L'algèbre de Clifford matriciel

A.Balan

May 29, 2018

1 L'algèbre de Clifford

Une algèbre de Clifford est définie pour un espace vectoriel de base e_i par les relations :

$$e_i^2 = -1$$

et

$$e_i e_j = -e_j e_i$$

dès que $i \neq j$.

2 L'algèbre de Clifford matriciel

On considère les matrices $M_n(\mathbf{R})$, on a le produit des matrices et le produit tensoriel dans l'algèbre, de sorte que les relations deviennent :

$$A \otimes B + B \otimes A + AB + BA = -2tr(A^*B)Id$$

avec tr la trace et $*$ la transposition des matrices, Id est la matrice unité.

3 L'inverse d'une matrice

Pour une martice non nulle, on a un inverse :

$$A \otimes A = -tr(A^*A)Id - A^2$$

pour $B = A$. La matrice à droite est inversible car $1 - e$ est inversible dès que $N(e) < 1$, avec N la norme de e. On considère le produit tensoriel de matrices qui forment un monoide. Le groupe Pin est le groupe de Grothendieck de ce monoide; c'est un groupe de Lie de dimension finie car l'algèbre de Clifford est de dimension finie.

References

[F] T.Friedrich, "Dirac operators in Riemannian Geometry", Graduate Studies in Mathematics vol 25, AMS, 2000.