On tensors and equations of the electromagnetic field

Yuriy A. Spirichev

The State Atomic Energy Corporation ROSATOM, "Research and Design Institute of Radio-Electronic Engineering" - branch of joint-stock company ″Federal Scientific-Production Center ″Production Association ″Start″ named after Michael V.Protsenko″, Zarechny, Penza region, Russia

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Abstract

It is shown that the electromagnetic field is completely described by an asymmetric tensor of the second rank $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$, which is a four-dimensional derivative of the electromagnetic potential. This tensor can be decomposed into the canonical antisymmetric and the new symmetric EMF tensor. From this tensor, in the form of its complete divergence, the EMF equations follow. One of them is an electromagnetic analog of the Lame equation for an elastic medium. It is shown that the longitudinal waves of the divergence of the vector potential propagate at a speed $\sqrt{2}$ greater than the speed of light and do not have a magnetic component.

Keywords: Electromagnetic field, asymmetric tensor, symmetric tensor, Maxwell equations, longitudinal waves.

О тензорах и уравнениях электромагнитного поля

Юрий А. Спиричев

Государственная корпорация по атомной энергии "Росатом". Научно-исследовательский и конструкторский институт радиоэлектронной техники – филиал АО "Федеральный научно-производственный центр "Производственное объединение "Старт" имени М.В. Проценко"

E-mail: yurii.spirichev@mail.ru

Аннотация

Показано, что электромагнитное поле полностью описывается несимметричным тензором второго ранга $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$, являющимся четырехмерной производной электромагнитного потенциала. Этот тензор можно разложить на канонический антисимметричный и новый симметричный тензоры ЭМП. Из этого тензора, в виде его полной дивергенции, следуют уравнения ЭМП. Одно из них является электромагнитным аналогом уравнения Ламе для упругой среды. Показано, что продольные волны дивергенции векторного потенциала распространяются со скоростью в $\sqrt{2}$ больше скорости света и не имеют магнитной компоненты. Получены отдельные уравнения поперечных и продольных волн ЭМП.

Ключевые слова: Электромагнитное поле, несимметричный тензор, симметричный тензор, уравнения Максвелла, продольные волны.

Содержание

1. Введение

Теоретической основой классической теории электромагнитного поля (ЭМП) являются уравнения Максвелла, обобщающие экспериментальные результаты, полученные к концу 18 века. Развитие классической теории ЭМП привело к его описанию в виде антисимметричного тензора второго ранга, из которого следуют уравнения Максвелла. Эти уравнения сыграли ключевую роль в развитии представлений теоретической физики и оказали сильное влияние на создание специальной теории относительности и других теорий. Уже в начале XX века классическая электродинамика считалась завершенной наукой, и свое дальнейшее развитие теория ЭМП получила в виде квантовой электродинамики. Несмотря на это, в классической теории ЭМП остались отдельные неясные места и спорные вопросы. Например, около ста лет существует проблема Абрагама-Минковского, которая заключается в отсутствии единого мнения о правильном тензоре энергии-импульса взаимодействия ЭМП с веществом, о форме электромагнитного импульса в веществе и существовании электромагнитной силы Абрагама [1-13]. Такое положение приводит к поиску новых тензоров энергии-импульса ЭМП [14-20]. В настоящее время библиография по этой проблеме составляет около 300 работ [21]. Другой проблемой является механизм переноса момента электромагнитного импульса плоской электромагнитной волной [22-32]. Проблема заключается в том, что канонические волновые уравнения ЭМП не описывают этот процесс. До недавнего времени в электродинамике даже отсутствовали волновые уравнения для энергии и импульса ЭМП. Такие уравнения, следующие из нового тензора энергии-импульса и описывающие перенос момента импульса электромагнитной волной, получены в работе [20]. В классической теории ЭМП не всегда выполняется третий закон Ньютона при взаимодействии произвольно движущихся электрических зарядов и непараллельных токов. Это привело к появлению гипотезы о существовании «скалярного (потенциального) магнитного поля» [33], введение которого в электродинамику позволяет обеспечить выполнение третьего закона Ньютона во всех случаях. Реальность скалярного магнитного поля подтверждается в экспериментах по продольному взаимодействию постоянных токов [33-35]. Существует проблема продольных электромагнитных волн в вакууме [36-42], которая заключается в том, что из уравнений Максвелла следует возможность существования продольных волн скалярного электромагнитного потенциала, но экспериментально такие волны обнаружить, пока не удалось.

Наиболее явно неполнота классической электродинамики проявляется в теории плазмы. До настоящего времени отсутствует понимание того, какие электромагнитные силы удерживают заряженные частицы в шаровой молнии, а проблема длительного удержания плазмы в существующих технических установках, несмотря на полувековую интенсивную работу, далека от решения. Поскольку теория взаимодействия зарядов с ЭМП не дает решения задачи, то в этой области физики существуют в основном экспериментальные научные работы. Отсутствует понимание причины существования горячих точек в Z-пинчах, явления магнитного динамо и ряда других плазменных явлений. Перечисленные проблемы требуют обоснованного внимания к основам классической теории ЭМП и к самим уравнениям Максвелла.

Целью настоящей статьи является рассмотрение основ классической теории ЭМП с целью определения возможности устранения существующих в ней дискуссионных вопросов и сближения классической теории с квантовой электродинамикой.

Важным основанием для постановки этой задачи стало мнение автора о том, что описание ЭМП с помощью канонического антисимметричного тензора является неполным и не обеспечивающим математическую корректность введения источников ЭМП в его уравнения. Причиной такого мнения стало следующее. Уравнения Максвелла с источниками поля следуют из канонического антисимметричного тензора ЭМП в виде четырехмерной дивергенции по одному из его индексов, которую приравнивают к источнику поля в виде четырехмерной плотности тока [43]. Но антисимметричный тензор второго ранга имеет дивергенции по каждому из индексов. Эти две дивергенции имеют противоположные знаки, поэтому полная дивергенция антисимметричного тензора ЭМП, как четырехмерного ротора равна нулю и не может иметь источника поля. Поэтому, приравнивание только одной из дивергенций антисимметричного тензора ЭМП к источнику поля математически некорректно.

Обычно антисимметричный тензор ЭМП записывают в форме $F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$, где $\mathbf{A}_\nu$ – четырехмерный электромагнитный потенциал. Первый член этого выражения, представляет собой четырехмерную производную электромагнитного потенциала и является несимметричным тензором второго ранга $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Этот тензор ЭМП можно записать в виде его разложения на симметричный и антисимметричный тензоры $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2$. Первый член этого разложения представляет собой канонический антисимметричный тензор ЭМП $F_{[\mu\nu]} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$, а второй член представляет собой новый симметричный тензор ЭМП $F_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$. Таким образом, полным описанием ЭМП является несимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$. Из этого тензора, в виде его дивергенций, следуют уравнения ЭМП. Поскольку полная дивергенция канонического антисимметричного тензора, как четырехмерного ротора, тождественно равна нулю, то уравнения ЭМП в виде полной четырехмерной дивергенции, следуют из симметричного тензора $F_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$. Этой дивергенции симметричного тензора и следует приписать источники ЭМП в виде зарядов и токов.

В настоящей статье ЭМП и его источники рассматриваются в вакууме. Геометрия пространства-времени принимается в виде псевдоевклидова пространства Минковского в форме (ct, ix, iy, iz) при использовании которой, ковариантные и контравариантные индексы можно не различать. Четырехмерный электромагнитный потенциал определяется как $\mathbf{A}_\nu(\varphi/c, i\mathbf{A})$, где φ и A скалярный и векторный потенциалы ЭМП. Четырехмерная плотность тока определяется как $\mathbf{J}_\nu(\rho \cdot c, i\mathbf{J})$, где ρ и $\mathbf{J}$ плотность электрических зарядов и плотность тока.

2. Несимметричный и симметричный тензоры электромагнитного поля

Несимметричный тензор ЭМП $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$, представляющий собой четырехмерную производную электромагнитного потенциала, запишем в матричном виде:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2}\partial_t \varphi & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_x & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_y & \frac{1}{c} i \cdot \partial_t A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_x \varphi & \partial_x A_x & \partial_x A_y & \partial_x A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_y \varphi & \partial_y A_x & \partial_y A_y & \partial_y A_z \\ -\frac{1}{c} i \cdot \partial_z \varphi & \partial_z A_x & \partial_z A_y & \partial_z A_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

Этот несимметричный тензор можно разложить на антисимметричный и симметричный тензоры $F_{\mu\nu} = F_{[\mu\nu]}/2 + F_{(\mu\nu)}/2$. Антисимметричный тензор ЭМП хорошо известен в электродинамике [43] и здесь его приводить не будем. Запишем симметричный тензор ЭМП $F_{(\mu\nu)}$ в матричном виде:

$$F_{(\mu\nu)} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_x - \partial_x\varphi) & 2\partial_x A_x & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_y - \partial_y\varphi) & (\partial_x A_y + \partial_y A_x) & 2\partial_y A_y & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) \\ \frac{1}{c}i\cdot(\partial_t A_z - \partial_z\varphi) & (\partial_x A_z + \partial_z A_x) & (\partial_y A_z + \partial_z A_y) & 2\partial_z A_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

Канонический антисимметричный тензор ЭМП $F_{[\mu\nu]}$ описывает четырехмерное вращение ЭМП. Тогда по аналогии со сплошной средой симметричный тензор $F_{(\mu\nu)}$ описывает четырехмерную деформацию ЭМП. Члены его диагонали описывают объемную деформацию расширения/сжатия ЭМП, а остальные члены описывают четырехмерные деформации сдвига.

3. Уравнения электромагнитного поля без источников поля

Запишем четырехмерные дивергенции по индексам μ и ν несимметричного тензора $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu$ (ковариантные и контравариантные индексы можно не различать):

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) \text{ и } \partial_\nu F_{\mu\nu} = \partial_\nu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu) \quad (3)$$

Запишем эти уравнения в развернутом виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = 0 \quad (4) \qquad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \quad (6) \qquad -\nabla(\frac{1}{c^2}\partial_t\varphi + \nabla\cdot\mathbf{A}) = 0 \quad (7)$$

Уравнения (4) и (5) представляют собой канонические уравнения Максвелла в калибровке Лоренца $\partial_t\varphi/c^2 + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0$. Уравнения (6) и (7) представляют собой соответственно, производные по времени и пространству калибровочного условия Лоренца. Полную дивергенцию несимметричного тензора ЭМП получим, сложив уравнения (4) и (6), а также (5) и (7):

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t\nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi = 0 \quad (8)$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = 0 \quad (9)$$

Запишем четырехмерные дивергенции по индексам μ и ν симметричного тензора $F_{(\mu\nu)} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu$. Поскольку тензор $F_{(\mu\nu)}$ является симметричным, то эти дивергенции равны:

$$\partial_\mu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) = \partial_\nu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) = 0$$

Записав эти уравнения в развернутом виде, получим два уравнения (8) и (9), полностью описывающие движения ЭМП. Эти два уравнения заменяют канонические уравнения Максвелла в потенциалах:

$$\nabla \cdot (-\nabla\varphi - \partial_t \mathbf{A}) = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \nabla\varphi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2}\partial_t \mathbf{E} + \nabla \times \mathbf{B} = 0$$

Для статического случая уравнение (8) описывает закон Гаусса для электрического поля без источников $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta\varphi = 0$. Уравнение (9) можно записать в виде:

$$\partial_{tt}\mathbf{A} - 2c^2\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + c^2\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\partial_t \nabla\varphi \qquad (10)$$

Это уравнение является электромагнитным аналогом уравнения Ламе (или динамического уравнения Навье-Стокса), известного в линейной теории упругости и описывающего волновое движение сплошной упругой среды [44]:

$$\partial_{tt}\mathbf{U} - \upsilon_1^2 \cdot \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) + \upsilon_2^2 \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{G}$$

где $\mathbf{U}$ - вектор смещения среды, υ_1 – скорость продольных волн, υ_2 – скорость поперечных волн, $\mathbf{G}$ – внешняя сила. Сравнение этого уравнения с уравнением (10) показывает, что скорость продольных волн ЭМП в $\sqrt{2}$ больше скорости поперечных волн, т.е. скорости света. Правая часть уравнения (10) описывает источник волн ЭМП в виде переменного потенциального электрического поля. Таким источником волн ЭМП служит электрический диполь в виде развернутых в пространстве обкладок электрического конденсатора.

Уравнение (8) можно записать в виде:

$$\frac{2}{c^2}\partial_{tt}\varphi - \Delta\varphi = \nabla \cdot (-\partial_t \mathbf{A}) \qquad (11)$$

Это уравнение можно интерпретировать, как волновое уравнение для скалярного электромагнитного потенциала. Из него следует, что волны скалярного электромагнитного потенциала распространяются со скоростью в $\sqrt{2}$ меньше скорости поперечных волн, т.е. скорости света. Источником волн скалярного потенциала служит дивергенция изменяющегося во времени векторного потенциала или дивергенция вихревого электрического поля.

4. Уравнения электромагнитного поля с источниками поля

Поскольку полная четырехмерная дивергенция симметричного тензора может быть не равной нулю, приравняем ее к источнику ЭМП, т.е. к четырехмерной плотности тока $\partial_\mu F_{(\mu\nu)} = \mathbf{J}_\nu$ или $\partial_\mu(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu + \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) = \mathbf{J}_\nu$. Запишем эту полную четырехмерную дивергенцию симметричного тензора $F_{(\mu\nu)}$ с источниками в развернутом виде:

$$2\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\varphi + \partial_t \nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta\varphi = \rho/\varepsilon_0 \tag{12}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{13}$$

Уравнение (12) в статике описывает закон Гаусса для электрического поля с источниками $\nabla\cdot\mathbf{E} = -\Delta\varphi = \rho/\varepsilon$, а уравнение (13) заменяет уравнение полного тока Ампера-Максвелла. Уравнение (13) можно записать в виде:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi - 2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{14}$$

В этой форме записи четвертый член представляет собой ротор магнитного поля, а третий член описывает градиент скалярного магнитного поля, гипотетически введенного Николаевым [33]. Этот член обеспечивает выполнение в электродинамике третьего закона Ньютона при взаимодействии произвольным образом движущихся электрических зарядов и непараллельных токов. Для стационарного случая уравнение (14) можно записать в виде уравнения, описывающего закон Ампера, но в котором присутствует скалярное магнитное поле Николаева:

$$-2\cdot\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) + \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} \tag{15}$$

Возьмем ротор от обеих частей уравнения (13) и получим известное волновое уравнение для магнитного поля:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}(\nabla\times\mathbf{A}) - \Delta(\nabla\times\mathbf{A}) = \mu_0\cdot(\nabla\times\mathbf{J}) \quad \text{или} \quad \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{B} - \Delta\mathbf{B} = \mu_0\cdot(\nabla\times\mathbf{J})$$

Уравнение (13) описывает поперечные и продольные волны ЭМП. Представляют интерес раздельные уравнения для поперечных и продольных волн. Для этого возьмем дивергенцию от обеих частей уравнения (14) и получим уравнение продольных волн дивергенции векторного потенциала:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\nabla\cdot\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\Delta\varphi - 2\cdot\Delta(\nabla\cdot\mathbf{A}) = \mu_0\nabla\cdot\mathbf{J} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2c^2}\partial_{tt}\nabla\cdot\mathbf{A} - \Delta(\nabla\cdot\mathbf{A}) = \mu_0\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t\Delta\varphi$$

Из этого уравнения следует сделанный ранее вывод о том, что скорость продольных волн ЭМП в $\sqrt{2}$ больше скорости света. Из этого уравнения также следует, что в продольных волнах ЭМП отсутствует магнитная компонента и их можно называть электроскалярными волнами. Последнее уравнение, с точностью до ротора произвольного вектора можно записать в виде:

$$\partial_{tt}\mathbf{A} - 2c^2\Delta\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{J} + \partial_t\nabla\varphi \tag{16}$$

Запишем уравнение (13) в виде:

$$\partial_{tt}\mathbf{A} - c^2\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} - 2c^2\Delta\mathbf{A} = c^2\mu_0\cdot\mathbf{J} + \partial_t\nabla\varphi \tag{17}$$

С учетом уравнения (16), исключив из уравнения (17) продольную часть, описывающую продольные волны, получим уравнение поперечных электромагнитных волн, применяемых в радиосвязи:

$$\frac{1}{c^2}\partial_{tt}\mathbf{A} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{A} = \mu_0\cdot\mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\partial_t\nabla\varphi \tag{18}$$

Таким образом, при возбуждении электромагнитных волн в соответствии с уравнением (13), из-за различной скорости распространения продольных и поперечных волн, они пространственно разделяются и описываются раздельными уравнениями (16) и (18).

Рассмотрим пространственный характер поперечного волнового процесса, который определяется вторым членом левой части уравнения (18). Этот член представляет собой двойной ротор векторного потенциала. Из теоремы Стокса следует, что поток ротора вектора через поверхность равен его циркуляции по замкнутому контуру, на который опирается эта поверхность. Следовательно, пространственный член волнового уравнения (18) описывает двойную циркуляцию вектора **A** по замкнутому контуру. Такую пространственную конфигурацию можно представить в форме тороида. Аналогичные пространственные конфигурации известны в газо-гидродинамике и представляет собой устойчивые вихревые образования, так называемые вихревые кольца. В жидком гелии эти вихревые кольца являются квантовыми объектами. Это позволяет надеяться, что уравнение (18) поможет обосновать корпускулярные свойства электромагнитного излучения.

5. Заключение

Таким образом, полным описанием ЭМП является несимметричный тензор второго ранга $F_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathbf{A}_\nu$, являющийся четырехмерной производной электромагнитного потенциала. Этот тензор можно разложить на канонический антисимметричный и новый симметричный тензоры ЭМП. Из этого тензора, в виде его полной дивергенции, следуют уравнения ЭМП.

Канонический антисимметричный тензор электромагнитного поля имеет четырехмерные дивергенции с противоположными знаками по каждому из индексов, поэтому введение источника поля в его дивергенцию только по одному из индексов является некорректным. Полная дивергенция антисимметричного тензора, как четырехмерного ротора, равна нулю и не имеет источника ЭМП. Поскольку ей нельзя приписать источники поля, то их нужно приписать к полной четырехмерной дивергенции симметричного тензора.

Уравнения ЭМП, заменяющие уравнения Максвелла, следуют из симметричного тензора ЭМП. Эти уравнения описывают поперечные и продольные волны ЭМП. Одно из этих уравнений является электромагнитным аналогом уравнения Ламе для упругой среды. Продольные волны не имеют магнитной компоненты и распространяются со скоростью в $\sqrt{2}$ больше скорости света. В уравнение поля, заменяющее уравнение Ампера-Максвелла, входит гипотетическое скалярное магнитное поле, обеспечивающее выполнение третьего закона Ньютона в электродинамике. Получены раздельные уравнения для поперечных и продольных волн ЭМП.

Литература

1. I. Brevik, *Minkowski momentum resulting from a vacuum–medium mapping procedure, and a brief review of Minkowski momentum experiments*, Annals of Physics 377 (2017) 10–21.
2. R. Medina and J. Stephany, *The energy-momentum tensor of electromagnetic fields in matter*, arXiv: 1703.02109.
3. M. G. Silveirinha, *Revisiting the Abraham-Minkowski Dilemma*, arXiv: 1702.05919.
4. J. J. Bisognano, *Electromagnetic Momentum in a Dielectric: a Back to Basics Analysis of the Minkowski-Abraham Debate*, arXiv: 1701.08683.
5. Yu. A. Spirichev, *Electromagnetic energy, momentum and forces in a dielectric medium with losses*, arXiv: 1705.08447.
6. M. E. Crenshaw, *The Role of Conservation Principles in the Abraham--Minkowski Controversy*, arXiv: 1604.01801.
7. C. Wang, *Is the Abraham electromagnetic force physical?*, Optik, (2016) 127, 2887–2889.
8. P. L. Saldanha, J. S. Oliveira Filho, *Hidden momentum and the Abraham-Minkowski debate*, arXiv: 1610.05785.
9. M. Testa, *A Comparison between Abraham and Minkowski Momenta*, Journal of Modern Physics, 2016, 7, 320-328.
10. C.J. Sheppard, B.A. Kemp, Phys. Rev. A 93 (2016) 053832.
11. N. Toptygin, K. Levina, Phys. Usp. **59** 141 (2016)

12. V. V. Nesterenko, A. V. Nesterenko, *Ponderomotive forces in electrodynamics of moving medium: The Minkowski and Abraham approaches*, arXiv: 1604.01708
13. C. Wang, J. Ng, M. Xiao, C.T. Chan, Sci. Adv. 2 (2016) e1501485.
14. M. Abragam, Be. Circ. mat. Palermo **28**, 1 (1909), **31**, 527 (1910).
15. F.J. Belinfante, *Physica* **6**, 887 (1939).
16. L.P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP 12 1008 (1961).
17. V.G. Polevoi, S.M. Rytov, Sov. Phys. Usp. **21** 630 (1978).
18. Yu. N. Obukhov, Ann. Phys. **17** 9/10 830 (2008).
19. V.P. Makarov, A.A. Rukchadze, Phys. Usp. **54** 1285 (2011).
20. Yu. A. Spirichev, *A new form of the energy-momentum tensor of the interaction of an electromagnetic field with a non-conducting medium. The wave equations. The electromagnetic forces*, arXiv: 1704.03815.
21. McDonald K T, *Bibliography on the AbrahamëMinkowski debate* (February 17, 2015, updated September 29, 017), http://physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/ambib.pdf
22. K. S. Vul'fslon, Phys. Usp. 30 724 (1987)
23. V. Sokolov, Phys. Usp. 34 925 (1991)
24. L. Barabanov, Phys. Usp. 36 1068 (1993)
25. R. I. Khrapko, *Energy-momentum Localization and Spin*, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series Physic. 2002, #10(1), p. 35
26. E. Leader and C. Lorce, *The angular momentum controversy: What's it all about and does it matter?* Phys. Rep. 541, 163 (2014).
27. S. M. Barnett, *Rotation of electromagnetic fields and the nature of optical angular momentum*, J. Mod. Opt. 57, 1339 (2010).
28. K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev and F. Nori, *Optical momentum and angular momentum in dispersive media: From the Abraham–Minkowski debate to unusual properties of surface plasmon-polaritons*, arXiv: 1706.05493
29. K. Y. Bliokh, A. Y. Bekshaev and F. Nori, *Optical Momentum, Spin, and Angular Momentum in Dispersive Media*, arXiv: 1706.06406
30. E. Leader, *The photon angular momentum controversy: Resolution of a conflict between laser optics and particle physics*, Phys. Lett. B 756, 303 (2016).
31. Aiello, P. Banzer, M. Neugebauer, and G. Leuchs, *From transverse angular momentum to photonic wheels*, Nature Photon. 9, 789 (2015).
32. D. L. Andrews and M. Babiker, *The Angular Momentum of Light*, (Cambridge University Press, 2013).

33. G.V. Nikolaev, *Non-contradictory electrodynamics. Theories, experiments, paradoxes*, (Tomsk, NTL Publishing, 1997).
34. A.K. Tomilin, *The Fundamentals of Generalized Electrodynamics*, arXiv: 0807.2172..
35. L. Johansson, (1999) *Longitudinal Electrodynamic Forces and Their Possible Technological Applications. Master of Science Thesis*, CODEN: LUTEDX/(TEAT-5027)/1-55/(1996).
36. K. Rebilas, *On the origin of "longitudinal electrodynamics waves*, // Europhys. Lett., 83 (2008) 60007.
37. J. R. Bray, M.C. Britton, *Comment on "Observation of scalar longitudinal electrodynamics waves*" by C. Monstein and J.P. Wesley. // Europhys. Lett. 66 (1) pp.153–154 (2004)
38. C. Monstein, J. P. Wesley, *Observation of scalar longitudinal electrodynamics waves* // Europhys. Lett. 59(4), pp. 514-520 (2002).
39. Arbab I. Arbab1 and Mudhahir Al-Ajm, *The modified electromagnetism and the emergent longitudinal wave*, arXiv: 1403.2687
40. V. Simulik, *Longitudinal electromagnetic waves in the framework of standard classical electrodynamics*, arXiv: 1606.01738.
41. N.P. Khvorostenko, *Longitudinal electromagnetic waves*, Rus. Phys. J., vol. 35, no. 3, pp. 223-227, 1992.
42. G. Miyaji et al, *Intense longitudinal electric fields generated from transverse electromagnetic waves*, Appl. Phys. Lett., vol. 84, no. 19, pp. 3855-3857, 2004.
43. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *The Classical Theory of Fields*, (Oxford: Pergamon Press, 1983)
44. L. D. Landau, E. M. Lifshits, *The Theory of elasticity*, (Oxford: Pergamon Press, 1983)