, de la distancia Tierra-Luna, de la distancia Tierra-Sol, del paralaje y de la libración.

En la figura 12.15 se representa la iluminación de la Luna sobre una superficie normal a la dirección de los rayos lunares situada en la superficie de la Tierra, en función del ángulo de fase, tal como es medida experimentalmente.

La parte de la izquierda es el periodo creciente y decreciente la otra mitad. Se observa un repunte en la iluminación en la Luna llena, fenómeno que

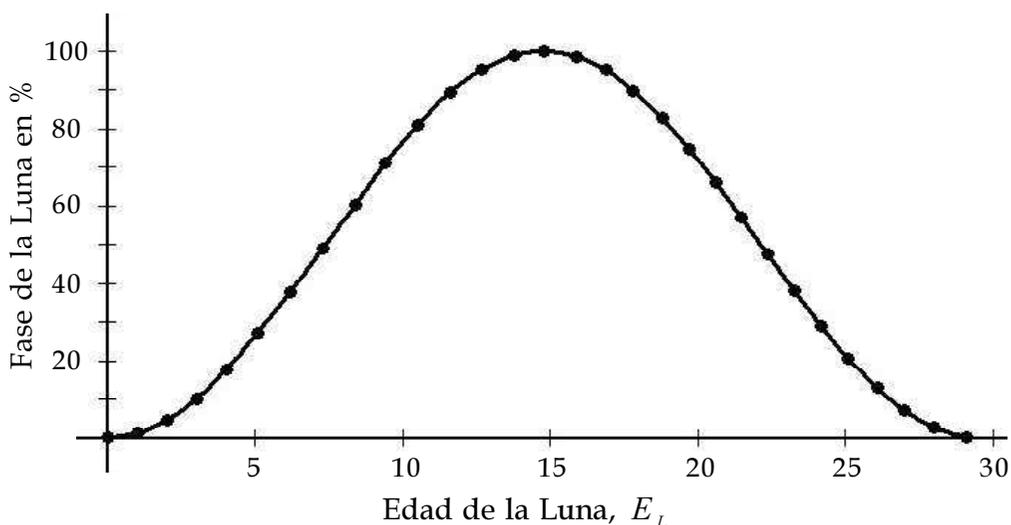


Figura 11.15.- En la figura se representa una lunación completa. El eje vertical es la fase k de la Luna en tanto por ciento, que empieza en 0 con una Luna nueva y termina con 0 en la siguiente Luna nueva, alcanzando el 100% en la Luna llena. El eje horizontal mide la edad de la Luna como ha sido definida en (17.15). Vemos que no existe una correspondencia lineal entre fase y edad de la Luna. Se comprueba que cerca de la Luna nueva y de la Luna llena la fase crece lentamente con la edad.

recibe el nombre de efecto oposición, característico de los astros que no tienen atmósfera, como los asteroides.

Este efecto es producido por la desaparición de las sombras de las irregularidades lunares cuando la luz incide perpendicularmente, como es el caso de la Luna llena.

Es interesante observar que la curva de la figura 12.15 no es simétrica, pues la respuesta luminosa de ambas mitades de la Luna son diferentes, siendo algo más luminosa la fase creciente que la decreciente.

También hay que notar que los cuartos, en que está iluminada la mitad de la cara de la Luna, tiene una iluminación de sólo un 8% de la iluminación de la Luna llena y no el 50% como habría sido el caso si la superficie lunar fuera especular y plana.

Para calcular la iluminación de la Luna vamos a usar el método descrito en el *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac*. La iluminancia de la Luna E_H sobre un plano horizontal situado en la superficie terrestre cuando la Luna se encuentra a la distancia media de la Tierra y la Tierra a la distancia media al Sol, se calcula por

$$\log E_H = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 \quad (18.15)$$

donde $x = h/90$ siendo h la altura del centro de la Luna en grados y l_0, l_1, l_2, l_3 son los coeficientes de la tabla 1.15, que dependen del rango de

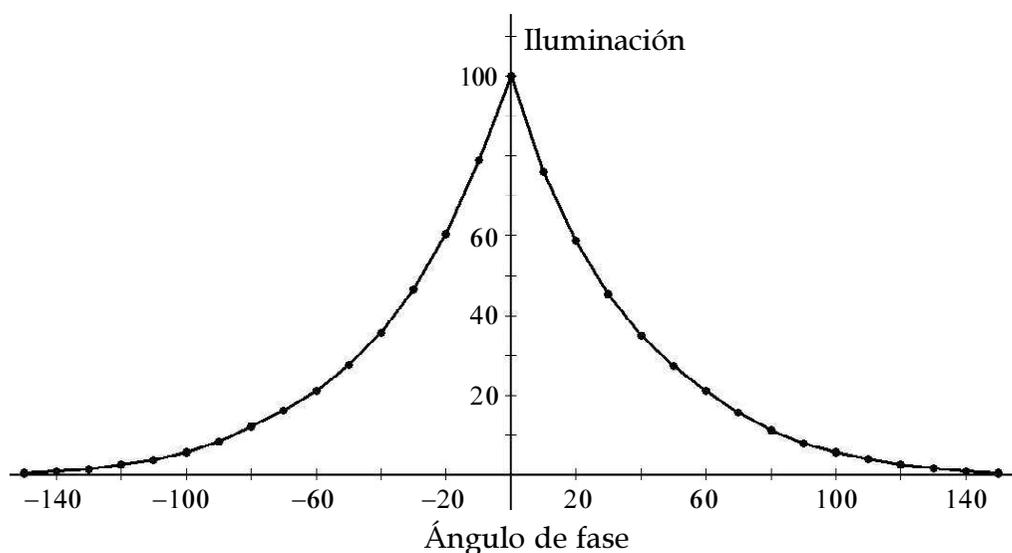


Figura 12.15.- Variación de la iluminación de la Luna con el ángulo de fase. En el eje horizontal está el ángulo de fase χ , la parte negativa representa el creciente y la parte positiva la fase decreciente. En el eje vertical se representa la iluminación en tanto por ciento, tomando 100 como la iluminación de la Luna llena a la distancia media de la Tierra. La curva no es simétrica, es decir la iluminación no sólo depende de la fase sino también de la zona de la Luna, que tienen propiedades reflectivas diferentes. Se observa el efecto oposición: el repunte de la iluminación lunar cuando se acerca a la Luna llena. Los datos han sido tomados del *Annuaire pour l'an 1963* de Le Bureau de Longitudes.

Rango de altura		l_0	l_1	l_2	l_3
20°	90°	-1,95	4,06	-4,24	1,56
5°	20°	-2,58	12,58	-42,58	59,06
-0°,8	5°	-2,79	24,27	-252,95	1321,29

Tabla 1.15.- Coeficientes para el cálculo de la iluminación de la Luna llena.

altura a la que se encuentra la Luna.

La iluminación E_H de la fórmula (18.15) se mide en lux. Estos coeficientes contemplan un valor para la extinción atmosférica entorno a 0,27, pero no consideran la fase y las distancias variables de la Tierra a la Luna y de la Luna al Sol.

Se corrige la fórmula (18.15) para tener en cuenta la fase luna agregándole la corrección

$$C_{fase} = -8,68 \cdot 10^{-3} \chi - 2,2 \cdot 10^{-9} \chi^4 \quad (19.15)$$

χ es el ángulo de fase en grados.

(18.15) da la iluminancia para la Luna llena a la distancia media de la Tierra. Cuando la distancia es diferente hay que hacer una corrección, teniendo en cuenta que la iluminación disminuye con la inversa al cuadrado de la distancia, por tanto a (18.15) hay que añadirle la corrección

$$C_{distancia-Luna} = 2 \log \left(\frac{\pi'}{0,951} \right)$$

π' es el paralaje ecuatorial horizontal de la Luna expresada en grados y 0°,951 es el paralaje ecuatorial horizontal a la distancia media de la Luna. Una fórmula similar se utiliza para hacer la corrección de la distancia de la Luna al Sol. Hay que tener en cuenta que el brillo intrínseco varía con la distancia de la Luna al Sol, según la ley de la inversa de la distancia al cuadrado, por tanto a (18.15) hay que hacerle la corrección

$$C_{distancia-Sol} = 2 \log \left(\frac{r''}{r''} \right)$$

donde $r'' = 149\,982\,270\text{ km}$ es la distancia media de la Luna al Sol, que coincide con la distancia media de la Tierra al Sol y r'' es la distancia de la Luna al Sol. Entonces la iluminancia de la Luna sobre un plano horizontal situado en la superficie de la Tierra se calcula por la fórmula

$$\log E_H = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 - 8,68 \cdot 10^{-3} \chi - 2,2 \cdot 10^{-9} \chi^4 + 2 \log \left(\frac{\pi'}{0,951} \right) + 2 \log \left(\frac{149\,982\,270}{r''} \right). \quad (20.15)$$

La distancia de la Luna al Sol se calcula a partir de la figura 13.15. Al triángulo TSL se le aplica el teorema del coseno de la trigonometría plana

$$r''^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos a_L \quad (21.15)$$

el arco-luz se calcula por (8.15).

Si se quiere determinar la iluminación entonces hay que calcular el flujo luminoso sobre una superficie perpendicular a los rayos procedentes de la Luna. De la figura 114.15 se comprueba que la relación entre las superficies horizontal S_H y perpendicular S es

$$S = S_H \sin h$$

donde h es la inclinación de los rayos respecto al plano horizontal o altura del astro sobre el horizonte; por tanto la relación entre la iluminancia E_H y la iluminación I es

$$I = \frac{E_H}{\sin h}. \quad (22.15)$$

Hay que advertir que no podemos calcular la iluminación utilizando (18.5) y suponiendo que la Luna se encuentra en el cénit, para lo que habría que poner $h = 90^\circ$, porque en este caso el recorrido por la atmósfera de los rayos lunares sería menor que el realmente seguido si la Luna se encuentra a una altura h . En el segundo caso el efecto de la extinción atmosférica es mayor que en el primero.

(22.15) nos sirve para calcular la magnitud estelar m que se define de tal forma que un aumento de 5 de sus unidades corresponde a un aumento de 100 veces su iluminación. Se toma como magnitud 0 la de un objeto que tiene una iluminación de $2,5 \cdot 10^{-6} \text{ lux}$. Por tanto la magnitud estelar se determina por

$$m = -2,5 \log I - 13,988. \quad (23.15)$$

Ejemplo 5.15.- Calcular la iluminación y la magnitud de la Luna el día 10 de agosto de 2080 a las 3 horas de tiempo terrestre, cuando se encuentra a una altura de 38 grados sobre el horizonte.

- Los datos relativos a la Luna y el Sol son

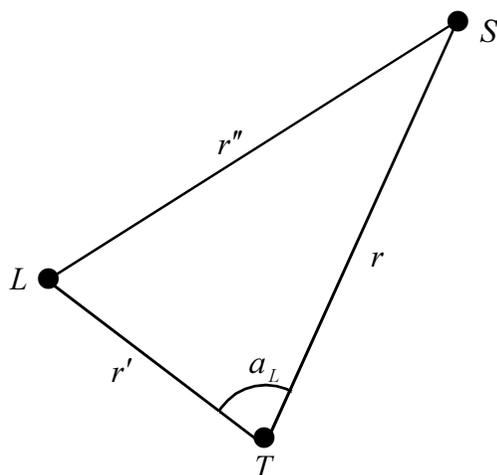


Figura 13.15.- Determinación de la distancia de la Luna al Sol, ρ .

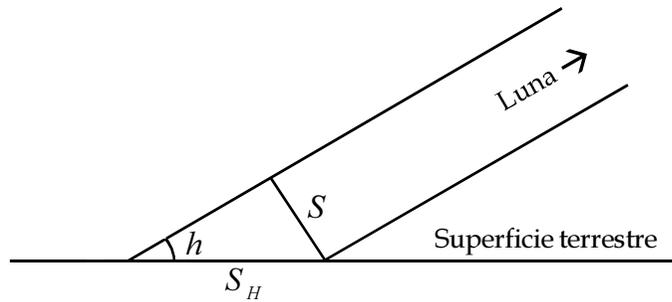


Figura 14.15.- Relación entre la superficie horizontal iluminada S_H y la superficie perpendicular a los rayos S .

$$l' = 66^{\circ} 9' 15''; \quad \beta' = 4^{\circ} 31' 38''; \quad r' = 373\,373,8 \text{ km}$$

$$L = 138^{\circ} 25' 51''; \quad r = 151\,653\,613,2 \text{ km.}$$

- El arco-luz se calcula por (8.15)

$$a_L = 72^{\circ} 20' 2''.$$

- El ángulo de fase se calcula por (9.15)

$$\chi = 107^{\circ} 31' 54''.$$

- El paralaje horizontal ecuatorial de la Luna se calcula por (11.3)

$$\pi' = 0^{\circ} 58' 44''.$$

- La distancia de la Luna al Sol se determina por (21.15)

$$r'' = 151\,540\,723,2 \text{ km.}$$

- La iluminancia sobre un plano horizontal a la superficie terrestre se calcula por (20.5)

$$E_H = 8,198 \cdot 10^{-3} \text{ lux.}$$

- La iluminación para los rayos inclinados 38° es por (22.15)

$$I = 0,01332 \text{ lux.}$$

- Finalmente por (23.15) se determina la magnitud estelar de la Luna

$$m = -9,3.$$

De la fórmula (20.15) se desprende que la magnitud de la Luna llena cuando se observa a 0° de distancia cenital y a las distancias medias del Sol y la Luna es $m = -12,56$. Si suponemos un coeficiente de extinción de 0,3, la magnitud estelar de la Luna en ausencia de atmósfera es $m_0 = -12,83$, en el caso en que el coeficiente a de (38.3) tome el valor 740.

Podemos resolver el problema de determinar la magnitud estelar de la Luna considerando el coeficiente de extinción del lugar de observación, utilizando la expresión (38.3), el valor de el air-mass que se encuentra en (40.3) y suponiendo el valor de m_0 antes encontrado. La corrección a realizar a la magnitud de la Luna llena por la fase y las distancias a la Tierra y al Sol serían las de (20.15).

Por tanto por la definición de magnitud estelar como definida por (37.3) se llega a la siguiente fórmula para determinar la magnitud en función del

coeficiente de extinción atmosférica

$$m = m_0 + 2,5 \left[\frac{8,68 \cdot 10^{-3} \chi + 2,2 \cdot 10^{-9} \chi^4 +}{-2 \log \left(\frac{\pi'}{0,951} \right) - 2 \log \left(\frac{149\,982\,270}{r''} \right)} \right] + kX. \quad (24.15)$$

Ejemplo 6.15.- Determinar la magnitud de la Luna el día 30 de noviembre de 2022 a las 1 hora de tiempo terrestre, en un lugar de coordenadas geográficas 36° N y 85° W y de coeficiente de extinción 0,15.

- Para el día y hora indicado tenemos los siguientes datos sobre la posición del Sol y de la Luna

$$\begin{aligned} l' &= 330^\circ 25' 35'',9; & \beta' &= -5^\circ 0' 11'',8; & r' &= 371\,808,09 \text{ km} \\ \alpha' &= 22^h 17^m 19^s,4; & \delta' &= -15^\circ 59' 47'',3 \\ L &= 247^\circ 47' 5''; & r &= 147\,557\,397,9 \text{ km}. \end{aligned}$$

- El tiempo sidéreo a las 0 horas de *UT* se calcula por (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 4^h 35^m 24^s.$$

- Como ΔT para la fecha es 70 segundos (tabla 1) entonces el tiempo universal del momento de la observación es $0^h 58^m 50^s$. Para expresarlo en tiempo sidéreo se multiplica por el coeficiente (9.2) $0^h 58^m 59^s,7$ que viene expresado en unidades de tiempo sidéreo.

- Despreciando la ecuación de los equinoccios, algo aceptable dado la aproximación del método que seguimos, el tiempo sidéreo verdadero a las 1 hora de tiempo terrestre es

$$T_v = 5^h 34^m 23^s,7 \Rightarrow H' = T_v - \lambda - \alpha' = 24^\circ 16' 4'',5.$$

- La altura geocéntrica y el acimut igualmente geocéntrico se calculan por (17.5) y (18.5)

$$h' = 33^\circ 9' 38'',3; \quad A' = 28^\circ 9' 39'',7.$$

- Para calcular la altura topocéntrica lo primero que se hace es determinar la latitud geocéntrica por (9.3) y el parámetro ρ por (10.3)

$$\varphi' = 35^\circ 49' 1'',9; \quad \rho = 0,998\,8480.$$

- El paralaje ecuatorial horizontal se calcula por (11.3)

$$\sin \pi' = \frac{R}{r'} = \frac{6\,378,16}{371\,808,09} \Rightarrow \pi' = 0^\circ 58' 58'',5.$$

- Combinando las ecuaciones (13.3) se calcula el acimut topocéntrico

$$A'_T = 28^\circ 9' 46'',1,$$

y la altura topocéntrica

$$h'_T = 32^\circ 19' 57'',3.$$

La distancia cenital aparente (sin refracción) que tenemos que aplicar en (40.3) es $z'_T = 57^\circ 40' 2'',7$.

- El coeficiente X se determina por (40.3)

$$X = 1,865\,456\,028.$$

- El arco-luz se calcula por (8.15)

$$a_L = 82^\circ 40' 12'',4.$$

- El ángulo de fase se determina por la ecuación (9.15)

$$\chi = 97^\circ 11' 12''.$$

- La distancia Luna-Sol se calcula por (21.15)

$$r'' = 147\,510\,423 \text{ km}.$$

- Con todos los resultados anteriores obtenemos por (24.15) la magnitud de la Luna

$$m = -10,1.$$

Fenómenos lunares locales

1.16 Ortos y ocasos de la Luna

Para la determinación de los ortos y ocasos de la Luna se sigue la misma técnica descrita en el epígrafe 1.6 y que habíamos usado para averiguar los ortos y ocasos del Sol. La técnica para pasar de coordenadas ecuatoriales a horizontales es la misma que para el Sol que ya se vió en el epígrafe 7.5.

Para el Sol no tuvimos en cuenta el paralaje, ya que al ser pequeño no contribuía apreciablemente al momento de sus ortos y ocasos. Pero la situación cambia con la Luna, pues su paralaje tiene un valor significativo.

El valor de la altura del centro de la Luna que hay que utilizar en (17.5) para calcular su ángulo horario, es la altura geocéntrica, sin embargo lo que conocemos es la altura topocéntrica en el momento del ocaso o del orto, es por tanto necesario convertir la altura topocéntrica en geocéntrica.

Al igual que vimos con el Sol, para calcular la altura topocéntrica de la Luna en el orto o en el ocaso hay que tener en cuenta tanto el semidiámetro topocéntrico s'_T de la Luna como el ángulo de refracción que consideramos es 34 minutos de arco, por tanto la altura topocéntrica aparente h'_{T-o} del centro de la Luna en el momento del orto o el ocaso es

$$h'_{T-o} = -34' - s'_T,$$

donde el semidiámetro s'_T es calculado por (16.15).

Para determinar la altura geocéntrica en el momento del orto o del ocaso,

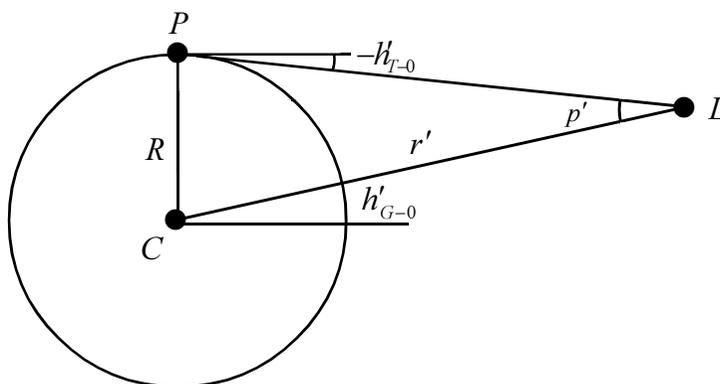


Figura 1.16.- C es el centro de la Tierra de radio R , P es el lugar de observación y L es el centro de la Luna. p' es el paralaje lunar medido desde el punto P.

vamos a suponer que la Tierra es esférica, lo que no originará error apreciable. Del triángulo CPL de la figura 1.16 se encuentra

$$h'_{G-0} = p' + h'_{T-0} = p' - 34' - s'_T \quad (1.16)$$

p' es el paralaje de la Luna. Aplicando el teorema del seno al triángulo CPL se encuentra

$$\sin p' = \frac{R}{r'} \sin(90 + h'_{T-0})$$

como el paralaje es muy pequeño, no cometemos error importante si sustituimos el seno por el ángulo, resultando

$$p' \approx \pi' \cos h'_{T-0} = \pi' \cos(s'_T + 34') \quad (2.16)$$

π' es el paralaje horizontal ecuatorial de la Luna; nótese que tanto el ángulo p' como el π' están medidos en radianes.

(1.16) se puede simplificar. Primero identificamos el paralaje p' con el paralaje horizontal ecuatorial π' , ya que la diferencia entre ambos es mínima. El semidiámetro topocéntrico lo identificamos con el paralaje geocéntrico promedio

$$s'_T \approx s' = \frac{R'}{r'} = \frac{R'}{R} \pi',$$

R' es el radio de la Luna, entonces (1.16) queda

$$h'_{G-0} \approx \left(1 - \frac{R'}{R}\right) \pi' - 34' = 0,7277 \pi' - 0^\circ 34' \quad (3.16)$$

en la que debemos expresar π' en grados.

Si no se necesita un cálculo muy exacto, podemos tomar los valores medios del semidiámetro y del paralaje

$$s' \approx \frac{R'}{r'} = \frac{1737}{384\,400} \text{ rad} = 0^\circ 15' 32''; \quad p' \approx \pi' = \frac{R}{r'} = \frac{6378}{384\,400} \text{ rad} = 0^\circ 57' 2''$$

aplicando estos resultados a (1.16)

$$h'_{G-0} \approx 0^\circ,125. \quad (4.16)$$

Ejemplo 1.16.- Determinar el momento del ocaso del limbo superior de la Luna el día 1 de mayo de 2050 en un lugar de coordenadas geográficas 30° W y 10° N.

- Las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna el día 1 de mayo de 2050 a las 0 horas de TT y la distancia entre los centros de la Luna y la Tierra son

$$\alpha'_1 = 10^h 14^m 17^s,9; \quad \delta'_1 = 5^\circ 24' 28'',9; \quad r'_1 = 404\,514,8 \text{ km}.$$

- El paralaje horizontal ecuatorial es

$$\pi'_1 = 0^\circ 54' 12''.$$

- La altura geocéntrica en el momento del ocaso se calcula por (3.16)

$$h'_{G-0} = 0^\circ 5' 26''.$$

- De (17.5) se deduce la ecuación

$$\cos H'_{0-1} = \frac{\sin h'_{G-0} - \sin \varphi \sin \delta'}{\cos \varphi \cos \delta'}$$

con la cual se determina en primera aproximación el ángulo horario del centro de la Luna en el momento del ocaso

$$H'_{0-1} = 90^\circ 51' 51''.$$

- Por mediación de (16.5) calculamos el tiempo sidéreo del momento del ocaso en el primer meridiano, para cuyo cálculo no tenemos en cuenta la ecuación de los equinoccios, es decir identificamos el tiempo sidéreo medio y verdadero

$$T_{m-1} = 18^h 17^m 45^s.$$

- El día juliano y los siglos transcurridos hasta las 0 horas de *UT* es

$$JD = 2\ 469\ 927,5; \quad T = 0,503\ 285\ 4209.$$

- El tiempo sidéreo en el primer meridiano en ese momento es

$$T_m(0^h UT) = 14^h 36^m 29^s,6.$$

- Por tanto el tiempo sidéreo transcurrido desde las 0 horas *UT* hasta el momento del ocaso es $3^h 41^m 15^s$ expresado en tiempo sidéreo. Para pasarlo a tiempo universal utilizamos el coeficiente (9.2) y se obtiene

$$t_1(UT) = 3^h 40^m 39^s$$

que es la primera aproximación del momento del ocaso en tiempo universal.

- Estimando que se va acumulando un segundo intercalar cada 18 meses, podemos estimar que para el año 2050 la diferencia entre tiempo terrestre y tiempo universal será aproximadamente 87 segundos, entonces el tiempo terrestre del ocaso de la Luna en primera aproximación es

$$t_1(TT) = 3^h 42^m 6^s$$

que nos sirve para hacer una segunda aproximación.

- Las coordenadas ecuatoriales de la Luna y la distancia a la Tierra en el momento $t_1(TT)$ es

$$\alpha'_2 = 10^h 21^m 11^s,7; \quad \delta'_2 = 4^\circ 47' 12'',9; \quad r'_2 = 404\ 431,15\ km.$$

- El paralaje horizontal ecuatorial es

$$\pi'_2 = 0^\circ 54' 13''.$$

- La altura geocéntrica del centro de la Luna en el momento del ocaso en la segunda aproximación es

$$h'_{G-0-2} = 0^\circ 5' 27''.$$

- El ángulo horario local del centro del Sol en el momento del ocaso en segunda aproximación resulta ser

$$H'_{0-2} = 90^\circ 45' 13''.$$

- Que corresponde a un tiempo sidéreo en el primer meridiano

$$T_{m-2} = 18^h 24^m 13^s.$$

- El tiempo sidéreo transcurrido desde las 0 horas UT es

$$3^h 47^m 43^s$$

que corresponde a un intervalo de tiempo universal de

$$t_2(UT) = 3^h 47^m 6^s$$

que es la segunda aproximación a la puesta de la Luna. Como la diferencia con la primera aproximación es de 5 minutos, superior al minuto que vamos a establecer como criterio para dejar la reiteración, es necesario hacer una nueva aproximación.

- Al hacer una tercera aproximación se encuentra

$$t_3(UT) = 3^h 47^m 17^s$$

como la diferencia con la segunda aproximación es menor que un minuto, podemos tomar como tiempo universal de la puesta de la Luna el instante

$$t(UT) = 3^h 47^m.$$

- Finalizamos con el cálculo del acimut por mediación de (18.5)

$$\sin A' = \frac{\sin H' \cos \delta'}{\cos h'}$$

resultando que el acimut geocéntrico del centro de la Luna en su ocaso es

$$A' = 85^\circ 10' 25''$$

ángulo medido en el horizonte desde el meridiano superior en sentido retrógrado.

2.16 Coordenadas horizontales de la Luna

Para hacer la conversión de coordenadas ecuatoriales a horizontales se sigue el procedimiento del epígrafe 7.5. Primero se calcula el tiempo sidéreo verdadero del momento considerado, para lo que previamente se calcula el tiempo sidéreo medio (ver 78.2) y luego se calcula la ecuación de los equinoccios (4.3).

Posteriormente se calcula el ángulo horario local del centro de la Luna por (16.5). Con lo que se está en condiciones de determinar la altura y el acimut por (17.5) y (18.5).

Ejemplo.- Calcular las coordenadas horizontales de la Luna el día 2 de marzo de 2020 en la posición geográfica de 20° E y 30° N, a las 15 horas de tiempo terrestre, teniendo que las coordenadas ecuatoriales y la distancia a la Tierra son

$$\alpha' = 4^h 35^m 17^s,4; \quad \delta' = 19^\circ 47' 5'',5; \quad r' = 393\,164,8 \text{ km}$$

- Para la fecha la diferencia entre tiempo terrestre y universal es

$$\Delta T = 69^s,9$$

por tanto

$$UT = 14^h 58^m 50^s,1.$$

- El tiempo sidéreo medio en el momento anterior se calcula como en 7.2,

resultando

$$JD(0^h UT) = 2\,458\,910,5; \quad T = 0,201\,656\,3997$$

$$T_m(0^h UT) = 10^h 40^m 59^s,$$

entonces el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano en el momento considerado es

$$\begin{aligned} T_m &= 10^h 40^m 59^s + (14^h 58^m 50^s,1)1,002\,737\,90935 = \\ &= 1^h 42^m 16^s,8. \end{aligned}$$

- Para calcular el tiempo sidéreo verdadero hay que determinar la ecuación de los equinoccios

$$EE = -0^s,08 \Rightarrow T_v = 1^h 42^m 16^s,7.$$

- El ángulo horario local del centro de la Luna es por (16.5)

$$H'_v = 1^h 42^m 16^s,7 + \frac{20 \cdot 24}{360} - 4^h 35^m 17^s,4 = -1^h 33^m 0^s,7.$$

- Por (17.5) se calcula la altura geocéntrica de la Luna

$$h' = 66^\circ 37' 44'',4.$$

- Finalmente por (18.5) se calcula el acimut geocéntrico del centro de la Luna

$$A' = 110^\circ 31' 55''.$$

- Para el cálculo de las coordenadas horizontales topocéntricas es necesario calcular la latitud geocéntrica por (8.3)

$$\varphi' = 29^\circ 50' 1'',1,$$

el paralaje horizontal ecuatorial por (11.3)

$$\pi' = 0^\circ 55' 46'',3.$$

y el coeficiente ρ por (10.3)

$$\rho = 0,999\,167\,0549.$$

- Haciendo uso de las ecuaciones (13.3) se calcula la altura y el acimut topocéntrico

$$h'_T = 66^\circ 15' 15''; \quad A'_T = 110^\circ 32' 18''.$$

3.16 Paso de la Luna por el meridiano

En el momento de paso del centro de la Luna por el meridiano el ángulo horario es nulo, con este dato podemos determinar el instante del tránsito.

El procedimiento a seguir es el mismo que antes habíamos visto en 4.6 para el Sol.

Ejemplo 2.16.- Determinar el momento del paso del centro de la Luna por el meridiano el día 15 de octubre de 2000 en un lugar de coordenadas geográficas 20° S y 30° W.

- La ascensión recta de la Luna a las 0 horas de TT del día considerado es

$$\alpha' = 2^h 45^m 50^s,3.$$

- Por (4.6) se determina, en primera aproximación, el tiempo sidéreo verdadero

del tránsito

$$T_{v-1} = H'_v + \lambda + \alpha' = \lambda + \alpha' = 4^h 45^m 50^s, 3.$$

- La ecuación de los equinoccios para el día considerado es por (4.3)

$$EE = -1^s, 05.$$

- Entonces el tiempo sidéreo medio en primera aproximación es

$$T_{m-1} = 4^h 45^m 51^s, 4.$$

- El tiempo sidéreo medio en el primer meridiano a las 0 horas UT es

$$T_m(0^h UT) = 1^h 35^m 20^s, 2.$$

- Por (3.6) se halla el tiempo universal del tránsito en primera aproximación

$$t_1(UT) = \frac{4^h 45^m 49^s, 3 - 1^h 35^m 20^s, 2}{1,002\ 737\ 909\ 35} = 3^h 10^m 0^s.$$

- El tiempo terrestre en primera aproximación del tránsito es

$$t_1(TT) = 3^h 10^m 0^s + 68^s = 3^h 11^m 8^s.$$

- Ahora calculamos una segunda aproximación

$$\alpha'_2 = 2^h 52^m 52^s, 3$$

$$T_{v-2} = 4^h 52^m 52^s, 3$$

$$T_{m-2} = 4^h 52^m 51^s, 3$$

$$t_2(UT) = 3^h 16^m 58^s, 7$$

$$t_2(TT) = 3^h 18^m 6^s, 7$$

como la diferencia entre los instantes del paso en primera y segunda aproximación son siete minutos, volvemos a hacer una tercera aproximación que da los resultados

$$\alpha'_3 = 2^h 53^m 7^s, 8$$

$$T_{v-3} = 4^h 53^m 7^s, 8$$

$$T_{m-3} = 4^h 53^m 8^s, 9$$

$$t_3(UT) = 3^h 17^m 16^s, 3$$

$$t_3(TT) = 3^h 18^m 24^s, 3$$

encontrando una diferencia de 15 segundos respecto a la segunda aproximación, si se hace una cuarta aproximación encontramos que el momento de paso por el meridiano del centro de la Luna es

$$t_4(UT) = 3^h 17^m 16^s, 8$$

que podemos tomar como el valor correcto.

4.16 Acimut extremo en el ocaso de la Luna

Al igual que ocurre con el Sol el acimut de la puesta y salida de la Luna cambia dependiendo de las coordenadas de la Luna y de la posición geográfica del lugar de observación, de tal forma que cuando la declinación de la Luna es máxima nos encontraremos con los acimuts más al norte tanto en los

ortos como en los ocasos y contrariamente, con las declinaciones menores los acimuts serán más al sur.

Para calcular la máxima declinación utilizamos (8.13) de donde vemos que la situación más óptima es cuando la latitud eclíptica es máxima, o sea cuando su valor coincide con la inclinación de la órbita. También comprobamos en (8.13) que el valor máximo de la declinación exige que la longitud l' de la Luna sea 90 grados, la segunda ecuación (8.13) nos queda

$$\sin \delta'_{\max} = \sin i' \cos \varepsilon + \cos \beta' \sin \varepsilon \sin 90 = \sin(i' + \varepsilon)$$

por consiguiente

$$\delta'_{\max} = i' + \varepsilon,$$

tanto la inclinación como la oblicuidad de la eclíptica tienen variaciones periódicas, por tanto para determinar los acimuts extremos hay que usar los valores máximos de estas cantidades

$$\delta'_{\max} = i'_{\max} + \varepsilon_{\max}.$$

La mínima declinación se da cuando $\beta' = -i'$ y $l' = 270^\circ$ entonces por (8.13)

$$\delta'_{\min} = -i'_{\min} - \varepsilon_{\min}.$$

Para calcular el acimut máximo es necesario previamente aplicar (17.5) y calcular el ángulo horario del centro de la Luna en el momento del ocaso

$$\cos H'_{\max} = \frac{\sin(0,7275 \pi' - 0^\circ 34') - \sin \varphi \sin \delta'_{\max}}{\cos \varphi \cos \delta'_{\max}} \quad (5.16)$$

donde hemos usado (3.16). De la anterior fórmula se encuentran dos resultados, uno positivo y otro negativo, el primero se usa para la puesta de la Luna y el segundo para el orto. Con este valor del ángulo horario vamos a (18.5) y calculamos el acimut tanto del orto como del ocaso de la Luna

$$\sin A'_{\max} = \frac{\sin H'_{\max} \cos \delta'_{\max}}{\cos(0,7275 \pi' - 0^\circ 34')} \quad (6.16)$$

Para obtener los valores mínimos del acimut, se vuelve a aplicar (5.16) y (6.16) pero utilizando el valor mínimo de la declinación.

Debemos notar que existe una pequeña influencia de la distancia de la Tierra a la Luna, que hace variar mínimamente los acimuts extremos. El máximo valor de la excentricidad de la órbita lunar es 0,063, entonces las distancias máxima y mínima de la Luna a la Tierra son

$$r'_{\min} = (1 - e'_{\max})a = 360\,183 \text{ km}; \quad r'_{\max} = (1 + e'_{\max})a = 408\,617 \text{ km}.$$

lo que significa que los valores extremos del paralaje horizontal ecuatorial son

$$\pi'_{\max} = 1^\circ 0' 53''; \quad \pi'_{\min} = 0^\circ 53' 40''.$$

Como se calculó en (4.12) el máximo y mínimo valor de la inclinación de la órbita lunar es

$$i'_{\max} = 5^\circ 16' 54''; \quad i'_{\min} = 5^\circ 0' 32''.$$

Teniendo presente la nutación en oblicuidad (3.3), la oblicuidad de la eclíptica es

$$\varepsilon = 23^{\circ} 26' 21'',45 - 46'',81T + 9'',20 \cos \Omega'_m.$$

siendo los valores máximo y mínimo

$$\varepsilon_{\max} = 23^{\circ} 26' 21'',45 - 46'',81T + 9'',20 = 23^{\circ} 26' 30'',65 - 46'',81T$$

$$\varepsilon_{\min} = 23^{\circ} 26' 12'',25 - 46'',81T.$$

Ejemplo 1.16.- Determinar el máximo acimut en el momento del ocaso de la Luna para un lugar de latitud 35° N en el año 2000.

- La declinación máxima de la Luna es

$$\delta'_{\max} = 5^{\circ} 16' 54'' + 23^{\circ} 26' 30'',7 = 28^{\circ} 43' 24'',7.$$

- Para calcular el máximo valor del ángulo horario tenemos que tomar en (4.16) el menor valor del paralaje horizontal ecuatorial y se halla

$$H'_{\max} = 112^{\circ} 26' 17''$$

este es un ángulo medido por el ecuador en el sentido retrógrado desde el meridiano superior del lugar hasta el punto de corte del círculo horario de la Luna con el ecuador. Recordamos que la ecuación (5.16) tiene dos soluciones, la positiva que es para el ocaso de la Luna y la solución negativa que corresponde al orto.

- Al aplicar (6.16) hay que tener en cuenta el criterio para calcular el arcoseno expuesto en el epígrafe 7.5, y se obtiene

$$A'_{\max} = 125^{\circ} 50' 58''$$

este es un ángulo medido por el horizonte en sentido retrógrado desde el sur hasta el punto del ocaso. O dicho de otra forma, el acimut extremo de la Luna a la latitud de 35° N se encuentra a $35^{\circ} 50' 58''$ del oeste en dirección hacia el norte.

5.16 Latitudes para las que no hay orto y ocaso de la Luna

Para una latitud dada existe una declinación de la Luna tal que se convierte en un astro circumpolar, es decir que no tiene ni orto ni ocaso. De la fórmula (17.5) vemos que a partir de la latitud que cumple la relación

$$\frac{\sin(0^{\circ},125) - \sin \varphi \sin \delta'}{\cos \varphi \cos \delta'} = \pm 1 \quad (7.16)$$

no existe ángulo horario, lo que significa que no hay orto ni ocaso de la Luna. En la fórmula anterior hemos tomado el valor aproximado (4.16) para la altura del centro de la Luna en el orto y en el ocaso.

Ejemplo 3.16.- Determinar el valor que debe tener la declinación de la Luna para que no tenga orto ni ocaso en la latitud de 73° N.

- Como primera aproximación simplificamos la ecuación (7.16) haciendo $\sin 0^{\circ},125 = 0$

$$\tan \varphi \tan \delta'_1 = 1 \Rightarrow \delta'_1 = 17^{\circ}.$$

- Resultado que llevamos de nuevo a la ecuación (7.16) ahora completa y

obtenemos la segunda aproximación

$$\tan \varphi \tan \delta'_2 = 1 + \frac{\sin 0^\circ,124}{\cos \varphi \cos \delta'_1} \Rightarrow \delta'_2 = 17^\circ 7' 26'',$$

una nueva aproximación nos da el mismo resultado, por lo que concluimos que cuando la declinación de la Luna es $17^\circ 7' 26''$ no existe ni orto y ni ocaso de la Luna para todos los puntos de latitud geográfica mayor de 73° norte. Como la declinación de la Luna es positiva y la observación se hace desde un punto del hemisferio norte, entonces la Luna se encuentra permanentemente sobre el horizonte.

Ejemplo.- Determinar las latitudes geográficas para las cuales no hay ortos y ocasos de la Luna cuando su declinación es $-12^\circ 15'$.

- Busquemos las latitudes norte por aproximaciones sucesivas. Para la primera aproximación simplificamos (7.16) al igual que hicimos antes

$$\tan \varphi_1 \tan \delta' = -1 \Rightarrow \varphi_1 = 77^\circ 45'.$$

- Para obtener la segunda aproximación volvemos a utilizar (7.16) sin eliminar ningún término y utilizando la primera aproximación

$$\tan \varphi_2 \tan \delta' = -1 + \frac{\sin 0^\circ,124}{\cos \varphi_1 \cos \delta'} \Rightarrow \varphi_2 = 77^\circ 37' 29''.$$

- La iteración se termina con la tercera aproximación donde se obtiene

$$\varphi_3 = 77^\circ 37' 34'',$$

concluimos que para los puntos más al norte de esta latitud no se observa ni salida ni puesta de la Luna. Como la declinación de la Luna es negativa y la latitud geográfica positiva, la Luna se encuentra en todo momento bajo el horizonte.

- Para las latitudes geográficas sur obtenemos una primera aproximación de (6.16) poniendo una vez más $\sin 0^\circ,124 = 0$

$$\tan \varphi_1 \tan \delta' = 1 \Rightarrow \varphi_1 = -77^\circ 45'.$$

- Para la segunda aproximación volvemos a la ecuación (7.16)

$$\tan \varphi_2 \tan \delta' = 1 + \frac{\sin 0^\circ,124}{\cos \varphi_1 \cos \delta'} \Rightarrow \varphi_2 = -77^\circ 52' 22''.$$

- Con la siguiente aproximación se encuentra

$$\varphi_3 = -77^\circ 52' 26''$$

entonces en todos los lugares de la superficie de la Tierra con una latitud más al sur que la anterior no se observará orto y ocaso de la Luna, dado que tanto declinación como latitud geográfica son negativas, la Luna será siempre observada sobre el horizonte.

La ausencia de ortos y ocasos de la Luna no ocurre en todas las latitudes de la Tierra. Vamos a calcular la latitud extrema (tanto norte como sur) en la que se da la circunstancia de que en alguna ocasión deje de existir ortos y ocasos de la Luna.

La situación menos al norte en que se da la ausencia de ortos y ocasos se

calcula de (7.16) poniendo la mayor declinación posible

$$\frac{\sin(0^\circ, 124) - \sin \varphi \sin \delta'_{\max}}{\cos \varphi \cos \delta'_{\max}} = -1$$

ecuación que se resuelve, al igual que antes, por aproximaciones sucesivas, hallándose

$$\varphi = 61^\circ 24' 13''$$

entonces en los lugares de hemisferio norte de latitud geográfica menor que la anterior no se da la circunstancia que la Luna sea observado como un astro circumpolar.

La latitud sur extrema se calcula de (6.16)

$$\frac{\sin(0^\circ, 124) - \sin \varphi \sin \delta'_{\max}}{\cos \varphi \cos \delta'_{\max}} = 1,$$

por aproximaciones sucesivas encontramos

$$\varphi = -61^\circ 9' 21''$$

en todos los puntos del hemisferio sur que tengan latitudes más al norte que la anterior no se dará la ausencia de ortos y ocasos de la Luna.

La velocidad de la Luna respecto a una Tierra girando no alcanza los 360° por día. Esto viene a significar que habrá ocasiones en que, sea cual sea la posición geográfica de observación, la Luna o no tiene orto o no tiene ocaso.

En efecto, si la Luna, por ejemplo, se pone muy poco antes de la media noche, transcurridas 24 horas todavía no habrá tenido tiempo en recorrer los 360 grados y encontrarse de nuevo en la posición del ocaso. En ese día no habrá puesta de la Luna.

Haciendo los cálculos para el año 2000 comprobamos que el día sidéreo de 24 horas sidéreas tiene por (9.2) una duración de

$$\frac{24}{1,002\ 737\ 90935} = 23^h\ 56^m\ 4^s,1$$

de tiempo universal, o sea el movimiento sidéreo de la Tierra es

$$n_{sd} = \frac{360^\circ}{23^h\ 56^m\ 4^s,1} = 15,041\ 069$$

medido en grados por hora. El periodo sidéreo medio orbital de la Luna es dado por (6.14) de donde se calcula que el movimiento sidéreo medio es

$$n'_{sd} = \frac{360^\circ}{27^d,321\ 662 \cdot 24} = 0,549\ 015$$

en grados por hora.

De los dos anteriores resultados concluimos que el movimiento medio de la Luna respecto a la Tierra girando es

$$n'_{L-T} = n_{sd} - n'_{sd} = 14,492\ 054^\circ/\text{hora}$$

es decir la Luna da en promedio un giro de 360° con relación a un punto fijo

de la Tierra en

$$\frac{360}{14,492\ 054} = 24^h\ 50^m\ 28^s.$$

Entonces, en promedio y aproximadamente, si el orto (o el ocaso) de la Luna acontece entre las $23^h\ 9^m\ 32^s$ y las 24^h , el día siguiente la Luna no tendrá orto (u ocaso), puesto que tras recorrer 360 grados y encontrarse de nuevo en la posición del orto (o del ocaso) ya habrá transcurrido el siguiente día.

Por ejemplo, el cálculo nos muestra que el día 8 de julio de 2019 la Luna se pondrá en un lugar de latitud 35°N y de longitud 0° a las $23^h\ 41^m$ de tiempo universal, por tanto el día 9 no se pondrá la Luna, ya que su siguiente ocaso será el día 10 de julio de 2019 a las $0^h\ 14^m$.

6.16 Orientación de los cuernos lunares en el ocaso

Los calendarios lunares observacionales exigen la visión del primer creciente lunar para dar comienzo a un nuevo mes. Se trata del momento en que por el horizonte occidental se ve por primera vez la Luna creciente después de haber estado oculta mientras estaba en la fase nueva e inobservable por la cercanía del Sol.

Para facilitar la observación de los tenues crecientes lunares es conveniente contar con datos de la posición de la Luna en el momento del ocaso, en concreto su acimut respecto al Sol y la orientación de sus cuernos.

El momento que nos interesa es el ocaso del limbo inferior de la Luna, entonces la altura topocéntrica del centro de la Luna es

$$h'_{T-0} = s'_T - 34'$$

donde s'_T es el semidiámetro topocéntrico de la Luna. Siguiendo un razonamiento similar al del epígrafe 1.16, se encuentra la altura geocéntrica del ocaso del limbo inferior de la Luna

$$h'_{G-0} = \pi' + \frac{R'}{R} \pi' - 34' = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \pi' - 34' = 1,2725\pi' - 34' \approx 0^\circ, 6419. \quad (8.16)$$

Seguidamente se calcula el momento en que la Luna alcanza la altura (8.16), lo que nos permite determinar su acimut A' .

Sabiendo el momento del ocaso del limbo inferior de la Luna se determina las coordenadas horizontales del Sol h y A .

Ejemplo 4.16.- Determinar el acimut de la Luna y la orientación de sus cuernos respecto a la vertical en el momento de la puesta del limbo inferior de la Luna en un lugar de latitud 35°N y de longitud 20°E el día 23 de septiembre de 2025.

- Las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de la Luna el día indicado a las 0 horas de TT es

$$\alpha'_1 = 12^h\ 45^m\ 51^s, 9; \quad \delta'_1 = -7^\circ\ 21'\ 12'', 2.$$

- De (17.5) se calcula el ángulo horario de la Luna en primera aproximación

$$H'_{0-1} = 84^\circ\ 1'\ 18'', 1.$$

- Por (16.5) se determina el tiempo sidéreo medio en el primer meridiano en

el momento del ocaso

$$T_{m-1} = 17^h 1^m 57^s, 1.$$

- El tiempo sidéreo a las 0 horas UT del día indicado es por (8.2)

$$T_m(0^h UT) = 0^h 8^m 23^s, 1.$$

- El tiempo sidéreo transcurrido desde las 0 horas UT hasta el momento del ocaso es en primera aproximación es $16^h 52^m 34^s$, expresado en tiempo universal es

$$t_1(UT) = 16^h 50^m 48^s,$$

para pasarlo a tiempo terrestre le sumamos ΔT que para el año 2025 es 71 segundos

$$t_1(TT) = 16^h 51^m 59^s,$$

que es el momento, en primera aproximación, del ocaso del limbo inferior de la Luna en la fecha y lugar indicado.

- Vamos repitiendo la iteración hasta que encontramos que la cuarta aproximación coincide con una diferencia menor que un minuto con la tercera, tomando por tanto como el momento del ocaso del limbo inferior de la Luna

$$\alpha_4 = 13^h 17^m 12^s, 5; \quad \delta'_4 = -11^\circ 18' 58'', 4;$$

$$T_{m-4} = 17^h 21^m 45^s, 9; \quad H_{0-4} = 81^\circ 8' 14'', 9; \quad t_4(TT) = 17^h 12^m.$$

- El acimut de la Luna en el ocaso se calcula por (18.5)

$$A' = 75^\circ 40' 34'', 2.$$

- Las coordenadas ecuatoriales geocéntricas del Sol para las 17 horas 12 minutos del día 23 de septiembre de 2025 son

$$\alpha = 12^h 3^m 26^s, 3; \quad \delta = -0^\circ 22' 21'', 6.$$

- La altura y acimut, ambos geocéntricos, se calcula por (16.5), (17.5) y (18.5)

$$h = -8^\circ 3' 8'', 6; \quad A = 95^\circ 13' 16'', 3.$$

- Entonces la diferencia de acimuts en el momento del ocaso del limbo inferior de la Luna es

$$A - A' = 19^\circ 32' 42'', 1.$$

como los acimuts se miden desde el sur en sentido retrógrado, entonces el Sol se encuentra más al oeste que la Luna (por tener mayor acimut), y por tanto la Luna se sitúa $19^\circ 32' 42'', 1$ al sur del Sol.

- Para calcular la orientación de los cuernos respecto a la vertical que pasa por el centro de la Luna se aplica (11.5) y se obtiene $65^\circ 33' 44'', 6$, que es el ángulo medido desde la vertical que pasa por el centro de la Luna al radio vector que une el centro lunar con el limbo de la zona iluminada en el sentido contrario a las agujas del reloj.

- Otro asunto que interesa en la observación del creciente lunar es la diferencia de tiempo entre los ocasos del Sol y de la Luna. Para el ejemplo que estamos considerando el ocaso del limbo superior del Sol es a las 18 horas y 55 minutos de tiempo universal y el limbo superior de la Luna se pone a 19

horas 33 minutos, es decir una diferencia de tiempo de 38 minutos, intervalo de tiempo en que será posible la observación del creciente lunar.

7.16 Efecto de la depresión del horizonte en los fenómenos lunares

La elevación del punto de observación sobre la superficie terrestre tiene efectos apreciables en la observación de fenómenos lunares, como por ejemplo su ocaso. Cuando el observador está a una altura f el ángulo que da la depresión del horizonte d es (7.6), por tanto para el ocaso (o el orto) de la Luna la altura geocéntrica de su centro habrá que corregirla, de tal forma que (3.16) toma la forma

$$h'_{G-0} = 0,7275 \pi' - 0^\circ 34' - \sqrt{\frac{2f}{R}} \quad (9.16)$$

R es el radio de la Tierra y el último sumando está en radianes.

Ejemplo 5.16.- Determinar el momento del ocaso del limbo inferior de la Luna el día 1 de mayo de 2050 en un lugar a 30° W y 10° N, en el caso de que el observador se encuentre a 300 metros de altura.

- Se hace un razonamiento igual que en el ejemplo 1.1, pero con la altura geocéntrica calculada por (9.16) y se encuentra que el momento del ocaso de la Luna es $3^h 51^m$, una diferencia de cinco minutos sobre el momento de ocaso observado desde la superficie terrestre.

Calendarios computacionales

1.17 Introducción

Distinguimos cuatro tipos de calendarios. Están los computacionales, que son aquellos que obedecen a reglas preestablecidas más o menos complejas, tal es el caso del calendario gregoriano o el calendario judío.

La segunda clase de calendarios son los astronómicos, que necesitan del cálculo astronómico para prepararlos, como ocurre en el calendario chino o el desaparecido calendario republicano francés.

La tercera clase de calendarios son los observacionales, que necesita de la observación de algún fenómeno, astronómico o de otro tipo, para su regulación, un ejemplo de este tipo es el calendario lunar musulmán, que necesita que se observe el primer creciente lunar para establecer el nuevo mes.

Finalmente debemos señalar en esta clasificación los calendarios que sólo son una cuenta de días, como el antiguo calendario egipcio, compuesto de años de una duración inalterable de 365 días, o el cómputo a través del día juliano cronológico, que es solamente una cuenta de días desde un pasado muy remoto.

2.17 Cálculo de los años embolísmicos

Los calendarios computacionales, a los que nos vamos a referir a lo largo de este capítulo, están compuestos de años normales de una duración en días a_n . Para ajustar la duración promedio del año del calendario a la astronomía, es necesario de vez en cuando intercalar un embolismo, es decir un periodo de uno o más días que compense la corta duración del año normal.

Los calendarios computacionales están compuestos de ciclos de A años de duración. Con D representamos los días de duración del embolismo o días que se intercalan formando los llamados años abundantes. Y con B identificamos el número de embolismos que hay en el ciclo de A años.

Si con a_a identificamos la duración del año astronómico al que debe ajustarse el calendario, el número de embolismo B a intercalar en el ciclo se calcula averiguando los periodos de D días que hay en el exceso acumulado entre el año astronómico de referencia y el año normal

$$B = \text{cint} \left[(a_a - a_n) A / D \right] \quad (1.17)$$

donde cint significa la función redondeo. Nótese que la duración del año astronómico es siempre mayor que la duración del año normal.

Vamos a aplicar (1.17) al calendario solar. El año astronómico que debe seguir este calendario es el año trópico que para el año 2000 es

$$a_a = 365^d, 242\ 176\ 754,$$

expresado en tiempo universal. Si queremos que haya intercalaciones de un día se deberá cumplir

$$a_n = 365^d; \quad D=1,$$

ahora se aplica (1.17) dando a A el valor que queramos. Por ejemplo si $A = 4$ entonces $B = 1$, que corresponde al calendario juliano. Si queremos que el ciclo de años sea de 400, entonces $B = 97$, como ocurre en el calendario gregoriano. Y si suponemos $A = 900$ entonces $B = 218$, que es la regla del calendario de Milankovich o juliano revisado.

Otro ejemplo de intercalación de un calendario solar es el de semanas intercalares, donde $D = 7$, o sea que los embolismos o intercalaciones son grupos de siete días, mientras que la duración del año normal es $a_n = 364^d$ o cincuenta y dos semanas enteras. Por ejemplo, si el ciclo está compuesto por 62 años, al aplicar (1.17) se encuentra que debe haber 11 embolismos de 7 días cada uno, es decir que 11 de los 62 años están compuestos de 371 días o 53 semanas enteras.

Otra opción para idear posibles reglas de intercalación de años embolísmicos consiste en descomponer en fracciones continuas la expresión

$$\frac{a_a - a_n}{D}$$

e ir tomando las sucesivas fracciones aproximadas, representando el denominador de estas fracciones la duración del ciclo y el numerador el número de embolismo.

Para el caso de un calendario solar con embolismo de un día se tiene la siguiente descomposición en fracciones continuas

$$\frac{a_a - a_n}{D} = \frac{365,242\ 176\ 754 - 365}{1} = 0,242\ 176\ 754 = \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \dots}}}}}}$$

de donde se obtienen las siguientes fracciones aproximadas

$$\frac{1}{4}; \quad \frac{7}{29}; \quad \frac{8}{33}; \quad \frac{23}{95}; \quad \frac{100}{413}; \dots$$

la primera fracción representa un ciclo de 4 años donde 1 es bisiesto o embolísmico; la segunda fracción corresponde a un ciclo de 29 años, 7 de ellos son bisiestos, y así sucesivamente.

Podemos aplicar esta regla para el caso de calendarios de semanas intercalares, entonces la descomposición en fracciones continuas es

$$\frac{a_a - a_n}{D} = \frac{365,242\ 176\ 754 - 364}{7} = 0,177\ 453\ 822 = \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}$$

siendo las primeras fracciones aproximadas

$$\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{2}{11}; \frac{3}{17}; \dots$$

por ejemplo, la cuarta aproximación significa un ciclo de 17 años, 14 de ellos de 364 días y 3 con 371 días.

3.17 Intercalación en calendarios lunares

Un calendario lunar computacional está constituido por doce meses de duraciones de 29 o 30 días, haciendo un total de 354 días en los años normales y ascendiendo a 355 días en los años abundantes.

La duración del año astronómico al que debe ajustarse un calendario lunar es $12m_s$, donde m_s es el mes sinódico tal como se calculó en (3.14), para el año 2000 la duración del año lunar astronómico en tiempo universal, que es la unidad usada en los calendarios, es

$$a_a = 12m_s = 354^d,367\ 054$$

que es prácticamente constante. Si hacemos intercalaciones de un día, entonces el número de embolismo B a realizar en un periodo de A años es por (1.17)

$$B = \text{cint}[0,367\ 054A]. \quad (2.17)$$

En un año normal hay 6 meses de 29 días y otros 6 meses de 30 días. Cuando se coloca un embolismo, disminuye en uno los meses de 29 días y aumenta en uno los meses de 30 días, por tanto en un periodo de A años el número de meses de una u otra duración es

$$m_{29} = 6A - B; \quad m_{30} = 6A + B. \quad (3.17)$$

Como el exceso del año normal sobre el año lunar astronómico es aproximadamente 0,37 días quiere decir que cada dos o tres años debe de procederse a intercalar un día. Si u representa el número de ocasiones en que se intercala un día en un periodo de tres días y v el correspondiente número para periodos de dos días, tenemos

$$3u + 2v = A; \quad u + v = B$$

de donde se deduce

$$u = A - 2B; \quad v = 3B - A. \quad (4.17)$$

En la tabla 1.17 aparecen algunos ejemplos de reglas de intercalación de

calendarios lunares computacionales obtenidos por (2.17). El ciclo de 30 años es el que sigue el calendario computacional musulmán, que veremos más adelante. Es de destacar el ciclo de 79 años, que es una combinación de un ciclo de 49 años con otro de 30 y cuya lunación media sólo se diferencia 0,25 segundos de la lunación media astronómica.

4.17 Duración promedio del año del calendario

En los calendarios computacionales tenemos dos tipos de años, los normales y los embolismicos, que en determinado número se suceden en un ciclo. La duración promedio del año en el ciclo es dado por

$$a_c = \frac{Aa_n + DB}{A}, \tag{5.17}$$

por ejemplo, para el calendario juliano el año promedio es

$$a_c = \frac{Aa_n + DB}{A} = \frac{4 \cdot 365 + 1 \cdot 1}{4} = 365^d,25,$$

para el calendario gregoriano

$$a_c = \frac{Aa_n + DB}{A} = \frac{400 \cdot 365 + 1 \cdot 97}{400} = 365^d,2425.$$

y para el calendario de semanas intercalares con un ciclo de 62 años tendremos una duración promedio del año del calendario de

$$a_c = \frac{62 \cdot 364 + 7 \cdot 11}{62} = 365^d,214936.$$

(5.17) es una fórmula de aplicación para cualquier otro tipo de calendario, por ejemplo para los lunares, como más adelante veremos.

Años del ciclo	Años abundantes	Meses del ciclo	Diferencia
30	11	360	2,78
49	18	588	-2,11
68	25	816	-4,27
79	29	948	-0,25
87	32	1044	-5,49
98	36	1176	-2,11

Tabla 1.17.- Características de algunos calendarios lunares. La última columna es la diferencia en segundos entre la lunación media astronómica y la lunación promedio del calendario.

5.17 Orden de intercalación de embolismos en calendarios computacionales regulares

Hemos averiguado el número de embolismos que es necesario intercalar en un ciclo de años, ahora vamos a determinar el orden en que deben intercalarse, siempre y cuando deseemos que esta intercalación se haga lo más regularmente posible.

Para averiguar cuales son los años embolísmicos o abundantes hacemos el cociente

$$k \frac{A}{B}$$

donde k es el número de orden del año embolísmico; pues bien, los años embolísmicos son aquellos cuyo orden en el ciclo es igual a la anterior expresión (si es que fuera un número entero) o al número entero inmediatamente superior. O dicho de otra forma, si Y_k es el orden del año en el ciclo debe cumplirse

$$k \frac{A}{B} + 1 > Y_k \geq k \frac{A}{B}. \quad (6.17)$$

(6.17) se expresa de otra forma. Multiplicando por B y dividiendo entre A obtenemos de (6.17)

$$k + \frac{B}{A} > Y_k \frac{B}{A} \geq k \quad (7.17)$$

pero como Y_k es un número entero

$$\text{int} \left(Y_k \frac{B}{A} \right) = k, \quad (8.17)$$

llevamos este resultado a (7.17)

$$\text{int} \left(Y_k \frac{B}{A} \right) + \frac{B}{A} > Y_k \frac{B}{A} \Rightarrow Y_k \frac{B}{A} - \text{int} \left(Y_k \frac{B}{A} \right) < \frac{B}{A}, \quad (9.17)$$

por definición de la función mod tenemos

$$Y_k \frac{B}{A} = \text{int} \left(Y_k \frac{B}{A} \right) + \frac{(Y_k B) \bmod A}{A}$$

al llevar este resultado a (9.17) se encuentra

$$(Y_k B) \bmod A < B \quad (10.17)$$

que representa otra forma de saber cuáles serán los años embolísmicos.

Ejemplo 1.17.- Calcular los años que tienen semanas intercalares en un ciclo de 62 años de los cuales 11 son embolísmicos.

- En este calendario

$$A = 62; \quad B = 11.$$

- Los años que están en la posición

$$6, 12, 17, 23, 29, 34, 40, 46, 51, 57, 62$$

cumplen la desigualdad (10.17), por tanto son años embolísmicos donde

hay que colocar una semana intercalar y por tanto alcanzan una duración de 371 días.

La fórmula (8.17) cabe entenderla como el número de años embolísmicos E que han transcurrido hasta final del año Y

$$E = \text{int}\left(\frac{YB}{A}\right). \quad (11.17)$$

Ejemplo 2.17.- Calcular los años embolísmicos transcurridos hasta final del año 43 de un ciclo de 62 años de los cuales 11 son embolísmicos.

- Al aplicar (11.17) se encuentra $E = 7$.

La ecuación (6.17) se puede poner de la siguiente forma

$$Y_k = \text{int}\left(k\frac{A}{B} + 1\right) - \text{int}\left[\frac{B}{kA} \text{int}\left(k\frac{A}{B}\right)\right] \quad (12.17)$$

donde el último sumando es la unidad siempre y cuando el cociente A/B sea un entero, en caso contrario es nulo.

Al orden de los años embolísmicos que se desprende de (10.17) o (12.17) se le llama orden natural. Pero podemos comenzar a contar los años del ciclo no desde el 1 del orden natural, sino a partir de otro año diferente, tendremos por tanto un desplazamiento del orden en que se dan los años embolísmicos.

Sea β el número de años transcurridos desde el primero del orden natural hasta el comienzo del año que ahora utilizaremos como inicio del ciclo desplazado y sea α el número de embolismos que han pasado entre ambos años. Por (11.17)

$$\alpha = \text{int}\left(\beta\frac{B}{A}\right). \quad (13.17)$$

Para conocer cuáles son los años embolísmicos en el orden desplazado es necesario hacer las sustituciones

$$Y_k \rightarrow Y_k + \beta; \quad k \rightarrow k + \alpha$$

al aplicarlo en (10.17) queda

$$\left[(Y_k + \beta)B\right] \bmod A < B, \quad (14.17)$$

mientras que (12.17) queda

$$Y_k = \text{int}\left[(k + \alpha)\frac{A}{B} + 1\right] - \text{int}\left\{\frac{B}{(k + \alpha)A} \text{int}\left[(k + \alpha)\frac{A}{B}\right]\right\} - \beta. \quad (15.17)$$

Ejemplo 3.17.- Averiguar la posición de los años embolísmicos en el ciclo de semanas intercalares de 62 años en el caso de que comencemos a contar los años por el número 15 de su orden natural.

- Tenemos $\beta = 14$, entonces por (13.17)

$$\alpha = 2.$$

- De (15.17) se obtiene los años embolísmicos en el ciclo desplazado

$$3, 9, 15, 20, 26, 32, 37, 43, 48, 54, 60.$$

6.17 Calendario musulmán computacional

El calendario musulmán es observacional y por lo tanto no se puede preparar con antelación; es más, no existen registros que relacione fechas musulmanas del pasado con un calendario computacional como por ejemplo el juliano, lo que representa un problema en cronología.

Para solucionar estos problemas se hace uso de un calendario esquemático, aritmético o computacional que nos permite con un error de algunos días, conocer con antelación el calendario musulmán y además utilizarlo con fines cronológicos.

El calendario aritmético musulmán es exclusivamente lunar, comenzando sus meses en la cercanía de la Luna nueva. Está compuesto de doce meses de duraciones alternativas de 29 y 30 días, lo que hace un total de 354 días en los años lunares normales.

Tiene un ciclo de 30 años, de los cuales 11 son abundantes de una duración de 355 días, lo que se consigue añadiendo al último mes del año un día extra, pasando por tanto de 29 a 30 días. Esto hace que la duración promedio del calendario sea

$$l_m = \frac{354A + B}{12A} = \frac{354 \cdot 30 + 11}{12 \cdot 30} = 29^d 12^h 44^m$$

muy cercano al valor astronómico.

Los nombres de los meses de este calendario musulmán computacional son los mismos del calendario ritual: Moharram, Safar, Rabi I, Rabi II, Djumada I, Djumada II, Radjeb, Chaaban, Ramadhan, Chaul, Dhulcada y Dhuhlidjah. El calendario musulmán hace uso de la semana y se considera que el día comienza con la puesta del Sol.

La cuenta de los años se inicia con el 16 de julio del año 622 del calendario juliano, era conocida como la Hégira.

Los años embolísmicos están situados regularmente dentro de los 30 años del ciclo, por tanto su situación obedece a (15.17), tomando $\alpha = 1$ y $\beta = 4$. Entonces los años que son embolísmicos son los situados en las posiciones

$$2, 5, 7, 10, 13, 16, 18, 21, 24, 26, 29,$$

por tanto cada dos o tres años viene uno embolísmico. Al aplicar (4.17) se encuentra

$$u = 8; \quad v = 3,$$

es decir en 8 ocasiones el día intercalar viene en un periodo de tres años y en 3 veces en un periodo de dos años.

La razón de este orden en la intercalación hay que buscarla en el criterio establecido para saber cuándo hay que colocar un año abundante: si la primera Luna nueva promedio del año llega después de haber transcurrido las 12 horas del día, entonces el año anterior es abundante. Supongamos un año donde coincida la Luna nueva con el comienzo del primer día del año. La primera Luna nueva del siguiente año ya no coincidirá con el comienzo del primer día del nuevo año, sino que habrá una diferencia que en promedio será

$$(29^d, 530\ 587\ 81 - 29^d, 5) \cdot 12 = 0^d, 367\ 054.$$

Al comienzo del tercer año la diferencia habrá alcanzado el doble de la anterior cantidad, $0,734\ 107$ días, es decir, que sobrepasa las doce horas, motivo por el que se coloca un día intercalar en el año anterior que es el segundo del ciclo. Al principio del cuarto año la diferencia será la que arrastraba del segundo año más la que se ha incrementado en el tercer año

$$0^d, 734\ 107 - 1 + 0^d, 367\ 054 = 0^d, 101\ 161$$

que no supera las doce horas, por lo que el tercer año no será abundante y así se procede sucesivamente.

Se usa otro criterio para la intercalación, que exige que la diferencia acumulada entre la duración promedio de las lunaciones y los días transcurridos, sea mayor o igual que doce horas. En este caso será abundante el año 15 y no el 16, permaneciendo igual los restantes años intercalares.

El año promedio del calendario artimético musulmán se calcula por (5.17)

$$a_c = 354^d, 366\ 667,$$

33 segundos menor que el año lunar astronómico promedio.

7.17 Error en los calendarios lunares computacionales

Se llama desviación de un calendario respecto al año astronómico de referencia a

$$\Delta = |a_a - a_c|.$$

Otra magnitud que resulta más interesante para el propósito de medir el ajuste de un calendario a la astronomía es el parámetro J

$$J = \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{|a_a - a_c|} \quad (16.17)$$

que nos da los años que tienen que transcurrir para que la desviación del calendario alcance un día respecto al año astronómico de referencia, siempre y cuando a_a permanezca constante, algo que como hemos visto no ocurre, pero como la variación de la duración del año astronómico es pequeña, la magnitud J nos puede dar al menos una estimación de la desviación del calendario.

Por ejemplo, para el caso del calendario juliano tenemos

$$J = \frac{1}{|365^d, 242\ 176\ 754 - 365, 25|} = 127, 8$$

que son los años que aproximadamente tienen que transcurrir para que alcance un día la desviación del calendario juliano respecto a un calendario que ajustara su duración al año trópico.

Para el calendario gregoriano tenemos

$$J = \frac{1}{|365^d, 242\ 176\ 754 - 365, 2425|} = 3\ 093, 6$$

años que tienen que transcurrir para que la desviación del calendario gregoriano respecto a la astronomía llegue a un día. Volvemos a insistir que estos son resultados aproximados, pues no estamos considerando la variación con el tiempo del año trópico.

Por último, vamos a calcular el parámetro J para el calendario musulmán, donde hay que tener en cuenta que el año astronómico de referencia ya no es el año trópico sino el año lunar

$$J = \frac{1}{|354^d,367\ 0537 - 354^d,366\ 667|} = 2\ 585,9$$

que nos muestra el buen ajuste del calendario computacional musulmán a la astronomía, pues tienen que pasar más de dos mil quinientos años para que se registre un desplazamiento de un día del calendario frente a la astronomía.

Nos interesa ahora conocer el error que se va acumulando en un calendario lunar a consecuencia de que su lunación no coincide exactamente con la lunación astronómica. Para hacer este cálculo vamos a suponer que el año Y_0 es el origen del calendario. Los siglos julianos transcurridos desde ese año (que representaremos por T'') en función de los siglos julianos contados desde el año 2000 es

$$T'' = \frac{Y - Y_0}{100} = T + \frac{2000 - Y_0}{100} = T + 20 - 0,01Y_0$$

entonces la lunación promedio de la fórmula (3.5) es

$$m_s = p' - q'T = [p' + (20 - 0,01Y_0)q'] - q'T''.$$

Vamos ahora a expresar el tiempo en siglos lunares en vez de en siglos julianos. Un siglo lunar está compuesto por cien años lunares, cada uno de ellos con una duración promedio de $12l_m$. T' son los siglos lunares transcurridos desde el año origen del calendario Y_0 . La relación entre siglos lunares T' y siglos julianos T'' es

$$T'' = \frac{1200l_m}{36525} T' = \frac{12l_m}{36525} Y_L$$

donde Y_L son los años lunares transcurridos desde el origen del calendario, es decir $Y_L = Y - Y_0$. Entonces la expresión del periodo sinódico lunar será

$$m_s = [p' + (20 - 0,01Y_0)q'] - \frac{12l_m}{36525} q'Y_L = a - bY_L,$$

Para el caso del calendario aritmético musulmán tenemos

$$m_s = 29^d,530\ 59282 - 3^d,531 \cdot 10^{-9} Y_L.$$

El error promedio acumulado a lo largo de un año es

$$E(Y_L) = 12(l_m - m_s), \quad (17.17)$$

donde hemos supuesto que la lunación promedio astronómica permanece constante a lo largo del año. El error acumulado en un ciclo lunar de A años que comienza en el año Y_L contado a partir del origen del calendario, es

$$E(Y_L, A) = 12 \sum_{Y_L}^{Y_L+A} (l_m - m_s) = 12 \sum_{Y_L}^{Y_L+A} (l_m - a + bY_L), \quad (18.17)$$

al desarrollar queda

$$E(Y_L, A) = 12A(l_m - a) + 6b(2Y_L + A)(1 + A). \quad (19.17)$$

Si en vez de un ciclo lunar queremos determinar el error acumulado en N ciclos lunares que comienzan en el año Y_L , debemos de aplicar la fórmula

$$E(Y_L, N) = 12NA(l_m - a) + 6b(2Y_L + NA)(1 + NA). \quad (20.17)$$

En la tabla 2.17 aparece el error que se va acumulando en varios años del calendario computacional musulmán desde el comienzo de la Hégira en el año 622. Vemos que para el año 6000, que corresponde al 6622 de la era cristiana, el error acumulado alcanzará $1^d 22^h 5^m$.

El comienzo del calendario musulmán no coincidió con una Luna nueva. En efecto, la más cercana Luna nueva fue la del día 14 de julio de 622 a las $6^h 37^m$ de tiempo terrestre. Lo que significa que al comenzar la Hégira, que entendemos fue a las 18 horas de tiempo universal del día 15 de julio de 622 (y por lo tanto ya en el día 16 según el cómputo musulmán), la edad de la Luna era de 1,6 días aproximadamente, lo que podría entenderse como el momento de la observación física del creciente lunar.

El cálculo directo nos muestra que la edad media de la Luna el primer día del año en un ciclo de 30 años en torno al 1500 de la hégira es 1,5 días. Para el año 3000 de la Hégira, el mismo cálculo nos da una edad media de la Luna al comenzar el año de 0,9, resultados que está acorde con la tabla 2.17.

8.17 Error en los calendarios solares

La fórmula (17.17) también se utiliza para determinar el error acumulado en un calendario solar, entonces el error acumulado en un calendario solar desde el año Y_0 hasta el año Y es

$$E(Y) = \sum_{Y_0}^Y [a_c - a_s(Y)]$$

Años de la hégira	Número de ciclos	Error (en días)
1500	30	-0,62
3000	100	-1,15
4500	150	-1,58
6000	200	-1,92

Tabla 2.17.- Error acumulado en el calendario computacional musulmán en función del año de la Hégira.

a_c es el año promedio del calendario, a_t es la duración del año trópico o año astronómico al que debe ajustarse un calendario solar e Y son los años transcurridos desde el año 2000.

El razonamiento que hay que seguir es el mismo que el del epígrafe anterior, llegando a una ecuación análoga a (20.17)

$$E(Y, N) = NA(a_c - a) + \frac{1}{2}b(2Y_0 + NA)(1 + NA) \quad (21.17)$$

A es el número de años del ciclo del calendario solar, N es el número de ciclos transcurridos, Y_0 es el año inicial del primer ciclo, finalmente a y b son los parámetros del año trópico expresado en unidades de tiempo universal que por (11.7) es

$$a_T = a - bY = 365^d, 242\ 176\ 754 - 1^d, 3338 \cdot 10^{-7} Y$$

siendo Y los años transcurridos desde el año 2000.

Como ejemplo vamos a aplicar (21.17) al calendario gregoriano, entonces A es 400 años y el primer año del ciclo Y_0 es 1600, con estos datos obtenemos la tabla 3.17.

La tabla 3.17 nos muestra que al concluir el sexto ciclo, en el año 4000, el error acumulado entre el año gregoriano y el trópico habrá alcanzado un día. El segundo día acumulado se alcanzará al finalizar el décimo ciclo, en el año 5600. Que el error acumulado E alcance un día significa que la media de las dispersiones de las cuatro estaciones respecto a las posiciones que en

N	Intervalo	E (en días)
1	1600-2000	0,1186
2	2000-2400	0,2586
3	2400-2800	0,4200
4	2800-3200	0,6027
5	3200-3600	0,8067
6	3600-4000	1,0321
7	4000-4400	1,2788
8	4400-4800	1,5469
9	4800-5200	1,8363
10	5200-5600	2,1470

Tabla 3.17.- Error acumulado en el calendario gregoriano. En la tercera columna aparece el error acumulado expresado en días.

promedio ocupaban en el año 1600 (año que hemos tomado arbitrariamente de referencia), toma el valor 1.

Tablas

TABLA 1: ΔT

Comienzo en	$TT - UT$	$UT - UTC$
01-01-1972	+42,23	-0,05
01-07-1972	+42,80	+0,38
01-01-1973	+43,37	+0,81
01-07-1973	+43,93	+0,25
01-01-1974	+44,49	+0,69
01-07-1974	+44,99	+0,19
01-01-1975	+45,48	+0,70
01-07-1975	+45,97	+0,21
01-01-1976	+46,46	+0,72
01-07-1976	+46,99	+0,19
01-01-1977	+47,52	+0,66
01-07-1977	+48,03	+0,15
01-01-1978	+48,53	+0,65
01-07-1978	+49,06	+0,12
01-01-1979	+49,59	+0,59
01-07-1979	+50,07	+0,11
01-01-1980	+50,54	+0,64
01-07-1980	+50,96	+0,22
01-01-1981	+51,38	-0,20
01-07-1981	+51,78	+0,40
01-01-1982	+52,17	+0,01
01-07-1982	+52,57	+0,61
01-01-1983	+52,96	+0,22
01-07-1983	+53,38	+0,80
01-01-1984	+53,79	+0,39
01-07-1984	+54,07	+0,11
01-01-1985	+54,34	-0,16
01-07-1985	+54,61	+0,57
01-01-1986	+54,87	+0,31
01-07-1986	+55,10	+0,08
01-01-1987	+55,32	-0,14
01-07-1987	+55,57	-0,39
01-01-1988	+55,82	+0,36
01-07-1988	+56,06	+0,12
01-01-1989	+56,30	-0,12
01-07-1989	+56,58	-0,40
01-01-1990	+56,86	+0,32

Comienzo en	$TT - UT$	$UT - UTC$
01-07-1990	+57,22	-0,04
01-01-1991	+57,57	+0,61
01-07-1991	+57,94	+0,24
01-01-1992	+58,31	-0,13
01-07-1992	+58,72	+0,46
01-01-1993	+59,12	+0,06
01-07-1993	+59,55	+0,03
01-01-1994	+59,98	+0,20
01-07-1994	+60,38	+0,80
01-01-1995	+60,78	+0,40
01-07-1995	+61,20	-0,02
01-01-1996	+61,63	+0,55
01-07-1996	+61,96	+0,22
01-01-1997	+62,29	-0,11
01-07-1997	+62,63	+0,55
01-01-1998	+62,97	+0,21
01-07-1998	+63,22	-0,04
01-01-1999	+63,47	+0,71
01-07-1999	+63,66	+0,52
01-01-2000	+63,82	+0,36
01-07-2000	+63,98	+0,20
01-01-2001	+64,09	+0,09
01-07-2001	+64,20	-0,02
01-01-2002	+64,30	-0,12
01-07-2002	+64,41	-0,23
01-01-2003	+64,47	-0,29
01-07-2003	+64,55	-0,37
01-01-2004	+64,57	-0,39
01-07-2004	+64,65	-0,47
01-01-2005	+64,68	-0,50
01-07-2005	+64,80	-0,62
01-01-2006	+64,85	+0,33
01-07-2006	+64,99	+0,19
01-01-2007	+65,15	+0,03
01-07-2007	+65,34	-0,16
01-01-2008	+65,45	-0,27
01-07-2008	+65,63	-0,45
01-01-2009	+65,78	+0,40
01-07-2009	+65,95	+0,23

Comienzo en	$TT - UT$	$UT - UTC$
01-01-2010	+66,07	+0,11
01-07-2010	+66,24	-0,06
01-01-2011	+66,32	-0,14
01-07-2011	+66,47	-0,29
01-01-2012	+66,60	-0,42
01-07-2012	+66,77	+0,41
01-01-2013	+66,91	+0,27
01-07-2013	+67,13	+0,05
01-01-2014	+67,28	-0,10
01-07-2014	+67,49	-0,31
01-01-2015	+67,64	-0,46
01-07-2015	+67,86	+0,32
01-01-2016	+68,10	+0,08
01-07-2016	+68,40	-0,22
01-01-2017	+68,59	+0,59
01-07-2017	+68,81	+0,37
01-01-2018	+69,0	+0,2 (pred.)
01-01-2019	+69,5	-0,3 (pred.)
01-01-2020	+69,9	-0,7 (pred.)
01-01-2021	+70 (pred.)	
01-01-2022	+70 (pred.)	
01-01-2023	+71 (pred.)	
01-01-2024	+71 (pred.)	
01-01-2025	+71 (pred.)	
01-01-2026	+72 (pred.)	
01-01-2027	+72 (pred.)	

TABLA 2: Tablas de Bretagnon-Simon

i	l_i	r_i	α_i	v_i
1	403 406	0	4,721 964	1,621 043
2	195 207	-97 597	5,937 458	62 830,348 067
3	119 433	-59 715	1,115 589	62 830,821 524
4	112 392	-56 188	5,781 616	62 829,634 302
5	3 891	-1 556	5,5474	125 660,5691
6	2 819	-1 126	1,5120	125 660,9845
7	1 721	-861	4,1897	62 832,4766
8	0	941	1,163	0,813
9	660	-264	5,415	125 659,310
10	350	-163	4,315	57 533,850
11	334	0	4,553	-33,931
12	314	309	5,198	777 137,715
13	268	-158	5,989	78 604,191
14	242	0	2,911	5,412
15	234	-54	1,423	39 302,098
16	158	0	0,061	-34,861
17	132	-93	2,217	115 067,698
18	129	-20	3,193	15 774,337
19	114	0	2,828	5 296,670
20	99	-47	0,52	58 849,27
21	93	0	4,65	5 296,11
22	86	0	4,35	-3 980,70
23	78	-33	2,75	52 237,69
24	72	-32	4,50	55 076,47
25	68	0	3,23	261,08
26	64	-10	1,22	15 773,85
27	46	-16	0,14	188 491,03
28	38	0	3,44	-7 756,55
29	37	0	4,37	264,89
30	32	-24	1,14	117 906,27
31	29	-13	2,84	55 075,75
32	28	0	5,96	-7 961,39
33	27	-9	5,09	188 489,81
34	27	0	1,72	2 132,19
35	25	-17	2,56	109 771,03
36	24	-11	1,92	54 868,56
37	21	0	0,09	25 443,93

i	l_i	r_i	α_i	v_i
38	21	31	5,98	-55 731,43
39	20	-10	4,03	60 697,74
40	18	0	4,27	2 132,79
41	17	-12	0,79	109 771,63
42	14	0	4,24	-7 752,82
43	13	-5	2,01	188 491,91
44	13	0	2,65	207,81
45	13	0	4,98	29 424,63
46	12	0	0,93	-7,99
47	10	0	2,21	46 941,14
48	10	0	3,59	-68,29
49	10	0	1,50	21 463,25
50	10	-9	2,55	157 208,40

TABLA 3: Coeficientes de los términos periódicos de la longitud lunar y de la distancia Tierra-Luna
(La unidad es 0,000 001 grados para l'_i y 0,001 km para r'_i)

D_m	M	M'	η'_m	l'_i	r'_i
0	0	1	0	6 288 774	-20 905 355
2	0	-1	0	1 274 027	-3 699 111
2	0	0	0	658 314	-2 955 968
0	0	2	0	213 618	-569 925
0	1	0	0	-185 116	48 888
0	0	0	2	-114 332	-3 149
2	0	-2	0	58 793	246 158
2	-1	-1	0	57 066	-152 138
2	0	1	0	53 322	-170 733
2	-1	0	0	45 758	-204 586
0	1	-1	0	-40 923	-129 620
1	0	0	0	-34 720	108 743
0	1	1	0	-30 383	104 755
2	0	0	-2	15 327	10 321
0	0	1	2	-12 528	
0	0	1	-2	10 980	79 661
4	0	-1	0	10 675	-34 782
0	0	3	0	10 034	-23 210
4	0	-2	0	8 548	-21 636
2	1	-1	0	-7 888	24 208
2	1	0	0	-6766	30 824
1	0	-1	0	-5 163	-8 379
1	1	0	0	4 987	-16 675
2	-1	1	0	4 036	-12 831
2	0	2	0	3 994	-10 445
4	0	0	0	3 861	-11 650
2	0	-3	0	3 665	14 403
0	1	-2	0	-2 689	-7 003
2	0	-1	2	-2 602	
2	-1	-2	0	2 390	10 056
1	0	1	0	-2 348	6 322

D_m	M	M'	η'_m	l'_i	r'_i
2	-2	0	0	2 236	-9 884
0	1	2	0	-2 120	5 751
0	2	0	0	-2 069	
2	-2	-1	0	2 048	-4 950
2	0	1	-2	-1 773	4 130
2	0	0	2	-1 595	
4	-1	-1	0	1 215	-3 958
0	0	2	2	-1 110	
3	0	-1	0	-892	3 258
2	1	1	0	-810	2 616
4	-1	-2	0	759	-1 897
0	2	-1	0	-713	-2 117
2	2	-1	0	-700	2 354
2	1	-2	0	691	
2	-1	0	-2	596	
4	0	1	0	549	-1 423
0	0	4	0	537	-1 117
4	-1	0	0	520	-1 571
1	0	-2	0	-487	-1 739
2	1	0	-2	-399	
0	0	2	-2	-381	-4 421
1	1	1	0	351	
3	0	-2	0	-340	
4	0	-3	0	330	
2	-1	2	0	327	
0	2	1	0	-323	1 165
1	1	-1	0	299	
2	0	3	0	294	
2	0	-1	-2		8 752

**TABLA 4: Coeficientes de los términos periódicos
de la latitud lunar**
(La unidad es 0,000 001 grados)

D_m	M	M'	η'_m	r'_i	D_m	M	M'	η'_m	r'_i
0	0	0	1	5 128 122	0	0	1	-3	777
0	0	1	1	280 602	4	0	-2	1	671
0	0	1	-1	277 693	2	0	0	-3	607
2	0	0	-1	173 237	2	0	2	-1	596
2	0	-1	1	55 413	2	-1	1	-1	491
2	0	-1	-1	46 271	2	0	-2	1	-451
2	0	0	1	32 573	0	0	3	-1	439
0	0	2	1	17 198	2	0	2	1	422
2	0	1	-1	9 266	2	0	-3	-1	421
0	0	2	-1	8 822	2	1	-1	1	-366
2	-1	0	-1	8 216	2	1	0	1	-351
2	0	-2	-1	4 324	4	0	0	1	331
2	0	1	1	4 200	2	-1	1	1	315
2	1	0	-1	-3 359	2	-2	0	-1	302
2	-1	-1	1	2 463	0	0	1	3	-283
2	-1	0	1	2 211	2	1	1	-1	-229
2	-1	-1	-1	2 065	1	1	0	-1	223
0	1	-1	-1	-1 870	1	1	0	1	223
4	0	-1	-1	1 828	0	1	-2	-1	-220
0	1	0	1	-1 794	2	1	-1	-1	-220
0	0	0	3	-1 749	1	0	1	1	-185
0	1	-1	1	-1 565	2	-1	-2	-1	181
1	0	0	1	-1 491	0	1	2	1	-177
0	1	1	1	-1 475	4	0	-2	-1	176
0	1	1	-1	-1 410	4	-1	-1	-1	166
0	1	0	-1	-1 344	1	0	1	-1	-164
1	0	0	-1	-1 335	4	0	1	-1	132
0	0	3	1	1 107	1	0	-1	-1	-119
4	0	0	-1	1 021	4	-1	0	-1	115
4	0	-1	1	833	2	-2	0	1	107

TABLA 5: Coeficientes para la determinación de las fases lunares
(Cálculo de S_1)

M'	M	η'_m	Ω'_m	Luna nueva	Luna llena	Cuartos
1	0	0	0	-0,40720	-0,40614	-0,6281
0	1	0	0	0,17241•E	0,17302•E	0,1772•E
2	0	0	0	0,01608	0,01614	0,00862
0	0	2	0	0,01039	0,01043	0,00804
1	-1	0	0	0,00739•E	0,0734•E	0,00454•E
1	1	0	0	-0,00514•E	-0,00515•E	-0,01183•E
0	2	0	0	0,00208•E ²	0,00209•E ²	0,00204•E ²
1	0	-2	0	-0,00111	-0,00111	-0,00180
1	0	2	0	-0,00057	-0,00057	-0,00070
2	1	0	0	0,00056•E	0,00056•E	0,00027•E
3	0	0	0	-0,00042	-0,00042	-0,00040
0	1	2	0	0,00042•E	0,00042•E	0,00032•E
0	1	-2	0	0,00038•E	0,00038•E	0,00032•E
2	-1	0	0	-0,00024•E	-0,00024•E	-0,00034•E
0	0	0	1	-0,00017	-0,00017	-0,00017
1	2	0	0	-0,00007	-0,00007	-0,00028•E ²
2	0	-2	0	0,00004	0,00004	0,00002
0	3	0	0	0,00004	0,00004	0,00003
1	1	-2	0	0,00003	0,00003	0,00003
2	0	2	0	0,00003	0,00003	0,00004
1	1	2	0	-0,00003	-0,00003	-0,00004
1	-1	2	0	0,00003	0,00003	0,00002
1	-1	-2	0	-0,00002	-0,00002	-0,00005
3	1	0	0	-0,00002	-0,00002	-0,00002
4	0	0	0	0,00002	0,00002	-
1	-2	0	0	-	-	0,00004

**TABLA 6: Coeficientes para la determinación de las fases lunares
(Cálculo de S_3)**

i	β_i	A_i
1	0,000 325	$299^{\circ},77 + 0^{\circ},107\ 408 \cdot k - 0^{\circ},009\ 173 \cdot T^2$
2	0,000 165	$251^{\circ},88 + 0^{\circ},016\ 321 \cdot k$
3	0,000 164	$251^{\circ},83 + 26^{\circ},651\ 886 \cdot k$
4	0,000 126	$349^{\circ},42 + 36^{\circ},412\ 478 \cdot k$
5	0,000 110	$84^{\circ},66 + 18^{\circ},206\ 239 \cdot k$
6	0,000 062	$141^{\circ},74 + 53^{\circ},303\ 771 \cdot k$
7	0,000 060	$207^{\circ},14 + 2,453\ 732 \cdot k$
8	0,000 056	$154^{\circ},84 + 7^{\circ},306\ 860 \cdot k$
9	0,000 047	$34^{\circ},52 + 27^{\circ},261\ 239 \cdot k$
10	0,000 042	$207^{\circ},19 + 0^{\circ},121\ 824 \cdot k$
11	0,000 040	$291^{\circ},34 + 1,844\ 379 \cdot k$
12	0,000 037	$161^{\circ},72 + 24^{\circ},198\ 154 \cdot k$
13	0,000 035	$239^{\circ},56 + 25^{\circ},513\ 099 \cdot k$
14	0,000 023	$331^{\circ},55 + 3^{\circ},592\ 518 \cdot k$

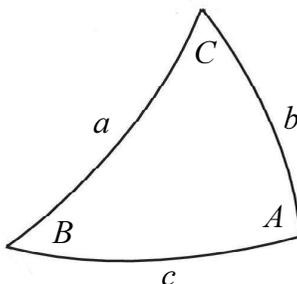
Apéndices

Apéndice A

Relaciones trigonométricas

1.A Teorema del seno y del coseno en trigonometría esférica

Llamamos triángulo esférico a la superficie de una esfera limitada por tres arcos de círculos máximos. Consideremos el triángulo esférico de la figura



donde a, b y c son las longitudes de los arcos que forman el triángulo y A, B y C son sus ángulos. Se le llama teorema del seno a la relación

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \quad (1.A)$$

y teorema del coseno a

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \quad (2.A)$$

extensible a los restantes lados del triángulo

$$\begin{aligned} \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \quad (2.A)$$

2.A Teorema del seno por el coseno

La primera ecuación (2.A) la ponemos como

$$\sin b \sin c \cos A = -\cos b \cos c$$

y sustituimos la tercera ecuación (2.A) quedando

$$\begin{aligned} \sin b \sin c \cos A &= -\cos a - \cos b (\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C) = \\ &= \cos a \sin^2 b - \sin a \cos b \sin b \cos C \end{aligned}$$

y al dividir ambos miembros entre $\sin b$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C, \quad (3.A)$$

y fórmulas similares para las restantes combinaciones de lados y ángulos

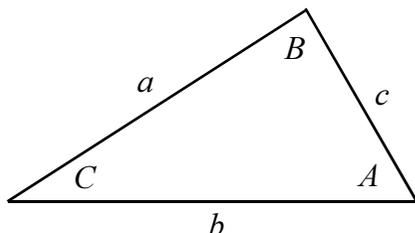
$$\begin{aligned} \sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \cos C &= \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A \\ \sin b \cos A &= \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin b \cos C &= \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B \\ \sin c \cos B &= \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C, \end{aligned} \quad (3.A)$$

al conjunto de relaciones (1.A), (2.A) y (3.A) se le llaman fórmulas de Bessel.

3.A Teoremas de trigonometría plana

Sea el triángulo plano de la figura



a , b y c son las longitudes de los lados y A , B y C los ángulos. El teorema del seno afirma que

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad (4.A)$$

y el teorema del coseno es

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (5.A)$$

y ecuaciones similares para los dos restantes lados

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \end{aligned} \quad (5.A)$$

4.A Relaciones trigonométricas

Si a y b son dos ángulos cualquiera, se cumple las siguientes relaciones para el seno y el coseno de su suma y resta

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \end{aligned} \quad (6.A)$$

Por aplicación de (6.A) es fácil comprobar que

$$\begin{aligned} 2 \sin a \sin b &= \cos(a-b) - \cos(a+b) \\ 2 \cos a \cos b &= \cos(a-b) + \cos(a+b) \\ 2 \sin a \cos b &= \sin(a-b) + \sin(a+b). \end{aligned} \quad (7.A)$$

Nuevamente usando (6.4) se encuentra las dos relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2a \\ \sin^2 a &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2a. \end{aligned} \quad (8.A)$$

Usando (6.A) y el teorema de Pitágoras de la trigonometría se llega a

$$4 \cos^3 a = 3 \cos a + \cos 3a. \quad (9.A)$$

De la primera ecuación (8.A) se encuentra que

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

con la que se comprueba la relación

$$\tan^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}. \quad (10.A)$$

Apéndice B

Relación entre $d\theta$ y $d\chi$

La relación entre la anomalía verdadera y excéntrica es

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \chi$$

derivando

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \theta/2} d\theta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{\cos^2 \chi/2} d\chi + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{de}{(1-e)^2} \tan \chi/2$$

teniendo en cuenta

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta$$

la expresión anterior se simplifica a

$$\frac{1}{1+\cos \theta} d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{1+\cos \chi} d\chi + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{de}{(1-e)^2} \frac{\sin \chi/2}{\cos \chi/2}$$

una posterior simplificación nos lleva a

$$\frac{1}{1+\cos \theta} \frac{1-\cos \theta}{1-\cos \theta} d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1}{1+\cos \chi} \frac{1-\cos \chi}{1-\cos \chi} d\chi + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{de}{(1-e)^2} \frac{\sin \chi/2 \cos \chi/2}{\cos^2 \chi/2}$$

simplificando

$$\frac{1-\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1-\cos \chi}{\sin^2 \chi} d\chi + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{de}{(1-e)^2} \frac{\sin \chi}{1+\cos \chi}$$

$$\frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1+\cos \chi}{\sin \chi} d\theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{(1-\cos \chi)(1+\cos \chi)}{\sin^3 \chi} d\chi + \frac{1}{\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \frac{de}{(1-e)^2},$$

con una simplificación más se llega a

$$\frac{1-e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} \frac{1+\cos \chi}{\sin \chi} d\theta = \frac{d\chi}{\sin \chi} + \frac{de}{1-e^2}. \quad (1.B)$$

A continuación vamos a relacionar las anomalías verdadera y excéntrica.

Igualando las ecuaciones (13.4) y (16.4) es fácil encontrar

$$\cos \chi = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}; \quad \sin \chi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad (2.B)$$

entonces

$$\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \frac{1 + \cos \chi}{\sin \chi} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \frac{1 + \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}}{\frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}} = \frac{1 - e}{\sqrt{1 - e^2}},$$

entonces (1.B) se simplifica a la expresión

$$\frac{d\theta}{\sin \theta} = \frac{d\chi}{\sin \chi} + \frac{de}{1 - e^2}, \quad (3.B)$$

que es la fórmula que íbamos buscando.

Apéndice C

Relación entre $\sin \chi$ y $\sin \theta$

De la ecuación de la elipse (13.4) y de la definición de la anomalía (16.4) excéntrica se obtiene

$$1 - e \cos \chi = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}$$

donde χ es la anomalía excéntrica y θ es la anomalía verdadera; despejando se llega

$$\cos \chi = \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta}$$

elevan al cuadrado los dos miembros y despejando se llega a

$$\sin^2 \chi = \frac{\sin^2 \theta + e^2 \cos^2 \theta - e^2}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

de donde se deduce

$$\sin \chi = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (1.C)$$

o bien

$$\frac{\sin \theta}{\sin \chi} = \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2}. \quad (2.C)$$

Apéndice D

Glosario

Aberración.- Es la desviación que experimenta la orientación de los rayos luminosos cuando son vistos por un observador en movimiento.

Acimut.- Ángulo medido en el horizonte desde el meridiano hasta el punto de corte de la vertical del astro con el horizonte, medido en sentido retrógrado.

Altura.- Ángulo medido en la vertical de un astro desde el horizonte, se toma positiva si el astro está sobre el horizonte y negativa en caso contrario.

Ángulo de fase.- Es el ángulo selenocéntrico entre los centros del Sol y la Tierra.

Ángulo horario.- Es el ángulo medido en el ecuador desde el meridiano superior del lugar al punto de corte del círculo horario del astro con el ecuador, medido en sentido retrógrado.

Anomalía excéntrica.- Magnitud intermedia definida en función de la anomalía verdadera y que simplifica el cálculo de las integrales.

Anomalía media.- Ángulo medido en el plano orbital desde el pericentro medio a la posición media del astro, en el sentido de su movimiento.

Anomalía verdadera.- Ángulo medido en el plano orbital desde el pericentro al punto donde se encuentra el astro en el sentido de su movimiento.

Año anomalístico.- Tiempo que tiene que tarda el Sol medio en aumentar 360° respecto al perigeo medio.

Año estacional.- Tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del Sol por un mismo punto estacional. Existen cuatro tipos de años estacionales, según la estación que se elija como referencia.

Año sidéreo.- Tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud geométrica media del Sol aumente 360° respecto a un equinoccio fijo.

Año trópico.- Tiempo que tiene que transcurrir para que la longitud media geométrica del Sol respecto al equinoccio de la fecha aumente en 360° .

Aplanamiento terrestre.- Cociente entre la diferencia entre el radio ecuatorial y el radio polar de la Tierra y el radio ecuatorial.

Apocentro.- Punto de una órbita elíptica más alejado al foco de la elipse. Si el astro central es la Tierra se le llama apogeo, si el astro central es el Sol recibe el nombre de afelio.

Arco luz.- Ángulo geocéntrico entre las direcciones de los centros del Sol y de la Luna.

Argumento de latitud del pericentro.- Ángulo medido en el plano orbital desde el nodo ascendente hasta el lugar ocupado por el pericentro en el sentido de movimiento del astro.

Ascensión recta.- Ángulo medido en el ecuador desde el equinoccio al punto de corte del círculo horario del astro con el ecuador y en sentido directo.

Se mide en horas, minutos y segundos.

Baricentro.- O centro de masas, es un punto de un sistema de cuerpos que se comporta como si sobre él se aplicara todas las fuerzas externas.

Calendario gregoriano.- Se compone de años normales de 365 días y años bisiestos de 366. Son años bisiestos los que expresados en la era cristiana son divisibles entre cuatro. Aquellos años centenarios (terminados en dos ceros) cuyas restantes cifras no sean divisibles entre 4 dejan de ser bisiestos. Es decir que en 400 años 3 años que deberían ser bisiestos por la regla juliana dejan de serlo.

Calendario juliano.- Se compone de años normales de 365 días y años bisiestos de 366. Los días bisiestos se colocan los años de la era cristiana que son divisibles entre 4.

Cénit.- Punto situado sobre la vertical del lugar.

Centro de masas.- O baricentro es un punto de un sistema de cuerpos que se comporta como si sobre él se aplicara todas las fuerzas externas al sistema.

Círculo de latitud.- Es un círculo máximo de la esfera celeste perpendicular a la eclíptica y que por lo tanto pasa por los polos norte y sur eclípticos.

Círculo horario.- Es un círculo máximo perpendicular al ecuador y que por lo tanto pasa por el norte y sur geográficos.

Coefficiente de extinción.- Parámetro que mide la extinción atmosférica. Toma valores comprendidos entre 0,11 a 0,42.

Coordenadas eclípticas.- Son las relativas al sistema formado por el plano eclíptico y el equinoccio, es decir la latitud eclíptica y la longitud eclíptica.

Coordenadas ecuatoriales.- Son las relativas al sistema formado por el plano ecuatorial y el equinoccio, es decir la ascensión recta y la declinación.

Coordenadas geocéntricas.- Son las coordenadas medidas desde el centro de la Tierra.

Coordenadas horizontales.- Son las relativas al sistema formado por el plano del horizonte y un punto cardinal, es decir la altura y el acimut.

Coordenadas topocéntricas.- Son las coordenadas medidas desde el punto de observación sobre la superficie de la Tierra.

Conjunción.- Posición en que se encuentran dos astros que tienen la misma longitud eclíptica.

Cuadratura.- Posición que ocupan dos astros cuyas longitudes eclípticas se diferencian por 90 o 270 grados.

Cuarto creciente.- Posición caracterizada porque la diferencia entre las longitudes eclípticas aparentes de la Luna y el Sol es de 90°.

Cuarto menguante.- Posición caracterizada porque la diferencia entre las longitudes eclípticas aparentes de la Luna y el Sol es de 270°.

Declinación.- Ángulo medido desde el centro de un astro hasta el ecuador a través de su círculo horario. La declinación se toma positiva si el astro está en el hemisferio norte y negativa en caso contrario.

Depresión del horizonte.- Efecto que se produce cuando la observación

es realizada a cierta altura sobre el nivel de la superficie terrestre.

Desigualdad paraláctica.- Perturbación de la longitud de la Luna que tiene el periodo de un mes sinódico y un valor máximo de 125,5 segundos de arco.

Día juliano.- Son los días transcurridos desde las 12 horas del día 1 de enero del año -4713. Utilizamos días julianos medidos en tiempo universal (*JD*) y días julianos medidos en tiempo terrestre (*JDT*).

Distancia focal.- Para el caso de una elipse es la distancia desde el centro de la elipse a uno de sus focos.

Eclíptica.- Es el plano donde se encuentra el centro del Sol, el baricentro Tierra-Luna y su vector velocidad. Como los cálculos se hacen con referencia al centro de la Tierra, se toma la eclíptica como un plano que siendo paralelo al anteriormente definido pasa por el geocentro.

Ecuación anual.- Perturbación de la longitud de la Luna que tiene un periodo de un año y un valor máximo de 11,1 minutos de arco.

Ecuación del centro.- Desarrollo en serie de potencias de la excentricidad, diferencia entre la anomalía verdadera y la anomalía media.

Ecuador celeste.- Es el plano normal al eje instantáneo de rotación de la Tierra.

Ecuación de los equinoccios.- Es la diferencia entre el tiempo sidéreo verdadero y el tiempo sidéreo medio.

Ecuación de Kepler.- Ecuación que permite determinar la anomalía excéntrica en función de la anomalía media.

Equinoccios.- Momento en que la longitud eclíptica aparente del Sol es 0° (equinoccio de primavera) o 180° (equinoccio de otoño).

Equinoccio medio.- Es el punto de corte entre el ecuador medio (es decir sólo afectado por la precesión) y la eclíptica media o nodo ascendente del ecuador medio respecto a la eclíptica media.

Equinoccio verdadero.- Es el punto de corte entre el ecuador verdadero y la eclíptica media o nodo ascendente entre el ecuador verdadero y la eclíptica media.

Época J2000.0.- Las 12 horas de tiempo universal del día 1 de enero de 2000.

Época JT2000.0.- Las 12 horas de tiempo terrestre del día 1 de enero de 2000.

Evección.- Perturbación de la longitud de la Luna que tiene un periodo de 31,81 días y un valor máximo de 1,2739 grados.

Excentricidad.- Medida del achatamiento de la elipse que describe un astro, calculada haciendo el cociente entre la distancia focal de la elipse y su semieje mayor.

Extinción atmosférica.- Es el debilitamiento que experimenta la luz al pasar por la atmósfera.

Fase.- Cociente entre el área iluminada del disco lunar y su área total.

Horizonte.- Es el plano perpendicular a la vertical de un lugar sobre la Tierra.

Inclinación de la órbita.- Ángulo formado entre los planos orbital y eclíptico.

Latitud eclíptica.- Ángulo medido en el círculo de latitud del astro desde la posición que ocupa hasta el punto de corte con la eclíptica. Toma el valor positivo si está en el hemisferio norte y negativo si está en el hemisferio sur.

Latitud geocéntrica.- Es el ángulo formado por el radio vector que une el punto sobre la Tierra y su centro con el plano del ecuador. Se toma positiva cuando el punto está en el hemisferio norte, en caso contrario es negativa.

Latitud geográfica.- Es el ángulo formado por la vertical del lugar y el plano del ecuador. Se toma positiva para puntos situados en el hemisferio norte y negativa en caso contrario.

Longitud celeste.- Es un ángulo medido en dos planos: desde el equinoccio hasta el nodo ascendente medido en la eclíptica y desde este punto al lugar donde se encuentra el astro medido por el plano orbital y en el sentido del movimiento del astro.

Longitud aparente.- Longitud de un astro considerando la aberración y la nutación.

Longitud baricéntrica.- Longitud medida desde el baricentro del sistema Tierra-Luna.

Longitud eclíptica.- Es el ángulo medido por la eclíptica desde el equinoccio al punto de corte del círculo de latitud del astro con la eclíptica en el sentido directo.

Longitud geocéntrica.- Longitud medida desde el centro de la Tierra.

Longitud geográfica.- Ángulo medido por el ecuador terrestre desde el primer meridiano (meridiano de Greenwich) hasta el punto de corte del meridiano del punto sobre la Tierra con el ecuador. Se toma positiva si está situada al oeste del primer meridiano y negativa si el punto sobre la Tierra está al este.

Longitud geométrica.- Longitud de un astro sin tener en cuenta ni la aberración ni la nutación.

Longitud media.- Longitud de un astro desprovista de sus variaciones seculares y considerando exclusivamente su variación secular.

Longitud del nodo ascendente.- Ángulo medido en la eclíptica desde el equinoccio al nodo ascendente en el sentido directo.

Longitud del pericentro.- Ángulo medido en dos planos: desde el equinoccio al nodo ascendente a través de la eclíptica y desde el nodo ascendente al punto ocupado por el pericentro a través del plano orbital y en el sentido del movimiento del astro.

Luna nueva.- Posición caracterizada porque son iguales las longitudes eclípticas aparentes del Sol y de la Luna.

Luna llena.- Posición caracterizada porque hay una diferencia de 180° entre las longitudes eclípticas aparentes del Sol y de la Luna.

Masa reducida.- Es el cociente entre el producto de las dos masas de un sistema de dos cuerpos y la suma de sus masas.

Mes anomalístico.- Tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos

de la Luna por su pericentro.

Mes sidéreo.- Tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de la Luna por el equinoccio fijo (es decir, no afectado ni por la precesión ni por la nutación).

Mes sinódico.- Tiempo transcurrido entre dos conjunciones consecutivas del Sol y la Luna.

Mes trópico.- Tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos de la Luna por el equinoccio.

Nodo ascendente.- Punto de corte de la órbita de un astro con la eclíptica cuando el astro va del hemisferio sur al norte.

Nadir.- Punto situado abajo de la vertical del lugar y en oposición al cénit.

Nutación.- Es un movimiento elíptico del eje de rotación terrestre que se realiza conjuntamente con el movimiento de precesión. A resultas de la nutación el equinoccio verdadero se ve afectado de un movimiento de oscilación respecto al equinoccio medio (nutación en longitud) y la oblicuidad de la eclíptica adquiere un movimiento también periódico respecto a su valor medio (nutación en oblicuidad).

Oblicuidad de a eclíptica.- Ángulo formado entre el plano de la eclíptica y el ecuador. La oblicuidad media de la eclíptica es la que sólo tiene en consideración la variación su variación secular y se reserva el nombre de oblicuidad verdadera cuando es corregida por la nutación en oblicuidad.

Oposición.- Posición que ocupan dos astros cuyas longitudes eclípticas tienen una diferencia de 180°.

Paralaje.- Es la desviación angular de un objeto cuando se observa desde puntos diferentes.

Paralaje horizontal ecuatorial.- Ángulo con el que se ve el radio ecuatorial de la Tierra observado desde un astro que se encuentra en el horizonte.

Pericentro.- Punto de una órbita elíptica más cercano al foco de la elipse. Si el astro central es la Tierra se le llama perigeo, si el astro central es el Sol recibe el nombre de perihelio.

Precesión de los equinoccios.- Es un movimiento del eje de rotación terrestre que describe un movimiento cónico de centro en la Tierra y que se percibe como un movimiento secular del equinoccio en sentido retrógrado.

Ocaso.- Momento en que se observa como el limbo superior de un astro desaparece en el horizonte.

Orto.- Momento en que se observa como el limbo superior de un astro aparece en el horizonte.

Radio ecuatorial de la Tierra.- Es el mayor radio del elipsoide terrestre o el radio del círculo ecuatorial.

Radio polar de la Tierra.- Es el menor radio del elipsoide terrestre o distancia desde su centro a uno de los polos.

Reducción a la eclíptica.- Operación que consiste en calcular la longitud eclíptica de un astro conocida su longitud.

Refracción atmosférica.- Trayectoria curva que sigue un rayo luminoso

a su paso por la atmósfera a consecuencia de la variación del índice de refracción.

Semidiámetro.- Ángulo con el que es observado desde el centro de la Tierra la mitad del diámetro de un astro.

Semidiámetro topocéntrico.- Ángulo con el que es observado desde una posición sobre la superficie terrestre la mitad del diámetro de un astro.

Semieje mayor.- En el caso de una elipse es su diámetro más largo.

Semieje menor.- En el caso de una elipse es su diámetro menor.

Siglos julianos.- Periodo de tiempo de 36525 días o sea 100 años julianos de una duración media de 365,25 días. Puede venir expresado en tiempo universal o en tiempo terrestre.

Solsticios.- Momento en que la longitud eclíptica aparente del Sol es 90° (solsticio de verano) o 270° (solsticio de invierno).

Tiempo sidéreo medio.- Es el ángulo horario del equinoccio medio, es decir del equinoccio afectado por la precesión pero no por la nutación. Se mide en horas, minutos y segundos.

Tiempo sidéreo verdadero.- Es el ángulo horario del equinoccio verdadero. Se mide en horas, minutos y segundos.

Tiempo terrestre.- Es una escala de tiempo universo que materializa su medida por los relojes atómicos.

Tiempo universal.- Es el ángulo horario del Sol medio aumentado en 12 horas.

Tránsito.- Momento en que el centro de un astro pasa por el meridiano superior del lugar.

Variación.- Perturbación de la longitud de la Luna que tiene un periodo de la mitad de un mes sinódico medio y un valor máximo de 39,5 minutos de arco.

Vertical.- Es un círculo máximo perpendicular al horizonte y que contiene al cénit y nadir.

Apéndice E

Valores numéricos

Datos del Sol	
Masa	$1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Radio	$6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$
Paralaje ecuatorial horizontal medio	$8'',794$
Semieje mayor	$149\,597\,870,7 \text{ km}$
Excentricidad a JT2000.0	$0,016\,708\,62$
Longitud pericentro JT2000.0	$282^\circ\,56'\,14'',5$
Año trópico a JT2000.0	$365^d\,5^h\,48^m\,45^s,2$
Año sidéreo a JT2000.0	$365^d\,6^h\,9^m\,9^s,8$
Año anomalístico a JT2000.0	$365^d\,6^h\,13^m\,52^s,5$
Año de primavera a JT2000.0	$365^d\,5^h\,49^m\,1^s,1$
Movimiento medio a JT2000.0	$360^\circ,007\,698 / \text{año}$

Datos de la Tierra	
Masa	$5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Radio ecuatorial	$6378,16 \text{ km}$
Aplanamiento	$1 / 298,25$
Radio polar	$6356,78 \text{ km}$

Datos de la Luna	
Masa	$7,348 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Radio	1738 km
Paralaje ecuatorial horizontal medio	$0^\circ\,57'\,2'',6$
Semieje mayor	$384\,400 \text{ km}$
Excentricidad media	$0,0549''$
Inclinación media de la órbita	$0^\circ\,8'\,43''$
Longitud del pericentro a JT2000.0	$83^\circ\,21'\,11''$
Longitud de nodo ascendente a J2000.0	$125^\circ\,2'\,39'',7$
Mes sinódico a JT2000.0	$29^d\,12^h\,44^m\,2^s,8$
Mes sidéreo a JT2000.0	$27^d\,7^h\,43^m\,11^s,5$
Mes anomalístico a JT2000.0	$27^d\,13^h\,18^m\,33^s,1$
Año trópico a JT2000.0	$27^d\,7^h\,43^m\,4^s,7$
Movimiento medio a JT2000.0	$4\,812^\circ,678\,813 / \text{año}$

Datos varios	
Día juliano de la época JT2000.0	2 451 545
Constante de aberración	20",496
Refracción en el horizonte	34'
Coeficiente para pasar de <i>UT</i> a tiempo sidéreo	1,002 737 90935

Apéndice F

Símbolos

Como regla general las magnitudes identificadas con una primera se refieren a la Luna.

Los valores medios de las magnitudes se representan por el subíndice m .

En la siguiente tabla aparecen los usos más frecuentes de los distintos símbolos.

a	Semieje mayor de la elipse.
a_L	Arco-luz.
a_a	Año anomalístico.
a_p	Año de primavera.
a_S	Año sidéreo.
a_T	Año trópico
A	Acimut geocéntrico.
A_T	Acimut topocéntrico.
α	Ascensión recta geocéntrica.
C	Constante de las áreas.
b	Radio polar de la Tierra.
β	Latitud eclíptica.
D	Separación geocéntrica de la Luna y el Sol.
D_m	Elongación media.
δ	Declinación geocéntrica.
ζ	Ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna respecto al meridiano.
ζ_T	Ángulo de posición del limbo iluminado de la Luna respecto al cénit.
Δ	Elongación.
ΔT	Diferencia entre el tiempo terrestre y el tiempo universal.
$\Delta \psi$	Nutación en longitud.
e	Excentricidad de la elipse.
E_L	Edad de la Luna.
E_H	Iluminación sobre un plano horizontal.
EE	Ecuación de los equinoccios.
ε	Oblicuidad de la eclíptica.
η'	Argumento de la Luna.

f	Aplanamiento de la Tierra. Altura del lugar de observación sobre la superficie terrestre.
h	Altura geocéntrica sobre el horizonte.
h_T	Altura topocéntrica sobre el horizonte.
φ	Latitud geográfica.
ϕ'	Latitud geocéntrica.
H	Ángulo horario.
H_0	Ángulo horario del orto u ocaso.
i	Inclinación de la órbita.
I	Iluminación.
J2000.0	Época que comienza a las 12 horas de UT del 1 de enero de 2000.
JT2000.0	Época que comienza a las 12 horas de TT del 1 de enero de 2000.
JD	Día juliano en unidades de tiempo universal.
JDT	Día juliano en unidades de tiempo terrestre.
K	Constante de aberración.
k	Coeficiente de extinción. Constante gravitatoria $k = Gmm'$. Fase lunar.
l	Longitud eclíptica.
L	Longitud celeste. Momento angular.
λ	Longitud geográfica.
n	Movimiento medio. Índice de refracción.
m	Masa. Magnitud estelar.
m_S	Masa del Sol. Mes sinódico.
m_a	Mes anomalístico.
m_{sd}	Mes sidéreo.
m_t	Mes trópico
M	Anomalía media.
μ	Masa reducida.
P	Función perturbativa.
ω	Argumento de latitud del pericentro. Ancho de la zona iluminada de la Luna.
$\bar{\omega}$	Longitud del pericentro.
Ω	Longitud del nodo ascendente.
p	Precesión general en longitud.
π	Paralaje ecuatorial horizontal.
R	Radio ecuatorial de la Tierra.
R_T	Refracción atmosférica total.

R_S	Radio del Sol.
r	Distancia del centro de la Tierra al centro del Sol
r'	Distancia del centro de la Tierra al centro de la Luna
r''	Distancia del centro de la Luna al centro del Sol.
r_T	Distancia topocéntrica de un astro.
R	Aceleración perturbativa radial.
ρ	Cociente entre la distancia del centro de la Tierra a un punto de la superficie entre el radio ecuatorial terrestre.
s	Semidiámetro.
S	Aceleración perturbativa perpendicular.
σ	Ángulo de aberración.
T	Siglos julianos transcurridos desde J2000.0 o JT2000. Aceleración perturbativa normal. Periodo.
T_m	Tiempo sidéreo medio.
T_v	Tiempo sidéreo verdadero.
TT	Tiempo terrestre.
UT	Tiempo universal.
X	Air-mass.
χ	Anomalía excéntrica. Ángulo de fase.
χ_T	Ángulo de fase topocéntrico.
z	Distancia cenital geocéntrica.
z_T	Distancia cenital topocéntrica.
θ	Anomalía verdadera.

