

## Algorithme de Collatz

Considérons un nombre entier positif impair A, multiplions ce nombre A par 3, 3A est obligatoirement impair. Ajoutons 1 à 3A pour faire 3A + 1 ; le nombre 3A + 1 est obligatoirement pair et donc divisible par 2, puis ce nombre est éventuellement divisible par 2, puis éventuellement divisible par 2..... ; nous obtenons un nombre impair B. Appelons T la transformation qui fait passer A vers B

Que devient le nombre 1 après une première transformation T ?

Si A = 1, après une transformation T,  $B = (3 + 1)/2^p = 4/2^p$  ; le nombre B ne peut être que 1

Il en résulte qu'après 1 ou plusieurs transformations, le nombre 1 reste égal à 1

Pour que tout nombre A se transforme en 1, il faut d'une part qu'après 1 ou plusieurs transformations, chaque nombre différent de 1 génère un nombre toujours différent de lui-même (pour éviter un bouclage). Il faut d'autre part que ces transformations dans leur ensemble soient réductrices, c'est à dire que les nouveaux nombres ne soient pas de plus en plus grands (qui tendraient vers l'infini) mais de plus en plus petits. (qui tendent vers 1).

### 1 Après transformation, le nouveau nombre est-il différent ?

#### 1.1) Première transformation

Appelons T<sub>1</sub> la première transformation qui fait passer A vers B

Après la transformation T<sub>1</sub>, le nombre impair A est transformé en nombre impair B = (3A + 1)/2<sup>p</sup>.

(p est un nombre entier positif différent de 0)

Pour que B = A, nous devons avoir (3A + 1)/2<sup>p</sup> = A puis A = 1 / (2<sup>p</sup> - 3)

Avec A entier positif impair et p entier positif, cette relation ne peut être vérifiée qu'avec A = 1 et 2<sup>p</sup> = 4

Après 1 transformation, B ne peut être égal à A que pour A = 1.

#### 1.2 Après 2 transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T<sub>2</sub> la deuxième transformation qui fait passer B vers C.

Après la transformation T<sub>2</sub>, le nombre impair B, est transformé en nombre impair C = (3B + 1)/2<sup>q</sup> qui avec B = (3A + 1)/2<sup>p</sup>, nous donne C = ((9A + 3)/2<sup>p</sup> + 1)/2<sup>q</sup>.

(p et q sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que C = A, nous devons avoir ((9A + 3)/2<sup>p</sup> + 1)/2<sup>q</sup> = A puis A = (3 + 2<sup>p</sup>)/(2<sup>p+q</sup> - 9)

Si C = A, après une autre transformation le nombre C se transforme en D égal à B ; nous avons donc

D = ((9B + 3)/2<sup>q</sup> + 1)/2<sup>p</sup> = B puis B = (3 + 2<sup>q</sup>)/(2<sup>q+p</sup> - 9).

La différence A - B est égale à (3 + 2<sup>p</sup>)/(2<sup>p+q</sup> - 9) - (3 + 2<sup>q</sup>)/(2<sup>q+p</sup> - 9) = (2<sup>p</sup> - 2<sup>q</sup>)/(2<sup>p+q</sup> - 9)

(2<sup>p</sup> - 2<sup>q</sup>) qui est la différence entre 2 nombres entiers pairs ne peut être que paire ou nulle.

(2<sup>p+q</sup> - 9) qui est la différence entre 1 nombre entier pair et 1 nombre entier impair ne peut être qu'impair et jamais égale à 0.

(2<sup>p</sup> - 2<sup>q</sup>) ne peut donc être divisible par (2<sup>p+q</sup> - 9) que pour (2<sup>p</sup> - 2<sup>q</sup>) = 0 qui donne A = B.

Nous avons vu au paragraphe 1.1, qu'après une transformation seul le nombre A = 1 se transforme en B = 1 et donc 2<sup>p</sup> = 2<sup>q</sup> = 4 qui vérifie (2<sup>p</sup> - 2<sup>q</sup>) = 0

Après 2 transformations, C ne peut être égal à A que pour A = 1.

#### 1.3 Après 3 transformations, le nouveau nombre est-il différent ?

Appelons T<sub>3</sub> la troisième transformation qui fait passer C vers D.

Après la transformation T<sub>3</sub>, le nombre impair C, est transformé en nombre impair D = (3C + 1)/2<sup>r</sup> qui avec C = (3B + 1)/2<sup>q</sup> et B = (3A + 1)/2<sup>p</sup>, nous donne le nombre impair C = ((9A + 3)/2<sup>p</sup> + 1)/2<sup>q</sup>, puis D = (((27A + 9)/2<sup>p</sup> + 3)/2<sup>q</sup> + 1)/2<sup>r</sup>.

(p, q et r sont des nombres entiers positifs différents de 0)

Pour que D = A, nous devons avoir (((27A + 9)/2<sup>p</sup> + 3)/2<sup>q</sup> + 1)/2<sup>r</sup> = A puis A = (9 + 3\*2<sup>p</sup> + 2<sup>p+q</sup>)/(2<sup>p+q+r</sup> - 27)

Si D = A, après une autre transformation le nombre D se transforme en E égal à B ; nous avons donc

E = (((27B + 9)/2<sup>q</sup> + 3)/2<sup>r</sup> + 1)/2<sup>p</sup> = B, puis B = (9 + 3\*2<sup>q</sup> + 2<sup>q+r</sup>)/(2<sup>q+r+p</sup> - 27)

La différence A - B est égale à (9 + 3\*2<sup>p</sup> + 2<sup>p+q</sup>)/(2<sup>p+q+r</sup> - 27) - (9 + 3\*2<sup>q</sup> + 2<sup>q+r</sup>)/(2<sup>q+r+p</sup> - 27) =



## Algorithme de Collatz

puis  $B = (3^n + 3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z}) / (2^{q+r+\dots+z+p} - 3^{n+1})$

La différence  $A - B$  est égale à  $(3^n + 3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) / (2^{p+q+r+\dots+z} - 3^{n+1}) - (3^n + 3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z}) / (2^{q+r+\dots+z+p} - 3^{n+1}) = [(3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) - (3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z})] / (2^{p+q+r+\dots+z} - 3^{n+1})$

$(3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) - (3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z})$  qui est la différence entre 2 nombres entiers pairs ne peut être que paire ou nulle.

$(2^{p+q+r+\dots+z} - 3^{n+1})$  qui est la différence entre 1 nombre entier pair et 1 nombre entier impair ne peut être qu'impair et jamais égale à 0.

$[(3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) - (3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z})]$  ne peut donc être divisible par  $(2^{p+q+r+\dots+z} - 3^{n+1})$  que pour

$[(3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) - (3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z})] = 0$  qui donne  $A = B$ .

Nous avons vu au paragraphe 1<sub>1</sub>, qu'après une transformation seul le nombre  $A = 1$  se transforme en  $B = 1$ , puis après  $n + 1$  transformations  $B$  se transforme en  $C = 1$ , ..... puis en  $N = 1$ ; et donc  $2^p = 2^q = \dots = 2^z = 4$  qui vérifie  $[(3^{n-1} \cdot 2^p + 3^{n-2} \cdot 2^{p+q} + \dots + 3 \cdot 2^{p+q+r+\dots+x} + 2^{p+q+r+\dots+y}) - (3^{n-1} \cdot 2^q + 3^{n-2} \cdot 2^{q+r} + \dots + 3 \cdot 2^{q+r+\dots+x} + 2^{q+r+\dots+y+z})] = 0$

Nous avons vu qu'après 1 transformation,  $B$  ne peut être égal à  $A$  que pour  $A = 1$ , il en résulte que  $A = 1$  se transforme en  $B = 1$ , ..... qui se transforme en  $M = 1$ , qui se transforme en  $N = 1$ ;

Après  $n + 1$  transformations,  $N$  ne peut être égal à  $A$  que pour  $A = 1$

## 2 Après plusieurs transformations, les nouveaux nombres sont-ils différents ?

Nous avons démontré qu'après 1 transformation, le nombre transformé est différent sauf le nombre 1 qui se transforme en nombre 1.

Nous avons démontré qu'après 2 transformations, le nombre transformé est différent sauf le nombre 1 qui se transforme en nombre 1.

Nous avons démontré qu'après 3 transformations, le nombre transformé est différent sauf le nombre 1 qui se transforme en nombre 1.

Nous avons démontré qu'après  $n$  transformations, le nombre transformé est différent sauf le nombre 1 qui se transforme en nombre 1.

Nous avons vérifié qu'après  $n + 1$  transformations, le nombre transformé est différent sauf le nombre 1 qui se transforme en nombre 1.

Il en résulte que quelle que soit la quantité de transformations, un nombre  $A$  génère toujours un nombre différent, sauf le nombre 1 qui reste égal à 1.

## 3 Après transformations, les nouveaux nombres sont-ils croissants ou décroissants ?

Sachant que le nombre obtenu après chaque transformation est différent de chacun des autres nombres précédents (sauf le nombre 1 qui reste égal à 1), il en résulte qu'après plusieurs transformations, un nombre entier impair quelconque  $A$  ne peut tendre que vers l'infini ou vers le nombre 1 qui reste égal à 1..

Le nombre  $A$  est un nombre entier impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, .....

Le nombre  $(3A + 1)/2$  est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, ....., la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, .....

Le nombre  $(3A + 1)/4$  est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, ....., la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, .....

Le nombre  $(3A + 1)/8$  est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, ....., la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, .....

Le nombre  $(3A + 1)/16$  est un nombre entier naturel pair ou impair, il peut prendre les valeurs suivantes : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, ....., la moitié de ces nombres entiers naturels équirépartis à partir de 1, sont divisibles par 2 (4, 10, 16, 22, 28, 34, 40, 46, 52, 58, 64, 70, .....

