Algorithme de Collatz

Considérons un nombre entier positif impair A, multiplions ce nombre A par 3, 3A est obligatoirement impair. Ajoutons 1 à 3A pour faire 3A + 1 ; le nombre 3A + 1 est obligatoirement pair et donc divisible par 2, puis ce nombre est éventuellement divisible par 2, puis éventuellement divisible par 2…………… ; nous obtenons un nombre impair B. Appelons T la transformation qui fait passer A vers B

Que devient le nombre 1 après une première transformation T ?
Si A = 1, après une transformation T, B $= (3 + 1)/2^p = 4/2^p$; le nombre B ne peut être que 1
Il en résulte qu'après 1 ou plusieurs transformations, le nombre 1 reste égal à 1

Pour que tout nombre A se transforme en 1 , il faut d'une part qu'après 1 ou plusieurs transformations, chaque nombre différent de 1 génère un nombre toujours différent de lui-même (pour éviter un bouclage). Il faut d'autre part que ces transformations dans leur ensemble soient réductrices, c'est à dire que les nouveaux nombres ne soient pas de plus en plus grands (qui tendraient vers l'infini) mais de plus en plus petits.(qui tendent vers 1).

1 Après transformation, le nouveau nombre est-il différent ?

11) Première transformation

Appelons T_1 la première transformation qui fait passer A vers B
Après la transformation T_1, le nombre impair A est transformé en nombre impair $B = (3A + 1)/2^p$.
(p est un nombre entier positif différent de 0)

Pour que B = A, nous devons avoir $(3A + 1)/2^p = A$ puis $2^p = 3 + 1/A$
Avec A entier positif, nous avons $3 < (3 + 1/A) <= 2^2$, le nombre 2 étant premier, 2^p ne peut pas être divisé que 2 ou 2^2 ou .... ou 2^{p-1}; il faut donc que $(3 + 1/A) = 2^2$, puis A = 1, puis B = 1

Après 1 transformation , B ne peut être égal à A qu'avec A = 1.

12 Après 2 transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T_2 la deuxième transformation qui fait passer B vers C.
Après la transformation T_2 , le nombre impair $B = (3A + 1)/2^p$, est transformé en nombre impair $C = (3B + 1)/2^q$
(p et q sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que C = A, nous devons avoir $A = (3B + 1)/2^q$
Puis $AB = [(3A + 1)/2^p][(3B + 1)/2^q]$, qui en simplifiant nous donne $2^{p+q} = (3 + 1/A)(3 + 1/B)$.
Avec A et B entiers positifs, nous avons $3 < (3 + 1/A) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/B) <= 2^2$; le nombre 2 étant premier, 2^{p+q} ne peut pas être divisé que 2 ou 2^2 ou 2^3 ou........ ou 2^{p+q-1}; il faut donc que $(3 + 1/A) = 2^2$ et $(3 + 1/B) = 2^2$, puis A = B = 1, puis C = 1

Après 2 transformations , C ne peut être égal à A qu'avec A = 1.

13 Après 3 transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T_3 la troisième transformation qui fait passer C vers D.
Après la transformation T_3 , le nombre impair C, est transformé en nombre impair $D = (3C + 1)/2^r$
(p, q et r sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que D = A, nous devons avoir $A = (3C + 1)/2^r$
Puis $ABC = [(3A + 1)/2^p][(3B + 1)/2^q][(3C + 1)/2^r]$, qui en simplifiant nous donne $2^{p+q+r} = (3 + 1/A)(3 + 1/B)(3 + 1/C)$.
Avec A, B et C entiers positifs, nous avons $3 < (3 + 1/A) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/B) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/C) <= 2^2$; le nombre 2 étant premier, 2^{p+q+r} ne peut pas être divisé que 2 ou 2^2 ou 2^3 ou..... ou $2^{p+q+r-1}$; il faut donc que $(3 + 1/A) = 2^2$, $(3 + 1/B) = 2^2$ et $(3 + 1/C) = 2^2$, puis
A = B = C = 1, puis D = 1

Après 3 transformations , D ne peut être égal à A qu'avec A = 1.

Algorithme de Collatz

1n Après n transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T_n la transformation qui fait passer L vers M.
Après la transformation T_n , le nombre impair L, est transformé en nombre impair $M = (3L + 1)/2^y$
(p, q,..........., x et y sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que M = A, nous devons avoir $M = (3L + 1)/2^y$
Puis ABC..............$L = [(3A + 1)/2^p][(3B + 1)/2^q]$................................$[(3L + 1)/2^y]$, qui en simplifiant nous donne
$2^{p + q + \ldots\ldots y} = (3 + 1/A)(3 + 1/B)\ldots\ldots\ldots(3 + 1/L)$.
Avec A, B, C .... et L entiers positifs, nous avons $3 < (3 + 1/A) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/B) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/C) <= 2^2$, …..................... et $3 < (3 + 1/L) <= 2^2$; le nombre 2 étant premier, $2^{p + q + \ldots\ldots + y}$ ne peut pas être divisé que 2 ou 2^2 ou 2^3 ou..... ou $2^{p + q + \ldots\ldots + y - 1}$; il faut donc que $(3 + 1/A) = 2^2$, $(3 + 1/B) = 2^2$, $(3 + 1/C) = 2^2$, …..................... et $(3 + 1/L) = 2^2$, puis A = B = C =....................... = L= 1 et M = 1

Après n transformations , M ne peut être égal à A qu'avec A = 1.

1n+1 Après n + 1 transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T_{n+1} la transformation qui fait passer M vers N.
Après la transformation T_{n+1} , le nombre impair M, est transformé en nombre impair $N = (3M + 1)/2^z$
(p, q,......... y et z sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que N = A, nous devons avoir $N = (3M + 1)/2^z$
Puis ABC..............$LM = [(3A + 1)/2^p][(3B + 1)/2^q]$................................$[(3L + 1)/2^y][(3M + 1)/2^z]$, qui en simplifiant nous donne $2^{p + q + \ldots\ldots y + z} = (3 + 1/A)(3 + 1/B)\ldots\ldots\ldots(3 + 1/L)(3 + 1/M)$.
Avec A, B, C .... et M entiers positifs, nous avons $3 < (3 + 1/A) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/B) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/C) <= 2^2$, …..................... et $3 < (3 + 1/L) <= 2^2$ et $3 < (3 + 1/M) <= 2^2$; le nombre 2 étant premier, $2^{p + q + \ldots\ldots + z}$ ne peut pas être divisé que 2 ou 2^2 ou 2^3 ou..... ou $2^{p + q + \ldots\ldots + z - 1}$; il faut donc que $(3 + 1/A) = 2^2$, $(3 + 1/B) = 2^2$, $(3 + 1/C) = 2^2$, …..................... et $(3 + 1/M) = 2^2$, puis A = B = C =....................... = M = 1 et N = 1

Après n + 1 transformations , N ne peut être égal à A qu'avec A = 1.

2 Après plusieurs transformations, les nouveaux nombres sont-il différents ?

Nous avons démontré qu'après 1 transformation, le nombre transformé ne peut être égal au nombre d'origine que si ce nombre est égal à 1.
Nous avons démontré qu'après 2 transformations, le nombre transformé ne peut être égal au nombre d'origine que si ce nombre est égal à 1.
Nous avons démontré qu'après 3 transformations, le nombre transformé ne peut être égal au nombre d'origine que si ce nombre est égal à 1.
Nous avons démontré qu'après n transformations, le nombre transformé ne peut être égal au nombre d'origine que si ce nombre est égal à 1.
Nous avons démontré qu'après n + 1 transformations, le nombre transformé ne peut être égal au nombre d'origine que si ce nombre est égal à 1.
Il en résulte que quelle que soit la quantité de transformations , un nombre A génère toujours un nombre différent, sauf le nombre 1 qui reste égal à 1.

3 Après transformations, les nouveaux nombres sont-ils croissants ou décroissants?

Sachant que le nombre obtenu après chaque transformation est différent de chacun des autres nombres précédents (sauf le nombre 1 qui reste égal à 1), il en résulte qu'après plusieurs transformations, un nombre entier impair quelconque A ne peut tendre que vers l'infini ou vers le nombre 1 qui reste égal à 1..

Le nombre A est un nombre entier impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ……..

Le nombre (3A + 1)/2 est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, …………………, la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, …………………).

Le nombre (3A + 1)/4 est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37,40, 43, 46, …………………, la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, …………………)..

Le nombre (3A + 1)/8 est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, …………………, la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, …………………).

Le nombre (3A + 1)/16 est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37,40, 43, 46, …………………, la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, …………………)..

………
………
………
………

En conclusion si A est un nombre impair, les possibilités de division des différents nombres pairs 3A + 1 par 2 sont 1 première fois par 2, puis 1 fois sur 2 par 2, puis 1 fois sur 4 par 2, puis 1 fois sur 8 par 2, puis 1 fois sur 16 par 2, puis 1 fois sur 32 par 2, puis …………….

Sur x nombres impairs équirépartis à partir de 1, (x étant un nombre suffisamment grand pour être significatif), les possibilités de division par 2 sont :
(x + x/2 + x/4 + x/8 + x/16 + x/32 + x/64 + ……………….)/x = 2

Après n transformations (n étant un nombre suffisamment grand pour être significatif), les nombres obtenus après multiplication par 3 et rajout de 1 sont donc divisés 1 ou plusieurs fois par 2, mais en moyenne 2 fois par 2 ; en conséquence les nombres (3A + 1) ou (3B + 1) ou (3C + 1) ou (3D + 1) …………sont divisés en moyenne par 2^2.

Considérons un nombre impair , la transformation est l'opération qui consiste à le multiplier par 3, puis à ajouter le nombre 1, puis à le diviser par 2 puis éventuellement plusieurs fois par 2 pour qu'il redevienne impair.
Après n transformations (avec n très très grand), le nombre impair A tend vers :
……..$[(3/2^2)[(3/2^2)[(3/2^2)[(3/2^2)[(3/2^2)[(3/2^2)[(3A/2^2) + 1/2^2] + 1/2^2] + 1/2^2] + 1/2^2] + 1/2^2] + 1/2^2] + 1/2^2]$……..…..

ou…………….…....(3/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4)A + (1/4) + (1/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(3/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4) + (1/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4) (3/4)(3/4) + ………………
ou $(3/4)^nA + (1/4)[1 + 3/4 + (3/4)(3/4) + (3/4)(3/4)(3/4) + (3/4)(3/4)(3/4)(3/4) + (3/4)(3/4)(3/4)(3/4)(3/4) +$………….$+ (3/4)^{n-1}]$
.
ou $(3/4)^nA + (1/4)[1 - (3/4)^n]/[1 - (3/4)]$ ou $(3/4)^nA + 1 – (3/4)^n$

Après plusieurs transformations, cette expression tend vers 1, puis A tend donc vers 1 ; l'algorithme est donc réducteur, et aucun nombre ne peut tendre vers l'infini.

4 Après transformations, plusieurs nombres se transforment en 1

2^2 = 4 est multiple de 3, plus1 .
2^4 = 4 *4 est le produit de multiples de 3, plus1 ; est aussi multiple de 3, plus1.
2^6 = 4 ***4***4 est le produit de multiples de 3, plus1 ; est aussi multiple de 3, plus1.
…..
…..
2^u = 4 *4*...............*4*4 est le produit de multiples de 3, plus1 ; est aussi multiple de 3, plus1.
2^{u+1} = 4 *4*...............*4*4*4 est le produit de multiples de 3, plus1 ; est aussi multiple de 3, plus1.
Il en résulte que toutes les puissances paires de 2 sont des multiples de 3, plus1 ; puis tous les nombres entiers de la forme $(2^{2a} – 1)$ divisés par 3, comme 5, 21, 85, 341, 1349,…………se transforment en 1.

5 Conclusion

Nous avons vu que quel que soit la quantité de transformations, un nombre A génère toujours un nombre différent sauf le nombre 1 qui reste égal à 1.
Nous avons vu qu'après plusieurs transformations, les nouveaux nombres ne tendent pas vers l'infini mais vers 1, nous savons qu'une multitude de nombres entiers se transforment en 1. Il en résulte qu'après transformation tout nombre devient égal à 1.

L'algorithme de COLLATZ transforme tout entier naturel en un nombre égal à 1