Zbigniew Osiak

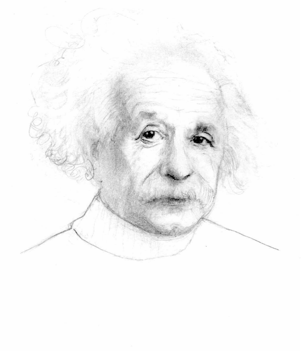
Szczególna Teoria Względności

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym: http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

Zbigniew Osiak

SZCZEGÓLNA TEORIA WZGLĘDNOŚCI

MECHANIKA RELATYWISTYCZNA
POLE ELEKTROMAGNETYCZNE



Matematyka powinna być służącą, a nie królową.

Joli,
mojej żonie poświęcam

Portret (rysunek) Alberta Einsteina zamieszczony na stronie tytułowej
Małgorzata Osiak

Portret autora zamieszczony na okładkach przedniej i tylnej
Rafał Pudło

Wydawnictwo: Self Publishing

ISBN: 978-83-272-3464-3

e-mail: zbigniew.osiak@gmail.com

Linki do moich publikacji naukowych i popularnonaukowych, e-booków oraz audycji telewizyjnych i radiowych są dostępne w bazie ORCID pod adresem internetowym:
http://orcid.org/0000-0002-5007-306X

WSTĘP

Fizycy to poeci nauki tworzący jej awangardę.

Szczególna Teoria Względności przeznaczona jest dla studentów wszystkich uczelni, na których wykładana jest fizyka. Może być przydatna dla nauczycieli fizyki w szkołach średnich. Mam nadzieję, że zostanie wykorzystana również przez zawodowych relatywistów.

Szczególna Teoria Względności jest pierwszą częścią tryptyku, pozostałe dwie to:
• Ogólna Teoria Względności
• Twórcy Teorii Względności

Szczegółowe informacje bibliograficzne, biograficzne oraz ikonograficzne zostały zamieszczone w trzeciej części tryptyku.

Należę do pokolenia fizyków, dla których idolami byli Albert Einstein, Lew Nikołajewicz Landau i Richard P. Feynman. Einstein zniewolił mnie potęgą swej intuicji. Landaua podziwiam za rzetelność, precyzję, elegancję i prostotę wywodów, oraz instynktowne wyczuwanie istoty zagadnienia. Feynman urzekł mnie lekkością narracji i subtelnym poczuciem humoru.

Praca nad tryptykiem zajęła mi sześć lat.

Zbigniew Osiak

Wrocław, wrzesień 2004

SPIS TREŚCI

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKACH SPOCZYWAJĄCYCH

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKACH PORUSZAJĄCYCH SIĘ

MECHANIKA RELATYWISTYCZNA

1 POSTULATY EINSTEINA

- **Postulaty Einsteina**

> - Definicje wielkości fizycznych oraz prawa fizyki można tak sformułować, aby ich ogólne postacie były niezależne od wyboru inercjalnego układu odniesienia.
> - Wartość prędkości fal elektromagnetycznych (światła) w próżni jest we wszystkich inercjalnych układach odniesienia taka sama.

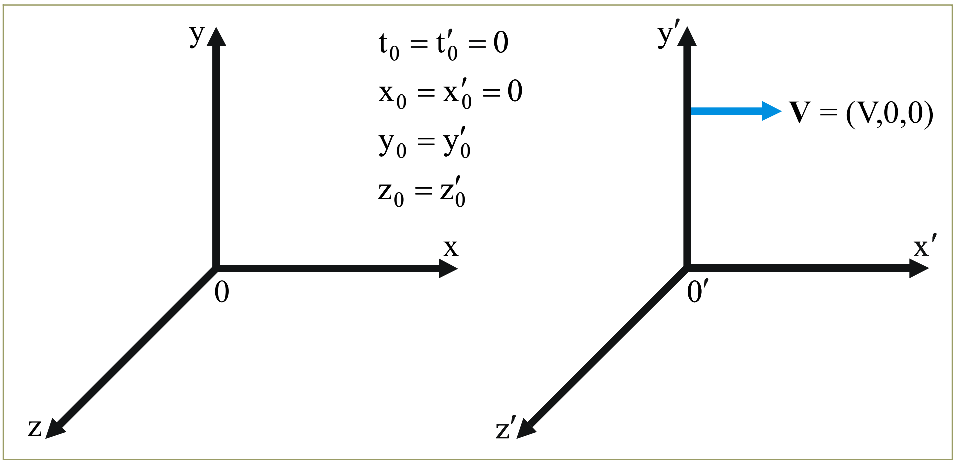
Postulaty Einsteina są równoważne założeniu, że wszystkie równania fizyki w inercjalnych układach odniesienia powinny być kowariantne (współzmiennicze) względem transformacji (przekształceń) Lorentza.

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$



- **Kowariantność (współzmienniczość) równań względem transformacji Lorentza**

Równania są współzmiennicze (kowariantne) względem transformacji Lorentza, jeżeli poddane tej transformacji nie zmieniają swojej postaci. Równanie zapisane w postaci kowariantnej względem transformacji Lorentza ma jednakową postać we wszystkich inercjalnych układach odniesienia pomimo, że wartości danej wielkości fizycznej mogą być różne w różnych układach odniesienia.

Niezmiennikiem (inwariantem) transformacji Lorentza nazywamy funkcję skalarną zachowującą tę samą wartość, gdy w miejsce starych zmiennych podstawimy nowe zmienne.

- **Inwariantność prędkości światła w próżni względem transformacji Lorentza**

Stałość wartości prędkości światła w próżni oznacza istnienie granicznej (nieprzekraczalnej) wartości prędkości rozchodzenia się sygnałów.

Czoło fali elektromagnetycznej w próżni opisywane jest w układzie nieprimowanym i primowanym odpowiednio równaniami:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \quad \text{oraz} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$$

2 TRANSFORMACJE LORENTZA

- **Szczególne transformacje Lorentza o dwóch zmiennych**

Stałość wartości prędkości światła w próżni w dwóch inercjalnych układach odniesienia primowanym i nieprimowanym oznacza, że:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$$

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4$$

$$x' = x_1', \quad y' = x_2', \quad z' = x_3', \quad ict' = x_4'$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Znajdziemy transformację liniową gwarantującą prawdziwość powyższego równania.

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$x_2' = x_2$$

$$x_3' = x_3$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{14}x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= a_{41}x_1 + a_{44}x_4 \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{34} = a_{42} = a_{43} = 0 \\ &a_{22} = a_{33} = 1 \end{aligned}}$$

Wyznaczymy teraz współczynniki a_{11}, a_{14}, a_{41}, a_{44} badanej transformacji.

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = \left(a_{11}x_1 + a_{14}x_4\right)^2 + x_2^2 + x_3^2 + \left(a_{41}x_1 + a_{44}x_4\right)^2$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = \left(a_{11}^2 + a_{41}^2\right)x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \left(a_{44}^2 + a_{14}^2\right)x_4^2 + 2\left(a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44}\right)x_1x_4$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{41}^2 = 1 \\ &a_{44}^2 + a_{14}^2 = 1 \\ &a_{11}a_{14} + a_{41}a_{44} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &a_{11}^2 = a_{44}^2 = 1 - a_{41}^2 = 1 - a_{14}^2 \\ &a_{14} = -a_{41} = iBa_{11} \\ &a_{11} > 0, \quad a_{44} > 0 \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} &a_{11} = a_{44} = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} \\ &a_{14} = -a_{41} = \frac{iB}{\sqrt{1-B^2}} \end{aligned}}$$

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

Znaleziona transformacja nazywana jest szczególną transformacją Lorentza.

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}x_1 + \frac{iB}{\sqrt{1-B^2}}x_4 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \frac{-iB}{\sqrt{1-B^2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}x_4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &x_1' = \text{const} \\ &V = \frac{dx_1}{dt} \\ &ii = -1 \end{aligned}}$$

$$\frac{dx_1'}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}\frac{dx_1}{dt} + \frac{iB}{\sqrt{1-B^2}}\frac{dx_4}{dt}$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}}V + \frac{iB}{\sqrt{1-B^2}}ic$$

$$\boxed{\frac{V}{c} = B}$$

- **Przestrzeń Minkowskiego**

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict$ są współrzędnymi kartezjańskimi punktu (zdarzenia) w czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego (czasoprzestrzeni), w której kwadrat różniczki urojonej odległości między dwoma dowolnie bliskimi punktami dany jest przez

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 = \sum_{\mu=1}^{4} (dx_\mu)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu ,$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$g_{\mu\nu}$ jest tensorem metrycznym przestrzeni Minkowskiego o składowych:

$g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$,

$g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{14} = g_{41} = g_{23} = g_{32} = g_{24} = g_{42} = g_{34} = g_{43} = 0$.

- **Przekształcenia Lorentza nie zmieniają metryki czasoprzestrzeni**

$$\begin{aligned} x_1' &= \Gamma(x_1 + iBx_4) \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= \Gamma(x_4 - iBx_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \Gamma(x_1' - iBx_4') \\ x_2 &= x_2' \\ x_3 &= x_3' \\ x_4 &= \Gamma(x_4' + iBx_1') \end{aligned}$$

$\Gamma \overset{df}{=} \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad B \overset{df}{=} Vc^{-1}$

$\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ = prędkość układu primowanego względem układu nieprimowanego

$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = ict$

$x_1' = x',\ x_2' = y',\ x_3' = z',\ x_4' = ict'$

$-Vt = iicc^{-1}Vt = iVc^{-1}(ict) = iVc^{-1}x_4 = iBx_4, \quad ii = -1$

Kwadrat urojonej odległości między dwoma punktami (zdarzeniami) w czterowymiarowej przestrzeni Minkowskiego jest niezmiennikiem transformacji Lorentza

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=1} (\Delta x_\mu)^2 = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g_{\mu\nu}\Delta x_\mu \Delta x_\nu = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4} g'_{\mu\nu}\Delta x'_\mu \Delta x'_\nu = \sum_{\mu=1} (\Delta x'_\mu)^2 = (\Delta s')^2 .$$

Transformacje Lorentza nie zmieniają metryki czasoprzestrzeni: $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$.

DOWÓD

$$\begin{aligned} \Delta x_1' &= \Gamma(\Delta x_1 + iB\Delta x_4) \\ \Delta x_2' &= \Delta x_2 \\ \Delta x_3' &= \Delta x_3 \\ \Delta x_4' &= \Gamma(\Delta x_4 - iB\Delta x_1) \end{aligned}$$

$$\Gamma^2(1 - B^2) = 1$$

$$(\Delta s')^2 = \sum_{\mu=1}^{4} (\Delta x'_\mu)^2 = (\Delta x_1')^2 + (\Delta x_2')^2 + (\Delta x_3')^2 + (\Delta x_4')^2 =$$

$$= \Gamma^2(\Delta x_1 + iB\Delta x_4)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + \Gamma^2(\Delta x_4 - iB\Delta x_1)^2 =$$

$$= (\Delta x_1)^2\left(\Gamma^2 - \Gamma^2B^2\right) + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2\left(\Gamma^2 - \Gamma^2B^2\right) =$$

$$= (\Delta x_1)^2\Gamma^2\left(1 - B^2\right) + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2\Gamma^2\left(1 - B^2\right) =$$

$$= (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2 = \sum_{\mu=1}^{4} (\Delta x_\mu)^2 = (\Delta s)^2$$

- **Własności znakowe kwadratu odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń**

$$\Delta s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 + \Delta x_4^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 - c^2\Delta t^2, \quad x_4 = ict, \quad i = \sqrt{-1}$$

Δs^2 = kwadrat odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń (forma metryczna)
$\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2$ = kwadrat odległości przestrzennej dwóch zdarzeń
$c^2\Delta t^2$ = kwadrat odległości czasowej dwóch zdarzeń

Dwa zdarzenia mogą pozostawać w związku przyczynowo skutkowym wtedy i tylko wtedy, gdy odległość przestrzenna między nimi jest nie większa od ich odległości czasowej.

$$\boxed{\Delta s^2 < 0}$$

Kwadrat odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń jest ujemny, jeżeli kwadrat odległości przestrzennej tych zdarzeń jest mniejszy od kwadratu ich odległości czasowej. Jeżeli $\Delta s^2 < 0$, to między dwoma zdarzeniami mógł nastąpić związek przyczynowo skutkowy, czyli w czasie Δt światło zdążyło przebyć odległość przestrzenną między tymi zdarzeniami.
UWAGA
Jeżeli $\Delta s^2 < 0$, to Δs jest urojone.

$$\boxed{\Delta s^2 = 0}$$

Kwadrat odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń jest zerem, jeżeli kwadrat odległości przestrzennej tych zdarzeń jest równy kwadratowi ich odległości czasowej. Jeżeli $\Delta s^2 = 0$, to między dwoma zdarzeniami mógł nastąpić związek przyczynowo skutkowy, czyli w czasie dt światło zdążyło jeszcze przebyć odległość przestrzenną między tymi zdarzeniami.
UWAGA
Przypadek $\Delta s^2 = 0$ opisuje rozchodzenie się światła.

$$\boxed{\Delta s^2 > 0}$$

Kwadrat odległości czasoprzestrzennej dwóch zdarzeń jest dodatni, jeżeli kwadrat odległości przestrzennej tych zdarzeń jest większy od kwadratu ich odległości czasowej. Jeżeli $\Delta s^2 > 0$, to między dwoma zdarzeniami nie mógł nastąpić związek przyczynowo skutkowy, czyli w czasie Δt światło nie zdążyło przebyć odległości przestrzennej między tymi zdarzeniami.
UWAGA
Jeżeli $\Delta s^2 > 0$, to Δs jest rzeczywiste.

UWAGA
U różnych autorów spotykamy różne definicje różniczkowej formy kwadratowej.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2, \quad x_4 = ict, \quad ds^2 \le 0$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2, \quad x_0 = ct, \quad ds^2 \le 0$$

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_0^2, \quad x_0 = ct, \quad ds^2 \ge 0$$

My wybraliśmy pierwszą z nich.

3 MACIERZ TRANSFORMACJI LORENTZA

- **Macierz transformacji Lorentza**

$$x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \qquad x'_1 = \Gamma x_1 + 0x_2 + 0x_3 + iB\Gamma x_4$$
$$x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \qquad x'_2 = 0x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 0x_4$$
$$x'_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \qquad x'_3 = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3 + 0x_4$$
$$x'_4 = a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \qquad x'_4 = -iB\Gamma x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \Gamma x_4$$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}x_\nu, \qquad a_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}, \qquad \Gamma \stackrel{df}{=} \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad B \stackrel{df}{=} Vc^{-1}$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

TWIERDZENIE
Transformacje Lorentza są transformacjami ortogonalnymi.

DOWÓD
Transformacje ortogonalne

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}x_\nu, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

spełniają następujące warunki (warunki ortogonalności)

$$\sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha\beta}a_{\alpha\lambda} = \delta_{\beta\lambda},$$

$$\delta_{11} = 1 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 1}a_{\alpha 1} = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} + a_{41}a_{41},$$

$$\delta_{22} = 1 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 2}a_{\alpha 2} = a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} + a_{42}a_{42},$$

$$\delta_{33} = 1 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 3}a_{\alpha 3} = a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} + a_{43}a_{43},$$

$$\delta_{44} = 1 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 4}a_{\alpha 4} = a_{14}a_{14} + a_{24}a_{24} + a_{34}a_{34} + a_{44}a_{44}.$$

Suma kwadratów elementów każdej kolumny równa się 1.
Ten warunek ortogonalności macierz transformacji Lorentza spełnia, ponieważ

$$\Gamma^2 + 0^2 + 0^2 + (-iB\Gamma)^2 = \Gamma^2 - B^2\Gamma^2 = \Gamma^2\left(1 - B^2\right) = \Gamma^2\Gamma^{-2} = 1,$$
$$0^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1,$$
$$0^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 1,$$
$$(iB\Gamma)^2 + 0^2 + 0^2 + \Gamma^2 = \Gamma^2\left(1 - B^2\right) = \Gamma^2\Gamma^{-2} = 1,$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 1} a_{\alpha 2} = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} + a_{41}a_{42} ,$$

$$\delta_{13} = \delta_{31} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 1} a_{\alpha 3} = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} + a_{41}a_{43} ,$$

$$\delta_{14} = \delta_{41} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 1} a_{\alpha 4} = a_{11}a_{14} + a_{21}a_{24} + a_{31}a_{34} + a_{41}a_{44} ,$$

$$\delta_{23} = \delta_{32} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 2} a_{\alpha 3} = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} + a_{42}a_{43} ,$$

$$\delta_{24} = \delta_{42} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 2} a_{\alpha 4} = a_{12}a_{14} + a_{22}a_{24} + a_{32}a_{34} + a_{42}a_{44} ,$$

$$\delta_{34} = \delta_{43} = 0 = \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\alpha 3} a_{\alpha 4} = a_{13}a_{14} + a_{23}a_{24} + a_{33}a_{34} + a_{43}a_{44} .$$

Suma iloczynów odpowiednich elementów dwóch kolumn równa się zeru.
Te warunki ortogonalności macierz transformacji Lorentza również spełnia, co bardzo łatwo sprawdzić.

$$\Gamma \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-iB\Gamma) \cdot 0 = 0$$

$\vdots$

TWIERDZENIE
Wyznacznik macierzy przekształceń Lorentza jest równy jedności.

DOWÓD

$$\det a_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\Gamma \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} iB\Gamma \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -B\Gamma & 0 & 0 \end{vmatrix} = \Gamma^2 - B^2\Gamma^2 = 1$$

Transformacje ortogonalne, których wyznacznik jest równy 1, oznaczają obroty układu.
Szczególna transformacja Lorentza opisuje obroty w płaszczyźnie $x_1 x_4$.

- **Macierz odwrotnego przekształcenia Lorentza**

Dla macierzy ortogonalnej macierz odwrotna jest równa macierzy przestawionej.

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu , \quad (\mu = 1,2,3,4) \qquad\qquad x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} c_{\mu\nu} x'_\nu , \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

$$a_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix} \qquad\qquad c_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$a_{\mu\nu} \overset{df}{=} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} , \quad a_{\mu\nu} = c_{\nu\mu} = c^T_{\mu\nu} \qquad\qquad c_{\mu\nu} \overset{df}{=} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} , \quad c_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} = a^T_{\mu\nu}$$

$$a_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \qquad\qquad c_{\mu\nu} = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\nu} = \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu}$$

4 PODSTAWOWE WNIOSKI WYNIKAJĄCE Z TRANSFORMACJI LORENTZA

- **Równoczesność zdarzeń i następstwo czasowe**

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \Gamma(x - Vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \Gamma(t - Vc^{-2}x) \\ \Gamma &= (1 - V^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{t'_2 - t'_1 = \Gamma[(t_2 - t_1) - Vc^{-2}(x_2 - x_1)]}$$

WNIOSEK I

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= t_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t'_1 = t'_2$$

Dwa zdarzenia 1 i 2 równoczesne w układzie nieprimowanym $(t_1 = t_2)$ będą równoczesne również w układzie primowanym $(t'_1 = t'_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zaszły one w układzie nieprimowanym w tym samym punkcie $(x_1 = x_2)$.

WNIOSEK II

$$\left.\begin{aligned} t_1 &< t_2 \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow t'_1 < t'_2$$

Następstwo czasowe dwóch zdarzeń 1 i 2 nie ulega zmianie $(t_1 < t_2, t'_1 < t'_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy zaszły one w układzie nieprimowanym w tym samym punkcie $(x_1 = x_2)$.

WNIOSEK III

$$\left.\begin{aligned} & t_1 < t_2 \\ & \Gamma[(t_2 - t_1) - Vc^{-2}(x_2 - x_1)] = 0 \\ & \qquad\Downarrow \\ & c(t_2 - t_1) = Vc^{-1}(x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow t'_1 = t'_2$$

WNIOSEK IV

$$\left.\begin{aligned} & t_1 < t_2 \\ & \Gamma[(t_2 - t_1) - Vc^{-2}(x_2 - x_1)] > 0 \\ & \qquad\Downarrow \\ & c(t_2 - t_1) > Vc^{-1}(x_2 - x_1) \\ & V = c: \quad c(t_2 - t_1) > (x_2 - x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow t'_1 < t'_2$$

Jeżeli odległość między dwoma punktami $(x_2 - x_1)$ w układzie nieprimowanym jest mniejsza niż droga przebyta przez światło w przedziale czasu $(t_2 - t_1) > 0$ w układzie nieprimowanym, to w układzie primowanym $(t'_2 - t'_1) > 0$, co oznacza, że nie uległo zmianie następstwo czasowe (chwila późniejsza w układzie nieprimowanym jest również późniejsza w układzie primowanym).

WNIOSEK V

$$\left.\begin{array}{l} t_1 < t_2 \\ \Gamma\left[\left(t_2 - t_1\right) - Vc^{-2}\left(x_2 - x_1\right)\right] < 0 \\ \qquad\quad \Downarrow \\ c\left(t_2 - t_1\right) < Vc^{-1}\left(x_2 - x_1\right) \\ V = c: \quad c\left(t_2 - t_1\right) < \left(x_2 - x_1\right) \end{array}\right\} \Rightarrow t_1' > t_2'$$

Jeżeli odległość między dwoma punktami $\left(x_2 - x_1\right)$ w układzie nieprimowanym jest większa niż droga przebyta przez światło w przedziale czasu $\left(t_2 - t_1\right) > 0$ w układzie nieprimowanym, to w układzie primowanym $\left(t_2' - t_1'\right) < 0$, co oznacza, że uległo zmianie następstwo czasowe (chwila późniejsza w układzie nieprimowanym jest chwilą wcześniejszą w układzie primowanym).

- **Dylatacja czasu**

$$\boxed{\begin{array}{l} x = \Gamma\left(x' + Vt'\right) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \Gamma\left(t' + Vc^{-2}x'\right) \\ \Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Gamma > 1 \end{array}}$$

$$\boxed{t_2 - t_1 = \Gamma\left[\left(t_2' - t_1'\right) + Vc^{-2}\left(x_2' - x_1'\right)\right]}$$

Zegar primowany spoczywa względem układu primowanego $\left(x_2' - x_1' = 0\right)$ poruszając się z prędkością V względem układu nieprimowanego.

$$\boxed{\left(t_2' - t_1'\right) = \left(t_2 - t_1\right)\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \boxed{\left(t_2' - t_1'\right) < \left(t_2 - t_1\right)}$$

$t_2' - t_1'$ = przedział czasu zmierzony zegarem spoczywającym względem układu primowanego $\left(x_1' = x_2'\right)$, czyli przedział czasu zmierzony w układzie własnym zegara

$t_2 - t_1$ = przedział czasu zmierzony zegarami znajdującymi się w układzie laboratoryjnym (nieprimowanym) w miejscach określonych przez współrzędne przestrzenne rozważanych zdarzeń

Przedział czasu, upływającego między dwoma zdarzeniami, zmierzony w układzie laboratoryjnym w miejscach określonych przez współrzędne przestrzenne rozważanych zdarzeń jest większy niż przedział czasu zmierzony w układzie własnym w miejscu zachodzenia tych zdarzeń. Opisane zjawisko nazywane jest dylatacją czasu.

- **Kontrakcja (skrócenie) długości**

Pręt równoległy do osi x porusza się z prędkością **V** względem układu nieprimowanego, jednocześnie spoczywając względem układu primowanego. Obserwator w układzie nieprimowanym dokonuje pomiaru współrzędnych końców pręta w tym samym czasie ($t_1 = t_2$).

$$\boxed{\begin{array}{l} x' = \Gamma\left(x - Vt\right) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \Gamma\left(t - Vc^{-2}x\right) \\ \Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{array}}$$

$$\boxed{x_2' - x_1' = \Gamma\left[\left(x_2 - x_1\right) - V\left(t_2 - t_1\right)\right]}$$

$$\Big\downarrow\ t_1 = t_2$$

$$\boxed{x_2' - x_1' = \left(x_2 - x_1\right)\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}}$$

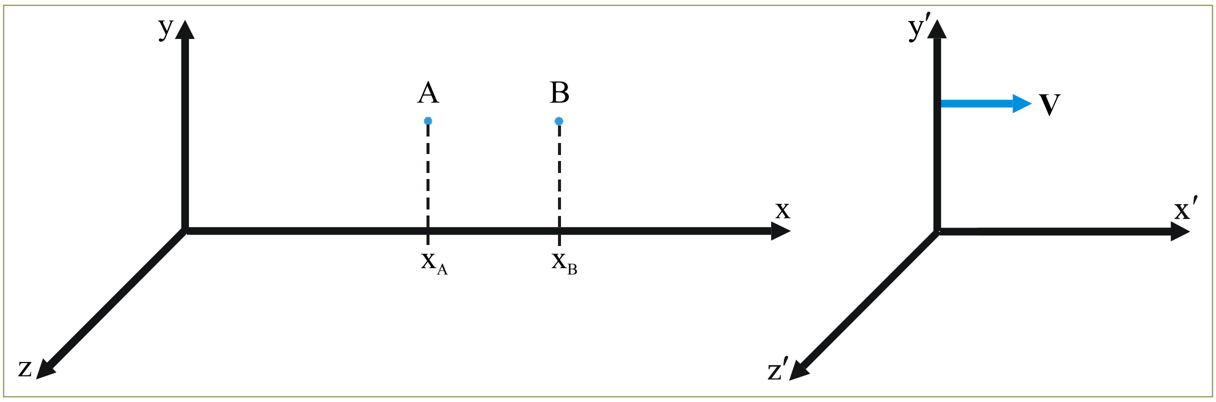
$x_2' - x_1'$ = długość pręta spoczywającego względem układu primowanego zmierzona przez obserwatora spoczywającego względem tego układu

$x_2 - x_1$ = długość pręta poruszającego się względem układu nieprimowanego zmierzona przez obserwatora spoczywającego względem tego układu, pomiar współrzędnych końców pręta obserwator dokonał w tym samym czasie, $t_1 = t_2$

$(x_2' - x') > (x_2 - x_1)$

Długość pręta poruszającego się względem obserwatora jest mniejsza od długości pręta spoczywającego względem obserwatora. Zjawisko to nazywane jest kontrakcją długości.

- **Podstawowy eksperyment szczególnej teorii względności**



Źródło światła znajduje się w punkcie A układu nieprimowanego. W chwili t_A wysłało impuls świetlny, który dotarł do punktu B w chwili t_B. Obserwator nieruchomy względem układu nieprimowanego dokonał pomiaru wartości prędkości światła jako

$$c = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}.$$

Obserwator nieruchomy względem układu primowanego również zmierzył wartość prędkości, korzystając z analogicznego wzoru

$$c' = \frac{x_B' - x_A'}{t_B' - t_A'}.$$

Porównamy oba wyniki, wykorzystując transformacje Lorentza.

$$x_A' = \frac{x_A - Vt_A}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}$$

$$x_B' = \frac{x_B - Vt_B}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}$$

$$t_A' = \frac{t_A - Vx_Ac^{-2}}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}$$

$$t_B' = \frac{t_B - Vx_Bc^{-2}}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}$$

$$c' = \frac{x_B' - x_A'}{t_B' - t_A'} = \frac{x_B - x_A - V(t_B - t_A)}{t_B - t_A - Vc^{-2}(x_B - x_A)} =$$

$$= \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} \cdot \frac{1 - \dfrac{V(t_B - t_A)}{x_B - x_A}}{1 - \dfrac{Vc^{-2}(x_B - x_A)}{t_B - t_A}} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = c$$

$$\boxed{c' = \frac{x_B' - x_A'}{t_B' - t_A'} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A} = c}$$

5 CZAS WŁASNY

- **Czas własny**

Czasem własnym nazywamy różniczkę lub odstęp czasu, między dwoma zdarzeniami zachodzącymi w tym samym miejscu w układzie primowanym (układzie własnym), zmierzonego zegarem znajdującym się w tym miejscu.

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu'^2 = ds'^2$$

$$\downarrow \quad dx_1' = dx_2' = dx_3' = 0$$

$$dx_4'^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2$$

$$dx_4'^2 = dx_4^2\left(1 + \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dx_4^2}\right)$$

$$\downarrow \quad x_4 = ict\,, \quad x_4' = ict'\,, \quad i^2 = -1$$

$$i^2c^2dt'^2 = i^2c^2dt^2\left(1 - \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{c^2dt^2}\right)$$

$$\downarrow \quad v^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{dt^2}$$

$$dt'^2 = dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\boxed{d\tau \overset{df}{=} dt' = dt\sqrt{1 - v^2c^{-2}}} \qquad d\tau = \text{czas własny}, \quad d\tau = dt' < dt$$

Odstęp czasu między dwoma zdarzeniami jest krótszy w układzie własnym niż w układzie laboratoryjnym: $\Delta t' < \Delta t$.

$\Delta\tau = \Delta t'$ = przedział czasu zmierzony zegarem w układzie własnym (primowanym)
Δt = przedział czasu zmierzony zegarami w układzie laboratoryjnym (nieprimowanym), znajdującymi się w miejscach określonych przez współrzędne rozpatrywanych zdarzeń

Relacje podane niżej przydadzą się w dalszych rozważaniach.

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2 = dx_4'^2 = i^2c^2dt'^2 = i^2c^2dt^2\left(1 - v^2c^{-2}\right) = dx_4^2\left(1 - v^2c^{-2}\right) = i^2c^2d\tau^2$$

$$ds = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2} = dx_4' = icdt' = icdt\sqrt{1 - v^2c^{-2}} = dx_4\sqrt{1 - v^2c^{-2}} = icd\tau$$

$$d\tau = dt\sqrt{1 - v^2c^{-2}} = \frac{dt}{\gamma} = \frac{ds}{ic}\,, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2c^{-2}}}$$

6 GRUPA LORENTZA

- **Grupa Lorentza**

Niepusty zbiór **G** nieosobliwych przekształceń liniowych reprezentowanych przez ich macierze stanowi grupę, gdy

1. $\bigwedge_{\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{G}} (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \in \mathbf{G}$
2. $\bigwedge_{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbf{G}} (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$
3. $\bigwedge_{\mathbf{A}\in\mathbf{G}} \bigvee_{\mathbf{A}^{-1}\in\mathbf{G}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$
4. $\bigwedge_{\mathbf{A}\in\mathbf{G}} \bigvee_{\mathbf{E}\in\mathbf{G}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}$

$\mathbf{A}^{-1}$ = macierz odwrotna macierzy **A**
E = macierz jednostkowa

TWIERDZENIE
Liniowe transformacje ortogonalne tworzą grupę.
TWIERDZENIE
Dla macierzy ortogonalnej macierz odwrotna jest równa macierzy transponowanej.
TWIERDZENIE
Wyznaczniki macierzy ortogonalnych są równe ± 1.
TWIERDZENIE
$\det\left(\mathbf{A}^{4\times 4}\cdot\mathbf{B}^{4\times 4}\right) = \det\mathbf{A}^{4\times 4}\cdot\det\mathbf{B}^{4\times 4}$

Poszukamy liniowych transformacji

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu} x_\nu + b_\mu ,$$

które nie zmieniają metryki czasoprzestrzeni

$$\sum_{\mu=1}^{4} dx'^2_\mu \overset{?}{=} \sum_{\mu=1}^{4} dx^2_\mu$$

$$\left.\begin{aligned} dx'_\mu &= \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha} dx_\alpha \\ dx'_\mu &= \sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\beta} dx_\beta \end{aligned}\right\} \quad dx'^2_\mu = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} dx'^2_\mu = \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta} \qquad \text{(warunek ortogonalności)}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} dx'^2_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} dx^2_\mu$$

Liniowe transformacje jednorodne ($b_\mu = 0$) nie zmieniające metryki czasoprzestrzeni są transformacjami ortogonalnymi, tworzą więc grupę zwaną grupą Lorentza. Należą do niej między innymi szczególne transformacje Lorentza o dwóch zmiennych, obroty trójwymiarowe, inwersje osi współrzędnych przestrzennych, odwrócenie czasu, przekształcenie tożsamościowe oraz ich złożenia, a także transformacje odwrotne do wymienionych.

Grupa liniowych transformacji niejednorodnych ($\bigvee_\mu b_\mu \neq 0$) nazywana jest grupą Poincarégo.

- **Szczególne transformacje Lorentza**

$$x_1' = \Gamma_1 x_1 + iB_1\Gamma_1 x_4 \qquad x_2' = x_2 \qquad x_3' = x_3 \qquad x_4' = -iB_1\Gamma_1 x_1 + \Gamma_1 x_4$$

$$\mathbf{L}_{14} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & iB_1\Gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB_1\Gamma_1 & 0 & 0 & \Gamma_1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{L}_{14} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_1, x_4.

$$x_1' = x_1 \qquad x_2' = \Gamma_2 x_2 + iB_2\Gamma_2 x_4 \qquad x_3' = x_3 \qquad x_4' = -iB_2\Gamma_2 x_2 + \Gamma_2 x_4$$

$$\mathbf{L}_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & iB_2\Gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -iB_2\Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{L}_{24} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_2, x_4.

$$x_1' = x_1 \qquad x_2' = x_2 \qquad x_3' = \Gamma_3 x_3 + iB_3\Gamma_3 x_4 \qquad x_4' = -iB_3\Gamma_3 x_2 + \Gamma_3 x_4$$

$$\mathbf{L}_{34} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & iB_3\Gamma_3 \\ 0 & 0 & -iB_3\Gamma_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{L}_{34} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_3, x_4.

$\Gamma_\kappa = \left(1 - B_\kappa^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, $\quad B_\kappa = \dfrac{V_\kappa}{c}$, $\quad \mathbf{V}_\kappa$ = prędkość skierowana wzdłuż osi x_κ

- **Obroty trójwymiarowe.**

$$x_1' = \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_3 x_3$$
$$x_2' = \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_3 x_3$$
$$x_3' = \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_3 x_3$$
$$x_4' = x_4$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_3 & 0 \\ \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_3 & 0 \\ \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{R} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w przestrzeni trójwymiarowej w dowolnej płaszczyźnie. Każdy z dziewięciu kosinusów kierunkowych można jednoznacznie wyznaczyć przez co najwyżej trzy kąty Eulera.

$$x_1' = \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_2 x_2 \qquad x_2' = \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_2'\cdot\mathbf{e}_2 x_2 \qquad x_3' = x_3 \qquad x_4' = x_4$$

$$\mathbf{R}_{12} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{R}_{12} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_1, x_2.

α = kąt zawarty między wersorami $\mathbf{e}_1'$ i $\mathbf{e}_1$

$$x_1' = \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_3 x_3 \qquad x_2' = x_2 \qquad x_3' = \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_1 x_1 + \mathbf{e}_3'\cdot\mathbf{e}_3 x_3 \qquad x_4' = x_4$$

$$\mathbf{R}_{13} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{R}_{13} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_1, x_3.

β = kąt zawarty między wersorami $\mathbf{e}_1'$ i $\mathbf{e}_1$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 x_3 \\ x_3' &= \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_2 x_2 + \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_3 x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned} \qquad \mathbf{R}_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\beta & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{R}_{23} = +1$$

Transformacja ta opisuje obroty w płaszczyźnie x_2, x_3.

□ γ = kąt zawarty między wersorami $\mathbf{e}_2'$ i $\mathbf{e}_2$

- **Inwersje osi współrzędnych przestrzennych**

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 \\ x_2' &= -x_2 \\ x_3' &= -x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned} \qquad \mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{I}_S = -1$$

Transformacja ta zmienia zwroty osi współrzędnych przestrzennych.

- **Odwrócenie (inwersja) czasu**

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= -x_4 \end{aligned} \qquad \mathbf{I}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{I}_T = -1$$

Transformacja ta zmienia kierunek upływu czasu.

- **Przekształcenie tożsamościowe**

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \\ x_3' &= x_3 \\ x_4' &= x_4 \end{aligned} \qquad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{E} = +1$$

- **Grupy Poincarégo i Lorentza jako grupy Liego**

Grupą ciągłą nazywamy grupę, której elementy zależą w sposób ciągły od parametrów. Jeżeli n jest minimalną liczbą niezależnych względem siebie parametrów, od których zależą w sposób jednoznaczny elementy tworzące grupę, to mówimy, że dana grupa jest n-parametrowa. Grupą Liego nazywamy ciągłą grupę o skończonej liczbie parametrów.

Niejednorodne liniowe przekształcenia ortogonalne nie zmieniające metryki czasoprzestrzeni tworzą 10-parametrową grupę Liego L(10), zwaną grupą Poincarégo. Jednorodne liniowe przekształcenia ortogonalne nie zmieniające metryki czasoprzestrzeni tworzą 6-parametrową grupę Liego L(6), zwaną grupą Lorentza. Szczególne przekształcenia Lorentza stanowią jednoparametrową grupę Liego L(1).

PRZYKŁAD

Macierz ortogonalna

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_3' \cdot \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{e}_4' \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_4' \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_4' \cdot \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4' \cdot \mathbf{e}_4 \end{bmatrix}, \qquad \det \mathbf{L} = +1$$

opisuje obrót w dowolnej płaszczyźnie w przestrzeni czterowymiarowej, który jest złożeniem sześciu obrotów w płaszczyznach x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4.

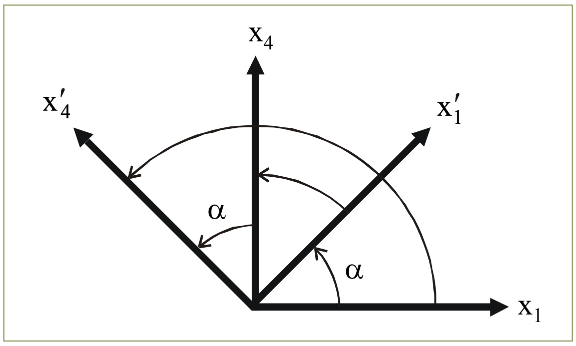
W szczególności macierz $\mathbf{L}_{14}$

$$\mathbf{L}_{14}=\begin{bmatrix}\Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ \mathbf{e}_4'\cdot\mathbf{e}_1 & 0 & 0 & \mathbf{e}_4'\cdot\mathbf{e}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

reprezentuje obrót w płaszczyźnie x_1x_4 o kąt, którego tangens jest równy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{iB\Gamma}{\Gamma}=iB=i\frac{V}{c}.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_1 &= \cos(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_1)=\cos\alpha\\ \mathbf{e}_1'\cdot\mathbf{e}_4 &= \cos(\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_4)=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha\\ \mathbf{e}_4'\cdot\mathbf{e}_1 &= \cos(\mathbf{e}_4',\mathbf{e}_1)=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha\\ \mathbf{e}_4'\cdot\mathbf{e}_4 &= \cos(\mathbf{e}_4',\mathbf{e}_4)=\cos\alpha\end{aligned}$$



PRZYKŁAD

Złożenie obrotu $\mathbf{R}_{12}$ i szczególnej transformacji Lorentza $\mathbf{L}_{14}$

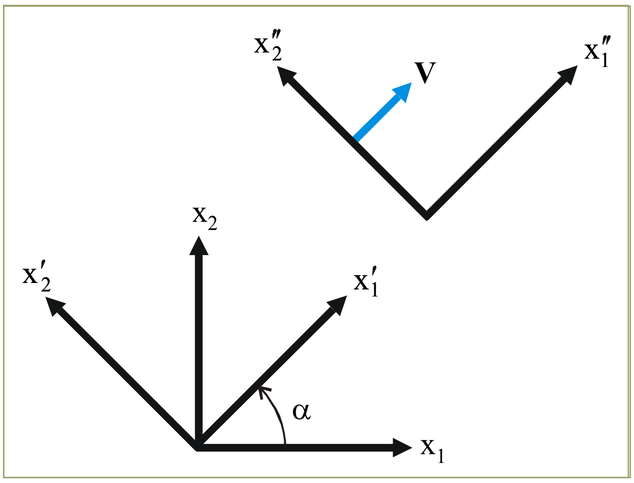
Rozpatrzmy trzy układy współrzędnych nieprimowany, primowany i podwójnie primowany. W chwili $t_0=t_0'=t_0''=0$ początki wszystkich tych trzech układów oraz osi x_3, x_3' i x_3'' pokrywały się. Układ primowany spoczywał względem układu nieprimowanego. Osi obu tych układów o wspólnym początku były względem siebie obrócone o kąt α. Układ podwójnie primowany poruszał się względem układu primowanego ze stałą prędkością $\mathbf{V}$ skierowaną wzdłuż osi x_1''. Analogiczne osi układów primowanego i podwójnie primowanego były równoległe względem siebie.

$$\mathbf{x}'=\mathbf{R}_{12}\mathbf{x}$$
$$\mathbf{x}''=\mathbf{L}_{14}\mathbf{x}'$$

$$\boxed{\mathbf{x}''=\mathbf{L}_{14}\mathbf{R}_{12}\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x}=\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu\mathbf{e}_\mu=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}'=\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu'\mathbf{e}_\mu'=\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\\x_4'\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}''=\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu''\mathbf{e}_\mu''=\begin{bmatrix}x_1''\\x_2''\\x_3''\\x_4''\end{bmatrix}$$



$$\mathbf{L}_{14}\mathbf{R}_{12}=\begin{bmatrix}\Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Gamma\cos\alpha & \Gamma\sin\alpha & 0 & iB\Gamma\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -iB\Gamma\cos\alpha & -iB\Gamma\sin\alpha & 0 & \Gamma\end{bmatrix}$$

PRZYKŁAD
Złożenie obrotu trójwymiarowego i trzech szczególnych transformacji Lorentza
Rozpatrzmy pięć układów współrzędnych, w tym jeden nie indeksowany i cztery indeksowane symbolami 0, I, II, III. W chwili $t_0 = t_0^0 = t_0^{\mathrm{I}} = t_0^{\mathrm{II}} = t_0^{\mathrm{III}} = 0$ początki wszystkich tych układów znajdowały się w tym samym punkcie. Układ indeksowany przez 0 spoczywał względem układu nie indeksowanego. Osie obu tych układów o wspólnym początku były względem siebie obrócone (nie pokrywały się). Układ I poruszał się względem układu 0 ze stałą prędkością $\mathbf{V}_1$ skierowaną wzdłuż osi x_1^{I}. Układ II poruszał się względem układu I ze stałą prędkością $\mathbf{V}_2$ skierowaną wzdłuż osi x_2^{II}. Układ III poruszał się względem układu II ze stałą prędkością $\mathbf{V}_3$ skierowaną wzdłuż osi x_3^{III}. Analogiczne osie układów 0, I, II i III były względem siebie równoległe.

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{x}^0 = \mathbf{R}\mathbf{x} \\ &\mathbf{x}^{\mathrm{I}} = \mathbf{L}_{14}\mathbf{x}^0 \\ &\mathbf{x}^{\mathrm{II}} = \mathbf{L}_{24}\mathbf{x}^{\mathrm{I}} \\ &\mathbf{x}^{\mathrm{III}} = \mathbf{L}_{34}\mathbf{x}^{\mathrm{II}} \end{aligned}} \qquad \boxed{\mathbf{x}^{\mathrm{III}} = \mathbf{L}_{34}\mathbf{L}_{24}\mathbf{L}_{14}\mathbf{R}\,\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{L}_{34}\mathbf{L}_{24}\mathbf{L}_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_3 & iB_3\Gamma_3 \\ 0 & 0 & -iB_3\Gamma_3 & \Gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & iB_2\Gamma_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -iB_2\Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & iB_1\Gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB_1\Gamma_1 & 0 & 0 & \Gamma_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 & iB_1\Gamma_1 \\ B_1B_2\Gamma_1\Gamma_2 & \Gamma_2 & 0 & iB_2\Gamma_1\Gamma_2 \\ B_1B_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 & B_2B_3\Gamma_2\Gamma_3 & \Gamma_3 & iB_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \\ -iB_1\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 & -iB_2\Gamma_2\Gamma_3 & -iB_3\Gamma_3 & \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_{34}\mathbf{L}_{24}\mathbf{L}_{14}\mathbf{R} = \mathbf{L}_{34}\mathbf{L}_{24}\mathbf{L}_{14} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= \Gamma_1 r_{11} & l_{21} &= B_1B_2\Gamma_1\Gamma_2 r_{11} + \Gamma_2 r_{21} & l_{31} &= B_1B_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{11} + B_2B_3\Gamma_2\Gamma_3 r_{21} + \Gamma_3 r_{31} \\ l_{12} &= \Gamma_1 r_{12} & l_{22} &= B_1B_2\Gamma_1\Gamma_2 r_{12} + \Gamma_2 r_{22} & l_{32} &= B_1B_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{12} + B_2B_3\Gamma_2\Gamma_3 r_{22} + \Gamma_3 r_{32} \\ l_{13} &= \Gamma_1 r_{13} & l_{23} &= B_1B_2\Gamma_1\Gamma_2 r_{13} + \Gamma_2 r_{23} & l_{33} &= B_1B_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{13} + B_2B_3\Gamma_2\Gamma_3 r_{23} + \Gamma_3 r_{33} \\ l_{14} &= iB_1\Gamma_1 & l_{24} &= iB_2\Gamma_1\Gamma_2 & l_{34} &= iB_3\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{41} &= -iB_1\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{11} - iB_2\Gamma_2\Gamma_3 r_{21} - iB_3\Gamma_3 r_{31} \\ l_{42} &= -iB_1\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{12} - iB_2\Gamma_2\Gamma_3 r_{22} - iB_3\Gamma_3 r_{32} \\ l_{43} &= -iB_1\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 r_{13} - iB_2\Gamma_2\Gamma_3 r_{23} - iB_3\Gamma_3 r_{33} \\ l_{44} &= \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_1 &= V_1c^{-1} \\ B_2 &= V_2c^{-1} \\ B_3 &= V_3c^{-1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \Gamma_1 &= \left(1 - B_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Gamma_2 &= \left(1 - B_2^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \Gamma_3 &= \left(1 - B_3^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

PRZYKŁAD
Złożenie dwóch szczególnych transformacji Lorentza
Rozpatrzmy trzy układy współrzędnych nieprimowany, primowany i podwójnie primowany. W chwili $t_0 = t'_0 = t''_0 = 0$ analogiczne osie współrzędnych przestrzennych pokrywały się. Układ primowany poruszał się ze stałą prędkością $\mathbf{V}_I$ względem układu nieprimowanego, układ podwójnie primowany poruszał się ze stałą prędkością $\mathbf{V}_{II}$ względem układu primowanego i stałą prędkością $\mathbf{V}_{III}$ względem układu nieprimowanego. Prędkości $\mathbf{V}_I$, $\mathbf{V}_{II}$ i $\mathbf{V}_{III}$ były względem siebie wzajemnie równoległe oraz równoległe do osi współrzędnych x, x' i x''.

$$\mathbf{x}' = L^{I}_{14}\mathbf{x} \qquad \mathbf{x}'' = L^{II}_{14}\mathbf{x}'$$

$$\boxed{\mathbf{x}'' = L^{II}_{14}L^{I}_{14}\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{x} = \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}' = \sum_{\mu=1}^{4} x'_\mu \mathbf{e}'_\mu = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'' = \sum_{\mu=1}^{4} x''_\mu \mathbf{e}''_\mu = \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \\ x''_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^{II}_{14}\mathbf{L}^{I}_{14} = \begin{bmatrix} \Gamma_{II} & 0 & 0 & iB_{II}\Gamma_{II} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB_{II}\Gamma_{II} & 0 & 0 & \Gamma_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{I} & 0 & 0 & iB_{I}\Gamma_{I} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB_{I}\Gamma_{I} & 0 & 0 & \Gamma_{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}^{II}_{14}\mathbf{L}^{I}_{14} = \begin{bmatrix} \Gamma_I\Gamma_{II}(1+B_IB_{II}) & 0 & 0 & i\Gamma_I\Gamma_{II}(B_I+B_{II}) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\Gamma_I\Gamma_{II}(B_I+B_{II}) & 0 & 0 & \Gamma_I\Gamma_{II}(1+B_IB_{II}) \end{bmatrix} \overset{?}{=} \begin{bmatrix} \Gamma_{III} & 0 & 0 & iB_{III}\Gamma_{III} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB_{III}\Gamma_{III} & 0 & 0 & \Gamma_{III} \end{bmatrix} = \mathbf{L}^{III}_{14}$$

$$\Gamma_I\Gamma_{II}(1+B_IB_{II}) \overset{?}{=} \Gamma_{III}$$

$$i\Gamma_I\Gamma_{II}(B_I+B_{II}) \overset{?}{=} iB_{III}\Gamma_{III}$$

$$B_I \overset{df}{=} \frac{V_I}{c}, \quad B_{II} \overset{df}{=} \frac{V_{II}}{c}, \quad B_{III} \overset{df}{=} \frac{V_{III}}{c}$$

$$\Gamma_I \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{1-B_I^2}}, \quad \Gamma_{II} \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{1-B_{II}^2}}, \quad \Gamma_{III} \overset{df}{=} \frac{1}{\sqrt{1-B_{III}^2}}$$

$$B_{III} = \frac{B_I + B_{II}}{1 + B_IB_{II}}$$

$$\boxed{V_{III} = \frac{V_I + V_{II}}{1 + \dfrac{V_IV_{II}}{c^2}}}$$

Złożenie dwóch szczególnych transformacji Lorentza jest również szczególną transformacją Lorentza wtedy i tylko wtedy, gdy ostatni wzór określa prawo składania prędkości.

$\mathbf{V}_I$ = prędkość układu primowanego względem układu nieprimowanego
$\mathbf{V}_{II}$ = prędkość układu podwójnie primowanego względem układu primowanego
$\mathbf{V}_{III}$ = prędkość układu potrójnie primowanego względem układu nieprimowanego

7 TRANSFORMACJE LORENTZA CZTEROWEKTORA

- **Czterowewktory**

Czterowektorem $\widetilde{\mathbf{A}} = \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{A}_\mu \mathbf{e}_\mu = \left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4 \right)$ nazywamy zbiór czterech wielkości $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4$, zwanych jego składowymi, które przy zmianie układu współrzędnych poddanych przekształceniu Lorentza

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} x_\nu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}\, x_\nu, \quad a_{\mu\nu} = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

transformują się według wzoru

$$\widetilde{A}'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}\, \widetilde{A}_\nu .$$

- **Transformacja Lorentza czterowektora**

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4 \right) \rightarrow \widetilde{\mathbf{A}}' = \left(\widetilde{A}'_1, \widetilde{A}'_2, \widetilde{A}'_3, \widetilde{A}'_4 \right)$$

$$\widetilde{A}'_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\mu\nu}\, \widetilde{A}_\nu$$

$$\widetilde{A}'_1 = \sum_{\nu=1}^{4} a_{1\nu} \widetilde{A}_\nu =$$

$$= a_{11}\widetilde{A}_1 + a_{12}\widetilde{A}_2 + a_{13}\widetilde{A}_3 + a_{14}\widetilde{A}_4 = a_{11}\widetilde{A}_1 + a_{14}\widetilde{A}_4 = \Gamma\widetilde{A}_1 + iB\Gamma\widetilde{A}_4 = \Gamma\left(\widetilde{A}_1 + iB\widetilde{A}_4 \right)$$

$$\widetilde{A}'_2 = \sum_{\nu=1}^{4} a_{2\nu} \widetilde{A}_\nu = a_{21}\widetilde{A}_1 + a_{22}\widetilde{A}_2 + a_{23}\widetilde{A}_3 + a_{24}\widetilde{A}_4 = a_{22}\widetilde{A}_2 = \widetilde{A}_2$$

$$\widetilde{A}'_3 = \sum_{\nu=1}^{4} a_{3\nu} \widetilde{A}_\nu = a_{31}\widetilde{A}_1 + a_{32}\widetilde{A}_2 + a_{33}\widetilde{A}_3 + a_{34}\widetilde{A}_4 = a_{33}\widetilde{A}_3 = \widetilde{A}_3$$

$$\widetilde{A}'_4 = \sum_{\nu=1}^{4} a_{4\nu} \widetilde{A}_\nu =$$

$$= a_{41}\widetilde{A}_1 + a_{42}\widetilde{A}_2 + a_{43}\widetilde{A}_3 + a_{44}\widetilde{A}_4 = a_{41}\widetilde{A}_1 + a_{44}\widetilde{A}_4 = -iB\Gamma\widetilde{A}_1 + \Gamma\widetilde{A}_4 = \Gamma\left(\widetilde{A}_4 - iB\widetilde{A}_1 \right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{A}'_1 &= \Gamma\left(\widetilde{A}_1 + iB\widetilde{A}_4 \right) \\ \widetilde{A}'_2 &= \widetilde{A}_2 \\ \widetilde{A}'_3 &= \widetilde{A}_3 \\ \widetilde{A}'_4 &= \Gamma\left(\widetilde{A}_4 - iB\widetilde{A}_1 \right) \end{aligned}}$$

- **Kwadrat modułu czterowektora jako niezmiennik**

$$\widetilde{A}'^2_1 + \widetilde{A}'^2_2 + \widetilde{A}'^2_3 + \widetilde{A}'^2_4 = \Gamma^2\left(\widetilde{A}_1 + iB\widetilde{A}_4 \right)^2 + \widetilde{A}^2_2 + \widetilde{A}^2_3 + \Gamma^2\left(\widetilde{A}_4 - iB\widetilde{A}_1 \right)^2 =$$

$$= \widetilde{A}^2_1\left(\Gamma^2 - \Gamma^2 B^2 \right) + \widetilde{A}^2_2 + \widetilde{A}^2_3 + \widetilde{A}^2_4\left(\Gamma^2 - \Gamma^2 B^2 \right) = \widetilde{A}^2_1 + \widetilde{A}^2_2 + \widetilde{A}^2_3 + \widetilde{A}^2_4$$

Kwadrat modułu czterowektora czyli suma kwadratów składowych czterowektora jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

- **Odwrotna transformacja Lorentza czterowektora**

$$\widetilde{\mathbf{A}}' = \left(\widetilde{A}_1', \widetilde{A}_2', \widetilde{A}_3', \widetilde{A}_4'\right) \rightarrow \widetilde{\mathbf{A}} = \left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{A}_\mu &= \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu'} \widetilde{A}_\nu' = \sum_{\nu=1}^{4} c_{\mu\nu} \widetilde{A}' \\ c_{\mu\nu} &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu'} \end{aligned}} \qquad \left[c_{pq}\right] = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{A}_1 = \sum_{\nu=1}^{4} c_{1\nu} \widetilde{A}_\nu' =$$

$$= c_{11}\widetilde{A}_1' + c_{12}\widetilde{A}_2' + c_{13}\widetilde{A}_3' + c_{14}\widetilde{A}_4' = c_{11}\widetilde{A}_1' + c_{14}\widetilde{A}_4' = \Gamma\widetilde{A}' - iB\Gamma\widetilde{A}_4' = \Gamma\left(\widetilde{A}_1' - iB\widetilde{A}_4'\right)$$

$$\widetilde{A}_2 = \sum_{\nu=1}^{4} c_{2\nu} \widetilde{A}_\nu' = c_{21}\widetilde{A}_1' + c_{22}\widetilde{A}_2' + c_{23}\widetilde{A}_3' + c_{24}\widetilde{A}_4' = c_{22}\widetilde{A}_2' = \widetilde{A}_2'$$

$$\widetilde{A}_3 = \sum_{\nu=1}^{4} c_{3\nu} \widetilde{A}_\nu' = c_{31}\widetilde{A}_1 + c_{32}\widetilde{A}_2' + c_{33}\widetilde{A}_3' + c_{34}\widetilde{A}_4' = c_{33}\widetilde{A}_3' = \widetilde{A}_3'$$

$$A_4 = \sum_{\nu=1}^{4} c_{4\nu} \widetilde{A}_\nu' =$$

$$= c_{41}\widetilde{A}_1' + c_{42}\widetilde{A}_2' + c_{43}\widetilde{A}_3' + c_{44}\widetilde{A}_4' = c_{41}\widetilde{A}_1' + c_{44}\widetilde{A}_4' = iB\Gamma\widetilde{A}_1' + \Gamma\widetilde{A}_4' = \Gamma\left(\widetilde{A}_4 + iB\widetilde{A}_1'\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{A}_1 &= \Gamma\left(\widetilde{A}_1' - iB\widetilde{A}_4'\right) \\ \widetilde{A}_2 &= \widetilde{A}_2' \\ \widetilde{A}_3 &= \widetilde{A}_3' \\ \widetilde{A}_4 &= \Gamma\left(\widetilde{A}_4' + iB\widetilde{A}_1'\right) \end{aligned}}$$

- **Iloczyn skalarny dwóch czterowektorów jako niezmiennik**

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{A}_\mu' &= \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha}\widetilde{A}_\alpha \\ \widetilde{B}_\mu' &= \sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\beta}\widetilde{B}_\beta \\ \sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3, \widetilde{A}_4\right)$$
$$\widetilde{\mathbf{B}} = \left(\widetilde{B}_1, \widetilde{B}_2, \widetilde{B}_3, \widetilde{B}_4\right)$$
$$\widetilde{\mathbf{A}}' = \left(\widetilde{A}_1', \widetilde{A}_2', \widetilde{A}_3', \widetilde{A}_4'\right)$$
$$\widetilde{\mathbf{B}}' = \left(\widetilde{B}_1', \widetilde{B}_2', \widetilde{B}_3', \widetilde{B}_4'\right)$$

$\widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}} \overset{df}{=} \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{A}_\mu \widetilde{B}_\mu$ iloczyn skalarny czterowektorów $\widetilde{\mathbf{A}}$ i $\widetilde{\mathbf{B}}$

$\widetilde{\mathbf{A}}' \cdot \widetilde{\mathbf{B}}' \overset{df}{=} \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{A}_\mu' \widetilde{B}_\mu'$ iloczyn skalarny czterowektorów $\widetilde{\mathbf{A}}'$ i $\widetilde{\mathbf{B}}'$

$$\widetilde{\mathbf{A}}' \cdot \widetilde{\mathbf{B}}' \overset{df}{=} \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{A}_\mu' \widetilde{B}_\mu' = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\alpha=1}^{4} a_{\mu\alpha}\widetilde{A}_\alpha \sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\beta}\widetilde{B}_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} \sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} \widetilde{A}_\alpha \widetilde{B}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{4} \sum_{\beta=1}^{4} \delta_{\alpha\beta} \widetilde{A}_\alpha \widetilde{B}_\beta = \sum_{\mu=1}^{4} \widetilde{A}_\mu \widetilde{B}_\mu = \widetilde{\mathbf{A}} \cdot \widetilde{\mathbf{B}}$$

Iloczyn skalarny dwóch czterowektorów jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

8 TRANSFORMACJE LORENTZA CZTEROTENSORA DRUGIEGO RZĘDU

- **Czterotensory drugiego rzędu**

Tensorem czterowymiarowym (czterotensorem) drugiego rzędu nazywamy zbiór 16 wielkości, zwanych jego składowymi, zestawionych w postaci macierzy

$$\left[T_{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix},$$

które przy zmianie układu współrzędnych poddanych przekształceniu Lorentza

$$x'_\mu=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}x_\nu=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}x_\nu=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu,\quad a_{\mu\nu}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

transformują się według wzoru

$$T'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}T_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta},$$

$$a_{\mu\alpha}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu},$$

$$a_{\nu\beta}=\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}=\frac{\partial x_\beta}{\partial x'_\nu}.$$

- **Transformacja Lorentza czterotensora drugiego rzędu**

$$T'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}$$

$$T'_{11}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{1\alpha}a_{1\beta}T_{\alpha\beta}=$$

$$=a_{11}a_{11}T_{11}+a_{11}a_{12}T_{12}+a_{11}a_{13}T_{13}+a_{11}a_{14}T_{14}+$$

$$+a_{12}a_{11}T_{21}+a_{12}a_{12}T_{22}+a_{12}a_{13}T_{23}+a_{12}a_{14}T_{24}+$$

$$+a_{13}a_{11}T_{31}+a_{13}a_{12}T_{32}+a_{13}a_{13}T_{33}+a_{13}a_{14}T_{34}+$$

$$+a_{14}a_{11}T_{41}+a_{14}a_{12}T_{42}+a_{14}a_{13}T_{43}+a_{14}a_{14}T_{44}=$$

$$=a_{11}a_{11}T_{11}+a_{11}a_{14}T_{14}+a_{14}a_{11}T_{41}+a_{14}a_{14}T_{44}=$$

$$=a_{11}^2T_{11}+a_{11}a_{14}\left(T_{14}+T_{41}\right)+a_{14}^2T_{44}=$$

$$=\Gamma^2T_{11}+iB\Gamma^2\left(T_{14}+T_{41}\right)-B^2\Gamma^2T_{44}=$$

$$=\Gamma^2\left[T_{11}-B^2T_{44}+iB\left(T_{14}+T_{41}\right)\right]$$

$$T'_{12}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{1\alpha}a_{2\beta}T_{\alpha\beta}=a_{11}a_{22}T_{12}+a_{14}a_{22}T_{42}=\Gamma\left(T_{12}+iBT_{42}\right)$$

$$T'_{13}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{1\alpha}a_{3\beta}T_{\alpha\beta}=a_{11}a_{33}T_{13}+a_{14}a_{33}T_{43}=\Gamma\left(T_{13}+iBT_{43}\right)$$

$$T'_{14}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{1\alpha}a_{4\beta}T_{\alpha\beta}=a_{11}a_{41}T_{11}+a_{11}a_{44}T_{14}+a_{14}a_{41}T_{41}+a_{14}a_{44}T_{44}=\Gamma^2\left[T_{14}+B^2T_{41}+iB\left(T_{44}-T_{11}\right)\right]$$

$$T'_{21} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{2\alpha}a_{1\beta}T_{\alpha\beta} = a_{22}a_{11}T_{21} + a_{22}a_{14}T_{24} = \Gamma\left(T_{21} + iBT_{24}\right)$$

$$T'_{22} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{2\alpha}a_{2\beta}T_{\alpha\beta} = a_{22}a_{22}T_{22} = T_{22}$$

$$T'_{23} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{2\alpha}a_{3\beta}T_{\alpha\beta} = a_{22}a_{33}T_{23} = T_{23}$$

$$T'_{24} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{2\alpha}a_{4\beta}T_{\alpha\beta} = a_{22}a_{41}T_{21} + a_{22}a_{44}T_{24} = \Gamma\left(T_{24} - iBT_{21}\right)$$

$$T'_{31} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{3\alpha}a_{1\beta}T_{\alpha\beta} = a_{33}a_{11}T_{31} + a_{33}a_{14}T_{34} = \Gamma\left(T_{31} + iBT_{34}\right)$$

$$T'_{32} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{3\alpha}a_{2\beta}T_{\alpha\beta} = a_{33}a_{22}T_{32} = T_{32}$$

$$T'_{33} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{3\alpha}a_{3\beta}T_{\alpha\beta} = a_{33}a_{33}T_{33} = T_{33}$$

$$T'_{34} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{3\alpha}a_{4\beta}T_{\alpha\beta} = a_{33}a_{41}T_{31} + a_{33}a_{44}T_{34} = \Gamma\left(T_{34} - iBT_{31}\right)$$

$$T'_{41} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{4\alpha}a_{1\beta}T_{\alpha\beta} = a_{41}a_{11}T_{11} + a_{41}a_{14}T_{14} + a_{44}a_{11}T_{41} + a_{44}a_{14}T_{44} = \Gamma^2\left[T_{41} + B^2T_{14} + iB\left(T_{44} - T_{11}\right)\right]$$

$$T'_{42} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{4\alpha}a_{2\beta}T_{\alpha\beta} = a_{41}a_{22}T_{12} + a_{44}a_{22}T_{42} = \Gamma\left(T_{42} - iBT_{12}\right)$$

$$T'_{43} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{4\alpha}a_{3\beta}T_{\alpha\beta} = a_{41}a_{33}T_{13} + a_{44}a_{33}T_{43} = \Gamma\left(T_{43} - iBT_{13}\right)$$

$$T'_{44} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{4\alpha}a_{4\beta}T_{\alpha\beta} = a_{41}a_{41}T_{11} + a_{41}a_{44}T_{14} + a_{44}a_{41}T_{41} + a_{44}a_{44}T_{44} = \Gamma^2\left[T_{44} - B^2T_{11} - iB\left(T_{14} + T_{41}\right)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}
T'_{11} &= \Gamma^2\left[T_{11} - B^2T_{44} + iB\left(T_{14} + T_{41}\right)\right]\\
T'_{12} &= \Gamma\left(T_{12} + iBT_{42}\right)\\
T'_{13} &= \Gamma\left(T_{13} + iBT_{43}\right)\\
T'_{14} &= \Gamma^2\left[T_{14} + B^2T_{41} + iB\left(T_{44} - T_{11}\right)\right]\\
T'_{21} &= \Gamma\left(T_{21} + iBT_{24}\right)\\
T'_{22} &= T_{22}, \quad T'_{23} = T_{23}\\
T'_{24} &= \Gamma\left(T_{24} - iBT_{21}\right)\\
T'_{31} &= \Gamma\left(T_{31} + iBT_{34}\right)\\
T'_{32} &= T_{32}, \quad T'_{33} = T_{33}\\
T'_{34} &= \Gamma\left(T_{34} - iBT_{31}\right)\\
T'_{41} &= \Gamma^2\left[T_{41} + B^2T_{14} + iB\left(T_{44} - T_{11}\right)\right]\\
T'_{42} &= \Gamma\left(T_{42} - iBT_{12}\right)\\
T'_{43} &= \Gamma\left(T_{43} - iBT_{13}\right)\\
T'_{44} &= \Gamma^2\left[T_{44} - B^2T_{11} - iB\left(T_{14} + T_{41}\right)\right]
\end{aligned}}$$

- **Odwrotna transformacja Lorentza czterotensora drugiego rzędu**

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta}T'_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu}\frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu}T'_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{\mu\alpha}c_{\nu\beta}T'_{\alpha\beta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} c_{\mu\alpha} &= \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha} = \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \\ c_{\nu\beta} &= \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta} = \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \end{aligned}} \qquad \left[c_{pq}\right] = \begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$T_{11} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{1\alpha}c_{1\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{11}c_{11}T'_{11} + c_{11}c_{14}T'_{14} + c_{14}c_{11}T'_{41} + c_{14}c_{14}T'_{44} =$$
$$= \Gamma^2 T'_{11} - iB\Gamma^2\left(T'_{14} + T'_{41}\right) = \Gamma^2\left[T'_{11} - iB^2T'_{44} - iB\left(T'_{14} + T'_{41}\right)\right]$$

$$T_{12} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{1\alpha}c_{2\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{11}c_{22}T'_{12} + c_{14}c_{22}T'_{42} = \Gamma T'_{12} - iB\Gamma T'_{42} = \Gamma\left(T'_{12} - iBT'_{42}\right)$$

$$T_{13} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{1\alpha}c_{3\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{11}c_{33}T'_{13} + c_{14}c_{33}T'_{43} = \Gamma T'_{13} - iB\Gamma T'_{43} = \Gamma\left(T'_{13} - iBT'_{43}\right)$$

$$T_{14} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{1\alpha}c_{4\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{11}c_{41}T'_{11} + c_{11}c_{44}T'_{14} + c_{14}c_{41}T'_{41} + c_{14}c_{44}T'_{44} =$$
$$= iB\Gamma^2T'_{11} + \Gamma^2T'_{14} + B^2\Gamma^2T'_{41} - iB\Gamma^2T'_{44} = \Gamma^2\left[T'_{14} + B^2T'_{41} - iB\left(T'_{44} - T'_{11}\right)\right]$$

$$T_{21} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{2\alpha}c_{1\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{22}c_{11}T'_{21} + c_{22}c_{14}T'_{24} = \Gamma T'_{21} - iB\Gamma T'_{24} = \Gamma\left(T'_{21} - iBT'_{24}\right)$$

$$T_{22} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{2\alpha}c_{2\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{22}c_{22}T'_{22} = T'_{22}, \qquad T_{23} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{2\alpha}c_{3\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{22}c_{33}T'_{23} = T'_{23}$$

$$T_{24} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{2\alpha}c_{4\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{22}c_{41}T'_{21} + c_{22}c_{44}T'_{24} = iB\Gamma T'_{21} + \Gamma T'_{24} = \Gamma\left(T'_{24} + iBT'_{21}\right)$$

$$T_{31} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{3\alpha}c_{1\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{33}c_{11}T'_{31} + c_{33}c_{14}T'_{34} = \Gamma T'_{31} - iB\Gamma T'_{34} = \Gamma\left(T'_{31} - iBT'_{34}\right)$$

$$T_{32} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{3\alpha}c_{2\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{33}c_{22}T'_{32} = T'_{32}, \qquad T_{33} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{3\alpha}c_{3\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{33}c_{33}T'_{33} = T'_{33}$$

$$T_{34} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{3\alpha}c_{4\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{33}c_{41}T'_{31} + c_{33}c_{44}T'_{34} = iB\Gamma T'_{31} + \Gamma T'_{34} = \Gamma\left(T'_{34} + iBT'_{31}\right)$$

$$T_{41} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{4\alpha}c_{1\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{41}c_{11}T'_{11} + c_{41}c_{14}T'_{14} + c_{44}c_{11}T'_{41} + c_{44}c_{14}T'_{44} =$$
$$= iB\Gamma^2T'_{11} + B^2\Gamma^2T'_{14} + \Gamma^2T'_{41} - iB\Gamma^2T'_{44} = \Gamma^2\left[T'_{41} + B^2T'_{14} - iB\left(T'_{44} - T'_{11}\right)\right]$$

$$T_{42} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{4\alpha}c_{2\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{41}c_{22}T'_{12} + c_{44}c_{22}T'_{42} = iB\Gamma T'_{12} + \Gamma T'_{42} = \Gamma\left(T'_{42} + iBT'_{12}\right)$$

$$T_{43} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{4\alpha}c_{3\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{41}c_{33}T'_{13} + c_{44}c_{33}T'_{43} = iB\Gamma T'_{13} + \Gamma T'_{43} = \Gamma\left(T'_{43} + iBT'_{13}\right)$$

$$T_{44} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{4\alpha}c_{4\beta}T'_{\alpha\beta} = c_{41}c_{41}T'_{11} + c_{41}c_{44}T'_{14} + c_{44}c_{41}T'_{41} + c_{44}c_{44}T'_{44} =$$
$$= -B^2\Gamma^2T'_{11} + iB\Gamma^2\left(T'_{14} + T'_{41}\right) + \Gamma^2T'_{44} = \Gamma^2\left[T'_{44} - B^2T'_{11} + iB\left(T'_{14} + T'_{41}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \Gamma^2\left[T'_{11} - B^2 T'_{44} - iB\left(T'_{14} + T'_{41} \right)\right] \\
T_{12} &= \Gamma\left(T'_{12} - iBT'_{42} \right) \\
T_{13} &= \Gamma\left(T'_{13} - iBT'_{43} \right) \\
T_{14} &= \Gamma^2\left[T'_{14} + B^2 T'_{41} - iB\left(T'_{44} - T'_{11} \right)\right] \\
T_{21} &= \Gamma\left(T'_{21} - iBT'_{24} \right) \\
T_{22} &= T'_{22}, \quad T_{23} = T'_{23} \\
T_{24} &= \Gamma\left(T'_{24} + iBT'_{21} \right) \\
T_{31} &= \Gamma\left(T'_{31} - iBT'_{34} \right) \\
T_{32} &= T'_{32}, \quad T_{33} = T'_{33} \\
T_{34} &= \Gamma\left(T'_{34} + iBT'_{31} \right) \\
T_{41} &= \Gamma^2\left[T'_{41} + B^2 T'_{14} - iB\left(T'_{44} - T'_{11} \right)\right] \\
T_{42} &= \Gamma\left(T'_{42} + iBT'_{12} \right) \\
T_{43} &= \Gamma\left(T'_{43} + iBT'_{13} \right) \\
T_{44} &= \Gamma^2\left[T'_{44} - B^2 T'_{11} + iB\left(T'_{14} + T'_{41} \right)\right]
\end{aligned}$$

- **Ślad tensora jako niezmiennik**

TWIERDZENIE
Ślad tensora drugiego rzędu jest niezmiennikiem transformacji ortogonalnych, a w szczególności transformacji Lorentza.

$$\sum_{\mu=1}^{4} T'_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} T_{\mu\mu}$$

$$T'_{11} + T'_{22} + T'_{33} + T'_{44} = T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44}$$

DOWÓD

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & T_{14} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & T_{24} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & T_{34} \\ T_{41} & T_{42} & T_{43} & T_{44} \end{bmatrix}$$

$$T'_{\mu\nu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\nu\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

$$T'_{\mu\mu} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} T_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=1}^{4} T'_{\mu\mu} &= \sum_{\mu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} T_{\alpha\beta} = \\
&= \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\mu=1}^{4} a_{\mu\alpha} a_{\mu\beta} T_{\alpha\beta} = \\
&= \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} \delta_{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^{4} T_{\mu\mu}
\end{aligned}$$

$$\sum_{\mu=1}^{4} T'_{\mu\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} T_{\mu\mu}$$

- **Wyznacznik tensora jako niezmiennik**

TWIERDZENIE
Wyznacznik utworzony ze współrzędnych tensora drugiego rzędu jest niezmiennikiem transformacji ortogonalnych, a w szczególności transformacji Lorentza.

$$\det\left[T'_{\mu\nu}\right]=\det\left[T_{\mu\nu}\right]$$

DOWÓD

$$T'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}$$

$$\left[T'_{\mu\nu}\right]=\left[a_{\mu\alpha}\right]\left[a_{\nu\beta}\right]\left[T_{\alpha\beta}\right]$$

$$\det\left[a_{\mu\alpha}\right]=+1\vee -1$$

$$\det\left[a_{\nu\beta}\right]=+1\vee -1$$

$$\det\left[T'_{\mu\nu}\right]=\det\left\{\left[a_{\mu\alpha}\right]\left[a_{\nu\beta}\right]\left[T_{\alpha\beta}\right]\right\}=$$

$$=\det\left[a_{\mu\alpha}\right]\det\left[a_{\nu\beta}\right]\det\left[T_{\alpha\beta}\right]=$$

$$=\det\left[T_{\alpha\beta}\right]$$

$$\det\left[T'_{\mu\nu}\right]=\det\left[T_{\mu\nu}\right]$$

9 CZTEROGRADIENT, CZTERODYWERGENCJA I DALAMBERCJAN

- **Czterogradient**

Czterowymiarowy gradient (czterogradient) funkcji skalarnej
$\varphi=\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)=\varphi(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)$
definiujemy jak następuje

$$\operatorname{grad}\varphi\overset{df}{=}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\mathbf{e}_\mu=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\frac{\partial\varphi}{\partial x_3},\frac{\partial\varphi}{\partial x_4}\right).$$

Przy zmianie układu odniesienia i poddaniu współrzędnych przekształceniu

$$x'_\mu=\sum_{\nu=}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}x_\nu=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}x_\nu=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu\quad(\mu=1,2,3,4),\qquad a_{\mu\nu}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$

składowe czterogradientu transformują się według wzoru

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\nu}.$$

Czterogradient jest więc czterowektorem, który powstał z działania operatorem

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathbf{e}_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

na funkcję skalarną φ.
Operator ten jest również czterowektorem, gdyż jego składowe transformują się według wzoru

$$\frac{\partial}{\partial x'_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

- **Czterodywergencja**

Czterowymiarowa dywergencja (czterodywergencja) czterowektora jest iloczynem skalarnym operatora

$$\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\mathbf{e}_\mu=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_3},\frac{\partial}{\partial x_4}\right)$$

i czterowektora

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\sum_{\mu=1}^{4}\widetilde{A}_\mu\mathbf{e}_\mu=\left(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\widetilde{A}_3,\widetilde{A}_4\right):$$

$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x_\mu}.$$

- **Czterodywergencja jako niezmiennik**

$$x'_\mu=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}x_\nu=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}x_\nu=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}x_\nu$$
$$\mu=1,2,3,4$$
$$a_{\mu\nu}=\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu}=\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}$$
$$\widetilde{A}'_\mu=\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\alpha}\widetilde{A}_\alpha$$
$$\frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}=0$$
$$\sum_{\mu=1}^{4}a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}=\delta_{\nu\alpha}$$

$$\widetilde{\mathbf{A}}=\left(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\widetilde{A}_3,\widetilde{A}_4\right)$$
$$\widetilde{\mathbf{A}}'=\left(\widetilde{A}'_1,\widetilde{A}'_2,\widetilde{A}'_3,\widetilde{A}'_4\right)$$
$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x_\mu}$$
$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}'\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}'_\mu}{\partial x'_\mu}$$
$$\frac{\partial\widetilde{A}'_\mu}{\partial x'_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}'_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial\widetilde{A}'_\mu}{\partial x_\nu}=\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\alpha}\widetilde{A}_\alpha=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}a_{\mu\alpha}\widetilde{A}_\alpha=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\nu}\left(a_{\mu\alpha}\frac{\partial\widetilde{A}_\alpha}{\partial x_\nu}+\widetilde{A}_\alpha\frac{\partial a_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu}\right)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{4}\sum_{\alpha=1}^{4}a_{\mu\nu}a_{\mu\alpha}\frac{\partial\widetilde{A}_\alpha}{\partial x_\nu}=\delta_{\nu\alpha}\frac{\partial\widetilde{A}_\alpha}{\partial x_\nu}=\frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x_\mu}$$
$$\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}'\overset{\mathrm{df}}{=}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}'_\mu}{\partial x'_\mu}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\widetilde{A}_\mu}{\partial x_\mu}=\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{A}}$$

Dywergencja czterowektora jest niezmiennikiem przekształceń Lorentza.

- **Dalambercjan**

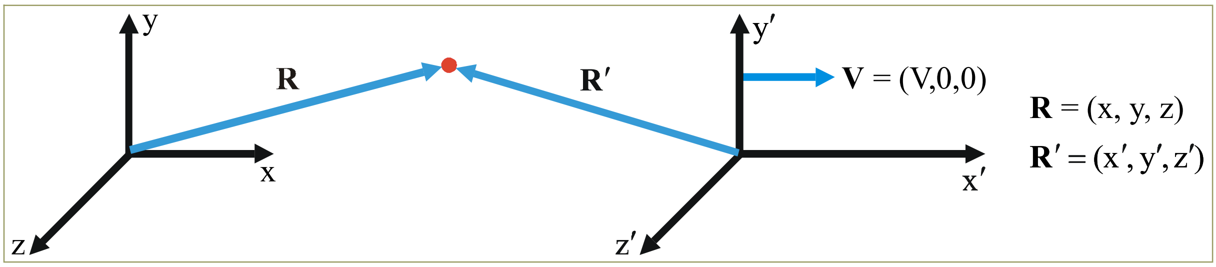
$$\varphi=\varphi(x,y,z,t)=\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

$$\Box\varphi\overset{\mathrm{df}}{=}\nabla^2\varphi-c^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-c^{-2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial(ict)^2}=$$
$$=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu^2}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}=\operatorname{div}\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$$

Ponieważ $\operatorname{grad}\varphi$ jest czterowektorem, a dywergencja czterowektora jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, więc dalambercjan funkcji skalarnej φ jest również niezmiennikiem tych przekształceń.

10 CZTEROWEKTORY POŁOŻENIA, PRĘDKOŚCI, PRZYSPIESZENIA I PĘDU

- **Czterowektor położenia**



$$\tilde{\mathbf{A}} = \left(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3, \tilde{A}_4\right)$$
$$\tilde{\mathbf{A}}' = \left(\tilde{A}_1', \tilde{A}_2', \tilde{A}_3', \tilde{A}_4'\right)$$

$$\tilde{A}_1' = \Gamma\left(\tilde{A}_1 + iB\tilde{A}_4\right)$$
$$\tilde{A}_2' = \tilde{A}_2$$
$$\tilde{A}_3' = \tilde{A}_3$$
$$\tilde{A}_4' = \Gamma\left(\tilde{A}_4 - iB\tilde{A}_1\right)$$

$$\tilde{A}_1 = \Gamma\left(\tilde{A}'_1 - iB\tilde{A}'_4\right)$$
$$\tilde{A}_2 = \tilde{A}'_2$$
$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}'_3$$
$$\tilde{A}_4 = \Gamma\left(\tilde{A}'_4 + iB\tilde{A}'_1\right)$$

$$\Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = Vc^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{R}} \overset{df}{=} \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x, y, z, ict\right) = \left(\mathbf{R}, ict\right)$$
$$\tilde{\mathbf{R}}' = \left(x_1', x_2', x_3', x_4'\right) = \left(x', y', z', ict'\right) = \left(\mathbf{R}', ict'\right)$$

$$x' = \Gamma\left(x - Vt\right)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \Gamma\left(t - Vc^{-2}x\right)$$

$$x = \Gamma\left(x' + Vt'\right)$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \Gamma\left(t' + Vc^{-2}x'\right)$$

- **Czterowektor prędkości**

$$\tilde{\mathbf{R}} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x, y, z, ict\right) = \left(\mathbf{R}, ict\right)$$

$d\tau = \gamma^{-1}dt$ = czas własny

$$\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad \beta = vc^{-1}$$
$$v = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$v_x = v_1 = \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}$$
$$v_y = v_2 = \frac{dy}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$$
$$v_z = v_3 = \frac{dz}{dt} = \frac{dx_3}{dt}$$
$$v_4 = ic$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \overset{df}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{d\tau} = \gamma\frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{dt} = \left(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\right)$$

$\tilde{\mathbf{v}}$ = czterowektor prędkości cząstki względem układu laboratoryjnego

$$\tilde{v}_1 = \frac{dx_1}{d\tau} = \gamma\frac{dx_1}{dt} = \gamma\frac{dx}{dt} = \gamma v_x = \gamma v_1$$
$$\tilde{v}_2 = \frac{dx_2}{d\tau} = \gamma\frac{dx_2}{dt} = \gamma\frac{dy}{dt} = \gamma v_y = \gamma v_2$$
$$\tilde{v}_3 = \frac{dx_3}{d\tau} = \gamma\frac{dx_3}{dt} = \gamma\frac{dz}{dt} = \gamma v_z = \gamma v_3$$
$$\tilde{v}_4 = \frac{dx_4}{d\tau} = \gamma\frac{dx_4}{dt} = \gamma\frac{dict}{dt} = \gamma ic = \gamma v_4$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{d\tau} = \left(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\right) = \left(\frac{dx_1}{d\tau}, \frac{dx_2}{d\tau}, \frac{dx_3}{d\tau}, \frac{dx_4}{d\tau}\right) = \left(\gamma\frac{dx_1}{dt}, \gamma\frac{dx_2}{dt}, \gamma\frac{dx_3}{dt}, \gamma\frac{dx_4}{dt}\right) =$$

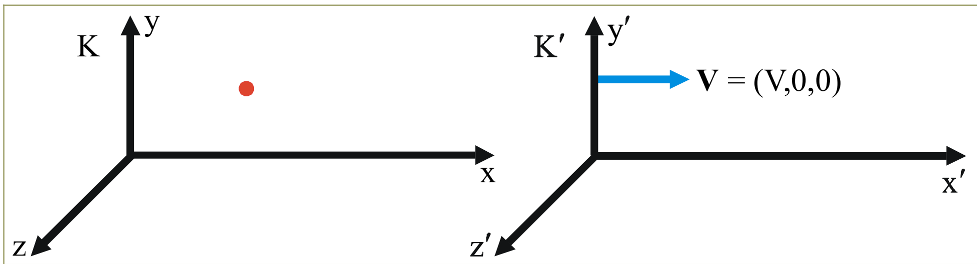
$$= \left(\gamma\frac{dx}{dt}, \gamma\frac{dy}{dt}, \gamma\frac{dz}{dt}, \gamma\frac{dict}{dt}\right) = \left(\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, \gamma ic\right) = \left(\gamma v_1, \gamma v_2, \gamma v_3, \gamma ic\right)$$

- **Kwadrat modułu czterowektora prędkości**

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \left(\gamma v_x\right)^2 + \left(\gamma v_y\right)^2 + \left(\gamma v_z\right)^2 + \left(ic\gamma\right)^2 = \gamma^2\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) - \gamma^2 c^2 =$$

$$= \gamma^2 v^2 - \gamma^2 c^2 = \gamma^2\left(v^2 - c^2\right) = \frac{v^2 - c^2}{1 - v^2 c^{-2}} = -c^2$$

- **Relatywistyczna transformacja prędkości**



$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$\mathbf{v}' = (v'_x, v'_y, v'_z)$$

$$\gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \beta = vc^{-1}$$
$$\gamma' = \left(1-\beta'^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \beta' = v'c^{-1}$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z, ic\gamma\right)$$
$$\tilde{\mathbf{v}}' = \left(\gamma' v'_x, \gamma' v'_y, \gamma' v'_z, ic\gamma'\right)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}$$
$$v'_x = \frac{dx'}{dt'},\ v'_y = \frac{dy'}{dt'},\ v'_z = \frac{dz'}{dt'}$$

$$\Gamma = \left(1 - V^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = Vc^{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$\tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3, \tilde{v}_4\right)$ 4-prędkość cząstki w układzie K

$\tilde{\mathbf{v}}' = \left(\tilde{v}'_1, \tilde{v}'_2, \tilde{v}'_3, \tilde{v}'_4\right)$ 4-prędkość cząstki w układzie K′

$$\tilde{v}'_1 = \Gamma\left(\tilde{v}_1 + iB\tilde{v}_4\right)$$
$$\tilde{v}'_2 = \tilde{v}_2$$
$$\tilde{v}'_3 = \tilde{v}_3$$
$$\tilde{v}'_4 = \Gamma\left(\tilde{v}_4 - iB\tilde{v}_1\right)$$

$$\gamma' v'_x = \Gamma\gamma\left(v_x - V\right)$$
$$\gamma' v'_y = \gamma v_y$$
$$\gamma' v'_z = \gamma v_z$$
$$ic\gamma' = ic\gamma\Gamma\left(1 - Vc^{-2}v_x\right)$$

$$\boxed{\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - Vc^{-2}v_x\right)} = \frac{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vc^{-2}v_x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x c^{-2}} \\ v_y &= \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 + Vv'_x c^{-2}} \\ v_z &= \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 + Vv'_x c^{-2}} \end{aligned}} \longleftarrow \boxed{\begin{aligned} v'_x &= \Gamma\frac{\gamma}{\gamma'}\left(v_x - V\right) = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x c^{-2}} \\ v'_y &= \frac{\gamma}{\gamma'}v_y = \frac{v_y\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vv_x c^{-2}} \\ v'_z &= \frac{\gamma}{\gamma'}v_z = \frac{v_z\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vv_x c^{-2}} \end{aligned}}$$

- **Relatywistyczne składanie prędkości równoległych**

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x c^{-2}}$$

$$v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2 c^{-2}}}{1 + Vv'_x c^{-2}}$$

$$v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2 c^{-2}}}{1 + Vv'_x c^{-2}}$$

Jeżeli cząstka porusza się względem układu K po osi X z prędkością **v** a względem układu K′ po osi X′ z prędkością **v**′, to $v_x = v$, $v'_x = v'$, $v_y = v'_y = v_z = v'_z = 0$ oraz

$$\boxed{v = \frac{v' + V}{1 + Vv'c^{-2}}}$$

- **Doświadczenie Fizeau**

Pomiary prędkości światła w spoczywającej i poruszającej się wodzie wskazywały, że klasyczny wzór na składanie prędkości nie jest prawdziwy w przypadku światła.

Wzór na klasyczne składanie prędkości prowadzi do wyniku

$$v = \frac{c}{n} + V.$$

Z doświadczenia wynikało, że

$$\boxed{v = \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

Wzór Fresnela

V = prędkość wody względem laboratorium

$v' = \frac{c}{n}$ = prędkość światła względem spoczywającej wody

v = prędkość światła w poruszającej się wodzie mierzona względem laboratorium

Aby wyjaśnić wynik doświadczenia Fizeau, wykorzystamy wzór na relatywistyczne składanie prędkości.

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + V}{1 + \frac{V}{cn}} = \frac{\left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{cn}\right)}{1 - \left(\frac{V}{cn}\right)^2}$$

$$\frac{V^2}{c^2} << 1$$

$$v \approx \left(\frac{c}{n} + V\right)\left(1 - \frac{V}{cn}\right) = \frac{c}{n}\left[1 + \frac{Vn}{c}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{V^2}{c^2}\right]$$

$$\frac{V^2}{c^2} << 1$$

$$v \cong \frac{c}{n} + V\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Otrzymaliśmy wzór zgadzający się z w wynikiem doświadczalnym.

- **Czterowektor przyspieszenia**

$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\beta = vc^{-1}$$
$$d\tau = \gamma^{-1} dt$$

$$\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$
$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\tilde{v}_1 = \gamma v_x$$
$$\tilde{v}_2 = \gamma v_y$$
$$\tilde{v}_3 = \gamma v_z$$

$$\mathbf{a}_\parallel \parallel \mathbf{v}$$
$$\mathbf{a}_\perp \perp \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp\right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\parallel$$

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} \overset{df}{=} \frac{d^2 \tilde{\mathbf{R}}}{d\tau^2} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau} = \left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4\right)$$

$$\tilde{a}_i = \frac{d\tilde{v}_i}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{v}_i}{dt} = \frac{d^2 x_i}{d\tau^2}, \qquad (i = 1,2,3,4)$$

$$\tilde{a}_1 = \frac{d\tilde{v}_1}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{v}_1}{dt} = \gamma \frac{d\gamma v_x}{dt} = \gamma\left(\gamma \frac{dv_x}{dt} + v_x \frac{d\gamma}{dt}\right) =$$
$$= \gamma^2 \frac{dv_x}{dt} + \gamma v_x \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2 \dot{v}_x + \gamma v_x \dot{\gamma} = \gamma^2 a_x + \gamma v_x \dot{\gamma}$$

$$\tilde{a}_2 = \frac{d\tilde{v}_2}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{v}_2}{dt} = \gamma \frac{d\gamma v_y}{dt} = \gamma\left(\gamma \frac{dv_y}{dt} + v_y \frac{d\gamma}{dt}\right) =$$
$$= \gamma^2 \frac{dv_y}{dt} + \gamma v_y \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2 \dot{v}_y + \gamma v_y \dot{\gamma} = \gamma^2 a_y + \gamma v_y \dot{\gamma}$$

$$\tilde{a}_3 = \frac{d\tilde{v}_3}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{v}_3}{dt} = \gamma \frac{d\gamma v_z}{dt} = \gamma\left(\gamma \frac{dv_z}{dt} + v_z \frac{d\gamma}{dt}\right) =$$
$$= \gamma^2 \frac{dv_z}{dt} + \gamma v_z \frac{d\gamma}{dt} = \gamma^2 \dot{v}_z + \gamma v_z \dot{\gamma} = \gamma^2 a_z + \gamma v_z \dot{\gamma}$$

$$\tilde{a}_4 = \frac{d\tilde{v}_4}{d\tau} = \gamma \frac{d\tilde{v}_4}{dt} = \gamma \frac{dic\gamma}{dt} = ic\gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4\right) = \left(\gamma^2 \dot{\mathbf{v}} + \gamma \mathbf{v}\dot{\gamma}, ic\gamma\dot{\gamma}\right) = \left(\gamma^2 \mathbf{a} + \gamma \mathbf{v}\dot{\gamma}, ic\gamma\dot{\gamma}\right)$$

Obliczymy teraz występujący w powyższych wzorach czynnik $\dot{\gamma}$.

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-1} \frac{d}{dt}\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= -\gamma^2 \frac{d}{dt}\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\gamma^2 \frac{1}{2}\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-2\mathbf{v}c^{-2}\right) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} =$$
$$= \gamma^3 c^{-2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^3 c^{-2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \gamma^3 c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \gamma^3 c^{-2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_\parallel = \frac{1}{2}\gamma^3 c^{-2} \frac{dv^2}{dt}$$

- **Relatywistyczna transformacja przyspieszenia**

$$\tilde{a}_1 = \gamma^2 a_x + \gamma v_x \dot{\gamma}$$
$$\tilde{a}_2 = \gamma^2 a_y + \gamma v_y \dot{\gamma}$$
$$\tilde{a}_3 = \gamma^2 a_z + \gamma v_z \dot{\gamma}$$
$$\tilde{a}_4 = ic\gamma\dot{\gamma}$$

$$\tilde{a}_1' = \gamma'^2 a_x' + \gamma' v_x' \dot{\gamma}'$$
$$\tilde{a}_2' = \gamma'^2 a_y' + \gamma' v_y' \dot{\gamma}'$$
$$\tilde{a}_3' = \gamma'^2 a_z' + \gamma' v_z' \dot{\gamma}'$$
$$\tilde{a}_4' = ic\gamma'\dot{\gamma}'$$

$$\tilde{a}_1' = \Gamma\left(\tilde{a}_1 + iB\tilde{a}_4\right)$$
$$\tilde{a}_2' = \tilde{a}_2$$
$$\tilde{a}_3' = \tilde{a}_3$$
$$\tilde{a}_4' = \Gamma\left(\tilde{a}_4 - iB\tilde{a}_1\right)$$

$$B = Vc^{-1}$$
$$\Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\beta = vc^{-1}$$
$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\beta' = v'c^{-1}$$
$$\gamma' = \left(1 - v'^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$\gamma' = \frac{1 - Vv_xc^{-2}}{\sqrt{\left(1 - Vc^{-2}\right)\left(1 - v^2c^{-2}\right)}}$$

$$v_x' = \frac{v_x - V}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$v_y' = v_y \frac{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$v_z' = v_z \frac{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_x' = \frac{dv_x'}{dt'}$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_y' = \frac{dv_y'}{dt'}$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt}, \quad a_z' = \frac{dv_z'}{dt'}$$

$$\tilde{\mathbf{a}} = \left(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4\right) \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}' = \left(\tilde{a}_1', \tilde{a}_2', \tilde{a}_3', \tilde{a}_4'\right)$$
$$\mathbf{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right) \rightarrow \mathbf{a}' = \left(a_1', a_2', a_3'\right)$$

$$\gamma'^2 a_x' + \gamma' v_x' \dot{\gamma}' = \Gamma\left(\gamma^2 a_x + \gamma v_x \dot{\gamma} - V\gamma\dot{\gamma}\right)$$
$$a_x' = \gamma'^{-1}\left[\Gamma\gamma\gamma'^{-1}\left(a_x\gamma + v_x\dot{\gamma} - V\dot{\gamma}\right) - v_x'\dot{\gamma}'\right]$$

$$\gamma'^2 a_y' + \gamma' v_y' \dot{\gamma}' = \gamma^2 a_y + \gamma v_y \dot{\gamma}$$
$$a_y' = \gamma'^{-2}\left(\gamma^2 a_y + \gamma v_y \dot{\gamma} - \gamma' v_y' \dot{\gamma}'\right)$$

$$\gamma'^2 a_z' + \gamma' v_z' \dot{\gamma}' = \gamma^2 a_z + \gamma v_z \dot{\gamma}$$
$$a_z' = \gamma'^{-2}\left(\gamma^2 a_z + \gamma v_z \dot{\gamma} - \gamma' v_z' \dot{\gamma}'\right)$$

$$ic\gamma'\dot{\gamma}' = \Gamma\left(ic\gamma\dot{\gamma} - iVc^{-1}\gamma^2 a_x - iVc^{-1}\gamma v_x \dot{\gamma}\right)$$
$$\dot{\gamma}' = \Gamma\gamma\gamma'^{-1}\left(\dot{\gamma} - Vc^{-2}\gamma a_x - Vc^{-2}v_x\dot{\gamma}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}
a_x' &= \frac{a_x\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - Vv_xc^{-2}\right)^3} \\
a_y' &= \left[\left(1 - Vv_xc^{-2}\right)a_y + Vv_yc^{-2}a_x\right]\frac{1 - V^2c^{-2}}{\left(1 - Vv_xc^{-2}\right)^3} \\
a_z' &= \left[\left(1 - Vv_xc^{-2}\right)a_z + Vv_zc^{-2}a_x\right]\frac{1 - V^2c^{-2}}{\left(1 - Vv_xc^{-2}\right)^3}
\end{aligned}}$$

Przeprowadzając analogiczne rachunki dla transformacji odwrotnej, otrzymujemy:

$$\boxed{\begin{aligned}
a_x &= \frac{a_x'\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(1 + Vv_x'c^{-2}\right)^3} \\
a_y &= \left[\left(1 + Vv_x'c^{-2}\right)a_y' - Vv_y'c^{-2}a_x'\right]\frac{1 - V^2c^{-2}}{\left(1 + Vv_x'c^{-2}\right)^3} \\
a_z &= \left[\left(1 + Vv_x'c^{-2}\right)a_z' - Vv_z'c^{-2}a_x'\right]\frac{1 - V^2c^{-2}}{\left(1 + Vv_x'c^{-2}\right)^3}
\end{aligned}}$$

- **Czteroprędkość i czteroprzyspieszenie w układzie własnym cząstki**

Układem własnym cząstki nazywamy układ, względem którego cząstka spoczywa. Jeżeli cząstka porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem inercjalnego układu laboratoryjnego, to układ własny jest układem inercjalnym. Jeżeli cząstka porusza się ruchem przyspieszonym względem układu laboratoryjnego, to układ własny można traktować jako inercjalny tylko w poszczególnych chwilach czasu.

$$dx'_1 = dx'_2 = dx'_3 = 0$$
$$dx'_4 = ic\,dt'$$
$$v'_\beta = \frac{dx'_\beta}{dt'}, \quad (\beta = 1,2,3)$$
$$v'^2 = v'^2_1 + v'^2_2 + v'^2_3$$
$$\gamma' = \left(1 - v'^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{v}'_\alpha = \gamma' \frac{dx'_\alpha}{dt'}$$

$$v'_1 = v'_2 = v'_3 = 0$$
$$v'^2 = 0$$
$$\gamma' = 1$$
$$\tilde{v}'_1 = \tilde{v}'_2 = \tilde{v}'_3 = 0$$
$$\tilde{v}'_4 = \gamma' \frac{dx'_4}{dt'} = ic$$

$$\boxed{\begin{gathered}\tilde{\mathbf{v}}' = (0,0,0,ic) \\ |\tilde{\mathbf{v}}'| = ic\end{gathered}}$$

$$\tilde{a}'_\alpha = \gamma' \frac{d\tilde{v}'_\alpha}{dt'}$$
$$\tilde{\mathbf{v}}' = (0,0,0,ic)$$
$$\gamma' = 1$$

$$\boxed{\begin{gathered}\tilde{a}'_1 = \tilde{a}'_2 = \tilde{a}'_3 = \tilde{a}'_4 = 0 \\ \tilde{\mathbf{a}}' = (0,0,0,0)\end{gathered}}$$

- **Czterowektory prędkości i przyspieszenia cząstki są ortogonalne**

Dwa czterowektory $\tilde{\mathbf{A}}$ i $\tilde{\mathbf{B}}$ nazywamy ortogonalnymi, jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy zeru $\tilde{\mathbf{A}} \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$. W szczególności wektor zerowy jest ortogonalny do samego siebie.

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{d\tilde{\mathbf{R}}}{d\tau}$$
$$\tilde{\mathbf{a}} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau}$$
$$\frac{d(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})}{d\tau} = 2\tilde{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau}$$
$$\Big\downarrow \; \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = -c^2$$
$$\frac{d(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})}{d\tau} = 0$$

$$\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})}{d\tau} = 0$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = 0}$$

- **Czterowektor pędu**

$$\tilde{v}_1 = \gamma v_x = \gamma \frac{dx}{dt}$$
$$\tilde{v}_2 = \gamma v_y = \gamma \frac{dy}{dt}$$
$$\tilde{v}_3 = \gamma v_z = \gamma \frac{dz}{dt}$$
$$\tilde{v}_4 = ic\gamma$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$
$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\gamma' = \left(1 - v'^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{\mathbf{p}} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4)$$
$$\tilde{\mathbf{p}}' = (\tilde{p}_1', \tilde{p}_2', \tilde{p}_3', \tilde{p}_4')$$
$$\Gamma = \left(1 - V^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = Vc^{-1}$$
$$\tilde{p}^2 = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}}$$
$$\tilde{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2$$
$$\tilde{v}^2 = -c^2$$
$$p^2 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m^2 \gamma^2 v^2$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \overset{df}{=} m\tilde{\mathbf{v}} = \left(m\tilde{v}_1, m\tilde{v}_2, m\tilde{v}_3, m\tilde{v}_4\right) = \left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4\right)$$

$$\tilde{p}_1 = m\tilde{v}_1 = m\gamma v_x \overset{df}{=} p_x$$
$$\tilde{p}_2 = m\tilde{v}_2 = m\gamma v_y \overset{df}{=} p_y$$
$$\tilde{p}_3 = m\tilde{v}_3 = m\gamma v_z \overset{df}{=} p_z$$
$$\tilde{p}_4 = m\tilde{v}_4 = im\gamma c$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left(m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z, im\gamma c\right) = \left(m\gamma \mathbf{v}, im\gamma c\right) =$$
$$= \left(p_x, p_y, p_z, im\gamma c\right) = \left(\mathbf{p}, im\gamma c\right)$$

Czterowektor pędu transformuje się zgodnie z poniższymi wzorami.

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{p}_1' &= \Gamma\left(\tilde{p}_1 + iB\tilde{p}_4\right) \\ \tilde{p}_2' &= \tilde{p}_2 \\ \tilde{p}_3' &= \tilde{p}_3 \\ \tilde{p}_4' &= \Gamma\left(\tilde{p}_4 - iB\tilde{p}_1\right) \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= \Gamma\left(\tilde{p}' - iB\tilde{p}_4'\right) \\ \tilde{p}_2 &= \tilde{p}_2' \\ \tilde{p}_3 &= \tilde{p}_3' \\ \tilde{p}_4 &= \Gamma\left(\tilde{p}_4' + iB\tilde{p}_1'\right) \end{aligned}}$$

Wektor

$$\mathbf{p} \overset{df}{=} m\gamma \mathbf{v} = \left(p_x, p_y, p_z\right) = \left(m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z\right)$$

nazywamy trójwymiarowym pędem relatywistycznym.

Obliczymy jeszcze kwadrat modułu czterowekora pędu.

$$\tilde{p}^2 = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \left(m\tilde{v}_1\right)^2 + \left(m\tilde{v}_2\right)^2 + \left(m\tilde{v}_3\right)^2 + \left(m\tilde{v}_4\right)^2 =$$
$$= m^2\left(\tilde{v}_1^2 + \tilde{v}_2^2 + \tilde{v}_3^2 + \tilde{v}_4^2\right) = m^2\tilde{v}^2 = -m^2c^2$$

$$\tilde{p}^2 = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - m^2\gamma^2c^2 = m^2\gamma^2v^2 - m^2\gamma^2c^2$$

Mamy też

$$\boxed{\frac{-\tilde{p}^2}{2m} = \frac{1}{2}mc^2 = \frac{1}{2}m\gamma^2c^2 - \frac{1}{2}m\gamma^2v^2}$$

Jak pokażemy dalej, powyższa relacja ma następującą interpretację:

Kwadrat modułu czterowektora pędu (nazywanego też czterowektorem pędu-energii) opatrzony znakiem minus i podzielony przez podwojoną masę cząstki jest równy energii spoczynkowej cząstki lub różnicy jej energii całkowitej i energii kinetycznej.

- **Prędkość i przyspieszenie jako pochodne promienia wodzącego względem długości przedziału czasoprzestrzennego**

Na początku wyrazimy długość przedziału czasoprzestrzennego ds przez czynnik Lorentza γ.

$$ds^2 = dx_1 dx_1 + dx_2 dx_2 + dx_3 dx_3 + dx_4 dx_4$$

$$x_4 = ict$$

$$v^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$$

$$ds^2 = -c^2 dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$ds = icdt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$ Czynnik Lorentza

$$ds = \frac{ic}{\gamma} dt$$

$$\boxed{\gamma \frac{d}{dt} \leftrightarrow ic \frac{d}{ds}}$$

Wykorzystując powyższe odwzorowanie, zapiszemy w innej postaci wprowadzone wcześniej definicje czterowektorów prędkości i przyspieszenia:

$$\tilde{v}_\alpha = \gamma \frac{dx_\alpha}{dt} = ic \frac{dx_\alpha}{ds}, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

$$\tilde{a}_\alpha = \gamma \frac{d\tilde{v}_\alpha}{dt} = ic \frac{d\tilde{v}_\alpha}{ds}.$$

Mamy także:

$$\tilde{a}_\alpha = \gamma \frac{d\tilde{v}_\alpha}{dt} = \gamma \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{dx_\alpha}{dt}\right) = \gamma^2 \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{dx_\alpha}{dt},$$

$$\tilde{a}_\alpha = ic \frac{d\tilde{v}_\alpha}{ds} = ic \frac{d}{ds}\left(ic \frac{dx_\alpha}{ds}\right) = i^2 c^2 \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2},$$

$$\boxed{\left(\gamma^2 \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{d}{dt}\right) \leftrightarrow i^2 c^2 \frac{d^2}{ds^2}}.$$

PRZYKŁAD

Jako przykład podamy różne postacie wyrażenia na siłę Minkowskiego, którą zajmiemy się w następnym rozdziale.

$$\tilde{F}_\alpha = \gamma \frac{d\tilde{p}_\alpha}{dt} = \gamma \frac{dm\tilde{v}_\alpha}{dt} = m\gamma \frac{d\tilde{v}_\alpha}{dt} = m\left(\gamma^2 \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} \frac{dx_\alpha}{dt}\right) = mic \frac{d\tilde{v}_\alpha}{ds} = mi^2 c^2 \frac{d^2 x_\alpha}{ds^2}$$

11 DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA

- **Czterowymiarowe relatywistyczne równania ruchu, siła Minkowskiego**

$$d\tau = \gamma^{-1}dt$$
$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{\mathbf{p}} = m\tilde{\mathbf{v}}$$
$$\tilde{p}_\alpha = m\tilde{v}_\alpha$$
$$\tilde{v}_\alpha = \gamma v_\alpha$$
$$\alpha = 1,2,3,4$$
$$v_4 = ic$$
$$\mathbf{R} = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$
$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$
$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$
$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$$
$$\mathbf{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$$
$$\tilde{a}_\alpha = \gamma\frac{d\tilde{v}_\alpha}{dt}$$
$$\tilde{\mathbf{a}} = \gamma\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt}$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}}$$

$$\tilde{F}_\alpha = \frac{d\tilde{p}_\alpha}{d\tau} = \frac{d(m\tilde{v}_\alpha)}{d\tau} = \gamma\frac{d\tilde{p}_\alpha}{dt} = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_\alpha)}{dt} = \gamma\frac{d(m\gamma v_\alpha)}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{v}_\alpha}{dt} = m\tilde{a}$$
$$\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4) \ = \text{siła Minkowskiego}$$
$$\tilde{F}_1 = \gamma\frac{d\tilde{p}_1}{dt} = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_1)}{dt} = \gamma\frac{d(m\gamma v_1)}{dt} = \gamma\frac{dp_1}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{v}_1}{dt} = m\tilde{a}_1$$
$$\tilde{F}_2 = \gamma\frac{d\tilde{p}_2}{dt} = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_2)}{dt} = \gamma\frac{d(m\gamma v_2)}{dt} = \gamma\frac{dp_2}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{v}_2}{dt} = m\tilde{a}_2$$
$$\tilde{F}_3 = \gamma\frac{d\tilde{p}_3}{dt} = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_3)}{dt} = \gamma\frac{d(m\gamma v_3)}{dt} = \gamma\frac{dp_3}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{v}_3}{dt} = m\tilde{a}_3$$
$$\tilde{F}_4 = \gamma\frac{d\tilde{p}_4}{dt} = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_4)}{dt} = \gamma\frac{d(m\gamma v_4)}{dt} = i\gamma\frac{d(m\gamma c)}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{v}_4}{dt} = m\tilde{a}_4$$
$$\tilde{\mathbf{F}} = \left(\gamma\frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt}, i\gamma\frac{d(m\gamma c)}{dt}\right) = \left(\gamma\frac{d\mathbf{p}}{dt}, i\gamma\frac{d(m\gamma c)}{dt}\right)$$
$$\tilde{\mathbf{F}} = \gamma\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{dt} = m\gamma\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = m\tilde{\mathbf{a}}$$

- **Czwarta składowa czterowektora siły Minkowskiego**

$$\tilde{F}_\alpha = \gamma\frac{d(m\tilde{v}_\alpha)}{dt}$$
$$\alpha = 1,2,3,4$$
$$\tilde{v}_4 = i\gamma c$$
$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3c^{-2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$
$$\mathbf{a}_\parallel \parallel \mathbf{v}$$
$$\mathbf{a}_\perp \perp \mathbf{v}$$
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = = (\mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp)\cdot\mathbf{v} = = \mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{v}$$
$$\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma^2}{dt}$$

$$\tilde{F}_4 = i\gamma\frac{d(m\gamma c)}{dt}$$
$$\tilde{F}_4 = imc\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\tilde{F}_4 = imc^{-1}\gamma^4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$
$$\tilde{F}_4 = imc^{-1}\gamma^4(\mathbf{a}_\parallel\cdot\mathbf{v})$$
$$\tilde{F}_4 = ic^{-1}\frac{d\left(\frac{1}{2}m\gamma^2c^2\right)}{dt}$$

Jak pokażemy dalej, wielkość $\boxed{\frac{1}{2}m\gamma^2c^2 = E}$ jest całkowitą energią ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**.

- **Trójwymiarowe relatywistyczne równania ruchu Minkowskiego**

$$\tilde{\mathbf{F}} = \left(\mathbf{F}, m\gamma\frac{d(i\gamma c)}{dt}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{F} = m\gamma\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}}$$

$$\mathbf{a}_{\parallel} = \mathbf{a} \parallel \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a}_{\perp} = \mathbf{a} \perp \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 c^{-2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_{\parallel}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_{\parallel}) = v^2\mathbf{a}_{\parallel}$$

$$v^2c^{-2} + \gamma^{-2} = 1$$

Relatywistyczną siłę trójwymiarową zapiszemy w postaci ułatwiającej zbadanie pseudo-problemu dotyczącego zależności masy od prędkości.

$$\mathbf{F} = m\gamma\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = m\gamma\mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} + m\gamma^2\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\gamma^4c^{-2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_{\parallel}) + m\gamma^2(\mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}) =$$
$$= m\gamma^4c^{-2}v^2\mathbf{a}_{\parallel} + m\gamma^2\mathbf{a}_{\parallel} + m\gamma^2\mathbf{a}_{\perp} = m\gamma^4\mathbf{a}_{\parallel}\left(v^2c^{-2} + \gamma^{-2}\right) + m\gamma^2\mathbf{a}_{\perp} =$$
$$= m\gamma^4\mathbf{a}_{\parallel} + m\gamma^2\mathbf{a}_{\perp}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = m\gamma^4\mathbf{a}_{\parallel} + m\gamma^2\mathbf{a}_{\perp}}$$

Relatywistyczna siła trójwymiarowa **F** i nierelatywistyczne przyspieszenie $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ nie są w ogólności równoległe.

$m\gamma^4$ = relatywistyczna masa podłużna
$m\gamma^2$ = relatywistyczna masa poprzeczna

Masa nie zależy od prędkości, posługiwanie się pojęciem „masy relatywistycznej" prowadzi tylko do zbędnych nieporozumień.

PRZYKŁAD

$$\mathbf{F}\perp\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\gamma^2\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F}\parallel\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\gamma^4\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

- **Trójwymiarowe „relatywistyczne" równania ruchu Plancka**

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\mathbf{F}^P = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}$$

$$\mathbf{F}^P = \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt}$$

$$F^P_{\alpha} = \frac{d(m\gamma v_{\alpha})}{dt} \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

$$F^P_1 = F^P_x = \frac{d(m\gamma v_x)}{dt}$$

$$F^P_2 = F^P_y = \frac{d(m\gamma v_y)}{dt}$$

$$F^P_3 = F^P_z = \frac{d(m\gamma v_z)}{dt}$$

$$\mathbf{F}^P = \left(F^P_1, F^P_2, F^P_3\right) = \left(F^P_x, F^P_y, F^P_z\right) = \left(\frac{d(m\gamma v_x)}{dt}, \frac{d(m\gamma v_y)}{dt}, \frac{d(m\gamma v_z)}{dt}\right)$$

Stosowane w literaturze „relatywistyczne" równanie ruchu Plancka jest według mnie niepoprawne, ponieważ składowe siły Plancka $\mathbf{F}^P$ nie są składowymi przestrzennymi czterowektora siły $\tilde{\mathbf{F}}$.

- **Energia kinetyczna, całkowita i spoczynkowa w mechanice relatywistycznej**

Niech cząstka o masie m porusza się (dla prostoty) po osi x z prędkoscią **v.** Obliczymy energię kinetyczną tej cząstki, czyli pracę jaką należy wykonać aby spoczywającą cząstkę rozpędzić do prędkości **v**.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$$

$$\mathbf{F}_{\parallel} = m\gamma^4 \mathbf{a}_{\parallel}$$

$$\mathbf{F}_{\perp} = m\gamma^2 \mathbf{a}_{\perp}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{a}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{a}_{\perp} \cdot d\mathbf{x} = 0$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$$

$$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = vdv$$

$$\int \frac{vdv}{\left(c^2 - v^2\right)^2} = \frac{1}{2\left(c^2 - v^2\right)}$$

$$\gamma^2 = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-1}$$

$$E_k \overset{df}{=} \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{F}_{\perp} \cdot d\mathbf{x} = m\gamma^4 \mathbf{a}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} = m\gamma^4 \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} =$$

$$= m\gamma^4 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}dt = m\gamma^4 vdv$$

$$E_k = \int_0^v m\gamma^4 vdv = m\int_0^v \gamma^4 vdv = m\int_0^v \frac{vdv}{\left(1 - v^2 c^{-2}\right)^2} = mc^4 \int_0^v \frac{vdv}{\left(c^2 - v^2\right)^2} =$$

$$= mc^4 \left[\frac{1}{2\left(c^2 - v^2\right)}\right]_0^v = \frac{1}{2} m\gamma^2 c^2 - \frac{1}{2} mc^2 = \frac{1}{2} m\gamma^2 v^2$$

$$\boxed{E_k = \tfrac{1}{2} m\gamma^2 c^2 - \tfrac{1}{2} mc^2 = \tfrac{1}{2} m\gamma^2 v^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2} m\gamma^2 c^2 = E \\ \tfrac{1}{2} mc^2 = E_o \end{array}}$$

E_k = energia kinetyczna ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**

E = całkowita energia ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**

E_o = energia spoczynkowa ciała o masie m

Dla małych prędkości $(v << c)$ energia kinetyczna jest w przybliżeniu równa

$$E_k \approx \tfrac{1}{2} mv^2$$

Tak więc w przypadku nierelatywistycznym $(v << c)$ energia całkowita wynosi

$$\boxed{E = \tfrac{1}{2} mc^2 + \tfrac{1}{2} mv^2}$$

KOMENTARZ

Otrzymana przez nas wartość dla energii spoczynkowej jest o połowę mniejsza od wartości wynikającej z popularnej relacji $E_0 = mc^2$. Różnica ta jest spowodowana przyjętym przez nas założeniem o poprawności równań ruchu Minkowskiego a nie równań ruchu Plancka.

Relacja $E_0 = mc^2$ jest powszechnie kojarzona z nazwiskiem Einsteina i teorią względności. Wynika to ze spektakularnych jej zastosowań, wśród których należy wymienić bomby atomową i termojądrową, energetykę jądrową, zjawiska anihilacji i kreacji, zakrzywienie toru promieni świetlnych w polu grawitacyjnym oraz reakcje termojądrowe na Słońcu.

- **Relatywistyczna transformacja siły**

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \left(\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_3, \widetilde{F}_4\right)$$
$$\widetilde{\mathbf{F}}' = \left(\widetilde{F}'_1, \widetilde{F}'_2, \widetilde{F}'_3, \widetilde{F}'_4\right)$$
$$\Gamma = \left(1 - V^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = Vc^{-1}$$
$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\gamma' = \left(1 - v'^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\widetilde{F}'_1 = \Gamma\left(\widetilde{F}_1 + iB\widetilde{F}_4\right)$$
$$\widetilde{F}'_2 = \widetilde{F}_2$$
$$\widetilde{F}'_3 = \widetilde{F}_3$$
$$\widetilde{F}'_4 = \Gamma\left(\widetilde{F}_4 - iB\widetilde{F}_1\right)$$

$$\widetilde{F}_1 = \Gamma\left(\widetilde{F}'_1 - iB\widetilde{F}'_4\right)$$
$$\widetilde{F}_2 = \widetilde{F}'_2$$
$$\widetilde{F}_3 = \widetilde{F}'_3$$
$$\widetilde{F}_4 = \Gamma\left(\widetilde{F}'_4 + iB\widetilde{F}'_1\right)$$

- **Składowe czterowektora siły wyrażone przez składowe trójwymiarowych wektorów prędkości i przyspieszenia**

$$\widetilde{F}_\alpha = m\widetilde{a}_\alpha$$
$$\alpha = 1,2,3,4$$

$$\widetilde{a}_1 = \gamma^2 \frac{dv_x}{dt} + v_x \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{a}_1 = \gamma^2 \dot{v}_x + v_x \gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{a}_1 = \gamma^2 a_x + v_x \gamma\dot{\gamma}$$

$$\widetilde{a}_2 = \gamma^2 \frac{dv_y}{dt} + v_y \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{a}_2 = \gamma^2 \dot{v}_y + v_y \gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{a}_2 = \gamma^2 a_y + v_y \gamma\dot{\gamma}$$

$$\widetilde{a}_3 = \gamma^2 \frac{dv_z}{dt} + v_z \gamma \frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{a}_3 = \gamma^2 \dot{v}_z + v_z \gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{a}_3 = \gamma^2 a_z + v_z \gamma\dot{\gamma}$$

$$\widetilde{a}_4 = ic\gamma \frac{d\gamma}{dt}$$

$$\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\gamma^2}{dt} =$$
$$= \frac{1}{2}\gamma^4 c^{-2}\frac{dv^2}{dt} =$$
$$= \gamma^4 c^{-2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$
$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$
$$v_y = \frac{dy}{dt}$$
$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y$$
$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\mathbf{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$\widetilde{F}_1 = m\gamma^2 \frac{dv_x}{dt} + mv_x\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{F}_1 = m\gamma^2 \dot{v}_x + mv_x\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_1 = m\gamma^2 a_x + mv_x\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_1 = m\gamma^2 a_x + v_x\gamma^4 c^{-2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$
$$\widetilde{F}_1 = m\gamma^2 a_x + mv_x\gamma^4 c^{-2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$

$$\widetilde{F}_2 = m\gamma^2 \frac{dv_y}{dt} + mv_y\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{F}_2 = m\gamma^2 \dot{v}_y + mv_y\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_2 = m\gamma^2 a_y + mv_y\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_2 = m\gamma^2 a_y + v_y\gamma^4 c^{-2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$
$$\widetilde{F}_2 = m\gamma^2 a_y + mv_y\gamma^4 c^{-2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$

$$\widetilde{F}_3 = m\gamma^2 \frac{dv_z}{dt} + mv_z\gamma\frac{d\gamma}{dt}$$
$$\widetilde{F}_3 = m\gamma^2 \dot{v}_z + mv_z\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_3 = m\gamma^2 a_z + mv_z\gamma\dot{\gamma}$$
$$\widetilde{F}_3 = m\gamma^2 a_z + v_z\gamma^4 c^{-2}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$
$$\widetilde{F}_3 = m\gamma^2 a_z + mv_z\gamma^4 c^{-2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})$$

$$\widetilde{F}_4 = imc\gamma\frac{d\gamma}{dt} = ic^{-1}\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m\gamma^2 c^2\right)$$

- **Czterowektor pędu-energii**

$$\tilde{v}_1 = \gamma v_x$$
$$\tilde{v}_2 = \gamma v_y$$
$$\tilde{v}_3 = \gamma v_z$$
$$\tilde{v}_4 = i\gamma c$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$$
$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

$$E = \tfrac{1}{2} m\gamma^2 c^2$$

$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \overset{df}{=} m\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4)$$

$$\tilde{p}_1 = m\tilde{v}_1 = m\gamma v_x \overset{df}{=} p_x$$
$$\tilde{p}_2 = m\tilde{v}_2 = m\gamma v_y \overset{df}{=} p_y$$
$$\tilde{p}_3 = m\tilde{v}_3 = m\gamma v_z \overset{df}{=} p_z$$
$$\tilde{p}_4 = m\tilde{v}_4 = im\gamma c = 2i\gamma^{-1}c^{-1}E$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = (m\gamma\mathbf{v}, im\gamma c) = \left(\mathbf{p}, 2i\gamma^{-1}c^{-1}E\right) = \left(p_x, p_y, p_z, 2i\gamma^{-1}c^{-1}E\right)$$

$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ = trójwymiarowy pęd relatywistyczny

$$\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = (m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z)$$

- **Kwadrat modułu czterowektora pędu-energii, związek między energią i pędem**

$$\tilde{\mathbf{p}} = m\tilde{\mathbf{v}}$$
$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = -c^2$$
$$\tilde{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{p}, 2i\gamma^{-1}c^{-1}E\right)$$
$$\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$
$$E = \tfrac{1}{2} m\gamma^2 c^2$$
$$E_k = \tfrac{1}{2} m\gamma^2 c^2 - \tfrac{1}{2} mc^2$$
$$E_o = \tfrac{1}{2} mc^2$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2\tilde{\mathbf{v}}^2 = -m^2c^2$$
$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = \tilde{\mathbf{p}}\cdot\tilde{\mathbf{p}} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 4\gamma^{-2}c^{-2}E^2 = \mathbf{p}^2 - 4\gamma^{-2}c^{-2}E^2$$
$$-m^2c^2 = \mathbf{p}^2 - 4\gamma^{-2}c^{-2}E^2$$

$$\boxed{\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} m\gamma^2 c^2 - \frac{1}{2} mc^2} \quad \text{lub} \quad \boxed{\frac{p^2}{2m} = E_k = \frac{1}{2} m\gamma^2 v^2}$$

- **Transformacja czterowektora pędu-energii**

$$\tilde{p}_1 = p_x$$
$$\tilde{p}_2 = p_y$$
$$\tilde{p}_3 = p_z$$
$$\tilde{p}_4 = 2i\gamma^{-1}c^{-1}E$$

$$\tilde{p}_1' = p_x'$$
$$\tilde{p}_2' = p_y'$$
$$\tilde{p}_3' = p_z'$$
$$\tilde{p}_4' = 2i\gamma'^{-1}c^{-1}E'$$

$$B = Vc^{-1}$$

$$\Gamma = \left(1 - V^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma' = \left(1 - v'^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{p}_1' = \Gamma(\tilde{p}_1 + iB\tilde{p}_4)$$
$$\tilde{p}_2' = \tilde{p}_2$$
$$\tilde{p}_3' = \tilde{p}_3$$
$$\tilde{p}_4' = \Gamma(\tilde{p}_4 - iB\tilde{p}_1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_x' &= \Gamma\left(p_x - 2V\gamma^{-1}c^{-2}E\right) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \\ 2(\gamma')^{-1}E' &= \Gamma\left(2\gamma^{-1}E - Vp_x\right) \end{aligned}}$$

- **Funkcja Lagrange'a punktu materialnego**

Trójwymiarowe równania ruchu Minkowskiego

$$\widetilde{F}_\alpha = \gamma\frac{d\widetilde{p}_\alpha}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\widetilde{v}_\alpha\right)}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_\alpha\right)}{dt}, \qquad \alpha = 1,2,3$$

Trójwymiarowe równania ruchu Lagrange'a

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = \gamma\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}_\alpha}\right)$$

$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\widetilde{v}_\alpha = \gamma v_\alpha, \qquad v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

L = funkcja Lagrange'a (lagranżjan)

$$L = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}m\widetilde{v}_\alpha\widetilde{v}_\alpha - E_p\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

bo

$$E_p = E_p\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

E_p = energia potencjalna

$$L = L\left(\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \widetilde{v}_3, x_1, x_2, x_3\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial E_p}{\partial x_\alpha} = \widetilde{F}_\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}_\alpha} = m\widetilde{v}_\alpha = m\gamma v_\alpha = \widetilde{p}_\alpha$$

- **Funkcja Hamiltona punktu materialnego**

$$H \overset{df}{=} \sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{v}_\alpha\frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}_\alpha} - L$$

$$\frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}_\alpha} = m\widetilde{v}_\alpha = m\gamma v_\alpha = \widetilde{p}_\alpha, \qquad L = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}m\widetilde{v}_\alpha\widetilde{v}_\alpha - E_p = \sum_{\alpha=1}^{3}\frac{1}{2}m\gamma^2 v_\alpha v_\alpha - E_p$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{v}_\alpha\widetilde{v}_\alpha = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2$$

$$H = \frac{1}{2}m\gamma^2v^2 + E_p\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

- **Kanoniczne równania ruchu Hamiltona**

Aby móc posługiwać się kanonicznymi równaniami ruchu Hamiltona

$$\gamma\frac{d\widetilde{p}_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha}, \qquad \gamma\frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \widetilde{p}_\alpha}$$

wyrazimy hamiltonian cząstki H przez pędy $\widetilde{p}_\alpha$ i współrzędne x_α

$$\frac{\partial L}{\partial \widetilde{v}_\alpha} = m\widetilde{v}_\alpha = m\gamma v_\alpha = \widetilde{p}_\alpha$$

$$\widetilde{p}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{p}_\alpha^2$$

$$H = \frac{1}{2}m\gamma^2v^2 + E_p$$

$$\frac{1}{2}m\gamma^2v^2 = \frac{\widetilde{p}^2}{2m}$$

$$H = \frac{1}{2m}\sum_{\alpha=1}^{3}\widetilde{p}_\alpha^2 + E_p\left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$H = H\left(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2, \widetilde{p}_3, x_1, x_2, x_3\right)$$

12 DIAGRAM CZASOPRZESTRZENNY

- **Diagram czasoprzestrzenny**

Czterowymiarową czasoprzestrzeń będziemy obrazowali na tzw. diagramie czasoprzestrzennym, czyli w układzie współrzędnych x_1, x_4.

Cząstka spoczywająca względem układu nieprimowanego przedstawiana będzie jako prosta $x_1 = \text{const}$.

Cząstkę poruszająca się ze stałą prędkością $\mathbf{v}$ po osi x_1

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= vt \\ t &= \frac{x_4}{ic} \end{aligned}} \qquad \boxed{x_4 = -i\frac{c}{v}x_1}$$

będziemy przedstawiali jako odpowiednio nachyloną prostą.

Linia reprezentująca ruch cząstki nazywana będzie linią świata cząstki. Linie świata odpowiadające fotonom są nachylone pod kątami 45° i 135°.

Każdemu zdarzeniu A można przypisać na diagramie czasoprzestrzennym tzw. stożek świetlny, tworzą go wszystkie zdarzenia mogące pozostawać w związku przyczynowo skutkowym ze zdarzeniem A.

Transformacje Lorentza

$$x_1' = \Gamma x_1 + iB\Gamma x_4 = \cos\alpha\, x_1 + \sin\alpha\, x_4,$$

$$x_4' = -iB\Gamma x_1 + \Gamma x_4 = -\sin\alpha\, x_1 + \cos\alpha\, x_4$$

opisują obrót w płaszczyźnie x_1, x_4 o kąt, którego tangens wynosi

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = i\frac{V}{c}}$$

Składając dwa szczególne przekształcenia Lorentza wykorzystujemy fakt, że każde z nich reprezentuje obrót w płaszczyźnie x_1, x_4 o kąty odpowiednio φ_{I} i φ_{II}.

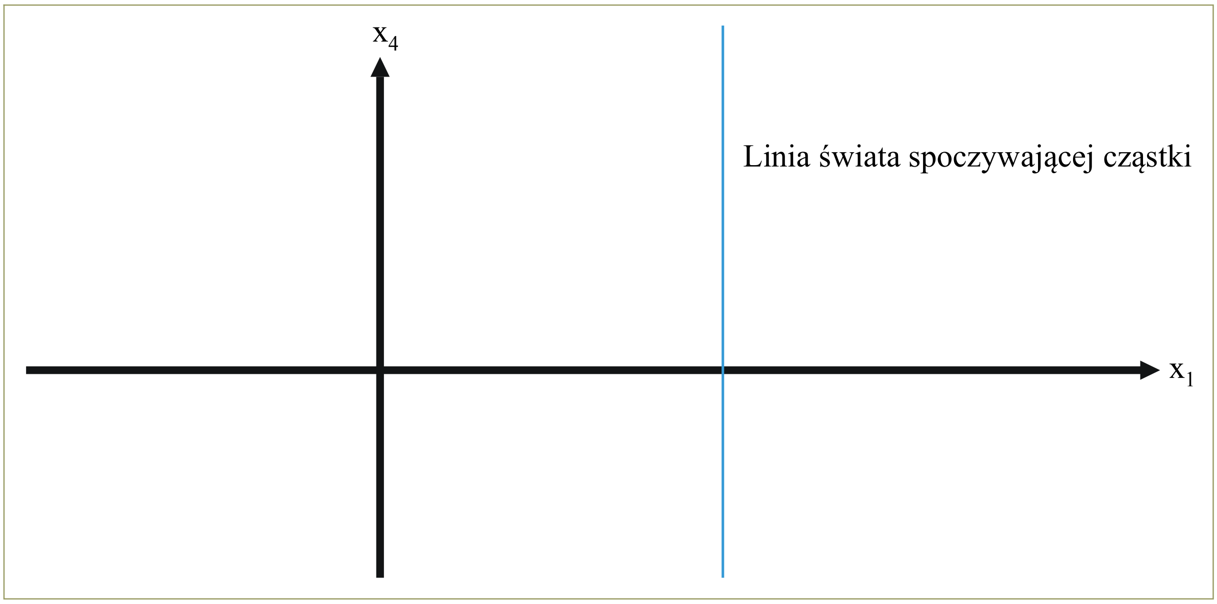
$$\varphi_{III} = \varphi_{I} + \varphi_{II}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_{III} = \frac{\operatorname{tg}\varphi_{I} + \operatorname{tg}\varphi_{II}}{1 - \operatorname{tg}\varphi_{I}\cdot\operatorname{tg}\varphi_{II}}$$

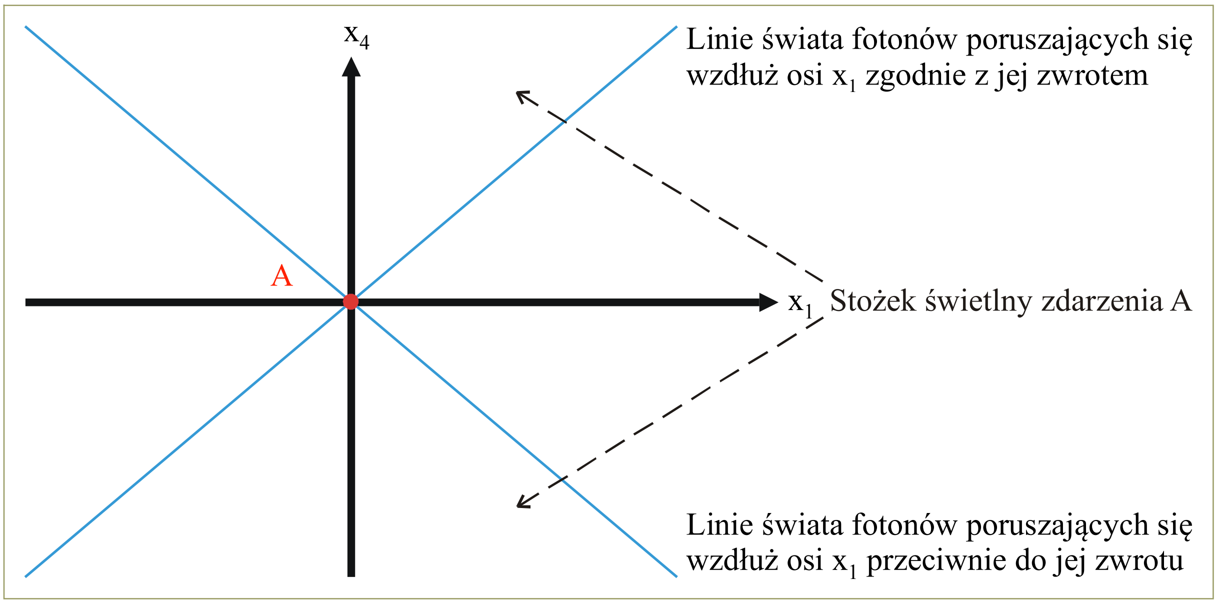
$$\operatorname{tg}\varphi_{I} = i\frac{V_{I}}{c}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{II} = i\frac{V_{II}}{c}, \quad \operatorname{tg}\varphi_{III} = i\frac{V_{III}}{c}$$

$$\boxed{V_{III} = \frac{V_{I} + V_{II}}{1 + \frac{V_{I}V_{II}}{c^2}}}$$

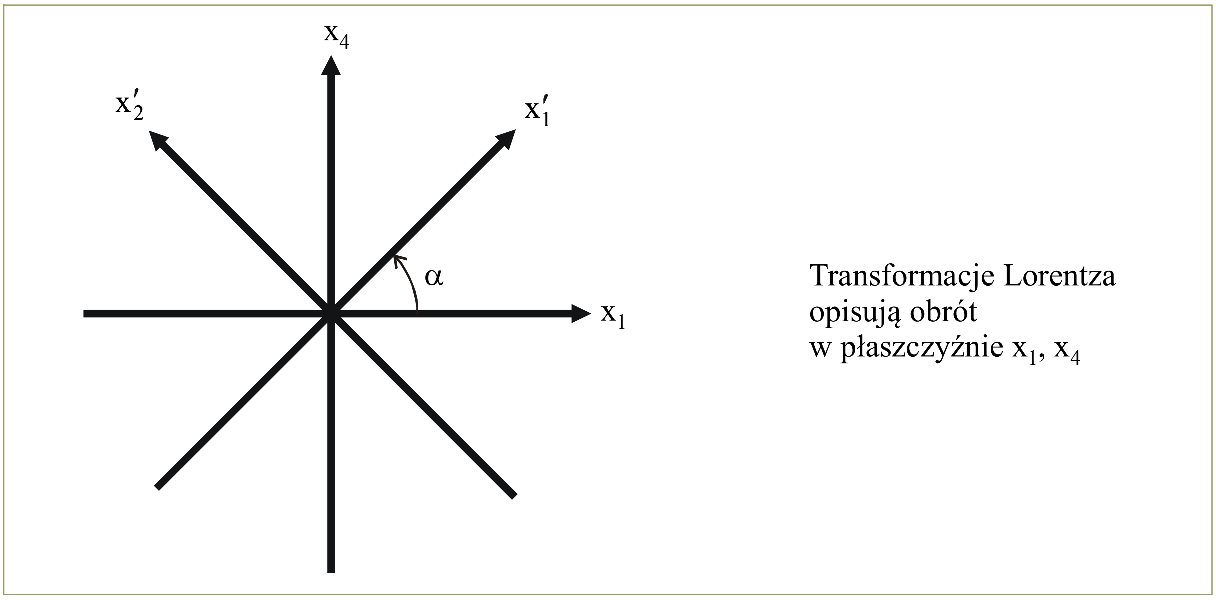
Dwa przekształcenia Lorentza z prędkościami V_{I} i V_{II} są równoważne jednemu przekształceniu Lorentza z prędkością V_{III}.



x4
Linia świata spoczywającej cząstki
x1



x4
Linie świata fotonów poruszających się wzdłuż osi x1 zgodnie z jej zwrotem
A
x1
Stożek świetlny zdarzenia A
Linie świata fotonów poruszających się wzdłuż osi x1 przeciwnie do jej zwrotu



x4
x′2
x′1
α
x1
Transformacje Lorentza opisują obrót w płaszczyźnie x1, x4

13 UWAGI KOŃCOWE

- **Niefortunna nazwa**

Teoria względności powinna mieć inną nazwę ze względu na badane w jej ramach zagadnienia. Powinna nazywać się teorią inwariantów i kowariantów (niezmienników i współzmienników). Szczególna teoria względności bada niezmienniki i współzmienniki w układach inercjalnych w nieobecności pola grawitacyjnego. Ogólna teoria względności bada niezmienniki i współzmienniki w dowolnych układach odniesienia w obecności pola grawitacyjnego.

- **Układ inercjalny**

Układ inercjalny jest najbardziej kontrowersyjnym pojęciem w dziejach fizyki. Wprowadzone przez Newtona spowodowało burzliwy rozwój fizyki, a w szczególności mechaniki. Ogólna teoria względności, detronizując pojęcie układu inercjalnego oraz pozbywając się pojęcia sił grawitacyjnych, spowodowała kolejny wielki postęp w fizyce.

Przypomnijmy, układem inercjalnym nazywamy taki układ odniesienia, w którym spełniona jest Newtonowska zasada bezwładności: „Cząstka zachowuje stan spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego wtedy i tylko wtedy, gdy wypadkowa działających na nią sił zewnętrznych jest równa zeru.”

- **Transformacje Lorentza a transformacje Galileusza**

Kładąc $c = \infty$ w przekształceniach Lorentza

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - Vxc^{-2}}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}},$$

otrzymujemy przekształcenia Galileusza

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t.$$

Nazwy transformacje Lorentza i transformacje Galileusza wprowadzili odpowiednio Henri Poincaré (1905) i Philipp Frank (1909).

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKACH SPOCZYWAJĄCYCH

1 RÓWNANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO DLA WEKTORÓW E, B, D, H – RÓWNANIA MAXWELLA

- **Równania Maxwella w postaci lokalnej (różniczkowej)**

Pole elektromagnetyczne w ośrodku spoczywającym względem danego inercjalnego układu odniesienia, nie zawierającym ferroelektryków, ferromagnetyków i magnesów stałych, opisywane jest przez równania Maxwella.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}}$$

E = natężenie pola elektrycznego
D = indukcja elektryczna
H = natężenie pola magnetycznego
B = indukcja magnetyczna
$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ = gęstość prądu
$\rho = \gamma\dfrac{dq}{dV} = \gamma\rho_0$ = gęstość objętościowa ładunku
v = prędkość ładunku dq rozmieszczonego w objętości dV

Osiem równań Maxwella, w których występuje szesnaście zmiennych:
$E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, D_x, D_y, D_z, H_x, H_y, H_z, j_x, j_y, j_z, \rho$,
należy uzupełnić dla izotropowego ośrodka dziewięcioma równaniami materiałowymi:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{j} &= \lambda\mathbf{E} \end{aligned}}$$

ε = przenikalność elektryczna ośrodka
μ = przenikalność magnetyczna ośrodka
λ = przewodnictwo elektryczne właściwe, konduktywność

które zawierają trzy nowe zmienne: $\varepsilon, \mu, \lambda$.
Najczęściej, zmienne $j_x, j_y, j_z, \rho, \varepsilon, \mu, \lambda$ są zadane.

UWAGA

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{j}}$$

Równanie ciągłości (jak pokażemy dalej) jest zawarte w równaniach Maxwella.

- **Równania Maxwella w postaci globalnej (całkowej)**

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathrm{SEM} = \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Z jednej strony

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\,,$$

z drugiej strony

$$\iint_S (-)\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\,,$$

ostatecznie

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

lub

$$\mathrm{SEM} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}\ .$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{B}\, dV = \oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

$$I = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\Phi_D = \iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

Z jednej strony

$$\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}\,,$$

z drugiej strony

$$\iint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = I + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\,,$$

ostatecznie

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

lub

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}\ .$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{A}\, dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

Z jednej strony

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{D}\, dV = \iiint_V \rho\, dV\,,$$

z drugiej strony

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{D}\, dV = \oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\,,$$

ostatecznie

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV\ .$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$
$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$
$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$
$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV$$

- **Pełny układ równań pola elektromagnetycznego we współrzędnych kartezjańskich**

17 równań

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j_x - \frac{\partial D_x}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j_y - \frac{\partial D_y}{\partial t}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j_z - \frac{\partial D_z}{\partial t}$$
$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho$$

$$D_x = \varepsilon E_x \quad D_y = \varepsilon E_y \quad D_z = \varepsilon E_z$$

$$B_x = \mu H_x \quad B_y = \mu H_y \quad B_z = \mu H_z$$

$$j_x = \lambda E_x \quad j_y = \lambda E_y \quad j_z = \lambda E_z$$

19 zmiennych

$E_x = E_x(x,y,z,t)$
$E_y = E_y(x,y,z,t)$
$E_z = E_z(x,y,z,t)$
$B_x = B_x(x,y,z,t)$
$B_y = B_y(x,y,z,t)$
$B_z = B_z(x,y,z,t)$
$H_x = H_x(x,y,z,t)$
$H_y = H_y(x,y,z,t)$
$H_z = H_z(x,y,z,t)$
$D_x = D_x(x,y,z,t)$
$D_y = D_y(x,y,z,t)$
$D_z = D_z(x,y,z,t)$
$\rho = \rho(x,y,z,t)$
$j_x = j_x(x,y,z,t)$
$j_y = j_y(x,y,z,t)$
$j_z = j_z(x,y,z,t)$
$\varepsilon = \varepsilon(x,y,z,t)$
$\mu = \mu(x,y,z,t)$
$\lambda = \lambda(x,y,z,t)$

19 warunków początkowych

$E_x(x,y,z,t=0) = E_{xo}$
$E_y(x,y,z,t=0) = E_{yo}$
$E_z(x,y,z,t=0) = E_{zo}$
$B_x(x,y,z,t=0) = B_{xo}$
$B_y(x,y,z,t=0) = B_{yo}$
$B_z(x,y,z,t=0) = B_{zo}$
$H_x(x,y,z,t=0) = H_{xo}$
$H_y(x,y,z,t=0) = H_{yo}$
$H_z(x,y,z,t=0) = H_{zo}$
$D_x(x,y,z,t=0) = D_{xo}$
$D_y(x,y,z,t=0) = D_{yo}$
$D_z(x,y,z,t=0) = D_{zo}$
$\rho = \rho(x,y,z,t=0) = \rho(0)$
$j_x = j_x(x,y,z,t=0) = j_{xo}$
$j_y = j_y(x,y,z,t=0) = j_{yo}$
$j_z = j_z(x,y,z,t=0) = j_{zo}$
$\varepsilon = \varepsilon(x,y,z,t=0) = \varepsilon(0)$
$\mu = \mu(x,y,z,t=0) = \mu(0)$
$\lambda = \lambda(x,y,z,t=0) = \lambda(0)$

2 RÓWNANIA MATERIAŁOWE

- **Równania materiałowe dla ośrodków izotropowych nie zawierających ferroelektryków, ferromagnetyków i magnesów stałych**

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathrm{H}$$
$$\mu = \mu_o \mu_r$$
$$\varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{c^2}$$
$$\varepsilon \mu = \frac{1}{v^2}$$
$$n = \frac{c}{v}$$
$$\varepsilon_r \mu_r = n^2$$
$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$$
$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$$
$$\rho = \gamma \frac{dq}{dV}$$

ε = przenikalność elektryczna ośrodka
ε_o = przenikalność elektryczna próżni = $8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
ε_r = względna przenikalność elektryczna ośrodka
μ = przenikalność magnetyczna ośrodka
μ_o = przenikalność magnetyczna próżni = $4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
μ_r = względna przenikalność magnetyczna ośrodka
c = wartość prędkości światła w próżni
v = wartość prędkości światła w danym ośrodku
n = współczynnik załamania ośrodka
λ = przewodnictwo elektryczne właściwe, konduktywność
ρ = gęstość objętościowa ładunku
dV = objętość w której rozmieszczony jest ładunek dq
j = gęstość prądu
u = prędkość ładunku dq
E = natężenie pola elektrycznego
D = indukcja elektryczna
H = natężenie pola magnetycznego
B = indukcja magnetyczna

$$\gamma = \left(1 - u^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

- **Równania materiałowe dla ośrodków anizotropowych**

W ośrodkach anizotropowych ε_r, μ_r oraz λ są tensorami.

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx} E_x + \varepsilon_{xy} E_y + \varepsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \varepsilon_{yx} E_x + \varepsilon_{yy} E_y + \varepsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \varepsilon_{zx} E_x + \varepsilon_{zy} E_y + \varepsilon_{zz} E_z \end{aligned} \qquad \varepsilon_{pq} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx} H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z \\ B_y &= \mu_{yx} H_x + \mu_{yy} H_y + \mu_{yz} H_z \\ B_z &= \mu_{zx} H_x + \mu_{zy} H_y + \mu_{zz} H_z \end{aligned} \qquad \mu_{pq} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} j_x &= \lambda_{xx} E_x + \lambda_{xy} E_y + \lambda_{xz} E_z \\ j_y &= \lambda_{yx} E_x + \lambda_{yy} E_y + \lambda_{yz} E_z \\ j_z &= \lambda_{zx} E_x + \lambda_{zy} E_y + \lambda_{zz} E_z \end{aligned} \qquad \lambda_{pq} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$

ε_{pq} = tensor przenikalności elektrycznej ośrodka
μ_{pq} = tensor przenikalności magnetycznej ośrodka
λ_{pq} = tensor przewodnictwa elektrycznego właściwego (konduktywności)

3 WARUNKI GRANICZNE

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_{2n} = B_{1n}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \quad \Rightarrow \quad D_{2n} = D_{1n} + \sigma$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad E_{2t} = E_{1t}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad H_{2t} = H_{1t} + i_{pow}$$

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{j_{2t}}{j_{1t}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad j_{2n} = j_{1n} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

B_{2n} i B_{1n} = składowe wektora **B** w ośrodku 2 i 1 prostopadłe do powierzchni granicznej
D_{2n} i D_{1n} = składowe wektora **D** w ośrodku 2 i 1 prostopadłe do powierzchni granicznej
E_{2t} i E_{1t} = składowe wektora **E** w ośrodku 2 i 1 równoległe do powierzchni granicznej
H_{2t} i H_{1t} = składowe wektora **H** w ośrodku 2 i 1 równoległe do powierzchni granicznej
j_{2t} i j_{1t} = składowe wektora **j** w ośrodku 2 i 1 równoległe do powierzchni granicznej
j_{2n} i j_{1n} = składowe wektora **j** w ośrodku 2 i 1 prostopadłe do powierzchni granicznej
σ = gęstość powierzchniowa swobodnych ładunków na powierzchni granicznej
$i_{pow} = dI_{pow}/dl$
I_{pow} = natężenie powierzchniowego prądu przewodnictwa płynącego po powierzchni granicznej prostopadle do dl

4 RÓWNANIA RUCHU – SIŁA LORENTZA

$$\boxed{\mathbf{F}^L = \gamma(q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B})}$$

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$$

$$\rho^q = \gamma \frac{dq}{dV}$$

$$\rho^m = \gamma \frac{dm}{dV}$$

$$\boxed{\mathbf{f}^L = \rho^q \mathbf{E} + \rho^q \mathbf{v} \times \mathbf{B}}$$

$$\mathbf{j} = \rho^q \mathbf{v}$$

$$\boxed{\mathbf{f}^L = \rho^q \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}}$$

$\mathbf{F}^L$ = siła Lorentza, q = ładunek
$\mathbf{E}$ = natężenie pola elektrycznego
dV = element objętości w której rozmieszczony jest ładunek dq o masie dm
$\mathbf{B}$ = indukcja pola magnetycznego
$\mathbf{F} = m\gamma \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt}$ = trójwymiarowe równania ruchu Minkowskiego
$\mathbf{f} = \rho_0^m \gamma \frac{d(\gamma \mathbf{v})}{dt}$ = objętościowa gęstość siły
$\rho^m = \gamma \rho_0^m$ = objętościowa gęstość masy
ρ_0^m = spoczynkowa gęstość objętościowa masy
$\mathbf{f}^L$ = objętościowa gęstość siły Lorentza
$\rho^q = \gamma \rho_0^q$ = objętościowa gęstość ładunku
ρ_0^q = spoczynkowa gęstość objętościowa ładunku
$\mathbf{j} = \rho_0^q \gamma \mathbf{v}$ = gęstość prądu
$\gamma = [1 + v^2 c^{-2}]^{-\frac{1}{2}}$

5 RÓWNANIA BILANSU

- **Lokalne równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej**

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial J_\beta}{\partial x_\beta}$$

Nierelatywistyczne trójwymiarowe równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

$a = \frac{dA}{dV}$ = gęstość objętościowa bilansowanej wielkości skalarnej A

$\sigma = \frac{d_i a}{dt}$ = źródło bilansowanej wielkości skalarnej = człon źródłowy

$\mathrm{div}\mathbf{J}$ = człon dywergencyjny

$\mathbf{J} = \sum_{\beta=1}^{3} J_\beta \mathbf{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^{3} a v_\beta \mathbf{e}_\beta = a\mathbf{v}$ = trójwymiarowy strumień wielkości skalarnej

$$\mathbf{v} = \sum_{\beta=1}^{3} v_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad v_\beta = \frac{dx_\beta}{dt}$$

$$J_\beta = a v_\beta, \quad (\beta = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a}{\partial t} = \sigma$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (ic\, a)}{\partial (ict)} = \sigma$$

$$x_4 = ict, \quad v_4 = ic, \quad J_\alpha = a v_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (a v_4)}{\partial x_4} = \sigma$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial (a v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \sigma \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma$$

Nierelatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

$$v^\alpha \to \tilde{v}^\alpha = \gamma v^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$$J_\alpha \to \tilde{J}_\alpha = a\gamma v_\alpha = a\tilde{v}_\alpha, \quad \tilde{v}_\alpha = \gamma\, v_\alpha, \quad v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}, \quad x_4 = ict, \quad v_4 = ic, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

$\tilde{J}_\alpha$ = składowe czterowektora strumienia wielkości skalarnej

$$\sigma = \frac{d_i a}{dt} \to \tilde{\sigma} = \gamma \frac{d_i a}{dt}$$

$$\gamma = \left[1 - v^2 c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial (a\gamma v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma} \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_\alpha}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma}}$$

Relatywistyczne równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

- **Nierelatywistyczne globalne równanie bilansu wielkości skalarnej**

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J}$$
$$\iiint_V \frac{\partial a}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V a\, dV$$
$$A = \iiint_V a\, dV$$
$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{J}\, dV = \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \frac{\partial a}{\partial t}\, dV = \iiint_V \sigma\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{J}\, dV$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V a\, dV = \iiint_V \sigma\, dV - \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = \iiint_V \sigma\, dV - \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}}$$

$\frac{\partial A}{\partial t}$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A w obszarze o objętości V ograniczonym powierzchnią zamkniętą o polu S

$\iiint_V \sigma\, dV$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A związana z przebiegiem procesów wewnątrz obszaru V

$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A związana z przepływami przez powierzchnię zamkniętą S

Strumień jest wektorem o kierunku i zwrocie pokrywającym się z kierunkiem i zwrotem transportu danej wielkości skalarnej A. Strumień i produkcja są wielkościami lokalnymi.

$J > 0$, gdy dana wielkość skalarna A wypływa z objętości V na zewnątrz
$J < 0$, gdy dana wielkość skalarna A wpływa z zewnątrz do objętości V
$\sigma > 0$, gdy wartość danej wielkość skalarnej A zwiększa się w wyniku procesów przebiegających w rozpatrywanym elemencie objętości V
$\sigma < 0$, gdy wartość danej wielkości skalarnej A zmniejsza się w wyniku procesów przebiegających w rozpatrywanym elemencie objętości V

- **Relatywistyczne globalne równanie bilansu wielkości skalarnej**

$$x_4 = ic, \quad v_4 = ict$$
$$\tilde{\sigma} = \gamma \frac{d_i a}{dt}$$
$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial(\gamma a v_\beta)}{\partial x_\beta} = \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}$$
$$\iiint_V \frac{\partial \gamma a}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \gamma a\, dV$$
$$\iiint_V \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}\, dV = \oiint_S \gamma\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$
$$\iiint_V \gamma a\, dV = \gamma\iiint_V a\, dV = \gamma A$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial(\gamma a v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma}$$
$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial(\gamma a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(\gamma a v_4)}{\partial x_4} = \tilde{\sigma}$$
$$\frac{\partial \gamma a}{\partial t} = \tilde{\sigma} - \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}$$
$$\iiint_V \frac{\partial \gamma a}{\partial t}\, dV = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}\, dV$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \gamma a\, dV = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}\, dV$$

$$\boxed{\frac{\partial \gamma A}{\partial t} = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\, \gamma\mathbf{J}\, dV}$$

- **Nierelatywistyczne lokalne równanie bilansu wielkości wektorowej**

$$\mathbf{b} = \frac{d\mathbf{B}}{dV}, \quad \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(x, y, z, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

$$J_{xx} = b_x v_x, \quad J_{xy} = b_x v_y, \quad J_{xz} = b_x v_z$$

$$J_{yx} = b_y v_x, \quad J_{yy} = b_y v_y, \quad J_{yz} = b_y v_z$$

$$J_{zx} = b_z v_x, \quad J_{zy} = b_z v_y, \quad J_{zz} = b_z v_z$$

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3$$

$$b_x = b_1, \quad b_y = b_2, \quad b_z = b_3$$

$$v_x = v_1, \quad v_y = v_2, \quad v_z = v_3$$

$$\sigma_x = \sigma_1, \quad \sigma_y = \sigma_2, \quad \sigma_z = \sigma_3, \quad \sigma_\mu = \frac{d_i b_\mu}{dt}$$

$$J_{xx} = J_{11}, \quad J_{xy} = J_{12}, \quad J_{xz} = J_{13}$$

$$J_{yx} = J_{21}, \quad J_{yy} = J_{22}, \quad J_{yz} = J_{23}$$

$$J_{zx} = J_{31}, \quad J_{zy} = J_{32}, \quad J_{zz} = J_{33}$$

$$J_{\mu\nu} = b_\mu v_\nu, \quad (\mu, \nu = 1,2,3)$$

$$\operatorname{div} J_{\bullet\bullet} = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \mathbf{e}_\mu$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = \sigma_x - \frac{\partial J_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial J_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial J_{xz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = \sigma_y - \frac{\partial J_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial J_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial J_{yz}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = \sigma_z - \frac{\partial J_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial J_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial J_{zz}}{\partial z}$$

Ostatnie trzy równania można zapisać w zwartej postaci.

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div} J_{\bullet\bullet}}$$

lub

$$\boxed{\frac{\partial b_\mu}{\partial t} = \sigma_\mu - \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial J_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (\mu = 1,2,3)}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ = człon źródłowy

$\mathbf{b}$ = gęstość objętościowa wielkości bilansowanej $\mathbf{B}$

$J_{\bullet\bullet}$ = gęstość powierzchniowa przepływu wektora $\mathbf{B}$ (tensor drugiego rzędu)

- **Nierelatywistyczne globalne równanie bilansu wielkości wektorowej**

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div} J_{\bullet\bullet}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{b}\, dV$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iiint_V \operatorname{div} J_{\bullet\bullet} dV = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \oiint_S J_{\mu\nu} dS_\nu \mathbf{e}_\mu$$

$$\mathbf{B} = \iiint_V \mathbf{b}\, dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} dV = \iiint_V \boldsymbol{\sigma}\, dV - \iiint_V \operatorname{div} J_{\bullet\bullet} dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \mathbf{b}\, dV = \iiint_V \boldsymbol{\sigma}\, dV - \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \oiint_S J_{\mu\nu} dS_\nu \mathbf{e}_\mu$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \iiint_V \boldsymbol{\sigma}\, dV - \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \oiint_S J_{\mu\nu} dS_\nu \mathbf{e}_\mu}$$

$dS_\nu = \cos(\mathbf{n}, x_\nu) dS$, $\quad dS_\nu$ = składowa wektora $d\mathbf{S} = \sum_{\nu=1}^{3} dS_\nu \mathbf{e}_\nu$

$d\mathbf{S}$ = wektor przyporządkowany elementowi powierzchni dS o wartości dS skierowany wzdłuż normalnej zewnętrznej do powierzchni dS

6 RÓWNANIE BILANSU ŁADUNKU – RÓWNANIE CIĄGŁOŚCI

- **Równanie bilansu ładunku w postaci lokalnej**

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} = \operatorname{div}\frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \gamma\,\rho_0\mathbf{v}$$

$$\rho = \rho^q = \gamma\,\rho_0 = \gamma\,\rho_0^q$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = ?$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}) = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} - \operatorname{div}\mathbf{j}$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j}}$$

- **Równanie bilansu ładunku w postaci globalnej**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{j}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV = \iiint_V (-)\operatorname{div}\mathbf{j}\,dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV = -\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{j}\,dV$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho\,dV = -\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}}$$

7 RÓWNANIE BILANSU ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO, WEKTOR POYNTINGA

- **Równanie bilansu energii w postaci lokalnej**

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}$$
$$\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$$
$$\mathbf{P} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{H}$$
$$\text{Zał.}: \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0.$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ?$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\right]$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{2}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}H^2\frac{\partial \mu}{\partial t}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}H^2\frac{\partial \mu}{\partial t}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}H^2\frac{\partial \mu}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{2}H^2\frac{\partial \mu}{\partial t}}$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{P} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}}$$

w = gęstość objętościowa energii pola elektromagnetycznego
P = wektor Poyntinga

- **Równanie bilansu energii w postaci globalnej**

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$
$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\,dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,dV$$
$$\iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV = \oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$$
$$W = \iiint_V w\,dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial w}{\partial t}\,dV = -\iiint_V \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,dV - \iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})\,dV$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,dV = -\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} - \iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})\,dV}$$

$$\boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = -\oiint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} - \iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})\,dV}$$

W = energia pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym powierzchnią S

- **Interpretacje**

$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\,dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})\,dV$ = moc energii pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}), \qquad [w] = \frac{J}{m^3}$$

w = gęstość objętościowa energii pola elektromagnetycznego

$$W = \iiint_V w\, dV = \iiint_V \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})dV, \qquad [W] = J$$

W = energia pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym powierzchnią S

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V w\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})dV, \qquad \left[\frac{\partial W}{\partial t}\right] = \frac{J}{s} = W$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ = szybkość zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S

$$\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} = \oiint_S \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S}, \qquad \left[\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}\right] = \frac{J}{s} = W$$

$\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S}$ = szybkość zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S związana z przepływem energii przez tę powierzchnię = moc energii pola elektromagnetycznego przenikającej przez powierzchnię S

$$\mathbf{P} \overset{df}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{H}, \qquad [\mathbf{P}] = \frac{W}{m^2}$$

P = wektor o wartości równej gęstości powierzchniowej mocy energii pola elektromagnetycznego przenikającej przez powierzchnię S

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$
$$\rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = 0$$
$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = ?$$
$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = \rho\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

$$\boxed{\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}, \qquad [\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}] = \frac{W}{m^3}}$$

f = gęstość objętościowa siły Lorentza

$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ = gęstość objętościowa mocy pracy wykonanej przez siłę Lorentza

$$\iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})dV = \iiint_V (\mathbf{f}\cdot\mathbf{v})dV, \qquad \left[\iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})dV\right] = \frac{J}{s} = W$$

$\iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})dV$ = moc pracy wykonywanej przez siłę Lorentza =

= szybkość zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S związana z pracą wykonywaną przez siłę Lorentza

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\oiint_S (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot d\mathbf{S} - \iiint_V (\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})dV$$

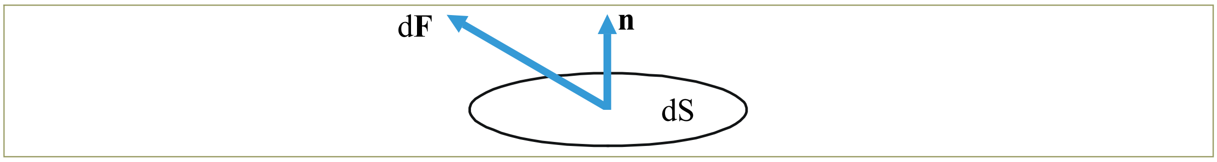
Szybkość zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S jest równa sumie szybkości zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego związanej z przepływem energii przez zamkniętą powierzchnię S ograniczającą obszar V i szybkości zmian w czasie energii pola elektromagnetycznego związanej z pracą wykonywaną przez siłę Lorentza.

8 TENSOR NAPRĘŻEŃ

- **Definicja naprężenia**

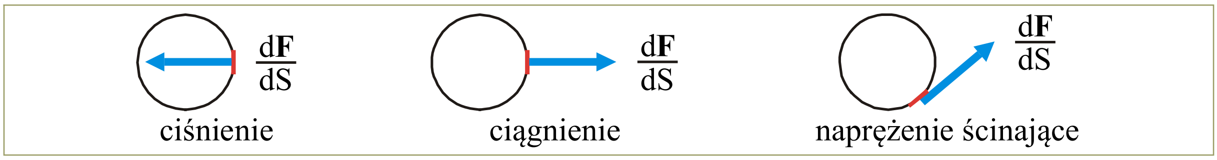
  Naprężeniem $\boldsymbol{\sigma}$ nazywamy wektor

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \overset{df}{=} \frac{d\mathbf{F}}{dS}, \quad [\boldsymbol{\sigma}] = \frac{N}{m^2}}$$



gdzie $d\mathbf{F}$ jest siłą działającą na element powierzchni dS o normalnej zewnętrznej $\mathbf{n}$.
$\mathbf{n}$ = wersor normalnej zewnętrznej do elementu powierzchni dS.

Jeżeli $d\mathbf{F} \uparrow\downarrow \mathbf{n}$, to naprężenie nazywamy ciśnieniem.
Jeżeli $d\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{n}$, to naprężenie nazywamy ciągnieniem.
Jeżeli $d\mathbf{F} \perp \mathbf{n}$, to naprężenie nazywamy naprężeniem ścinającym.



Znajomość naprężeń w każdym punkcie powierzchni S pozwala na wyznaczenie wypadkowej wszystkich sił zewnętrznych działających na tę powierzchnię (sił powierzchniowych).

$$\boxed{\mathbf{F} = \iint_S \boldsymbol{\sigma}\, dS}$$

- **Tensor naprężeń**

  Zajmiemy się teraz wektorami $\mathbf{n}, d\mathbf{S}, \boldsymbol{\sigma}$ i $d\mathbf{F}$, aby wprowadzić pojęcie tensora naprężeń.

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n},x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n},y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n},z)\mathbf{k} = n_x\,\mathbf{i} + n_y\,\mathbf{j} + n_z\,\mathbf{k} = (n_x, n_y, n_z) =$$

$$= \cos(\mathbf{n},x_1)\mathbf{e}_1 + \cos(\mathbf{n},x_2)\mathbf{e}_2 + \cos(\mathbf{n},x_3)\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=1}^{3}\cos(\mathbf{n},x_\mu)\mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} n_\mu\,\mathbf{e}_\mu$$

$$d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n} =$$

$$= dS\cos(\mathbf{n},x)\mathbf{i} + dS\cos(\mathbf{n},y)\mathbf{j} + dS\cos(\mathbf{n},z)\mathbf{k} = dS\,n_x\,\mathbf{i} + dS\,n_y\,\mathbf{j} + dS\,n_z\,\mathbf{k} =$$

$$= dS\cos(\mathbf{n},x_1)\mathbf{e}_1 + dS\cos(\mathbf{n},x_2)\mathbf{e}_2 + dS\cos(\mathbf{n},x_3)\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=1}^{3} dS\cos(\mathbf{n},x_\mu)\mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} dS\,n_\mu\,\mathbf{e}_\mu =$$

$$= dS_x\,\mathbf{i} + dS_y\,\mathbf{j} + dS_z\,\mathbf{k} = (dS_x, dS_y, dS) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{3} dS_\mu\,\mathbf{e}_\mu = (dS_1, dS_2, dS_3)$$

$$dS_x = dS\cos(\mathbf{n},x), \qquad \cos(\mathbf{n},x) = \frac{dS_x}{dS}$$
$$dS_y = dS\cos(\mathbf{n},y), \qquad \cos(\mathbf{n},y) = \frac{dS_y}{dS}$$
$$dS_z = dS\cos(\mathbf{n},z), \qquad \cos(\mathbf{n},z) = \frac{dS_z}{dS}$$

lub

$$dS_1 = dS\cos(\mathbf{n},x_1), \qquad \cos(\mathbf{n},x_1) = \frac{dS_1}{dS}$$
$$dS_2 = dS\cos(\mathbf{n},x_2), \qquad \cos(\mathbf{n},x_2) = \frac{dS_2}{dS}$$
$$dS_3 = dS\cos(\mathbf{n},x_3), \qquad \cos(\mathbf{n},x_3) = \frac{dS_3}{dS}$$
$$dS_\mu = dS\cos(\mathbf{n},x_\mu), \qquad \cos(\mathbf{n},x_\mu) = \frac{dS_\mu}{dS}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{d\mathbf{F}_x}{dS} + \frac{d\mathbf{F}_y}{dS} + \frac{d\mathbf{F}_z}{dS} = \frac{d\mathbf{F}_1}{dS} + \frac{d\mathbf{F}_2}{dS} + \frac{d\mathbf{F}_3}{dS} = \sum_{\mu=1}^{3}\frac{d\mathbf{F}_\mu}{dS} =$$
$$= \frac{dF_x}{dS}\mathbf{i} + \frac{dF_y}{dS}\mathbf{j} + \frac{dF_z}{dS}\mathbf{k} = \frac{dF_1}{dS}\mathbf{e}_1 + \frac{dF_2}{dS}\mathbf{e}_2 + \frac{dF_3}{dS}\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=1}^{3}\frac{dF_\mu}{dS}\mathbf{e}_\mu =$$
$$= \boldsymbol{\sigma}_x + \boldsymbol{\sigma}_y + \boldsymbol{\sigma}_z = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3 = \sum_{\mu=1}^{3}\sigma_\mu =$$
$$= \sigma_x\mathbf{i} + \sigma_y\mathbf{j} + \sigma_z\mathbf{k} = \sigma_1\mathbf{e}_1 + \sigma_2\mathbf{e}_2 + \sigma_3\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=1}^{3}\sigma_\mu\mathbf{e}_\mu =$$
$$= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

W danym układzie współrzędnych kartezjańskich przez dany punkt poprowadźmy trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, z których każda jest prostopadła do odpowiedniej osi układu współrzędnych. Niech na element powierzchni każdej płaszczyzny zawierający dany punkt działa z zewnątrz dana siła. I tak, na element dS_x płaszczyzny prostopadłej do osi x niech działa z zewnątrz siła $d\mathbf{F}^x$, na element dS_y płaszczyzny prostopadłej do osi y niech działa z zewnątrz siła $d\mathbf{F}^y$, na element dS_z płaszczyzny prostopadłej do osi z niech działa z zewnątrz siła $d\mathbf{F}^z$. Kąty między siłami $d\mathbf{F}^x, d\mathbf{F}^y, d\mathbf{F}^z$ a elementami powierzchni odpowiednio dS_x, dS_y, dS_z są dowolne.

$$\frac{d\mathbf{F}^x}{dS_x} = \frac{d\mathbf{F}_x^x}{dS_x} + \frac{d\mathbf{F}_y^x}{dS_x} + \frac{d\mathbf{F}_z^x}{dS_x} = \frac{dF_x^x}{dS_x}\mathbf{i} + \frac{dF_y^x}{dS_x}\mathbf{j} + \frac{dF_z^x}{dS_x}\mathbf{k} = \sigma_{xx}\mathbf{i} + \sigma_{yx}\mathbf{j} + \sigma_{zx}\mathbf{k}$$
$$\frac{d\mathbf{F}^y}{dS_y} = \frac{d\mathbf{F}_x^y}{dS_y} + \frac{d\mathbf{F}_y^y}{dS_y} + \frac{d\mathbf{F}_z^y}{dS_y} = \frac{dF_x^y}{dS_y}\mathbf{i} + \frac{dF_y^y}{dS_y}\mathbf{j} + \frac{dF_z^y}{dS_y}\mathbf{k} = \sigma_{xy}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \sigma_{zy}\mathbf{k}$$
$$\frac{d\mathbf{F}^z}{dS_z} = \frac{d\mathbf{F}_x^z}{dS_z} + \frac{d\mathbf{F}_y^z}{dS_z} + \frac{d\mathbf{F}_z^z}{dS_z} = \frac{dF_x^z}{dS_z}\mathbf{i} + \frac{dF_y^z}{dS_z}\mathbf{j} + \frac{dF_z^z}{dS_z}\mathbf{k} = \sigma_{xz}\mathbf{i} + \sigma_{yz}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k}$$

lub

$$\frac{d\mathbf{F}^1}{dS_1} = \frac{d\mathbf{F}_1^1}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_2^1}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_3^1}{dS_1} = \frac{dF_1^1}{dS_1}\mathbf{e}_1 + \frac{dF_2^1}{dS_1}\mathbf{e}_2 + \frac{dF_3^1}{dS_1}\mathbf{e}_3 = \sigma_{11}\mathbf{e}_1 + \sigma_{21}\mathbf{e}_2 + \sigma_{31}\mathbf{e}_3$$
$$\frac{d\mathbf{F}^2}{dS_1} = \frac{d\mathbf{F}_1^2}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_2^2}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_3^2}{dS_1} = \frac{dF_1^2}{dS_1}\mathbf{e}_1 + \frac{dF_2^2}{dS_1}\mathbf{e}_2 + \frac{dF_3^2}{dS_1}\mathbf{e}_3 = \sigma_{12}\mathbf{e}_1 + \sigma_{22}\mathbf{e}_2 + \sigma_{32}\mathbf{e}_3$$
$$\frac{d\mathbf{F}^3}{dS_1} = \frac{d\mathbf{F}_1^3}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_2^3}{dS_1} + \frac{d\mathbf{F}_3^3}{dS_1} = \frac{dF_1^3}{dS_1}\mathbf{e}_1 + \frac{dF_2^3}{dS_1}\mathbf{e}_2 + \frac{dF_3^3}{dS_1}\mathbf{e}_3 = \sigma_{13}\mathbf{e}_1 + \sigma_{23}\mathbf{e}_2 + \sigma_{33}\mathbf{e}_3$$

Wielkości $\sigma_{xx}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}, \sigma_{zy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ lub $\sigma_{11}, \sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{32}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ są składowymi tensora naprężeń.

Niech d**F** będzie siłą działającą z zewnątrz na dowolnie zorientowany element powierzchni dS zawierający dany punkt, i niech **n** będzie wersorem normalnej zewnętrznej do dS.

$$d\mathbf{F} = d\mathbf{F}^x + d\mathbf{F}^y + d\mathbf{F}^z$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \frac{d\mathbf{F}^x}{dS}\cdot\frac{dS_x}{dS_x} + \frac{d\mathbf{F}^y}{dS}\cdot\frac{dS_y}{dS_y} + \frac{d\mathbf{F}^z}{dS}\cdot\frac{dS_z}{dS_z} = \frac{d\mathbf{F}^x}{dS_x}\cdot\frac{dS_x}{dS} + \frac{d\mathbf{F}^y}{dS_y}\cdot\frac{dS_y}{dS} + \frac{d\mathbf{F}^z}{dS_z}\cdot\frac{dS_z}{dS} =$$
$$= \frac{d\mathbf{F}^x}{dS_x}\cdot\cos(\mathbf{n},x) + \frac{d\mathbf{F}^y}{dS_y}\cdot\cos(\mathbf{n},y) + \frac{d\mathbf{F}^z}{dS_z}\cdot\cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \left(\sigma_{xx}\mathbf{i} + \sigma_{yx}\mathbf{j} + \sigma_{zx}\mathbf{k}\right)\cdot\cos(\mathbf{n},x) + \left(\sigma_{xy}\mathbf{i} + \sigma_{yy}\mathbf{j} + \sigma_{zy}\mathbf{k}\right)\cdot\cos(\mathbf{n},y) + \left(\sigma_{xz}\mathbf{i} + \sigma_{yz}\mathbf{j} + \sigma_{zz}\mathbf{k}\right)\cdot\cos(\mathbf{n},z)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\left[\sigma_{xx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{xy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{xz}\cos(\mathbf{n},z)\right]\mathbf{i} + \\ &+\left[\sigma_{yx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{yz}\cos(\mathbf{n},z)\right]\mathbf{j} + \\ &+\left[\sigma_{zx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{zy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{zz}\cos(\mathbf{n},z)\right]\mathbf{k}\end{aligned}}$$

Ostatnie równanie zapiszemy w kilku różnych równoważnych postaciach.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = &\left(\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z\right)\mathbf{i} + \\ &+\left(\sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z\right)\mathbf{j} + \\ &+\left(\sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{xy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{xz}\cos(\mathbf{n},z) = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z$$
$$\sigma_y = \sigma_{yx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{yz}\cos(\mathbf{n},z) = \sigma_{yx}n_x + \sigma_{yy}n_y + \sigma_{yz}n_z$$
$$\sigma_z = \sigma_{zx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{zy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{zz}\cos(\mathbf{n},z) = \sigma_{zx}n_x + \sigma_{zy}n_y + \sigma_{zz}n_z$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}n_x\\ n_y\\ n_z\end{bmatrix} \qquad \text{lub} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \left[\sigma_{\mu\nu}\right]\mathbf{n}$$

Tensor $\left[\sigma_{\mu\nu}\right]$ nazywamy tensorem naprężeń.

$$\left[\sigma_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{dF_x^x}{dS_x} & \frac{dF_x^y}{dS_y} & \frac{dF_x^z}{dS_z}\\ \frac{dF_y^x}{dS_x} & \frac{dF_y^y}{dS_y} & \frac{dF_y^z}{dS_z}\\ \frac{dF_z^x}{dS_x} & \frac{dF_z^y}{dS_y} & \frac{dF_z^z}{dS_z}\end{bmatrix}$$

Uzyskane wyniki prześledzimy jeszcze raz, używając skróconej notacji.

$$\mathbf{n} = \sum_{\mu=1}^{3} \cos(\mathbf{n}, x_\mu)\mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} n_\mu \mathbf{e}_\mu$$

$$d\mathbf{S} = dS\,\mathbf{n} = \sum_{\mu=1}^{3} dS\cos(\mathbf{n}, x_\mu)\mathbf{e}_\mu$$

$$dS_\mu = dS\cos(\mathbf{n}, x_\mu), \quad \cos(\mathbf{n}, x_\mu) = \frac{dS_\mu}{dS}$$

$$d\mathbf{S} = \sum_{\mu=1}^{3} dS_\mu\, \mathbf{e}_\mu$$

$$\frac{d\mathbf{F}^\nu}{dS_\nu} = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{d\mathbf{F}^\nu_\mu}{dS_\nu} = \sum_{\mu=1}^{3} \frac{dF^\nu_\mu}{dS_\nu}\mathbf{e}_\mu$$

$$\boxed{\sigma_{\mu\nu} = \frac{dF^\nu_\mu}{dS_\nu}}$$

$$\frac{d\mathbf{F}^\nu}{dS_\nu} = \sum_{\mu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\, \mathbf{e}_\mu$$

$$d\mathbf{F} = \sum_{\nu=1}^{3} d\mathbf{F}^\nu$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\mathbf{F}^\nu}{dS}\frac{dS_\nu}{dS_\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\mathbf{F}^\nu}{dS_\nu}\frac{dS_\nu}{dS} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{d\mathbf{F}^\nu}{dS_\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu) = \sum_{\nu=1}^{3}\sum_{\mu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\, \mathbf{e}_\mu \cos(\mathbf{n}, x_\nu)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu)\mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu} n_\nu\, \mathbf{e}_\mu}$$

$$dF_\mu = \sigma_\mu dS = \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu) dS = \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\, dS_\nu$$

$$d\mathbf{F}_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu) dS\,\mathbf{e}_\mu$$

$$d\mathbf{F}_1 = [\sigma_{11}\cos(\mathbf{n}, x_1) + \sigma_{12}\cos(\mathbf{n}, x_2) + \sigma_{13}\cos(\mathbf{n}, x_3)]dS\mathbf{e}_1$$

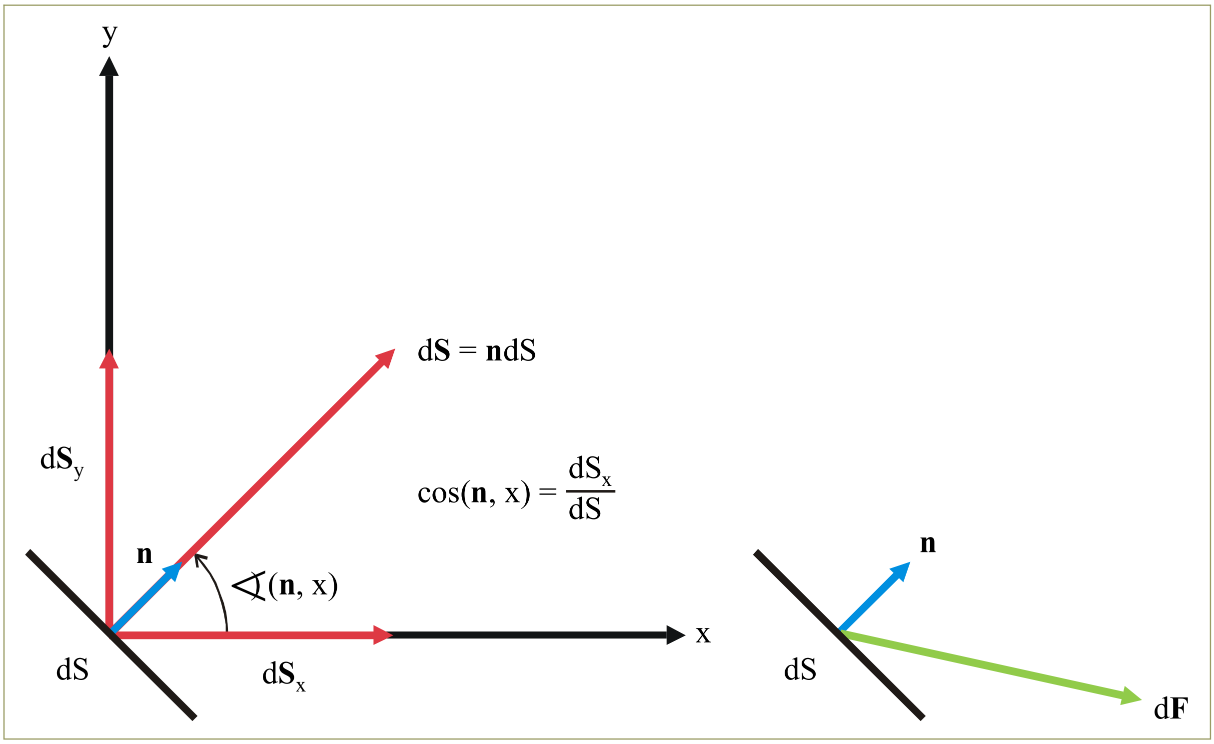
$$d\mathbf{F}_2 = [\sigma_{21}\cos(\mathbf{n}, x_1) + \sigma_{22}\cos(\mathbf{n}, x_2) + \sigma_{23}\cos(\mathbf{n}, x_3)]dS\mathbf{e}_2$$

$$d\mathbf{F}_3 = [\sigma_{31}\cos(\mathbf{n}, x_1) + \sigma_{32}\cos(\mathbf{n}, x_2) + \sigma_{33}\cos(\mathbf{n}, x_3)]dS\mathbf{e}_3$$

$$d\mathbf{F} = \sum_{\mu=1}^{3} d\mathbf{F}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3} dF_\mu \mathbf{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{3}\left[\sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu)\right] dS\mathbf{e}_\mu$$

$$F_\mu = \iiint_S \sigma_\mu dS = \iiint_S \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu}\cos(\mathbf{n}, x_\nu) dS$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2 + F_3\mathbf{e}_3 = \sum_{\mu=1}^{3} F_\mu\, \mathbf{e}_\mu$$



$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ = wektor elementu powierzchni dS skierowany wzdłuż normalnej zewnętrznej **n** do powierzchni dS i o wartości równej polu powierzchni dS

$d\mathbf{S} = (dS_x, dS_y, dS_z) = (dS_1, dS_2, dS_3)$

$dS_x = dS\cos(\mathbf{n}, x)$ = rzut powierzchni dS na płaszczyznę prostopadłą do osi x

$dS_y = dS\cos(\mathbf{n}, y)$ = rzut powierzchni dS na płaszczyznę prostopadłą do osi y

$dS_z = dS\cos(\mathbf{n}, z)$ = rzut powierzchni dS na płaszczyznę prostopadłą do osi z

$\cos(\mathbf{n}, x)$ = kosinus kąta zawartego między kierunkiem normalnej do elementu powierzchni dS a kierunkiem osi x

$\cos(\mathbf{n}, y)$ = kosinus kąta zawartego między kierunkiem normalnej do elementu powierzchni dS a kierunkiem osi y

$\cos(\mathbf{n}, z)$ = kosinus kąta zawartego między kierunkiem normalnej do elementu powierzchni dS a kierunkiem osi z

$$\sigma_x = \sigma_{xx}\cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{xy}\cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{xz}\cos(\mathbf{n}, z)$$
$$\sigma_y = \sigma_{yx}\cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{yy}\cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{yz}\cos(\mathbf{n}, z)$$
$$\sigma_z = \sigma_{zx}\cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{zy}\cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{zz}\cos(\mathbf{n}, z)$$

$\sigma_x = \dfrac{dF_x}{dS}$, $\sigma_y = \dfrac{dF_y}{dS}$, $\sigma_z = \dfrac{dF_z}{dS}$ składowe naprężenia (siły działającej z zewnątrz na element powierzchni dS o kierunku normalnej zewnętrznej **n)** odpowiednio w kierunku osi x,y,z

$\sigma_{ik} = \dfrac{dF_i^k}{dS_k}$ = składowe tensora naprężeń

$$dF_i = \sigma_i dS = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}\cos(\mathbf{n}, x_k)\,dS = \sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}\, dS_k$$

dF_i = i-ta składowa siły działającej na element powierzchni dS

9 WARUNKI GWARANTUJĄCE RÓWNOWAŻNOŚĆ SIŁ OBJĘTOŚCIOWYCH I POWIERZCHNIOWYCH

- **Siły objętościowe**

  Siłami objętościowymi nazywamy siły przyłożone w każdym punkcie danego obszaru.

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}, \quad d\mathbf{F} = \mathbf{f}dV, \quad \mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{f}dV$$

$\mathbf{f}$ = gęstość objętościowa sił objętościowych

- **Siły powierzchniowe**

  Siłami powierzchniowymi nazywamy siły przyłożone do każdego punktu danej powierzchni.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}, \quad d\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma}dS, \quad \mathbf{F} = \oiint_S \boldsymbol{\sigma}dS$$

$\boldsymbol{\sigma}$ = naprężenie = gęstość powierzchniowa sił powierzchniowych

- **Twierdzenie Gaussa-Greena**

$$\iiint_V \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} dV = \oiint_S \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu} \cos(n, x_\nu) dS = \oiint_S \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_{\mu\nu} dS_\nu, \qquad (\mu = 1,2,3)$$

Całkę po objętości V z wektora będącego dywergencją pewnego tensora drugiego rzędu można przekształcić w całkę po powierzchni zamkniętej S ograniczającej tę objętość z sumy składowych tego tensora.

$dS_\nu = \cos(\mathbf{n}, x_\nu)dS$ = składowa wektora $d\mathbf{S} = \sum_{\nu=1}^{3} dS_\nu \mathbf{e}_\nu$

$d\mathbf{S}$ = wektor przyporządkowany elementowi powierzchni dS o wartości dS skierowany wzdłuż normalnej zewnętrznej do powierzchni dS

- **Równoważność sił objętościowych i powierzchniowych działających w polu elektromagnetycznym na ładunki, prądy, dielektryki i magnetyki**

  W polu elekromagnetycznym działają na ładunki, prądy, dielektryki i magnetyki siły objętościowe

$$\mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{f}dV, \quad \mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}E^2\operatorname{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\operatorname{grad}\mu = \mathbf{f}^L - \tfrac{1}{2}E^2\operatorname{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\operatorname{grad}\mu .$$

$\mathbf{f}^L = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$ = gęstość objętościowa siły Lorentza

$-\tfrac{1}{2}E^2\operatorname{grad}\varepsilon$ = gęstość objętościowa sił objętościowych działających na dielektryk

$-\tfrac{1}{2}H^2\operatorname{grad}\mu$ = gęstość objętościowa sił objętościowych działających na magnetyk

W wielu zagadnieniach wygodnie byłoby zastąpić siły objętościowe działające na pewien obszar ośrodka równoważnymi im siłami powierzchniowymi działającymi na powierzchnię ograniczającą ten obszar $\mathbf{F} = \oiint_S \boldsymbol{\sigma}dS$.

- **Warunki równoważności sił objętościowych i powierzchniowych**

Siły objętościowe i powierzchniowe są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy wypadkowe tych sił oraz ich momenty są odpowiednio równe.

Wypadkowa sił objętościowych (oraz moment tych sił) w obszarze V ośrodka ograniczonego zamkniętą powierzchnią S są równe odpowiednio wypadkowej sił naprężeń powierzchniowych działających z zewnątrz na zamkniętą powierzchnię (oraz momentowi tych sił) wtedy i tylko wtedy, gdy
1. gęstość objętościowa sił objętościowych jest dywergencją tensora naprężeń,
2. tensor naprężeń jest tensorem symetrycznym.

$$\left.\begin{aligned} \iiint_V \mathbf{f}\,dV &= \oiint_S \boldsymbol{\sigma}\,dS \\ \iiint_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f})\,dV &= \oiint_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma})\,dS \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} f_\mu &= \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \\ \sigma_{\mu\nu} &= \sigma_{\nu\mu} \end{aligned}\right.$$

- **Warunki gwarantujące równość sił objętościowych i powierzchniowych**

$$\iiint_V f_\mu dV \overset{?}{=} \oiint_S \sigma_\mu dS_\mu, \qquad (\mu = 1,2,3)$$

$$\boxed{f_\mu = \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}}$$

$$\iiint_V f_\mu dV = \iiint_V \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}dV$$

$$\iiint_V \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}dV = \oiint_S \sum_{\nu=1}^{3}\sigma_{\mu\nu}dS_\nu$$

$$\iiint_V f_\mu dV = \oiint_S \sum_{\nu=1}^{3}\sigma_{\mu\nu}dS_\nu$$

$$\sum_{\nu=1}^{3}\sigma_{\mu\nu}dS_\nu = \sigma_\mu$$

$$\iiint_V f_\mu dV = \oiint_S \sigma_\mu dS_\nu$$

Wypadkowa sił objętościowych w obszarze V ośrodka ograniczonego powierzchnią zamkniętą S jest równa wypadkowej sił naprężeń powierzchniowych działających z zewnątrz na zamkniętą powierzchnię wtedy i tylko wtedy, gdy gęstość sił objętościowych jest dywergencją tensora naprężeń.

$$\boxed{\iiint_V f_\mu dV = \oiint_S \sigma_\mu dS_\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad f_\mu = \sum_{\nu=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}}$$

- **Warunki gwarantujące równość momentów sił objętościowych i sił naprężeń powierzchniowych**

$$\iiint_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f})_x\, dV \overset{?}{=} \oint\!\!\oint_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma})_x\, dS$$

$$\iiint_V \left(yf_z - zf_y\right) dV \overset{?}{=} \oint\!\!\oint_S \left(y\sigma_z - z\sigma_y\right) dS$$

r = promień wodzący poprowadzony z punktu, względem którego określamy moment sił, do elementu dV lub ds

$$\iiint_V \left(yf_z - zf_y\right) dV =$$

$$f_z = \frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}, \quad f_y = \frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}$$

$$= \iiint_V \left[y\left(\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right) - z\left(\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z}\right)\right] dV =$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial z} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

$$= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y\sigma_{zy} - z\sigma_{yy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y\sigma_{zz} - z\sigma_{yz}\right)\right] dV + \iiint_V \left(\sigma_{zy} - \sigma_{yz}\right) dV =$$

Twierdzenie Gaussa - Greena

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz} \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_V \left(\sigma_{zy} - \sigma_{yz}\right) dV = 0$$

$$= \oint\!\!\oint_S \left[\left(y\sigma_{zx} - z\sigma_{yx}\right)\cos(\mathbf{n},x) + \left(y\sigma_{zy} - z\sigma_{yy}\right)\cos(\mathbf{n},y) + \left(y\sigma_{zz} - z\sigma_{yz}\right)\cos(\mathbf{n},z)\right] dS =$$

$$= \oint\!\!\oint_S y\left[\sigma_{zx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{zy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{zz}\cos(\mathbf{n},z)\right] dS +$$

$$+ \oint\!\!\oint_S z\left[\sigma_{yx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{yz}\cos(\mathbf{n},z)\right] dS =$$

$$\sigma_z = \sigma_{zx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{zy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{zz}\cos(\mathbf{n},z)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma_{yz}\cos(\mathbf{n},z)$$

$$= \oint\!\!\oint_S \left(y\sigma_z - z\sigma_y\right) dS$$

$$\iiint_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f})_x\, dV = \oint\!\!\oint_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma})_x\, dS \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \sigma_{zy} = \sigma_{yz}, \quad f_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \right.$$

Ogólnie

$$\boxed{\iiint_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f})\, dV = \oint\!\!\oint_S (\mathbf{r}\times\boldsymbol{\sigma})\, dS \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{\mu\nu} = \sigma_{\nu\mu} \\ \mathbf{f} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial\sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\mathbf{e}_\mu \end{cases}}$$

10 RÓWNANIA BILANSU PĘDU POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO, TENSOR NAPRĘŻEŃ MAXWELLA

- **Równania bilansu pędu pola elektromagnetycznego w postaci lokalnej**

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{rot}\mathbf{E}$$
$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$$
$$\mu = \mu_0\mu_r$$
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$
$$\mathbf{f}^L = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$
$$\mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T^M_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = ?$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{B}) = \mathbf{D}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\times\mathbf{B} = \mathbf{D}\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{B}\times\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} =$$
$$= -\mathbf{D}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\mathbf{H} - \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D}\times\mathrm{rot}\mathbf{E} + \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\mathbf{H} =$$
$$= -\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left[\varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)\right]\mathbf{e}_\alpha +$$
$$+ \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathrm{div}\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu =$$
$$= -\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T^M_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha + \rho\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$$

gdzie

$$\boxed{T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)}$$

jest tensorem naprężeń Maxwella

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T^M_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha - \rho\mathbf{E} - \mathbf{j}\times\mathbf{B} + \tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon + \tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{f}} \qquad \boxed{\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - f_\alpha \quad (\alpha = 1,2,3)}$$

$\mathbf{g}$ = gęstość objętościowa pędu pola elektromagnetycznego

$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu = \mathbf{f}^L - \tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$

$\mathbf{f}^L$ = gęstość objętościowa siły Lorentza

$-\tfrac{1}{2}E^2\mathrm{grad}\varepsilon$ = gęstość objętościowa sił objętościowych działających na dielektryk

$-\tfrac{1}{2}H^2\mathrm{grad}\mu$ = gęstość objętościowa sił objętościowych działających na magnetyk

$T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$

$T^M_{\alpha\beta}$ = tensor naprężeń Maxwella pola elektromagnetycznego

$\mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_\beta}T^M_{\alpha\beta}\,\mathbf{e}_\alpha$

$\mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right]$ = dywergencja tensora naprężeń (wektor)

- **Tensor naprężeń Maxwella pola elektromagnetycznego**

$$T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) =$$
$$= E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)$$

$$T^M_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \varepsilon E_x^2 + \mu H_x^2 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) & \varepsilon E_x E_y + \mu H_x H_y & \varepsilon E_x E_z + \mu H_x H_z \\ \varepsilon E_y E_x + \mu H_y H_x & \varepsilon E_y^2 + \mu H_y^2 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) & \varepsilon E_y E_z + \mu H_y H_z \\ \varepsilon E_z E_x + \mu H_z H_x & \varepsilon E_z E_y + \mu H_z H_y & \varepsilon E_z^2 + \mu H_z^2 - \frac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) \end{bmatrix}$$

WŁASNOŚĆ 1

Tensor naprężeń Maxwella pola elektromagnetycznego jest tensorem symetrycznym.

$$\boxed{T^M_{\alpha\beta} = T^M_{\beta\alpha}}$$

WŁASNOŚĆ 2

Ślad tensora naprężeń Maxwella pola elektromagnetycznego jest równy gęstości (objętościowej) energii ze znakiem minus.

$$\boxed{T^M_{11} + T^M_{22} + T^M_{33} = -w}$$

DOWÓD

$$T^M_{11} + T^M_{22} + T^M_{33} = \varepsilon E_x^2 + \mu H_x^2 - \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) + \varepsilon E_y^2 + \mu H_y^2 - \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) +$$
$$+ \varepsilon E_z^2 + \mu H_z^2 - \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) =$$
$$= \varepsilon\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) + \mu\left(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) - \tfrac{3}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) =$$
$$= \varepsilon E^2 + \mu H^2 - \tfrac{3}{2}\varepsilon E^2 - \tfrac{3}{2}\mu H^2 =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) = -w$$

- **Równanie bilansu pędu pola elektromagnetycznego w postaci globalnej**

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{f}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{g}\, dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] dV =$$

$$= \oiint_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta}\cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right)\mathbf{e}_\alpha\, dS$$

$$\iiint_V \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\, dV =$$

$$= \oiint_S \sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta}\cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right) dS$$

$$\mathbf{G} = \iiint_V \mathbf{g}\, dV, \quad \mathbf{F} = \iiint_V \mathbf{f}\, dV$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t}\, dV = \iiint_V \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] dV - \iiint_V \mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{g}\, dV = \oiint_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta}\cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right)\mathbf{e}_\alpha\, dS - \iiint_V \mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V g_\alpha\, dV = \oiint_S \sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta}\cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right) dS - \iiint_V f_\alpha\, dV$$

$$\alpha = 1,2,3$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \oiint_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta}\cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right)\mathbf{e}_\alpha\, dS - \mathbf{F}}$$

$\mathbf{G} = \iiint\limits_V \mathbf{g}\, dV$ = wypadkowy pęd pola elektromagnetycznego w obszarze V

$\mathbf{F} = \iiint\limits_V \mathbf{f}\, dV$ = wypadkowa siła działająca na ładunki i prądy oraz na dielektryki i magnetyki znajdujące się w obszarze V

$\oiint\limits_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta} \cos(\mathbf{n}, x_\beta)\mathbf{e}_\alpha dS$ = wypadkowa siła naprężeń Maxwella działających na zamkniętą powierzchnię S ograniczającą obszar V

$\cos(\mathbf{n}, x_\beta) = \dfrac{dS_\beta}{dS}$

$\cos(\mathbf{n}, x_\beta)$ = kosinus kąta zawartego między kierunkiem normalnej do elementu powierzchni dS a kierunkiem osi x_β

dS_β = β-składowa wektora $d\mathbf{S}$

$T^M_{\alpha\beta} \cos(\mathbf{n}, x_\beta) dS \mathbf{e}_\alpha = T^M_{\alpha\beta} dS_\beta \mathbf{e}_\alpha$ =

= składowa siły $d\mathbf{F}_\alpha$ prostopadła do składowej dS_β wektora $d\mathbf{S}$

- **Interpretacje**

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \mathbf{g}\, dV = \oiint\limits_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta} \cos(\mathbf{n}, x_\beta) dS\, \mathbf{e}_\alpha - \iiint\limits_V \mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} = \oiint\limits_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta} \cos(\mathbf{n}, x_\beta) dS\, \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{F}$$

Szybkość zmian w czasie pędu zmiennego pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym powierzchnią zamkniętą S jest równa różnicy między siłami naprężeń działających na powierzchnię S obszaru V a siłami działającymi na ładunki i prądy oraz na dielektryki i magnetyki znajdujące się w tym obszarze.

Porównując przedostatnie równanie

$$-\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \mathbf{g}\, dV = -\oiint\limits_S \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} T^M_{\alpha\beta} \cos(\mathbf{n}, x_\beta) dS\, \mathbf{e}_\alpha + \iiint\limits_V \mathbf{f}\, dV$$

z ogólną postacią równania bilansu dla wielkości wektorowej

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \mathbf{b}\, dV = -\oiint\limits_S \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} J_{\mu\nu} \cos(\mathbf{n}, x_\nu) dS\, \mathbf{e}_\mu + \iiint\limits_V \boldsymbol{\sigma}\, dV$$

widzimy, że bardziej logicznie byłoby zdefiniować pęd pola elektromagnetycznego z innym znakiem niż to powszechnie uczyniono.

WNIOSEK
W stacjonarnych polach elektrycznych i magnetycznych wypadkowa sił objętościowych działających na ładunki i prądy oraz na dielektryki i magnetyki znajdujące się w obszarze V może być formalnie zastąpiona przez sumę sił powierzchniowych działających na powierzchnię S ograniczającą ten obszar.

11 NAPRĘŻENIA DZIAŁAJĄCE W POLU ELEKTRYCZNYM

- **Stacjonarne pole elektryczne**
  W przypadku stacjonarnego pola elektrycznego:

$\mathbf{E} = \text{const}, \ \mathbf{D} = \text{const}, \ \mathbf{B} = 0, \ \mathbf{H} = 0,$

$\mathbf{f}^{E} = \rho\mathbf{E} - \frac{1}{2}E^2 \text{grad}\,\varepsilon .$

Tensor naprężeń Maxwella dla stacjonarnego pola elektrycznego upraszcza się do

$\left[T^{M}_{\alpha\beta}\right] = \left[\sigma^{E}_{\alpha\beta}\right] = \varepsilon E_\alpha E_\beta - \frac{1}{2}\varepsilon E^2 \delta_{\alpha\beta} ,$

$$\left[\sigma^{E}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon\left(E_x^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & \varepsilon E_x E_y & \varepsilon E_x E_z \\ \varepsilon E_y E_x & \varepsilon\left(E_y^2 - \frac{1}{2}E^2\right) & \varepsilon E_y E_z \\ \varepsilon E_z E_x & \varepsilon E_z E_y & \varepsilon\left(E_z^2 - \frac{1}{2}E^2\right) \end{bmatrix}.$$

Gęstość objętościowa pędu stacjonarnego pola elektrycznego jest równa zeru.

$\mathbf{g}^{E} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} = 0$

Gęstość sił objętościowych jest dywergencją tensora naprężeń Maxwella.

$$\mathbf{f}^{E} = \text{div}\left[\sigma^{E}_{\alpha\beta}\right], \qquad f^{E}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \sigma^{E}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

Wypadkowa sił objętościowych jest równa wypadkowej sił naprężeń powierzchniowych.

$$\iiint_V \mathbf{f}^{E}\, dV = \oiint_S \boldsymbol{\sigma}^{E}\, dS, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{E} = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \sigma^{E}_{\alpha\beta} \cos\left(\mathbf{n}, x_\beta\right)\mathbf{e}_\alpha$$

- **Naprężenie σ działające w stacjonarnym polu elektrycznym na element powierzchni dS o kierunku normalnej zewnętrznej n**

$$\boldsymbol{\sigma}^{E} = \left(\sigma^{E}_{x}, \sigma^{E}_{y}, \sigma^{E}_{z}\right) = \sigma^{E}_{x}\mathbf{i} + \sigma^{E}_{y}\mathbf{j} + \sigma^{E}_{z}\mathbf{k}$$

$$\sigma^{E}_{x} = \sigma^{E}_{xx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma^{E}_{xy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma^{E}_{xz}\cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon\left(E_x^2 - \tfrac{1}{2}E^2\right)\cos(\mathbf{n},x) + \varepsilon E_x E_y \cos(\mathbf{n},y) + \varepsilon E_x E_z \cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon E_x\left[E_x \cos(\mathbf{n},x) + E_y\cos(\mathbf{n},y) + E_z\cos(\mathbf{n},z)\right] - \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \cos(\mathbf{n},x)$$

$$\sigma^{E}_{y} = \sigma^{E}_{yx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma^{E}_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma^{E}_{yz}\cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon E_y E_x \cos(\mathbf{n},x) + \varepsilon\left(E_y^2 - \tfrac{1}{2}E^2\right)\cos(\mathbf{n},y) + \varepsilon E_y E_z \cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon E_y\left[E_x \cos(\mathbf{n},x) + E_y\cos(\mathbf{n},y) + E_z\cos(\mathbf{n},z)\right] - \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \cos(\mathbf{n},y)$$

$$\sigma^{E}_{z} = \sigma^{E}_{zx}\cos(\mathbf{n},x) + \sigma^{E}_{zy}\cos(\mathbf{n},y) + \sigma^{E}_{zz}\cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon E_z E_x \cos(\mathbf{n},x) + \varepsilon E_z E_y \cos(\mathbf{n},y) + \varepsilon\left(E_z^2 - \tfrac{1}{2}E^2\right)\cos(\mathbf{n},z) =$$
$$= \varepsilon E_z\left[E_x \cos(\mathbf{n},x) + E_y\cos(\mathbf{n},y) + E_z\cos(\mathbf{n},z)\right] - \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2 \cos(\mathbf{n},z)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{E} = \varepsilon(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}\varepsilon\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{n}}$$

$\mathbf{E} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$

$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n},x)\,\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n},y)\,\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n},z)\,\mathbf{k}$

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = E_x\cos(\mathbf{n},x) + E_y\cos(\mathbf{n},y) + E_z\cos(\mathbf{n},z)$

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = E^2$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{E} = \varepsilon(\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\mathbf{n}}$$

1.

$\mathbf{E}\uparrow\uparrow\mathbf{n}$ lub $\mathbf{E}\uparrow\downarrow\mathbf{n}$, natężenie pola elektrycznego jest równoległe do normalnej zewnętrznej, czyli prostopadłe do elementu powierzchni dS.

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = E$, $\mathbf{E} = E\,\mathbf{n}$,

$\boldsymbol{\sigma}^{E} = \varepsilon E^2\,\mathbf{n} - \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathbf{n}$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{E} = \tfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathbf{n} \quad\Leftrightarrow\quad (\mathbf{E}\uparrow\uparrow\mathbf{n} \quad\vee\quad \mathbf{E}\uparrow\downarrow\mathbf{n})}$$

Jeżeli natężenie pola elektrycznego **E** jest prostopadłe do elementu powierzchni dS, to naprężenie redukuje się do ciągnienia.

2.

$\mathbf{E}\perp\mathbf{n}$, natężenie pola elektrycznego jest prostopadłe do normalnej zewnętrznej, czyli równoległe do elementu powierzchni dS.

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{E} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon E^2\mathbf{n} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{E}\perp\mathbf{n}}$$

Jeżeli natężenie pola elektrycznego **E** jest równoległe do elementu powierzchni dS, to naprężenie redukuje się do ujemnego ciągnienia, czyli ciśnienia.

12 NAPRĘŻENIA DZIAŁAJĄCE W POLU MAGNETYCZNYM

- **Stacjonarne pole magnetyczne**

W przypadku stacjonarnego pola magnetycznego:

$\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{H} = \text{const}$, $\mathbf{D} = 0$, $\mathbf{E} = 0$,

$\mathbf{f}^{H} = \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}H^2\,\mathrm{grad}\,\mu$.

Tensor naprężeń Maxwella dla stacjonarnego pola magnetycznego redukuje się do

$$\left[T^{M}_{\alpha\beta}\right] = \left[\sigma^{H}_{\alpha\beta}\right] = \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\mu H^2\delta_{\alpha\beta},$$

$$\left[\sigma^{H}_{\alpha\beta}\right] = \begin{bmatrix} \mu\left(H_x^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right) & \mu H_x H_y & \mu H_x H_z \\ \mu H_y H_x & \mu\left(H_y^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right) & \mu H_y H_z \\ \mu H_z H_x & \mu H_z H_y & \mu\left(H_z^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right) \end{bmatrix}.$$

Gęstość objętościowa pędu stacjonarnego pola magnetycznego jest równa zeru.

$\mathbf{g}^{H} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = 0$

Gęstość sił powierzchniowych jest dywergencją tensora naprężeń Maxwella.

$$\mathbf{f}^{H} = \mathrm{div}\left[\sigma^{H}_{\alpha\beta}\right], \qquad f^{H}_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\sigma^{H}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}, \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

Wypadkowa sił objętościowych jest równa wypadkowej sił naprężeń powierzchniowych.

$$\iiint_V \mathbf{f}^{H}\,dV = \oiint_S \boldsymbol{\sigma}^{H}\,dS, \qquad \boldsymbol{\sigma}^{H} = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\sigma^{H}_{\alpha\beta}\cos(\mathbf{n}, x_\beta)\,\mathbf{e}_\alpha$$

- **Naprężenie σ działające w stacjonarnym polu magnetycznym na element powierzchni dS o kierunku normalnej zewnętrznej n**

$$\boldsymbol{\sigma}^{H} = \left(\sigma_x^H, \sigma_y^H, \sigma_z^H\right) = \sigma_x^H \mathbf{i} + \sigma_y^H \mathbf{j} + \sigma_z^H \mathbf{k}$$

$$\sigma_x^H = \sigma_{xx}^H \cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{xy}^H \cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{xz}^H \cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu\left(H_x^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right)\cos(\mathbf{n}, x) + \mu H_x H_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mu H_x H_z \cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu H_x\left[H_x \cos(\mathbf{n}, x) + H_y \cos(\mathbf{n}, y) + H_z \cos(\mathbf{n}, z)\right] - \tfrac{1}{2}\mu H^2 \cos(\mathbf{n}, x)$$

$$\sigma_y^H = \sigma_{yx}^H \cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{yy}^H \cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{yz}^H \cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu H_y H_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mu\left(H_y^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right)\cos(\mathbf{n}, y) + \mu H_y H_z \cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu H_y\left[H_x \cos(\mathbf{n}, x) + H_y \cos(\mathbf{n}, y) + H_z \cos(\mathbf{n}, z)\right] - \tfrac{1}{2}\mu H^2 \cos(\mathbf{n}, y)$$

$$\sigma_z^H = \sigma_{zx}^H \cos(\mathbf{n}, x) + \sigma_{zy}^H \cos(\mathbf{n}, y) + \sigma_{zz}^H \cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu H_z H_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mu H_z H_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mu\left(H_z^2 - \tfrac{1}{2}H^2\right)\cos(\mathbf{n}, z) =$$

$$= \mu H_z\left[H_x \cos(\mathbf{n}, x) + H_y \cos(\mathbf{n}, y) + H_z \cos(\mathbf{n}, z)\right] - \tfrac{1}{2}\mu H^2 \cos(\mathbf{n}, z)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{H} = \mu(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H} - \tfrac{1}{2}\mu(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H})\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{H} = H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \cos(\mathbf{n}, x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{n}, y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{n}, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = H_x \cos(\mathbf{n}, x) + H_y \cos(\mathbf{n}, y) + H_z \cos(\mathbf{n}, z)$$

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{H} = H^2$$

1.

$\mathbf{H} \uparrow\uparrow \mathbf{n}$ lub $\mathbf{H} \uparrow\downarrow \mathbf{n}$, natężenie pola magnetycznego jest równoległe do normalnej zewnętrznej, czyli prostopadłe do elementu powierzchni dS.

$\mathbf{H}\cdot\mathbf{n} = H$, $\mathbf{H} = H\,\mathbf{n}$

$$\boldsymbol{\sigma}^{H} = \mu H^2 \mathbf{n} - \tfrac{1}{2}\mu H^2 \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}\mu H^2 \mathbf{n}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{H} = \tfrac{1}{2}\mu H^2 \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\mathbf{H} \uparrow\uparrow \mathbf{n} \quad \vee \quad \mathbf{H} \uparrow\downarrow \mathbf{n}\right)}$$

Jeżeli natężenie pola magnetycznego **H** jest prostopadłe do elementu powierzchni dS, to naprężenie redukuje się do ciągnienia.

2.

$\mathbf{H} \perp \mathbf{n}$, natężenie pola magnetycznego jest prostopadłe do normalnej zewnętrznej, czyli równoległe do elementu powierzchni dS.

$\mathbf{H}\times\mathbf{n} = 0$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{H} = -\tfrac{1}{2}\mu H^2 \mathbf{n} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H} \perp \mathbf{n}}$$

Jeżeli natężenie pola magnetycznego **H** jest równoległe do elementu powierzchni dS, to naprężenie redukuje się do ujemnego ciągnienia, czyli ciśnienia.

13 RÓWNANIE BILANSU MOMENTU PĘDU POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

- **Równanie bilansu momentu pędu pola elektromagnetycznego w postaci lokalnej**

$$\mathbf{k} = \mathbf{r} \times \mathbf{g}$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{D} \times \mathbf{B}$$
$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}\right) \times \mathbf{g} = 0$$
$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{f}$$
$$\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha \mathbf{e}_\alpha$$
$$\mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] = \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \mathbf{e}_\alpha$$
$$T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - -\tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$
$$T^M_{\alpha\beta} = T^M_{\beta\alpha}$$
$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - -\tfrac{1}{2}E^2 \mathrm{grad}\,\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2 \mathrm{grad}\,\mu$$
$$\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\nu} = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mu = \nu \\ 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu \end{cases}$$

k = gęstość objętościowa momentu pędu pola elektromagnetycznego
g = gęstość objętościowa pędu pola elektromagnetycznego
r = promień wodzący poprowadzony z punktu obserwacji
$\left[T^M_{\alpha\beta}\right]$ = tensor naprężeń Maxwella
f = gęstość objętościowa siły
$\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ = gęstość objętościowa momentu siły

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = ?$$
$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{r} \times \mathbf{g})}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \times \mathbf{g} + \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} =$$
$$= \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} = \mathbf{r} \times \left(\mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{f}\right) =$$
$$= \mathbf{r} \times \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \mathbf{r} \times \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{r} \times \mathbf{f}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \mathbf{r} \times \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \mathbf{r} \times \mathbf{f}$$

$$\mathbf{r} \times \mathrm{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] = \sum_{\lambda=1}^{3} x_\lambda \mathbf{e}_\lambda \times \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\mathbf{e}_\alpha =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_2 T^M_{31} - x_3 T^M_{21}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_2 T^M_{32} - x_3 T^M_{22}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_2 T^M_{33} - x_3 T^M_{23}\right)\right]\mathbf{e}_1 +$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_3 T^M_{11} - x_1 T^M_{31}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_3 T^M_{12} - x_1 T^M_{32}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_3 T^M_{13} - x_1 T^M_{33}\right)\right]\mathbf{e}_2 +$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1 T^M_{21} - x_2 T^M_{11}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1 T^M_{22} - x_2 T^M_{12}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(x_1 T^M_{23} - x_2 T^M_{13}\right)\right]\mathbf{e}_3 =$$
$$= \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial K_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}\mathbf{e}_\mu = \mathrm{div}\left[K_{\mu\nu}\right] = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ T^M_{1\nu} & T^M_{2\nu} & T^M_{3\nu} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \mathrm{div}\left[K_{\mu\nu}\right] - \mathbf{r} \times \mathbf{f}}$$

- **Tensor momentu pędu pola elektromagnetycznego drugiego rzędu**
  Tensor

$$\left[K_{\mu\nu}\right] = K_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} \left(x_2T_{31}^M - x_3T_{21}^M\right) & \left(x_2T_{32}^M - x_3T_{22}^M\right) & \left(x_2T_{33}^M - x_3T_{23}^M\right) \\ \left(x_3T_{11}^M - x_1T_{31}^M\right) & \left(x_3T_{12}^M - x_1T_{32}^M\right) & \left(x_3T_{13}^M - x_1T_{33}^M\right) \\ \left(x_1T_{21}^M - x_2T_{11}^M\right) & \left(x_1T_{22}^M - x_2T_{12}^M\right) & \left(x_1T_{23}^M - x_2T_{13}^M\right) \end{bmatrix}$$

nazwiemy tensorem momentu pędu pola elektromagnetycznego drugiego rzędu.

$$K_{1\nu} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ T_{1\nu}^M & T_{2\nu}^M & T_{3\nu}^M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ T_{2\beta}^M & T_{3\beta}^M \end{vmatrix} = x_2T_{3\nu}^M - x_3T_{2\nu}^M$$

$$K_{2\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ T_{1\nu}^M & T_{2\nu}^M & T_{3\nu}^M \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ T_{1\nu}^M & T_{3\nu}^M \end{vmatrix} = x_3T_{1\nu}^M - x_1T_{3\nu}^M$$

$$K_{3\nu} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ T_{1\nu}^M & T_{2\nu}^M & T_{3\nu}^M \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ T_{1\nu}^M & T_{2\nu}^M \end{vmatrix} = x_1T_{2\nu}^M - x_2T_{1\nu}^M$$

- **Równanie bilansu momentu pędu pola elektromagnetycznego w postaci globalnej**

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \operatorname{div}K_{\bullet\bullet} - \mathbf{r}\times\mathbf{f}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{k}\, dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div}K_{\bullet\bullet} dV = \oint\!\!\oint_S \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} K_{\mu\nu}\cos\left(\mathbf{n}, x_\nu\right)\mathbf{e}_\mu dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t}\, dV = \iiint_V \operatorname{div}K_{\bullet\bullet} dV - \iiint_V \left(\mathbf{r}\times\mathbf{f}\right) dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{k}\, dV = \oint\!\!\oint_S \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} K_{\mu\nu}\cos\left(\mathbf{n}, x_\nu\right)\mathbf{e}_\mu dS - \iiint_V \left(\mathbf{r}\times\mathbf{f}\right) dV$$

$\mathbf{K} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \mathbf{k}\, dV$ = wypadkowy moment pędu pola elektromagnetycznego w obszarze V

$\mathbf{M} = \iiint_V \left(\mathbf{r}\times\mathbf{f}\right) dV$ = wypadkowy moment sił Lorentza działających na ładunki i prądy znajdujące się w obszarze V

$\oint\!\!\oint_S \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} K_{\mu\nu}\cos\left(\mathbf{n}, x_\nu\right)\mathbf{e}_\mu dS$ = wypadkowy moment sił naprężeń Maxwella działających na powierzchnię S ograniczającą obszar V

- **Interpretacje.**

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial t} = \oint\!\!\oint_S \sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3} K_{\mu\nu}\cos\left(\mathbf{n}, x_\nu\right)\mathbf{e}_\mu dS - \mathbf{M}$$

Szybkość zmian w czasie momentu pędu pola elektromagnetycznego w obszarze V ograniczonym zamkniętą powierzchnią S jest równa różnicy między momentem sił naprężeń Maxwella działających na powierzchnię S i momentem sił Lorentza działających na ładunki oraz prądy znajdujące się w obszarze V.

- **Tensor momentu pędu pola elektromagnetycznego trzeciego rzędu**

Człon dywergencyjny w równaniu bilansu momentu pędu pola elektromagnetycznego przedstawimy teraz w innej postaci.

$$\mathbf{r}\times \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right]=\left(\sum_{\lambda=1}^{3}x_\lambda \mathbf{e}_\lambda\right)\times\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\mathbf{e}_\alpha =$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}x_\lambda\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(x_\lambda\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}-x_\alpha\frac{\partial T^M_{\lambda\beta}}{\partial x_\beta}\right)\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$T^M_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta}-T^M_{\lambda\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}=0 \quad \text{bo} \quad \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta}=\delta^\lambda_\beta,\quad \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}=\delta^\alpha_\beta,\quad T^M_{\alpha\lambda}=-T^M_{\lambda\alpha}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(x_\lambda\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}+T^M_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\beta}-x_\alpha\frac{\partial T^M_{\lambda\beta}}{\partial x_\beta}-T^M_{\lambda\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial\left(x_\lambda T^M_{\alpha\beta}\right)}{\partial x_\beta}-\frac{\partial\left(x_\alpha T^M_{\lambda\beta}\right)}{\partial x_\beta}\right)\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left(\frac{\partial\left(x_\lambda T^M_{\alpha\beta}-x_\alpha T^M_{\lambda\beta}\right)}{\partial x_\beta}\right)\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$K_{\lambda\alpha\beta}=x_\lambda T^M_{\alpha\beta}-x_\alpha T^M_{\lambda\beta}\ = \text{tensor momentu pędu pola elektromagnetycznego}$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial K_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=$$

$$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3=-\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1$$

$$\sum_{\lambda=1}^{3}\sum_{\alpha>\lambda}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial K_{\lambda\alpha\beta}}{\partial x_\beta}\left(\mathbf{e}_\lambda\times\mathbf{e}_\alpha\right)=\operatorname{div}K_{\bullet\bullet\bullet}$$

$$\boxed{\mathbf{r}\times\operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right]=\operatorname{div}K_{\bullet\bullet\bullet}}$$

Tensor

$$\boxed{K_{\lambda\alpha\beta}=x_\lambda T^M_{\alpha\beta}-x_\alpha T^M_{\lambda\beta}}$$

będziemy nazywali tensorem momentu pędu pola elektromagnetycznego trzeciego rzędu. Posiada on w przestrzeni trójwymiarowej dwadzieścia siedem składowych.

Ponieważ

$$K_{\alpha\alpha\beta}=x_\alpha T^M_{\alpha\beta}-x_\alpha T^M_{\alpha\beta}=0,\quad K_{\lambda\alpha\beta}=-K_{\alpha\lambda\beta},$$

z pośród osiemnastu niezerowych składowych tensora $K_{\bullet\bullet\bullet}$ tylko dziewięć jest niezależnych.

$$K_{111}=K_{112}=K_{113}=K_{221}=K_{222}=K_{223}=K_{331}=K_{332}=K_{333}=0$$

$$K_{231}=-K_{321},\quad K_{232}=-K_{322},\quad K_{233}=-K_{323}$$

$$K_{131}=-K_{311},\quad K_{132}=-K_{312},\quad K_{133}=-K_{313}$$

$$K_{121}=-K_{211},\quad K_{122}=-K_{212},\quad K_{123}=-K_{213}$$

14 RÓWNANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W OŚRODKACH JEDNORODNYCH DLA POTENCJAŁÓW SKALARNEGO I WEKTOROWEGO

- **Potencjał skalarny i wektorowy**

Rozwiązaniami równań Maxwella

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

są potencjały wektorowy $\mathbf{A}$ i skalarny φ , określone odpowiednio jako

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{A}: \quad && \mathbf{B} \overset{\text{df}}{=} \operatorname{rot}\mathbf{A} \\ &\varphi: \quad && \mathbf{E} \overset{\text{df}}{=} -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

Powyższe definicje uzupełnia tzw. dodatkowy warunek Lorenza.

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial \varphi}{\partial t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathbf{B} \overset{\text{df}}{=} \operatorname{rot}\mathbf{A} \\ &\mathbf{E} \overset{\text{df}}{=} -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0 \\ &\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} =$$

$$= -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi - \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} =$$

$$= -\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0$$

- $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad \rightarrow \quad \Box\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \\ &\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \\ &\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\operatorname{grad}\varepsilon \\ &\text{zał.:} \quad \operatorname{grad}\varepsilon = 0 \\ &\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla^2\varphi \\ &\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{A} \\ &\Box\varphi = \nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\ &\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho \quad \overset{?}{\rightarrow} \quad \Box\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} + \mathbf{E}\operatorname{grad}\varepsilon = \varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E} =$$

$$= \varepsilon\operatorname{div}\left(-\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\varepsilon\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi - \varepsilon\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} =$$

$$= -\varepsilon\nabla^2\varphi + \varepsilon^2\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho \quad \text{lub} \quad \Box\varphi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho}$$

- $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \Box\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j}$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{B} + \left(\mathrm{grad}\frac{1}{\mu}\right)\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathrm{rot}\mathbf{A}$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu^2}\mathrm{grad}\,\mu$$

$$\text{zał.:}\quad \mathrm{grad}\,\mu = 0$$

$$\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A} = \mathrm{grad\,div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varepsilon\mu\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varepsilon\mu$$

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon\mu = \varepsilon\,\mathrm{grad}\,\mu + \mu\,\mathrm{grad}\,\varepsilon$$

$$\text{zał.:}\quad \mathrm{grad}\,\mu = 0$$

$$\text{zał.:}\quad \mathrm{grad}\,\varepsilon = 0$$

$$\text{zał.:}\quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{E} \overset{\mathrm{df}}{=} -\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi = \mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\Box\mathbf{A} = \nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \overset{?}{\rightarrow} \Box\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j}$$

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial\,\varepsilon\mathbf{E}}{\partial t}$$

Z jednej strony:

$$\mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathbf{B} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{B} + \left(\mathrm{grad}\frac{1}{\mu}\right)\times\mathbf{B} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A} - \frac{1}{\mu^2}(\mathrm{grad}\,\mu)\times\mathrm{rot}\mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\mathrm{rot\,rot}\mathbf{A} =$$

$$= \frac{1}{\mu}\mathrm{grad\,div}\mathbf{A} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} =$$

$$= -\frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\,\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} =$$

$$= -\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}\,\varepsilon\mu - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} =$$

$$= -\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}(\varepsilon\,\mathrm{grad}\,\mu + \mu\,\mathrm{grad}\,\varepsilon) - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} =$$

$$= -\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A},$$

z drugiej strony:

$$\mathbf{j} + \frac{\partial\,\varepsilon\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{E}\frac{\partial\,\varepsilon}{\partial t} =$$

$$= \mathbf{j} + \varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{\partial A}{\partial t}\right) =$$

$$= \mathbf{j} - \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{grad}\,\varphi - \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} =$$

$$= \mathbf{j} - \varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2},$$

mamy więc:

$$-\varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{\mu}\nabla^2\mathbf{A} = \mathbf{j} - \varepsilon\,\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\,\mathbf{j} \quad \text{lub} \quad \Box\mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j}}$$

- **Po co to wszystko?**

Z pięciu równań

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\nabla^2\varphi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho,$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{j}$$

można wyznaczyć φ i **A**, znając ε, μ, ρ oraz $\mathbf{j}$.

Z sześciu równań

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A},$$

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$$

można wyznaczyć **B** i **E** znając φ i **A**.

Na koniec zapiszemy wszystkie te równania w rozwiniętej postaci.

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon}\rho$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu j_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu j_y$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu j_z$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

$$E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}$$

$$E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$$

15 RÓWNANIE FALOWE (OGÓLNA POSTAĆ)

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$
$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$$
$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$$

Z czterech wektorowych równań Maxwella i trzech wektorowych równań materiałowych po uciążliwych przekształceniach można otrzymać dwa równania wektorowe, których lewe strony będą miały postać równania falowego.

Równanie falowe dla wektora E

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \\
&= \left(\mu\lambda + 2\mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \\
&+ \left(\mu\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \lambda\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \mu\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} + \\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}\,\rho - \frac{\rho}{\varepsilon^2}\mathrm{grad}\,\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{grad}(\mathbf{E}\cdot\mathrm{grad}\,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathbf{E}\cdot\mathrm{grad}\,\varepsilon)\mathrm{grad}\,\varepsilon + \\
&+ (\mathrm{grad}\,\mu)\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \left(\mathrm{grad}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\times\mathbf{H}
\end{aligned}$$

Równanie falowe dla wektora H

$$\begin{aligned}
&\nabla^2\mathbf{H} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = \\
&= \left(\mu\lambda + 2\varepsilon\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \\
&+ \left(\lambda\frac{\partial\mu}{\partial t} + \frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial^2\mu}{\partial t^2}\right)\mathbf{H} + \\
&- \frac{1}{\mu}\mathrm{grad}(\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\,\mu) + \frac{1}{\mu^2}(\mathbf{H}\cdot\mathrm{grad}\,\mu)\mathrm{grad}\,\mu + \\
&- (\mathrm{grad}\,\varepsilon)\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \left(\mathrm{grad}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\times\mathbf{E} - (\mathrm{grad}\,\lambda)\times\mathbf{E}
\end{aligned}$$

Równanie falowe dla wektora **E** uzyskaliśmy, obliczając rotację obu stron równania

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Równanie falowe dla wektora **H** uzyskaliśmy, obliczając rotację obu stron równania

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}.$$

W dalszych rozważaniach zajmiemy się uproszczonymi postaciami równań falowych.

16 RÓWNANIE FALOWE POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO DLA PRÓŻNI I OŚRODKÓW JEDNORODNYCH, NIE POCHŁANIAJĄCYCH I NIEPRZEWODZĄCYCH

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$
$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$$

Założenia

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon = 0$$
$$\mathrm{grad}\,\mu = 0$$
$$\mathrm{grad}\,\rho = 0$$
$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$
$$\lambda = 0$$
$$\rho = 0$$

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} =$$
$$= \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$
$$\mathrm{rot}\,\alpha\mathbf{A} =$$
$$= \alpha\,\mathrm{rot}\mathbf{A} + (\mathrm{grad}\,\alpha)\times\mathbf{A}$$

$$\Box = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$
$$\mathrm{div}\mathbf{E} = 0$$

Z jednej strony

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

z drugiej strony

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E},$$

ostatecznie mamy

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{lub} \quad \nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

Analogicznie:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mathrm{rot}\,\varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{B} - \nabla^2\mathbf{B} = -\nabla^2\mathbf{B}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{B} = \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad \text{lub} \quad \nabla^2\mathbf{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0}$$

Równanie falowe zapiszemy na koniec w super zwartej postaci, wykorzystując operator d'Alamberta (dalambercjan).

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\mathbf{E} &= 0\\ \Box\mathbf{B} &= 0\end{aligned}}$$

17 FALA PŁASKA SPOLARYZOWANA LINIOWO O DOWOLNYM KSZTAŁCIE IMPULSU FALOWEGO JAKO JEDNO Z ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA FALOWEGO

- **Fala płaska**

W odpowiedniej odległości od punktowego izotropowego źródła (czyli źródła emitującego równomiernie we wszystkich kierunkach) falę sferyczną można w dostatecznie małym obszarze traktować jako falę płaską, czyli taką, która we wszystkich punktach w danej płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozchodzenia się fali w danej chwili czasu charakteryzuje się taką samą wartością fazy drgań wektorów **E** i **B**.

- **Fala spolaryzowana liniowo**

Fala jest spolaryzowana liniowo, jeżeli wektor natężenia pola elektrycznego **E** ma cały czas stały kierunek.

- **Równanie fali płaskiej spolaryzowanej liniowo**

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_o f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt) = \mathbf{E}_o f(\xi) = E_{ox} f(\xi)\mathbf{i} + E_{oy} f(\xi)\mathbf{j} + E_{oz} f(\xi)\mathbf{k} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_o f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt) = \mathbf{B}_o f(\xi) = B_{ox} f(\xi)\mathbf{i} + B_{oy} f(\xi)\mathbf{j} + B_{oz} f(\xi)\mathbf{k} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}\end{aligned}}$$

$\mathbf{n}$ = wersor kierunku rozchodzenia się fali
$\mathbf{r}$ = promień wodzący poprowadzony ze źródła fali do punktu obserwacji
$\mathbf{v}$ = prędkość rozchodzenia się fali
f = dowolna funkcja argumentu $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt)$ dwukrotnie różniczkowalna względem czasu i współrzędnych przestrzennych
$\xi = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} - vt = n_x x + n_y y + n_z z - vt$
$\mathbf{E}_o, \mathbf{B}_o$ = stałe wektory
$E_x = E_{ox} f(\xi)$
$E_y = E_{oy} f(\xi)$
$E_z = E_{oz} f(\xi)$

Jednym z rozwiązań równań falowych

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{B} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon\mu$$

jest fala płaska spolaryzowana liniowo o dowolnym kształcie impulsu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_o f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt) = \mathbf{E}_o f(\xi) = E_{ox} f(\xi)\mathbf{i} + E_{oy} f(\xi)\mathbf{j} + E_{oz} f(\xi)\mathbf{k} = E_x\mathbf{i} + E_y\mathbf{j} + E_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_o f(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt) = \mathbf{B}_o f(\xi) = B_{ox} f(\xi)\mathbf{i} + B_{oy} f(\xi)\mathbf{j} + B_{oz} f(\xi)\mathbf{k} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}$$

co dalej wykażemy.

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_x}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_{ox} f(\xi)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}E_{ox}n_x\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=E_{ox}n_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=E_{ox}n_x\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x}=E_{ox}n_x\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=E_{ox}n_x^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial E_{ox} f(\xi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}E_{ox}n_y\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=E_{ox}n_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=E_{ox}n_y\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial y}=E_{ox}n_y\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y}=E_{ox}n_y^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E_x}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial E_{ox} f(\xi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}E_{ox}n_z\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=E_{ox}n_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=E_{ox}n_z\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial z}=E_{ox}n_z\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z}=E_{ox}n_z^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial E_{ox} f(\xi)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial t}E_{ox}v\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=-E_{ox}v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=-E_{ox}v\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial t}=-E_{ox}v\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}=E_{ox}v^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$E_{ox}n_x^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}+E_{ox}n_y^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}+E_{ox}n_z^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}E_{ox}v^2\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$E_{ox}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)\overset{?}{=}E_{ox}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

$$E_{ox}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}\overset{?}{=}E_{ox}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial \xi^2}$$

Analogiczne rachunki można przeprowadzić dla pozostałych dwóch równań.
W powyższym uzasadnieniu wykorzystaliśmy następujące relacje:

$$n_x=\frac{\partial \xi}{\partial x},\quad n_y=\frac{\partial \xi}{\partial y},\quad n_z=\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt\right)=-v.$$

18 PROSTOPADŁOŚĆ WEKTORÓW NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO I INDUKCJI MAGNETYCZNERJ DO KIERUNKU ROZCHODZENIA SIĘ PŁASKIEJ FALI SPOLARYZOWANEJ LINIOWO O DOWOLNYM KSZTAŁCIE IMPULSU

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_o f(\xi)$

$\xi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt=$

$=n_x x+n_y y+n_z z-vt$

$\frac{\partial\xi}{\partial x}=n_x$

$\frac{\partial\xi}{\partial y}=n_y$

$\frac{\partial\xi}{\partial z}=n_z$

$\mathrm{div}\mathbf{D}=\rho$

$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$

Założenia

$\rho=0$

$\mathrm{grad}\,\varepsilon=0$

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathrm{div}\mathbf{E}_o f(\xi)=$$

$$=\frac{\partial E_{ox}f(\xi)}{\partial x}+\frac{\partial E_{oy}f(\xi)}{\partial y}+\frac{\partial E_{oz}f(\xi)}{\partial z}=$$

$$=E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x}+E_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial y}+E_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial z}=$$

$$=E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+E_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+E_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=$$

$$=E_{ox}n_x\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}+E_{oy}n_y\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}+E_{oz}n_z\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\left(E_{ox}n_x+E_{oy}n_y+E_{oz}n_z\right)=\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}(\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{n})$$

Ponieważ $\mathrm{div}\mathbf{E}=0$ ($\mathrm{div}\varepsilon\mathbf{E}=\varepsilon\mathrm{div}\mathbf{E}+\mathbf{E}\mathrm{grad}\varepsilon$):

$\mathbf{E}_o\cdot\mathbf{n}=0$,

$\mathbf{E}_o f(\xi)\cdot\mathbf{n}=0$,

$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{E}\perp\mathbf{n}$.

Wektor natężenia pola elektrycznego **E** jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali.

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_o f(\xi)$

$\xi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt=$

$=n_x x+n_y y+n_z z-vt$

$\frac{\partial\xi}{\partial x}=n_x$

$\frac{\partial\xi}{\partial y}=n_y$

$\frac{\partial\xi}{\partial z}=n_z$

$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathrm{div}\mathbf{B}_o f(\xi)=$$

$$=\frac{\partial B_{ox}f(\xi)}{\partial x}+\frac{\partial B_{oy}f(\xi)}{\partial y}+\frac{\partial B_{oz}f(\xi)}{\partial z}=$$

$$=B_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial x}+B_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial y}+B_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial z}=$$

$$=B_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+B_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+B_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=$$

$$=B_{ox}n_x\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}+B_{oy}n_y\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}+B_{oz}n_z\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}=$$

$$=\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}\left(B_{ox}n_x+B_{oy}n_y+B_{oz}n_z\right)=\frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}(\mathbf{B}_o\cdot\mathbf{n})$$

Ponieważ $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$:

$\mathbf{B}_o\cdot\mathbf{n}=0$,

$\mathbf{B}_o f(\xi)\cdot\mathbf{n}=0$,

$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{B}\perp\mathbf{n}$.

Wektor indukcji magnetycznej **B** jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali.

19 PROSTOPADŁOŚĆ WEKTORA INDUKCJI MAGNETYCZNEJ DO WEKTORA NATĘŻENIA POLA ELEKTRYCZNEGO PŁASKIEJ FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ SPOLARYZOWANEJ LINIOWO O DOWOLNYM KSZTAŁCIE IMPULSU

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_o f(\xi)$$
$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_o f(\xi)$$
$$\xi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-vt=$$
$$=n_x x+n_y y+n_z z-vt$$
$$\mathrm{rot}\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=n_x$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial y}=n_y$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial z}=n_z$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=v$$

$$\frac{\partial E_{oz}f(\xi)}{\partial y}-\frac{\partial E_{oy}f(\xi)}{\partial z}=\frac{\partial B_{ox}f(\xi)}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_{ox}f(\xi)}{\partial z}-\frac{\partial E_{oz}f(\xi)}{\partial x}=\frac{\partial B_{oy}f(\xi)}{\partial t}$$
$$\frac{\partial E_{oy}f(\xi)}{\partial x}-\frac{\partial E_{ox}f(\xi)}{\partial y}=\frac{\partial B_{oz}f(\xi)}{\partial t}$$

$$E_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}-E_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}=B_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}$$
$$E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial z}-E_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=B_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}$$
$$E_{oy}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}-E_{ox}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}=B_{oz}\frac{\partial f(\xi)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}$$

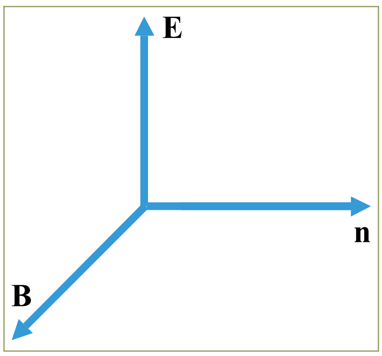
$$n_y E_{oz}-n_z E_{oy}=vB_{ox}$$
$$n_z E_{ox}-n_x E_{oz}=vB_{oy}$$
$$n_x E_{oy}-n_y E_{ox}=vB_{oz}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_o=v\mathbf{B}_o$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}_o f(\xi)=v\mathbf{B}_o f(\xi)$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=v\mathbf{B}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{B}\perp\mathbf{E}$$

Wektor indukcji magnetycznej **B** jest prostopadły do wektora natężenia pola elektrycznego **E**.

Zbierzmy uzyskane wyniki:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{E}\perp\mathbf{n}$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0\quad\Leftrightarrow\quad\mathbf{B}\perp\mathbf{n}$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=v\mathbf{B}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\mathbf{B}\perp\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=0\end{cases}$$



W każdym punkcie przestrzeni wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do wektora indukcji pola magnetycznego i oba są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Wektory **n**, **E** i **B** tworzą prostokątny układ prawoskrętny.

PRZYKŁAD
Fala płaska spolaryzowana liniowo harmoniczna i monochromatyczna (biegnąca) rozchodząca się wzdłuż osi X

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\mathbf{B}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2}=\varepsilon\mu$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{E}\perp\mathbf{n}$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{B}\perp\mathbf{n}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=v\mathbf{B} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{B}\perp\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=0\end{cases}$$

$$n_x=1$$
$$n_y=0$$
$$n_z=0$$
$$E_x=0$$
$$E_y=E_{oy}\cos k(x-vt)$$
$$E_z=0$$
$$B_x=0$$
$$B_y=0$$
$$B_z=B_{oz}\cos k(x-vt)$$

k = liczba falowa

$$k\overset{df}{=}\frac{\omega}{v}$$

$$\omega\overset{df}{=}\frac{2\pi}{T}$$

$$f\overset{df}{=}\frac{1}{T}$$

$$v=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$$

$$k=\frac{2\pi f}{v}=\frac{2\pi}{Tv}=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 E_{oy}\cos k(x-vt)}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 E_{oy}\cos k(x-vt)}{\partial t^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 B_{oz}\cos k(x-vt)}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 B_{oz}\cos k(x-vt)}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 \cos k(x-vt)}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \cos k(x-vt)}{\partial t^2}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 \cos k(x-vt)}{\partial x^2}\overset{?}{=}\dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \cos k(x-vt)}{\partial t^2}\end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\cos k(x-vt)}{\partial x}\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\cos k(x-vt)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-k\sin k(x-vt)\right]\overset{?}{=}\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[kv\sin k(x-vt)\right]$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin k(x-vt)\right]\overset{?}{=}\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left[\sin k(x-vt)\right]$$

$$-k\cos k(x-vt)\overset{?}{=}\frac{1}{v}\left[-kv\cos k(x-vt)\right]$$

$$\cos k(x-vt)=\cos k(x-vt)$$

Wykorzystanie liczb zespolonych

$$E_y=E_{oy}\cos k(x-vt)=E_{oy}\cos(kx-\omega t)=E_{oy}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=\operatorname{Re}E_{oy}e^{i(kx-\omega t)}$$

$$B_z=B_{oz}\cos k(x-vt)=B_{oz}\cos(kx-\omega t)=B_{oz}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{2\pi}{T}t\right)=\operatorname{Re}B_{oz}e^{i(kx-\omega t)}$$

20 ROZCHODZENIE SIĘ FAL ELEKTROMAGNETYCZNYCH W JEDNORODNYM OŚRODKU PRZEWODZĄCYM, RÓWNANIE TELEGRAFISTÓW (TELEGRAFICZNE)

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

$$\mathbf{j} = \lambda\mathbf{E}$$

$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}$$

Założenia:

$$\mathrm{grad}\,\varepsilon = 0$$

$$\mathrm{grad}\,\mu = 0$$

$$\mathrm{grad}\,\rho = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$$

Tożsamości:

$$\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\alpha\mathbf{A} = \alpha\,\mathrm{rot}\mathbf{A} + (\mathrm{grad}\,\alpha)\times\mathbf{A}$$

$$\mathrm{grad}\,\alpha\beta = \beta\,\mathrm{grad}\,\alpha + \beta\,\mathrm{grad}\,\alpha$$

$$\mathrm{grad}\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{grad}\,\alpha$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu\lambda\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Z jednej strony

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mathrm{rot}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{B} = -\mu\lambda\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

z drugiej strony

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{E} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E} = \mathrm{grad}\frac{\rho}{\varepsilon} - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E},$$

ostatecznie mamy

$$-\mu\lambda\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla^2\mathbf{E},$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu\lambda\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}}$$

Analogicznie:

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mu\lambda\mathbf{E} + \mathrm{rot}\,\varepsilon\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu\lambda\,\mathrm{rot}\mathbf{E} + \varepsilon\mu\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\mu\lambda\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\mathbf{B} - \nabla^2\mathbf{B} = -\nabla^2\mathbf{B}$$

$$-\mu\lambda\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\nabla^2\mathbf{B}$$

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{B} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu\lambda\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}}$$

`

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKACH PORUSZAJĄCYCH SIĘ

1 RÓWNANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO W PRÓŻNI DLA CZTEROWEKTORA POTENCJAŁU

- **Czterowektor potencjału**

$$\boxed{\tilde{\mathbf{\Phi}} = \left(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4\right) \overset{df}{=} \left(A_x, A_y, A_z, \tfrac{i}{c}\varphi\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{\Phi}'_1 &= \Gamma\left(\tilde{\Phi}_1 + iB\tilde{\Phi}_4\right) \\ \tilde{\Phi}'_2 &= \tilde{\Phi}_2 \\ \tilde{\Phi}'_3 &= \tilde{\Phi}_3 \\ \tilde{\Phi}'_4 &= \Gamma\left(\tilde{\Phi}_4 - iB\tilde{\Phi}_1\right) \end{aligned}}$$

$\mathbf{A}$ = potencjał wektorowy
φ = potencjał skalarny

$$\boxed{\begin{aligned} B_x &\overset{df}{=} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &\overset{df}{=} \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &\overset{df}{=} \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}}
\qquad
\boxed{\begin{aligned} E_x &\overset{df}{=} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y &\overset{df}{=} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ E_z &\overset{df}{=} -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{aligned}}$$

- **Czterowektor gęstości prądu**

$$\boxed{\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right) \overset{df}{=} \left(j_x, j_y, j_z, ic\rho\right)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{J}'_1 &= \Gamma\left(\tilde{J}_1 + iB\tilde{J}_4\right) \\ \tilde{J}'_2 &= \tilde{J}_2 \\ J'_3 &= \tilde{J}_3 \\ \tilde{J}'_4 &= \Gamma\left(\tilde{J}_4 - iB\tilde{J}_1\right) \end{aligned}}$$

$\tilde{J}_k = \rho v_k = \rho_0 \gamma v_k = \rho_0 \tilde{v}_k, \quad (k = 1,2,3,4)$
$\rho = \gamma\rho_0$ = objętościowa gęstość ładunku
ρ_0 = spoczynkowa gęstość objętościowa ładunku
$v_k = \dfrac{dx_k}{dt}, \quad \tilde{v}_k = \gamma v_k, \quad v_4 = ic, \quad \tilde{v}_4 = \gamma ic$
$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = \left(j_x, j_y, j_z\right)$ = gęstość prądu

- **Dodatkowy warunek Lorenza dla czterowektora potencjału**

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \left(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4\right) = \left(A_x, A_y, A_z, \tfrac{i}{c}\varphi\right)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial ic\varphi}{\partial ict} = \frac{\partial \frac{i}{c}\varphi}{\partial ict}$$

$$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{\Phi}} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x_k}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \overset{?}{\rightarrow} \quad \mathrm{div}\tilde{\mathbf{\Phi}} = 0$$

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \frac{i}{c}\varphi}{\partial ict} =$$

$$= \frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_4}{\partial x_4} = \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x_k} = \mathrm{div}\tilde{\mathbf{\Phi}} = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\tilde{\mathbf{\Phi}} = 0}$$

- **Równia Maxwella dla czterowektora potencjału**

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \left(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4\right) = \left(A_x, A_y, A_z, \tfrac{i}{c}\varphi\right)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right) = \left(j_x, j_y, j_z, ic\rho\right)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_o\mu_o$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_k}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_k}{\partial t^2}\frac{(-1)}{i^2} = \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_k}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_k}{\partial x_4^2}$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\frac{(-1)}{i^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial (ict)^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_4^2}$$

$$-\frac{i}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_o} = -\mu_o ic\rho$$

$$\left.\begin{aligned} \Box A &= -\mu_o j \\ \Box\varphi &= -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho \end{aligned}\right\} \quad \overset{?}{\rightarrow} \quad \sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_i}{\partial x_k^2} = -\mu_o\tilde{J}_i, \quad (i = 1,2,3,4)$$

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = -\mu_o j_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = -\mu_o j_y$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = -\mu_o j_z$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_1}{\partial x_4^2} = -\mu_o\tilde{J}_1$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_2}{\partial x_4^2} = -\mu_o\tilde{J}_2$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_3}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_3}{\partial x_4^2} = -\mu_o\tilde{J}_3$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho$$

$$\frac{\partial^2 \frac{i}{c}\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{i}{c}\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{i}{c}\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \frac{i}{c}\varphi}{\partial (ict)^2} = -\frac{i}{c}\frac{\rho}{\varepsilon_o} = -\mu_o ic\rho$$

$$\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_4}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_4}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_4}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2\tilde{\Phi}_4}{\partial x_4^2} = -\mu_o\tilde{J}_4$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{4}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}_i}{\partial x_k^2} = -\mu_o\tilde{J}_i, \quad (i = 1,2,3,4) \quad \text{lub} \quad \Box\tilde{\mathbf{\Phi}} = -\mu_o\tilde{\mathbf{J}}}$$

- **Równanie ciągłości**

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right) = \left(j_x, j_y, j_z, ic\rho\right)$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x, y, z, ict\right)$$

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial ic\rho}{\partial ict}$$

$$\mathrm{div}\tilde{\mathbf{J}} = \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_k}{\partial x_k}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \overset{?}{\rightarrow} \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_k}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial ic\rho}{\partial ict} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{J}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{J}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{J}_3}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{J}_4}{\partial x_4} = 0$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathrm{div}\tilde{\mathbf{J}} = 0}$$

- **Po co to wszystko?**
  Zbierzmy uzyskane wyniki.

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} = \left(\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Phi}_3, \tilde{\Phi}_4\right) = \left(A_x, A_y, A_z, \tfrac{i}{c}\varphi\right)$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right) = \left(j_x, j_y, j_z, ic\rho\right)$$

$$\tilde{R} = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = \left(x, y, z, ict\right)$$

Czterowektor jest współzmiennikiem, a jego moduł niezmiennikiem przekształceń Lorentza.

Dywergencja czerowektora jest niezmiennikiem przekształceń Lorentza.

Delambercjan czterowektora jest czerowektorem.

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \tilde{\Phi}_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathrm{div}\tilde{\mathbf{\Phi}} = 0$$

$$\mathrm{div}\mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{lub} \quad \mathrm{div}\tilde{\mathbf{J}} = 0$$

Lewe strony równań pola elektromagnetycznego dla czterowektorów potencjału $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ i gęstości prądu $\tilde{\mathbf{J}}$ jako dywergencje czterowektora są relatywistycznie niezmiennicze, prawe strony tych równań będące zerami są również relatywistycznie niezmiennicze.

$$\left.\begin{aligned} \Box\mathbf{A} &= -\mu_o j \\ \Box\varphi &= -\frac{1}{\varepsilon_o}\rho \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=1}^{4} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}_i}{\partial x_k^2} = -\mu_o \tilde{J}_i, \quad \left(i = 1,2,3,4\right) \quad \text{lub} \quad \Box\tilde{\mathbf{\Phi}} = -\mu_o \tilde{\mathbf{J}}$$

Obie strony tych równań są relatywistycznie współzmiennicze. Lewe strony stanowią dalambercjan czterowektora potencjału $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ a prawe czterowektor gęstości prądu $\tilde{\mathbf{J}}$.

2 RÓWNANIA MAXWELLA W POSTACI TENSOROWEJ

- **Jednorodne równania Maxwella w postaci tensorowej**

Jednorodne równania Maxwella w postaci trójwymiarowej

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

$$x = x_1$$
$$y = x_2$$
$$z = x_3$$
$$ict = x_4$$
$$E_{11} = 0$$
$$E_{12} = iE_z$$
$$E_{13} = -iE_y$$
$$E_{14} = -cB_x$$
$$E_{21} = -iE_z$$
$$E_{22} = 0$$
$$E_{23} = iE_x$$
$$E_{24} = -cB_y$$
$$E_{31} = iE_y$$
$$E_{32} = -iE_x$$
$$E_{33} = 0$$
$$E_{34} = -cB_z$$
$$E_{41} = cB_x$$
$$E_{42} = cB_y$$
$$E_{43} = cB_z$$
$$E_{44} = 0$$

$$[E_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & iE_z & -iE_y & -cB_x \\ -iE_z & 0 & iE_x & -cB_y \\ iE_y & -iE_x & 0 & -cB_z \\ cB_x & cB_y & cB_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{\mu\nu} = -E_{\nu\mu}$$

$$\mathrm{rot}\, i\mathbf{E} - \frac{\partial c\mathbf{B}}{\partial ict} = 0$$

$$\mathrm{div}\, c\mathbf{B} = 0$$

$$\frac{\partial iE_z}{\partial y} - \frac{\partial iE_y}{\partial z} - \frac{\partial cB_x}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial iE_x}{\partial z} - \frac{\partial iE_z}{\partial x} - \frac{\partial cB_y}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial iE_y}{\partial x} - \frac{\partial iE_x}{\partial y} - \frac{\partial cB_z}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial cB_x}{\partial x} + \frac{\partial cB_y}{\partial y} + \frac{\partial cB_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial iE_z}{\partial y} + \frac{\partial(-iE_y)}{\partial z} + \frac{\partial(-cB_x)}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial(-iE_z)}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial iE_x}{\partial z} + \frac{\partial(-cB_y)}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial iE_y}{\partial x} + \frac{\partial(-iE_x)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} + \frac{\partial(-cB_z)}{\partial ict} = 0$$
$$\frac{\partial cB_x}{\partial x} + \frac{\partial cB_y}{\partial y} + \frac{\partial cB_z}{\partial z} + \frac{\partial 0}{\partial ict} = 0$$

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial E_{14}}{\partial x_4} = 0$$
$$\frac{\partial E_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial E_{24}}{\partial x_4} = 0$$
$$\frac{\partial E_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial E_{34}}{\partial x_4} = 0$$
$$\frac{\partial E_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial E_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial E_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial E_{44}}{\partial x_4} = 0$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial E_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (\mu = 1,2,3,4)}$$

- **Niejednorodne równania Maxwella w postaci tensorowej**

Niejednorodne równania Maxwella w postaci trójwymiarowej

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

$$H_{11} = 0$$
$$H_{12} = H_z$$
$$H_{13} = -H_y$$
$$H_{14} = -icD_x$$
$$H_{21} = -H_z$$
$$H_{22} = 0$$
$$H_{23} = H_x$$
$$H_{24} = -icD_y$$
$$H_{31} = H_y$$
$$H_{32} = -H_x$$
$$H_{33} = 0$$
$$H_{34} = -icD_z$$
$$H_{41} = icD_x$$
$$H_{42} = icD_y$$
$$H_{43} = icD_z$$
$$H_{44} = 0$$

$$j_x = J_1$$
$$j_y = J_2$$
$$j_z = J_3$$
$$ic\rho = J_4$$

$$[H_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$H_{\mu\nu} = -H_{\nu\mu}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} - \frac{\partial ic\mathbf{D}}{\partial ict} = \mathbf{j}$$

$$\mathrm{div}\ ic\mathbf{D} = ic\rho$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial icD_x}{\partial ict} = j_x$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial icD_y}{\partial ict} = j_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial icD_z}{\partial ict} = j_z$$

$$\frac{\partial icD_x}{\partial x} + \frac{\partial icD_y}{\partial y} + \frac{\partial icD_z}{\partial z} = ic\rho$$

$$\frac{\partial 0}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial(-H_y)}{\partial z} + \frac{\partial(-icD_x)}{\partial ict} = j_x$$

$$\frac{\partial(-H_z)}{\partial x} + \frac{\partial 0}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial z} + \frac{\partial(-icD_y)}{\partial ict} = j_y$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} + \frac{\partial(-H_x)}{\partial y} + \frac{\partial 0}{\partial z} + \frac{\partial(-icD_z)}{\partial ict} = j_z$$

$$\frac{\partial icD_x}{\partial x} + \frac{\partial icD_y}{\partial y} + \frac{\partial icD_z}{\partial z} + \frac{\partial 0}{\partial ict} = ic\rho$$

$$\frac{\partial H_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{14}}{\partial x_4} = J_1$$

$$\frac{\partial H_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{24}}{\partial x_4} = J_2$$

$$\frac{\partial H_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{33}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{34}}{\partial x_4} = J_3$$

$$\frac{\partial H_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial H_{44}}{\partial x_4} = J_4$$

$$\boxed{\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu, \quad (\mu = 1,2,3,4)}$$

- **Równania Maxwella i siła Lorentza wyrażone przez tensor** $F_{\mu\nu}$

  Z tensora $\left[E_{\mu\nu}\right]$ można skonstruować tensor $\left[F_{\mu\nu}\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} E_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} \\ iE_{*} \to cB_{*} \\ -iE_{*} \to -cB_{*} \\ cB_{*} \to iE_{*} \\ -cB_{*} \to -iE_{*} \end{array}\right\} \qquad \left[F_{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}, \qquad F_{\mu\nu}=-F_{\nu\mu}$$

Przy pomocy tensora $\left[F_{\mu\nu}\right]$ jednorodne równania Maxwella zapisywane są także jako

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{B}=0 \end{array}\right\} \to \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{43}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_{24}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial F_{32}}{\partial x_4}=0 \\ \dfrac{\partial F_{34}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{41}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial F_{13}}{\partial x_4}=0 \\ \dfrac{\partial F_{42}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{14}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_{21}}{\partial x_4}=0 \\ \dfrac{\partial F_{23}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial F_{31}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial F_{12}}{\partial x_3}=0 \end{array}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\dfrac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}=0 \\ \mu,\nu,\sigma=4,3,2=3,4,1=4,2,1=2,3,1 \end{array}}$$

Trójwymiarową postać siły Lorentza

$$\mathbf{F}^{L}=m\gamma\frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}=\gamma\left(q\mathbf{E}+q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$$

można przy pomocy tensora $F_{\mu\nu}$ rozszerzyć do postaci czterowymiarowej

$$\boxed{m\gamma\frac{d(\gamma v_\alpha)}{dt}=q\gamma c^{-1}\sum_{\beta=1}^{4} v_\beta F_{\alpha\beta}, \quad \alpha=1,2,3,4}$$

- **Równania Maxwella wyrażone przez tensor** $D_{\mu\nu}$

  Z tensor $\left[H_{\mu\nu}\right]$ można skonstruować tensor $\left[D_{\mu\nu}\right]$:

$$\left.\begin{array}{l} H_{\mu\nu} \to D_{\mu\nu} \\ H_{\bullet\bullet} \to icD_{\bullet\bullet} \\ -H_{\bullet\bullet} \to -icD_{\bullet\bullet} \\ icD_{\bullet\bullet} \to H_{\bullet *} \\ -icD_{\bullet\bullet} \to -H_{\bullet\bullet} \end{array}\right\} \qquad \left[D_{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} 0 & icD_z & -icD_y & -H_x \\ -icD_z & 0 & icD_x & -H_y \\ icD_y & -icD_x & 0 & -H_z \\ H_x & H_y & H_z & 0 \end{bmatrix}, \qquad D_{\mu\nu}=-D_{\nu\mu}$$

Przy pomocy tensora $\left[D_{\mu\nu}\right]$ niejednorodne równania Maxwella zapisywana są także jako

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{j}+\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}\mathbf{D}=\rho \end{array}\right\} \to \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial D_{43}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial D_{24}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial D_{32}}{\partial x_4}=J_1 \\ \dfrac{\partial D_{34}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial D_{41}}{\partial x_3}+\dfrac{\partial D_{13}}{\partial x_4}=J_2 \\ \dfrac{\partial D_{42}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial D_{14}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial D_{21}}{\partial x_4}=J_3 \\ \dfrac{\partial D_{23}}{\partial x_1}+\dfrac{\partial D_{31}}{\partial x_2}+\dfrac{\partial D_{12}}{\partial x_3}=J_4 \end{array}} \quad \text{lub} \quad \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}+\dfrac{\partial D_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu}+\dfrac{\partial D_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu}=J_\alpha \\ \mu,\nu,\sigma,\alpha= \\ =4,3,2,1=3,4,1,2= \\ =4,2,1,3=2,3,1,4 \end{array}}$$

- **Składowe tensora $F_{\mu\nu}$ wyrażone przez składowe czterowektora potencjału**

$$\boxed{F_{\mu\nu} = c\left(\frac{\partial\Phi_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_\nu}\right) \qquad (\mu,\nu = 1,2,3,4)}$$

$$F_{11} = c\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\right) = 0, \qquad F_{23} = c\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_3}\right) = cB_x = -F_{32}$$

$$F_{12} = c\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2}\right) = cB_z = -F_{21}, \qquad F_{24} = c\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_4}\right) = -iE_y = -F_{42}$$

$$F_{13} = c\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_3}\right) = -cB_y = -F_{31}, \qquad F_{33} = c\left(\frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$F_{14} = c\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_4}\right) = -iE_x = -F_{41}, \qquad F_{34} = c\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_3} - \frac{\partial\Phi_3}{\partial x_4}\right) = -iE_z = -F_{43}$$

$$F_{22} = c\left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2}\right) = 0, \qquad F_{44} = c\left(\frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4} - \frac{\partial\Phi_4}{\partial x_4}\right) = 0$$

- **Wyniki**

$$E_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & iE_z & -iE_y & -cB_x \\ -iE_z & 0 & iE_x & -cB_y \\ iE_y & -iE_x & 0 & -cB_z \\ cB_x & cB_y & cB_z & 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial E_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \quad (\mu = 1,2,3,4) \\ \mathrm{div}E_{\bullet\bullet} = 0 \end{array}\right.$$

$$H_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial H_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = J_\mu, \\ (\mu = 1,2,3,4) \\ \quad \mathrm{div}H_{\bullet\bullet} = \tilde{\mathbf{J}} \end{array}\right.$$

$$F_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \dfrac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} = 0 \\ \mu,\nu,\sigma = 4,3,2 = 3,4,1 = \\ \qquad = 4,2,1 = 2,3,1 \end{array}\right.$$

$$D_{\bullet\bullet} = \begin{bmatrix} 0 & icD_z & -icD_y & -H_x \\ -icD_z & 0 & icD_x & -H_y \\ icD_y & -icD_x & 0 & -H_z \\ H_x & H_y & H_z & 0 \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} = \rho \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial D_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \dfrac{\partial D_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} + \dfrac{\partial D_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} = J_\alpha \\ \mu,\nu,\sigma,\alpha = 4,3,2,1 = 3,4,1,2 = \\ \qquad = 4,2,1,3 = 2,3,1,4 \end{array}\right.$$

Tensory $E_{\bullet\bullet}$, $H_{\bullet\bullet}$, $F_{\bullet\bullet}$ i $D_{\bullet\bullet}$ nazywane są tensorami pola elektromagnetycznego.

- **Równania Maxwella dla próżni**

Dla próżni,
$\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$, $H_{\alpha\beta} = c\varepsilon_o F_{\alpha\beta}$, $D_{\alpha\beta} = c\varepsilon_o E_{\alpha\beta}$,
równania Maxwella

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}}$$

można zapisać przy pomocy dwóch wektorów pola

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{B} &= \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_o}\rho \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{D} &= -\mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{H} &= 0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}}$$

lub jednego tensora pola

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \\ &\alpha = 1,2,3,4 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial E_{\beta\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial E_{\sigma\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial E_{\nu\sigma}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{c\varepsilon_0} J_\alpha \\ &\beta, \nu, \sigma, \alpha = 4,3,2,1 = 3,4,1,2 = 4,2,1,3 = 2,3,1,4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \\ &\alpha = 1,2,3,4 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial D_{\beta\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial D_{\sigma\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial D_{\nu\sigma}}{\partial x_\beta} = J_\alpha \\ &\beta, \nu, \sigma, \alpha = 4,3,2,1 = 3,4,1,2 = 4,2,1,3 = 2,3,1,4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\beta} = 0 \\ &\beta, \nu, \sigma = 4,3,2 = 3,4,1 = 4,2,1 = 2,3,1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{1}{c\varepsilon_0} J_\alpha \\ &\alpha = 1,2,3,4 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial H_{\beta\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial H_{\sigma\beta}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial H_{\nu\sigma}}{\partial x_\beta} = 0 \\ &\beta, \nu, \sigma = 4,3,2 = 3,4,1 = 4,2,1 = 2,3,1 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\sum_{\beta=1}^{4} \frac{\partial H_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = J_\alpha \\ &\alpha = 1,2,3,4 \end{aligned}}$$

3 TRANSFORMACJA LORENTZA DLA WEKTORÓW E, B, D, H POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

- **Transformacja Lorentza dla wektorów E, B, D i H**

$$\left[E_{pq}\right]=\begin{bmatrix} 0 & iE_z & -iE_y & -cB_x \\ -iE_z & 0 & iE_x & -cB_y \\ iE_y & -iE_x & 0 & -cB_z \\ cB_x & cB_y & cB_z & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[H_{pq}\right]=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$T'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\beta}T_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T_{\alpha\beta}$$

$$\left[a_{pq}\right]=\begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$a_{pq}=\frac{\partial x'_p}{\partial x_q}=\frac{\partial x_q}{\partial x'_p}$$

$$\Gamma=\left(1-B^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad B=\frac{V}{c}$$

$$T'_{11}=\Gamma^2\left[T_{11}-B^2T_{44}+iB\left(T_{14}+T_{41}\right)\right]$$
$$T'_{12}=\Gamma\left(T_{12}+iBT_{42}\right)$$
$$T'_{13}=\Gamma\left(T_{13}+iBT_{43}\right)$$
$$T'_{14}=\Gamma^2\left[T_{14}+B^2T_{41}+iB\left(T_{44}-T_{11}\right)\right]$$
$$T'_{21}=\Gamma\left(T_{21}+iBT_{24}\right)$$
$$T'_{22}=T_{22}$$
$$T'_{23}=T_{23}$$
$$T'_{24}=\Gamma\left(T_{24}-iBT_{21}\right)$$
$$T'_{31}=\Gamma\left(T_{31}+iBT_{34}\right)$$
$$T'_{32}=T_{32}$$
$$T'_{33}=T_{33}$$
$$T'_{34}=\Gamma\left(T_{34}-iBT_{31}\right)$$
$$T'_{41}=\Gamma^2\left[T_{41}+B^2T_{14}+iB\left(T_{44}-T_{11}\right)\right]$$
$$T'_{42}=\Gamma\left(T_{42}-iBT_{12}\right)$$
$$T'_{43}=\Gamma\left(T_{43}-iBT_{13}\right)$$
$$T'_{44}=\Gamma^2\left[T_{44}-B^2T_{11}-iB\left(T_{14}+T_{41}\right)\right]$$
$$E'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}E_{\alpha\beta}$$
$$H'_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}H_{\alpha\beta}$$

E_x : $E'_{23}=E_{23}$,
$$E'_x=E_x$$
E_y : $E'_{13}=\Gamma\left(E_{13}+iBE_{43}\right)$,
$$E'_y=\Gamma\left(E_y-VB_z\right)$$
E_z : $E'_{12}=\Gamma\left(E_{12}+iBE_{42}\right)$,
$$E'_z=\Gamma\left(E_z+VB_y\right)$$
B_x : $E'_{14}=\Gamma^2\left[E_{14}+B^2E_{41}+iB\left(E_{44}-E_{11}\right)\right]$,
$$B'_x=B_x$$
B_y : $E'_{24}=\Gamma\left(E_{24}-iBE_{21}\right)$,
$$B'_y=\Gamma\left(B_y+\frac{V}{c^2}E_z\right)$$
B_z : $E'_{34}=\Gamma\left(E_{34}-iBE_{31}\right)$,
$$B'_z=\Gamma\left(B_z-\frac{V}{c^2}E_y\right)$$

D_x : $H'_{14}=\Gamma^2\left[H_{14}+B^2H_{41}+iB\left(H_{44}-H_{11}\right)\right]$,
$$D'_x=D_x$$
D_y : $H'_{24}=\Gamma\left(H_{24}-iBH_{21}\right)$,
$$D'_y=\Gamma\left(D_y-\frac{V}{c^2}H_z\right)$$
D_z : $H'_{34}=\Gamma\left(H_{34}-iBH_{31}\right)$,
$$D'_z=\Gamma\left(D_z+\frac{V}{c^2}H_y\right)$$
H_x : $H'_{23}=H_{23}$,
$$H'_x=H_x$$
H_y : $H'_{13}=\Gamma\left(H_{13}+iBH_{43}\right)$,
$$H'_y=\Gamma\left(H_y+VD_z\right)$$
H_z : $H'_{21}=\Gamma\left(H_{21}+iBH_{24}\right)$,
$$H'_z=\Gamma\left(H_z-VD_y\right)$$

- **Odwrotna transformacja Lorentza dla wektorów E, B, D i H**

$$\left[E_{pq}\right]=\begin{bmatrix} 0 & iE_z & -iE_y & -cB_x \\ -iE_z & 0 & iE_x & -cB_y \\ iE_y & -iE_x & 0 & -cB_z \\ cB_x & cB_y & cB_z & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[H_{pq}\right]=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}\frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\beta}T'_{\alpha\beta}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{\mu\alpha}c_{\nu\beta}T'_{\alpha\beta}$$

$$\left[c_{pq}\right]=\begin{bmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -iB\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ iB\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{bmatrix}$$

$$c_{pq}=\frac{\partial x_p}{\partial x'_q}$$

$$\Gamma=\left(1-B^2\right)^{-\frac{1}{2}},\quad B=\frac{V}{c}$$

$$T_{11}=\Gamma^2\left[T'_{11}-B^2T'_{44}-iB\left(T'_{14}+T'_{41}\right)\right]$$
$$T_{12}=\Gamma\left(T'_{12}-iBT'_{42}\right)$$
$$T_{13}=\Gamma\left(T'_{13}-iBT'_{43}\right)$$
$$T_{14}=\Gamma^2\left[T'_{14}+B^2T'_{41}-iB\left(T'_{44}-T'_{11}\right)\right]$$
$$T_{21}=\Gamma\left(T'_{21}-iBT'_{24}\right)$$
$$T_{22}=T'_{22}$$
$$T_{23}=T'_{23}$$
$$T_{24}=\Gamma\left(T'_{24}+iBT'_{21}\right)$$
$$T_{31}=\Gamma\left(T'_{31}-iBT'_{34}\right)$$
$$T_{32}=T'_{32}$$
$$T_{33}=T'_{33}$$
$$T_{34}=\Gamma\left(T'_{34}+iBT'_{31}\right)$$
$$T_{41}=\Gamma^2\left[T'_{41}+B^2T'_{14}-iB\left(T'_{44}-T'_{11}\right)\right]$$
$$T_{42}=\Gamma\left(T'_{42}+iBT'_{12}\right)$$
$$T_{43}=\Gamma\left(T'_{43}+iBT'_{13}\right)$$
$$T_{44}=\Gamma^2\left[T'_{44}-B^2T'_{11}+iB\left(T'_{14}+T'_{41}\right)\right]$$

$$E_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{\mu\alpha}c_{\nu\beta}E'_{\alpha\beta}$$

$$H_{\mu\nu}=\sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4}c_{\mu\alpha}c_{\nu\beta}H'_{\alpha\beta}$$

$E_x:\quad E_{23}=E'_{23},$

$E_x=E'_x$

$E_y:\quad E_{13}=\Gamma\left(E'_{13}-iBE'_{43}\right),$

$E_y=\Gamma\left(E'_y+VB'_z\right)$

$E_z:\quad E_{12}=\Gamma\left(E'_{12}-iBE'_{42}\right),$

$E_z=\Gamma\left(E'_z-VB'_y\right)$

$B_x:\quad E_{14}=\Gamma^2\left[E'_{14}+B^2E'_{41}-iB\left(E'_{44}-E'_{11}\right)\right],$

$B_x=B'_x$

$B_y:\quad E_{24}=\Gamma\left(E'_{24}+iBE'_{21}\right),$

$$B_y=\Gamma\left(B'_y-\frac{V}{c^2}E'_z\right)$$

$B_z:\quad E_{34}=\Gamma\left(E'_{34}+iBE'_{31}\right),$

$$B_z=\Gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y\right)$$

$D_x:\ H_{14}=\Gamma^2\left[H'_{14}+B^2H'_{41}-iB\left(H'_{44}-H'_{11}\right)\right],$

$D_x=D'_x$

$D_y:\quad H_{24}=\Gamma\left(H'_{24}+iBH'_{21}\right),$

$$D_y=\Gamma\left(D'_y+\frac{V}{c^2}H'_z\right)$$

$D_z:\quad H_{34}=\Gamma\left(H'_{34}+iBH'_{31}\right),$

$$D_z=\Gamma\left(D'_z-\frac{V}{c^2}H'_y\right)$$

$H_x:H_{23}=H'_{23},$

$H_x=H'_x$

$H_y:\quad H_{13}=\Gamma\left(H'_{13}-iBH'_{43}\right),$

$H_y=\Gamma\left(H'_y-VD'_z\right)$

$H_z:\quad H_{21}=\Gamma\left(H'_{21}-iBH'_{24}\right),$

$H_z=\Gamma\left(H'_z+VD'_y\right)$

- **Wyniki**

$E'_x = E_x$	$E_x = E'_x$
$E'_y = \Gamma\left(E_y - VB_z\right)$	$E_y = \Gamma\left(E'_y + VB'_z\right)$
$E'_z = \Gamma\left(E_z + VB_y\right)$	$E_z = \Gamma\left(E'_z - VB'_y\right)$
$B'_x = B_x$	$B_x = B'_x$
$B'_y = \Gamma\left(B_y + \frac{V}{c^2}E_z\right)$	$B_y = \Gamma\left(B'_y - \frac{V}{c^2}E'_z\right)$
$B'_z = \Gamma\left(B_z - \frac{V}{c^2}E_y\right)$	$B_z = \Gamma\left(B'_z + \frac{V}{c^2}E'_y\right)$
$D'_x = D_x$	$D_x = D'_x$
$D'_y = \Gamma\left(D_y - \frac{V}{c^2}H_z\right)$	$D_y = \Gamma\left(D'_y + \frac{V}{c^2}H'_z\right)$
$D'_z = \Gamma\left(D_z + \frac{V}{c^2}H_y\right)$	$D_z = \Gamma\left(D'_z - \frac{V}{c^2}H'_y\right)$
$H'_x = H_x$	$H_x = H'_x$
$H'_y = \Gamma\left(H_y + VD_z\right)$	$H_y = \Gamma\left(H'_y - VD'_z\right)$
$H'_z = \Gamma\left(H_z - VD_y\right)$	$H_z = \Gamma\left(H'_z + VD'_y\right)$

PRZYKŁAD
Rozpatrzmy falę płaską o kierunku rozchodzenia się wzdłuż osi X. Niech wektory **E** i **B** będą równoległe odpowiednio do osi Y i Z. Źródło tej fali jest nieruchome względem układu K. Wtedy

$$E_x = D_x = B_x = H_x = E_z = D_z = B_y = H_y = 0,$$

$$n_x = +1, \quad n_y = n_z = 0,$$

$$E_y = E_{0y}\cos\Phi,$$

$$B_z = B_{0z}\cos\Phi,$$

$$\Phi = \omega\left(c^{-1}x - t\right).$$

Dla obserwatora związanego z układem K' poruszającym się z prędkością **V**

$$E'_y = E'_{0y}\cos\Phi' = \Gamma\left(E_y - VB_z\right) = \Gamma\left(E_{0y} - VB_{0z}\right)\cos\Phi,$$

$$B'_z = B'_{0z}\cos\Phi' = \Gamma\left(B_z - Vc^{-2}E_y\right) = \Gamma\left(B_{0z} - Vc^{-2}E_{0y}\right)\cos\Phi,$$

$$\Phi' = \omega'\left(c^{-1}x' - t'\right) = \Phi.$$

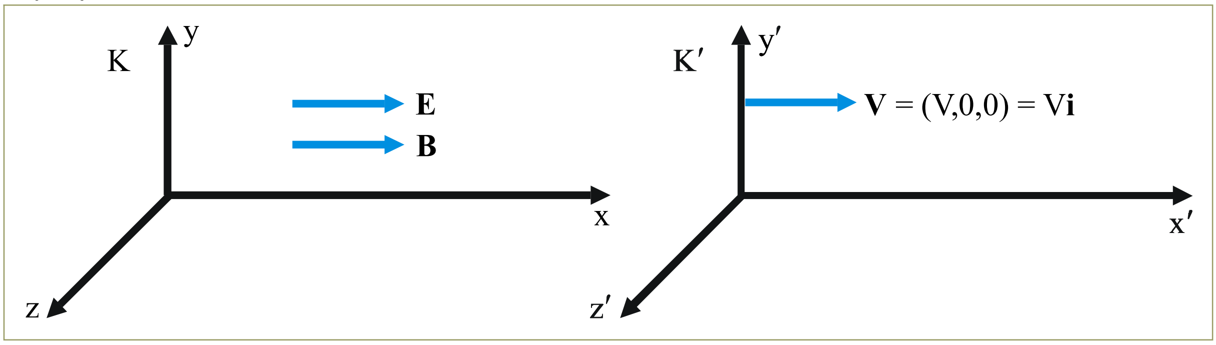
Wykorzystując powyższe równania, otrzymujemy

$$E'_{0y} = \Gamma\left(E_{0y} - VB_{0z}\right), \quad B'_{0z} = \Gamma\left(B_{0z} - Vc^{-2}E_{0y}\right).$$

Ponieważ $B_{0z} = c^{-1}E_{0y}$, mamy dla przypadku, gdy obserwator oddala się od źródła

$$\boxed{E'_{0y} = E_{0y}\frac{1 - Vc^{-1}}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}} = E_{0y}\sqrt{\frac{1 - Vc^{-1}}{1 + Vc^{-1}}}} \qquad \boxed{B'_{0z} = B_{0y}\frac{1 - Vc^{-1}}{\sqrt{1 - V^2c^{-2}}} = B_{0z}\sqrt{\frac{1 - Vc^{-1}}{1 + Vc^{-1}}}}$$

- **Przykład pól elektrycznego i magnetycznego równoległych w obu układach współrzędnych**



$\mathbf{E} = (E,0,0) = E\mathbf{i}, \quad E_x = E,\ E_y = 0,\ E_z = 0, \quad \mathbf{B} = (B,0,0) = B\mathbf{i}, \quad B_x = B,\ B_y = 0,\ B_z = 0$

$\mathbf{E}\times\mathbf{B} = (E_yB_z - E_zB_y)\mathbf{i} + (E_zB_x - E_xB_z)\mathbf{j} + (E_xB_y - E_yB_x)\mathbf{k} =$

$= (0\cdot 0 - 0\cdot 0)\mathbf{i} + (0\cdot B - E\cdot 0)\mathbf{j} + (E\cdot 0 - 0\cdot B)\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$E'_x = E_x = E,\ E'_y = 0,\ E'_z = 0, \quad \mathbf{E}' = (E,0,0) = E\mathbf{i}$

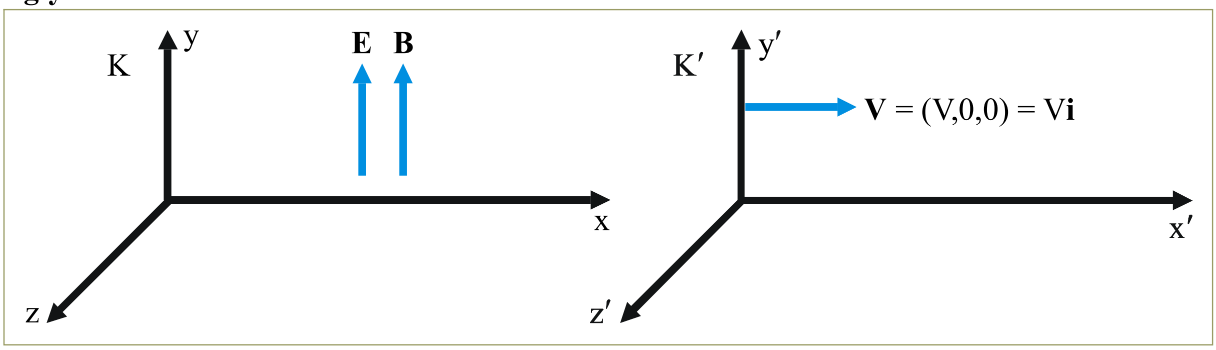
$B'_x = B_x = B,\ B'_y = 0,\ B'_z = 0, \quad \mathbf{B}' = (B,0,0) = B\mathbf{i}$

$\mathbf{E}'\times\mathbf{B}' = (E'_yB'_z - E'_zB'_y)\mathbf{i} + (E'_zB'_x - E'_xB'_z)\mathbf{j} + (E'_xB'_y - E'_yB'_x)\mathbf{k} =$

$= (0\cdot 0 - 0\cdot 0)\mathbf{i} + (0\cdot B - E\cdot 0)\mathbf{j} + (E\cdot 0 - 0\cdot B)\mathbf{k} = \mathbf{0}$

Wektory **E** i **B** równoległe względem siebie $(\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{0})$ w inercjalnym układzie odniesienia K przekształciły się w wektory **E'** i **B'** również równoległe względem siebie $(\mathbf{E}'\times\mathbf{B}' = \mathbf{0})$ w układzie K'.

- **Przykład pól elektrycznego i magnetycznego równoległych w układzie K i nierównoległych w układzie K'**



$\mathbf{E} = (0,E,0) = E\mathbf{j}, \quad E_x = 0,\ E_y = E,\ E_z = 0, \quad \mathbf{B} = (0,B,0) = B\mathbf{j}, \quad B_x = 0,\ B_y = B,\ B_z = 0$

$\mathbf{E}\times\mathbf{B} = (E_yB_z - E_zB_y)\mathbf{i} + (E_zB_x - E_xB_z)\mathbf{j} + (E_xB_y - E_yB_x)\mathbf{k} =$

$= (E\cdot 0 - 0\cdot B)\mathbf{i} + (0\cdot 0 - 0\cdot 0)\mathbf{j} + (0\cdot B - E\cdot 0)\mathbf{k} = \mathbf{0}$

$E'_x = 0,\ E'_y = \Gamma E_y = \Gamma E,\ E'_z = \Gamma V B_y = \Gamma V B, \quad \mathbf{E}' = (0, \Gamma E, \Gamma V B)$

$B'_x = 0,\ B'_y = \Gamma B_y = \Gamma B,\ B'_z = -\Gamma V c^{-2} E_y = -\Gamma V c^{-2} E, \quad \mathbf{B}' = (0, \Gamma B, -\Gamma V c^{-2} E)$

$\mathbf{E}'\times\mathbf{B}' = (E'_yB'_z - E'_zB'_y)\mathbf{i} + (E'_zB'_x - E'_xB'_z)\mathbf{j} + (E'_xB'_y - E'_yB'_x)\mathbf{k} =$

$= (-\Gamma^2 V c^{-2} E^2 - \Gamma^2 V B^2)\mathbf{i} + (0\cdot 0 - 0\cdot 0)\mathbf{j} + (0\cdot 0 - 0\cdot 0)\mathbf{k} = -\Gamma^2 V (c^{-2}E^2 + B^2)\mathbf{i} =$

$= -\Gamma^2 (c^{-2}E^2 + B^2)\mathbf{V} \neq \mathbf{0}$

Wektory **E** i **B** równoległe względem siebie $(\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \mathbf{0})$ w inercjalnym układzie odniesienia K przekształciły się w wektory **E'** i **B'** nierównoległe względem siebie $(\mathbf{E}'\times\mathbf{B}' \neq \mathbf{0})$ w układzie K'.

4 SKŁADOWE WEKTORÓW E, B, D, H PROSTOPADŁE I RÓWNOLEGŁE DO WEKTORA PRĘDKOŚCI V

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = E'_x \mathbf{i} \qquad \mathbf{E}_{\parallel} = E_x \mathbf{i}$$
$$\mathbf{E}'_{\perp} = E'_y \mathbf{j} + E'_z \mathbf{k} \qquad \mathbf{E}_{\perp} = E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = B'_x \mathbf{i} \qquad \mathbf{B}_{\parallel} = B_x \mathbf{i}$$
$$\mathbf{B}'_{\perp} = B'_y \mathbf{j} + B'_z \mathbf{k} \qquad \mathbf{B}_{\perp} = B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$
$$\mathbf{D}'_{\parallel} = D'_x \mathbf{i} \qquad \mathbf{D}_{\parallel} = D_x \mathbf{i}$$
$$\mathbf{D}'_{\perp} = D'_y \mathbf{j} + D'_z \mathbf{k} \qquad \mathbf{D}_{\perp} = D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}$$
$$\mathbf{H}'_{\parallel} = H'_x \mathbf{i} \qquad \mathbf{H}_{\parallel} = H_x \mathbf{i}$$
$$\mathbf{H}'_{\perp} = H'_y \mathbf{j} + H'_z \mathbf{k} \qquad \mathbf{H}'_{\perp} = H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{V} = (V,0,0)$$

i, j, k = wektory jednostkowe (wersory) wzdłuż osi x, y, z

$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V & 0 & 0 \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -VE_z \mathbf{j} + VE_y \mathbf{k}$$

$$V \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -VB_z j + VB_y k$$

$$V \times D = \begin{vmatrix} i & j & k \\ V & 0 & 0 \\ D_x & D_y & D_z \end{vmatrix} = -VD_z j + VD_y k$$

$$\mathbf{V} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ V & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -VH_z \mathbf{j} + VH_y \mathbf{k}$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} \qquad \mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp}$$
$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp}$$
$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_{\parallel} + \mathbf{D}_{\perp} \qquad \mathbf{D}' = \mathbf{D}'_{\parallel} + \mathbf{D}'_{\perp}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp} \qquad \mathbf{H}' = \mathbf{H}'_{\parallel} + \mathbf{H}'_{\perp}$$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = E'_x \mathbf{i} = E_x \mathbf{i} = \mathbf{E}_{\parallel}$$
$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\perp} &= E'_y \mathbf{j} + E'_z \mathbf{k} = \\ &= \Gamma(E_y - VB_z)\mathbf{j} + \Gamma(E_z + VB_y)\mathbf{k} = \\ &= \Gamma[(E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) + (-VB_z \mathbf{j} + VB_y \mathbf{k})] = \\ &= \Gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})] \end{aligned}$$
$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})]$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = B'_x \mathbf{i} = B_x \mathbf{i} = \mathbf{B}_{\parallel}$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_{\perp} &= B'_y \mathbf{j} + B'_z \mathbf{k} = \\ &= \Gamma(B_y + Vc^{-2}E_z)\mathbf{j} + \Gamma(B_z - Vc^{-2}E_y)\mathbf{k} = \\ &= \Gamma[(B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) - c^{-2}(-VE_z \mathbf{j} + VE_y \mathbf{k})] = \\ &= \Gamma[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})] \end{aligned}$$
$$\mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})]$$

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = D'_x \mathbf{i} = D_x \mathbf{i} = \mathbf{D}_{\parallel}$$
$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}'_{\perp} &= D'_y \mathbf{j} + D'_z \mathbf{k} = \\ &= \Gamma(D_y - Vc^{-2}H_z)\mathbf{j} + \Gamma(D_z + Vc^{-2}H_y)\mathbf{k} = \\ &= \Gamma[(D_y \mathbf{j} + D_z \mathbf{k}) + c^{-2}(-VH_z \mathbf{j} + VH_y \mathbf{k})] = \\ &= \Gamma[\mathbf{D}_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{H})] \end{aligned}$$

$$\mathbf{H}'_{\parallel} = H'_x \mathbf{i} = H_x \mathbf{i} = \mathbf{H}_{\parallel}$$
$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}'_{\perp} &= H'_y \mathbf{j} + H'_z \mathbf{k} = \\ &= \Gamma(H_y + VD_z)\mathbf{j} + \Gamma(H_z - VD_y)\mathbf{k} = \\ &= \Gamma[(H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) - (-VD_z \mathbf{j} + VD_y \mathbf{k})] = \\ &= \Gamma[\mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D})] \end{aligned}$$
$$\mathbf{H}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D})]$$

- **Wyniki**

$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$	$\mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel}$
$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})]$	$\mathbf{E}_{\perp} = \Gamma[\mathbf{E}'_{\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{B}')]$
$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$	$\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{B}'_{\parallel}$
$\mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})]$	$\mathbf{B}_{\perp} = \Gamma[\mathbf{B}'_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}')]$
$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}$	$\mathbf{D}_{\parallel} = \mathbf{D}'_{\parallel}$
$\mathbf{D}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{D}_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{H})]$	$\mathbf{D}_{\perp} = \Gamma[\mathbf{D}'_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}')]$
$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}$	$\mathbf{H}_{\parallel} = \mathbf{H}'_{\parallel}$
$\mathbf{H}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D})]$	$\mathbf{H}_{\perp} = \Gamma[\mathbf{H}'_{\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{D}')]$

$V^2 c^{-2} << 1$ lub $\Gamma \cong 1$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_{\parallel} + \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = \mathbf{E} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}) = \mathbf{B} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})$$
$$\mathbf{D}' = \mathbf{D}'_{\parallel} + \mathbf{D}'_{\perp} = \mathbf{D}_{\parallel} + \mathbf{D}_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D} + c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{H})$$
$$\mathbf{H}' = \mathbf{H}'_{\parallel} + \mathbf{H}'_{\perp} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D}) = \mathbf{H} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D})$$

5 NIEZMIENNIKI TRANSFORMACJI LORENTZA

- **Niezmienniki transformacji Lorentza wektorów E, B, D i H**
  Zbadamy pięć niezmienników transformacji Lorentza.

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathrm{Inv}_1 = \mathrm{I}_1 = \mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\\
&\mathrm{Inv}_2 = \mathrm{I}_2 = \mathbf{D}'\cdot\mathbf{H}' = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}\\
&\mathrm{Inv}_3 = \mathrm{I}_3 = c^2B'^2 - E'^2 = c^2B^2 - E^2\\
&\mathrm{Inv}_4 = \mathrm{I}_4 = H'^2 - c^2D'^2 = H^2 - c^2D^2\\
&\mathrm{Inv}_5 = \mathrm{I}_5 = \mathbf{H}'\cdot\mathbf{B}' - \mathbf{D}'\cdot\mathbf{E}' = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}
\end{aligned}}$$

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' \stackrel{?}{=} \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}' = E'_xB'_x + E'_yB'_y + E'_zB'_z =$$

$$= E_xB_x + \Gamma(E_y - VB_z)\Gamma(B_y + Vc^{-2}E_z) + \Gamma(E_z + VB_y)\Gamma(B_z - Vc^{-2}E_y) =$$

$$= E_xB_x + E_yB_y + E_zB_z = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$$

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{H}' \stackrel{?}{=} \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}$$

$$\mathbf{D}'\cdot\mathbf{H}' = D'_xH'_x + D'_yH'_y + D'_zH'_z =$$

$$= D_xH_x + \Gamma(D_y - Vc^{-2}H_z)\Gamma(H_y + VD_z) + \Gamma(D_z + Vc^{-2}H_y)\Gamma(H_z - VD_y) =$$

$$= D_xH_x + D_yH_y + D_zH_z = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}$$

$$c^2B'^2 - E'^2 \stackrel{?}{=} c^2B^2 - E^2$$

$$c^2B'^2 - E'^2 = c^2\left(B'^2_x + B'^2_y + B'^2_z\right) - \left(E'^2_x + E'^2_y + E'^2_z\right) =$$

$$= c^2\left[B_x^2 + \Gamma^2(B_y + Vc^{-2}E_z)^2 + \Gamma^2(B_z - Vc^{-2}E_y)^2\right] - \left[E_x^2 + \Gamma^2(E_y - VB_z)^2 + \Gamma^2(E_z + VB_y)^2\right] =$$

$$= c^2B^2 - E^2$$

$$H'^2 - c^2D'^2 \stackrel{?}{=} H^2 - c^2D^2$$

$$H'^2 - c^2D'^2 = \left(H'^2_x + H'^2_y + H'^2_z\right) - c^2\left(D'^2_x + D'^2_y + D'^2_z\right) =$$

$$= H_x^2 + \Gamma^2(H_y + VD_z)^2 + \Gamma^2(H_z - VD_y)^2 - c^2\left[D_x^2 + \Gamma^2(D_y - Vc^{-2}H_z)^2 + \Gamma^2(D_z + Vc^{-2}H_y)^2\right] =$$

$$= H^2 - c^2D^2$$

$$\mathbf{H}'\cdot\mathbf{B}' - \mathbf{D}'\cdot\mathbf{E}' \stackrel{?}{=} \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

$$\mathbf{H}'\cdot\mathbf{B}' - \mathbf{D}'\cdot\mathbf{E}' = H'_xB'_x + H'_yB'_y + H'_zB'_z - D'_xE'_x - D'_yE'_y - D'_zE'_z =$$

$$= H_xB_x + \Gamma(H_y + VD_z)\Gamma(B_y + Vc^{-2}E_z) + \Gamma(H_z - VD_y)\Gamma(B_z - Vc^{-2}E_y) +$$

$$- D_xE_x - \Gamma(D_y - Vc^{-2}H_z)\Gamma(E_y - VB_z) - \Gamma(D_z + Vc^{-2}H_y)\Gamma(E_z + VB_y) =$$

$$= \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{D}\cdot\mathbf{E}$$

$$\Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-2}$$

- **Wnioski wynikające z transformacji Lorentza i jej niezmienników**

WNIOSEK 1

$\mathbf{E}\perp\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}'=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}'\perp\mathbf{B}'$

$\mathbf{D}\perp\mathbf{H} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}'\cdot\mathbf{H}'=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{D}'\perp\mathbf{H}'$

Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia wektory **E** i **B** są względem siebie prostopadłe, to w każdym innym układzie inercjalnym wektory te są również względem siebie prostopadłe.

Tę samą własność posiadają wektory **D** i **H**.

WNIOSEK 2

$\mathbf{E}=c\mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad E^2=c^2B^2 \quad \Leftrightarrow \quad E^2-c^2B^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad E'^2-c^2B'^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}'=c\mathbf{B}'$

$\mathbf{H}=c\mathbf{D} \quad \Leftrightarrow \quad H^2=c^2D^2 \quad \Leftrightarrow \quad H^2-c^2D^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad H'^2-c^2D'^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{H}'=c\mathbf{D}'$

Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia spełniona jest równość $\mathbf{E}=c\mathbf{B}$, to prawdziwa jest ona również w każdym innym układzie inercjalnym K', $\mathbf{E}'=c\mathbf{B}'$.

To samo odnosi się do relacji $\mathbf{H}=c\mathbf{D}$.

WNIOSEK 3

Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia K

$\mathbf{E}\neq\mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\neq\mathbf{0}$,

$\mathrm{Inv}_1=\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{0}, \quad \mathbf{E}\perp\mathbf{B}$,

$\mathrm{Inv}_3=c^2B^2-E^2>0, \quad c^2B^2>E^2$,

to istnieje taki inercjalny układ odniesienia K', w którym

$\mathbf{E}'=\mathbf{0}, \quad \mathbf{B}'\neq\mathbf{0}$.

Układem takim może być na przykład układ K' poruszający się względem układu K z prędkością

$\mathbf{V}=B^{-2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$.

DOWÓD

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}'=\mathbf{E}'_{\parallel}+\mathbf{E}'_{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{0}\ \wedge\ \mathbf{E}'_{\perp}=\mathbf{0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{E}_{\parallel}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}_{\parallel}=\mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}=\mathbf{E}_{\parallel}+\mathbf{E}_{\perp}\\ \mathbf{E}\neq\mathbf{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\perp},\ \mathbf{E}\perp\mathbf{V}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'_{\perp}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}'_{\perp}=\Gamma\left[\mathbf{E}_{\perp}+(\mathbf{V}\times\mathbf{B})\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}_{\perp}=-(\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}=\mathbf{E}_{\perp}\\ \mathbf{E}_{\perp}=-(\mathbf{V}\times\mathbf{B})\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}=-(\mathbf{V}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\times\mathbf{V}$$

$$\mathbf{E}=\mathbf{B}\times\mathbf{V}$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}=(\mathbf{B}\times\mathbf{V})\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}=B^2\mathbf{V}-(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}$$

$$\downarrow\ \left(\mathbf{E}\perp\mathbf{B},\ \mathbf{E}\perp\mathbf{V}\right)\Rightarrow\left(\mathbf{B}\perp\mathbf{V}\right)\Rightarrow\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{0}\right)$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{B}=B^2\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}=B^{-2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}\perp\mathbf{B}\\ \mathbf{V}=B^{-2}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{V}=\left(\frac{E}{B},\ 0,\ 0\right)$$

WNIOSEK 4
Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia K
$\mathbf{E} \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$,
$\mathrm{Inv}_1 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$,
$\mathrm{Inv}_3 = c^2 B^2 - E^2 < 0, \quad c^2 B^2 < E^2$,
to istnieje taki inercjalny układ odniesienia K', w którym
$\mathbf{E}' \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{0}$.
Układem takim może być na przykład układ K' poruszający się względem układu K z prędkością
$\mathbf{V} = c^2 E^{-2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$.

DOWÓD

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}' = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\parallel} + \mathbf{B}'_{\perp} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{0} \ \wedge \ \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{0})$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp}, \ \mathbf{B} \perp \mathbf{V})$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{0} \\ \mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma\left[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})\right] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{B}_{\perp} = c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} \\ \mathbf{B}_{\perp} = c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{B} = c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{B} = c^{-2}(\mathbf{V} \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c^{-2} \mathbf{E} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{E})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c^{-2}\left[E^2 \mathbf{V} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V})\mathbf{E}\right]$$

$$\downarrow \ (\mathbf{E} \perp \mathbf{B}, \ \mathbf{B} \perp \mathbf{V}) \Rightarrow (\mathbf{E} \perp \mathbf{V}) \Rightarrow (\mathbf{E} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} = c^{-2} E^2 \mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = c^2 E^{-2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{V} = c^2 E^{-2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{V} = \left(\frac{c^2 B}{E}, \ 0, \ 0\right)$$

WNIOSEK 5
Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia K
$\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$,
to istnieje taki inercjalny układ odniesienia K', w którym
$\mathbf{E}' \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}' \neq \mathbf{0}$,
$\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'$.
Układem takim może być na przykład układ K' poruszający się względem układu K z prędkością
$\mathbf{V} = -B'^{-2} (\mathbf{E}' \times \mathbf{B}')$.

DOWÓD

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}=\mathbf{E}_{\parallel}+\mathbf{E}_{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{E}_{\parallel}=\mathbf{0}\ \wedge\ \mathbf{E}_{\perp}=\mathbf{0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}_{\parallel}=\mathbf{E}'_{\parallel}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}'=\mathbf{E}'_{\parallel}+\mathbf{E}'_{\perp}\\ \mathbf{E}'\neq\mathbf{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{E}'=\mathbf{E}'_{\perp},\ \mathbf{E}'\perp\mathbf{V}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}_{\perp}=\mathbf{0}\\ \mathbf{E}_{\perp}=\Gamma\left[\mathbf{E}'_{\perp}-\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right)\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}'_{\perp}=\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'=\mathbf{E}'_{\perp}\\ \mathbf{E}'_{\perp}=\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{E}'=\mathbf{V}\times\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{E}'=\mathbf{V}\times\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'=\left(\mathbf{V}\times\mathbf{B}'\right)\times\mathbf{B}'$$

$$\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'=\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}'\right)\mathbf{B}'-\mathrm{B}'^{2}\mathbf{V}$$

$$\downarrow\ \left(\mathbf{E}'\perp\mathbf{B}',\ \mathbf{E}'\perp\mathbf{V}\right)\Rightarrow\left(\mathbf{B}'\perp\mathbf{V}\right)\Rightarrow\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{B}'=\mathbf{0}\right)$$

$$\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'=-\mathrm{B}'^{2}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V}=-\mathrm{B}'^{-2}\left(\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{E}'\perp\mathbf{B}'\\ \mathbf{V}=-\mathrm{B}'^{-2}\left(\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'\right)\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{V}=\left(-\frac{\mathrm{E}'}{\mathrm{B}'},\ 0,\ 0\right)$$

WNIOSEK 6

Jeżeli w danym inercjalnym układzie odniesienia K

$\mathbf{E}\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{B}=\mathbf{0}$,

to istnieje taki inercjalny układ odniesienia K', w którym

$\mathbf{E}'\neq\mathbf{0},\quad \mathbf{B}'\neq\mathbf{0}$,

$\mathbf{E}'\perp\mathbf{B}'$.

Układem takim może być na przykład układ K' poruszający się względem układu K z prędkością

$\mathbf{V}=-\mathrm{c}^{2}\mathrm{E}'^{-2}\left(\mathbf{E}'\times\mathbf{B}'\right)$.

DOWÓD

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}=\mathbf{0}\\ \mathbf{B}=\mathbf{B}_{\parallel}+\mathbf{B}_{\perp}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{B}_{\parallel}=\mathbf{0}\ \wedge\ \mathbf{B}_{\perp}=\mathbf{0}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{B}_{\parallel}=\mathbf{B}'_{\parallel}\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{0}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{0}\\ \mathbf{B}'=\mathbf{B}'_{\parallel}+\mathbf{B}'_{\perp}\\ \mathbf{B}'\neq\mathbf{0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\mathbf{B}'=\mathbf{B}'_{\perp},\ \mathbf{B}'\perp\mathbf{V}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{B}_{\perp}=\mathbf{0}\\ \mathbf{B}_{\perp}=\Gamma\left[\mathbf{B}'_{\perp}+\mathrm{c}^{-2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}'\right)\right]\end{array}\right\}\Rightarrow\mathbf{B}'_{\perp}=-\mathrm{c}^{-2}\left(\mathbf{V}\times\mathbf{E}'\right)=\mathrm{c}^{-2}\left(\mathbf{E}'\times\mathbf{V}\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{B}' = \mathbf{B}'_{\perp}\\&\mathbf{B}'_{\perp} = c^{-2}\left(\mathbf{E}' \times \mathbf{V}\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{B}' = c^{-2}\left(\mathbf{E}' \times \mathbf{V}\right)$$

$$\mathbf{B}' = c^{-2}\left(\mathbf{E}' \times \mathbf{V}\right)$$

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = c^{-2}\mathbf{E}' \times \left(\mathbf{E}' \times \mathbf{V}\right)$$

$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = c^{-2}\left[\left(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{V}\right)\mathbf{E}' - E'^{2}\mathbf{V}\right]$$

$$\downarrow \; \left(\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}',\ \mathbf{B}' \perp \mathbf{V}\right) \Rightarrow \left(\mathbf{E}' \perp \mathbf{V}\right) \Rightarrow \left(\mathbf{E}' \cdot \mathbf{V} = \mathbf{0}\right)$$

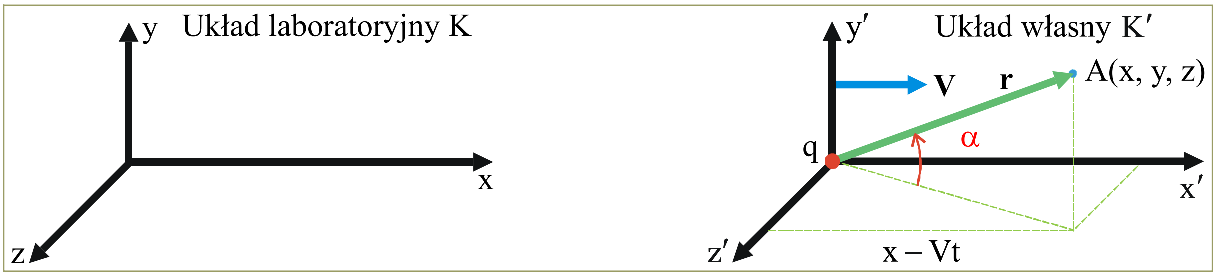
$$\mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = -c^{-2}E'^{2}\mathbf{V}$$

$$\mathbf{V} = -c^{2}E'^{-2}\left(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{E}' \perp \mathbf{B}'\\&\mathbf{V} = -c^{2}E'^{-2}\left(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}'\right)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{V} = \left(-\frac{c^{2}B}{E},\ 0,\ 0\right)$$

6 POLE ŁADUNKU PORUSZAJĄCEGO SIĘ RUCHEM JEDNOSTAJNYM PROSTOLINIOWYM

- **Wektor natężenia pola elektrycznego poruszającego się ładunku**



W chwili $t = t' = 0$ środki układów K i K′ pokrywały się. Punkt obserwacyjny A jest nieruchomy względem układu K. Ładunek q spoczywa względem układu K′, czyli porusza się z prędkością **V** względem układu K. **r** i **r′** są promieniami wodzącymi poprowadzonymi od ładunku do punktu obserwacji zmierzonymi (określonymi, badanymi) odpowiednio względem układów laboratoryjnego K i własnego K′.

$$\mathbf{V} = (V,0,0)$$
$$\mathbf{r} = (x - Vt)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$
$$x - Vt = r\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$x' = \Gamma(x - Vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \Gamma(t - Vc^{-2}x)$$
$$\Gamma = (1 - V^2c^{-2})^{-\frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z)$$
$$\mathbf{E}' = \frac{q}{4\pi\varepsilon r'^2}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r'}$$
$$E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{x'}{r'}$$
$$E'_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon r'^2}\cdot\frac{y'}{r'}$$
$$E'_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon r'^2}\cdot\frac{z'}{r'}$$
$$\mathbf{B}' = (B'_x, B'_y, B'_z) = (0,0,0)$$
$$\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)$$
$$E_x = E'_x$$
$$E_y = \Gamma(E'_y + VB'_z)$$
$$E_z = \Gamma(E'_z - VB'_y)$$

$$r^2 = (x - Vt)^2 + y^2 + z^2$$
$$(x - Vt)^2 = r^2\cos^2\alpha$$
$$r^2 = r^2\cos^2\alpha + y^2 + z^2$$
$$y^2 + z^2 = r^2\sin^2\alpha$$
$$\begin{aligned} r'^2 &= \Gamma^2(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= \Gamma^2 r^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha = \\ &= \Gamma^2 r^2(\cos^2\alpha + \Gamma^{-2}\sin^2\alpha) = \\ &= \Gamma^2 r^2\left[1 - \sin^2\alpha + (1 - V^2c^{-2})\sin^2\alpha\right] = \\ &= \Gamma^2 r^2(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha) \end{aligned}$$
$$r' = \Gamma r(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$$
$$\boxed{r'^3 = \Gamma^3 r^3(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$
$$E_x = E'_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\Gamma(x - Vt)}{r'^3}$$
$$E_y = \Gamma E'_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\Gamma y}{r'^3}$$
$$E_z = \Gamma E'_z = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\Gamma z}{r'^3}$$
$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{\Gamma[(x - Vt)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]}{r'^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\Gamma r}{\Gamma^3 r^3(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{1 - V^2c^{-2}}{(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}}$$

- **Składowe równoległa i prostopadła wektora natężenia pola elektrycznego poruszającego się ładunku**

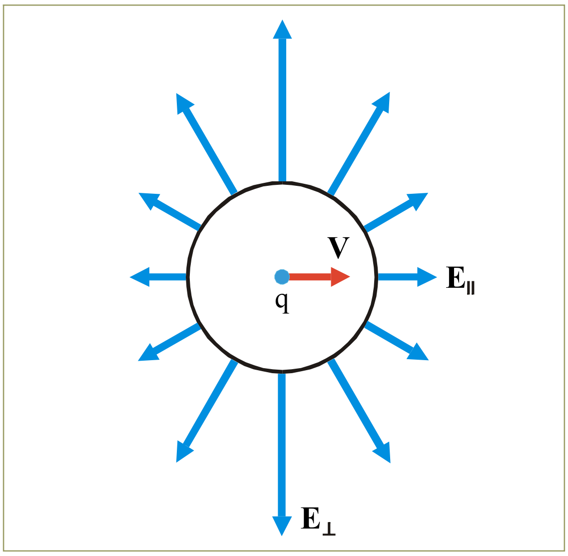
$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{1-V^2c^{-2}}{\left(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$r=\mathrm{const}$

$$\alpha=0,\pi:\ E_{\parallel}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1-V^2c^{-2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\Gamma^{-2}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}:\ E_{\perp}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\left(1-V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\Gamma$$

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}}=\left(1-V^2c^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\Gamma^3$$



- **Pole magnetyczne poruszającego się ładunku**

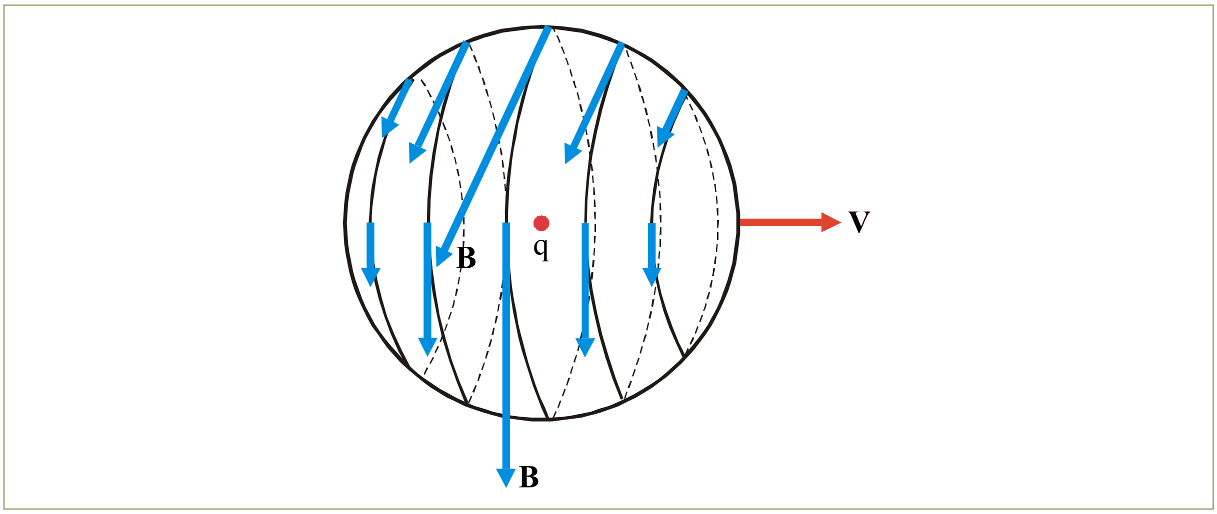
$$\mathbf{B}'=\left(B'_x,B'_y,B'_z\right)=(0,0,0)$$
$$\mathbf{V}=(V,0,0)=V\mathbf{i}$$
$$V=V_x$$
$$B_x=B'_x$$
$$B_y=\Gamma\left(B'_y-Vc^{-2}E'_z\right)$$
$$B_z=\Gamma\left(B'_z+Vc^{-2}E'_y\right)$$
$$\mathbf{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot\frac{1-V^2c^{-2}}{\left(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$B_x=0=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})_x$$
$$B_y=-\Gamma Vc^{-2}E'_z=-c^{-2}V_xE_z=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})_y$$
$$B_z=\Gamma Vc^{-2}E'_y=c^{-2}V_xE_y=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})_z$$

$$\boxed{\mathbf{B}=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})}$$

$$\boxed{\mathbf{B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\cdot\frac{c^{-2}\left(1-V^2c^{-2}\right)}{\left(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}(\mathbf{V}\times\mathbf{r})}$$

Wyobraźmy sobie kulę otaczającą poruszający się ładunek o środku w punkcie zajmowanym przez ładunek. Największa wartość **B** (przy ustalonym **r**) pojawia się na przekroju tej kuli prostopadłym do **V** (osi x), leżącym w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny (y, z) i przechodzącym przez ładunek.



- **Prawo Biota-Savarta**

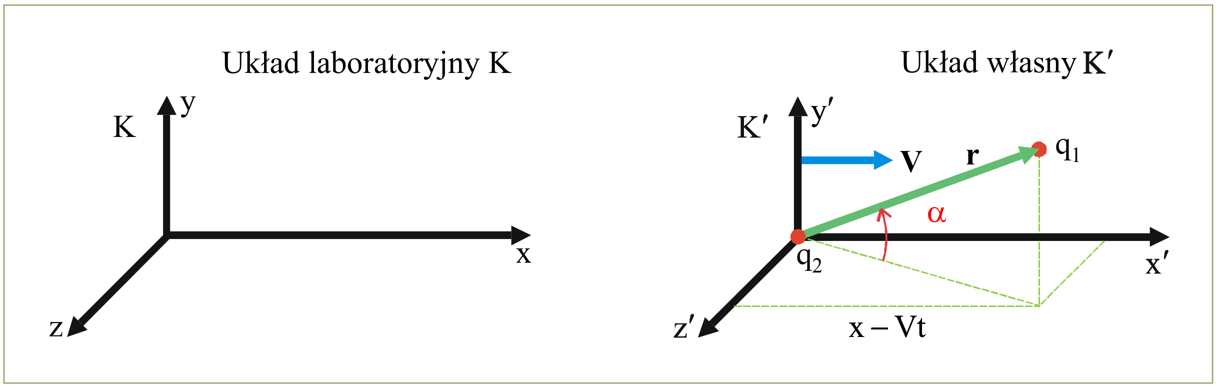
Założenia: $V^2c^{-2} << 1$ Ośrodkiem jest próżnia: $\varepsilon_r = 1,\ \mu_r = 1,\ \varepsilon = \varepsilon_o,\ \mu = \mu_o,$ $c^{-2} = \varepsilon_o\mu_o$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\boxed{\mathbf{B} = \frac{\mu_o q}{4\pi r^3}(\mathbf{V}\times\mathbf{r})}$$ Prawo Biota-Savarta

r = promień wodzący poprowadzony od poruszającego się ładunku do punktu obserwacji zmierzony względem układu laboratoryjnego K

7 WZAJEMNE ODDZIAŁYWANIE DWÓCH PORUSZAJĄCYCH SIĘ ŁADUNKÓW



- Rozpatrzmy dwa ładunki q_1 i q_2 odległe od siebie o **r**, poruszające się względem układu laboratoryjnego każdy z prędkością **V.** Ładunek q_2 umieścimy w środku układu K′. Względem układu K′ oba ładunki spoczywają. W układzie laboratoryjnym ładunek q_1, znajdując się w polu elektrycznym i magnetycznym ładunku q_2, doznaje działania siły Lorentza $\mathbf{F}_{21}$.

$$\mathbf{F}_{21} = q_1\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\mathbf{E}_2 + q_1\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_2)$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\frac{1 - V^2c^{-2}}{\left(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{r}\,,\quad \mathbf{B}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\frac{c^{-2}\left(1 - V^2c^{-2}\right)}{\left(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}(\mathbf{V}\times\mathbf{r})$$

$$\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r})\mathbf{V} - V^2\mathbf{r} = (Vr\cos\alpha)\mathbf{V} - V^2\mathbf{r}$$

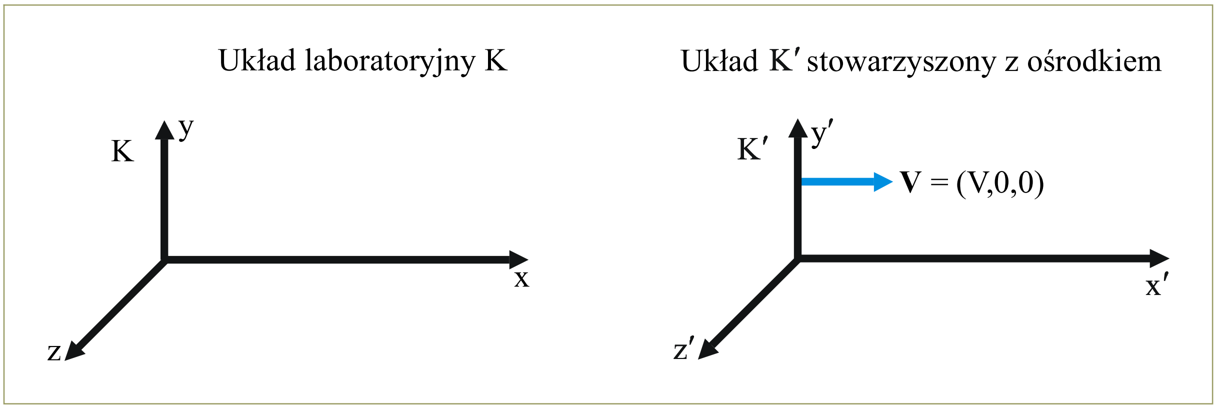
$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{\left(1 - V^2c^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - V^2c^{-2}\sin^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\left[\left(1 - V^2c^{-2}\right)\frac{\mathbf{r}}{r} + \left(Vc^{-2}\cos\alpha\right)\mathbf{V}\right]$$

Dla kąta $\alpha = \frac{1}{2}\pi$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}$$

8 RÓWNANIA MATERIAŁOWE DLA PORUSZAJĄCYCH SIĘ OŚRODKÓW

- **Równania materiałowe dla poruszających się ośrodków, równania Minkowskiego**



Jednorodny izotropowy ośrodek spoczywa względem układu K′, poruszając się z prędkością **V** względem układu K.

W układzie K′

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\mathbf{E}'$$
$$\mathbf{B}' = \mu\mathbf{H}'$$
$$\mathbf{j}' = \lambda\mathbf{E}'$$
$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}$$
$$\mathbf{E}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})]$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel}$$
$$\mathbf{B}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})]$$
$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \mathbf{D}_{\parallel}$$
$$\mathbf{D}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{D}_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})]$$
$$\mathbf{H}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel}$$
$$\mathbf{H}'_{\perp} = \Gamma[\mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V}\times\mathbf{D})]$$
$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp}$$

$$\mathbf{D}'_{\parallel} = \varepsilon\mathbf{E}'_{\parallel}$$
$$\boxed{\mathbf{D}_{\parallel} = \varepsilon\mathbf{E}_{\parallel}}$$
$$\mathbf{D}'_{\perp} = \varepsilon\mathbf{E}'_{\perp}$$
$$\Gamma[\mathbf{D}_{\perp} + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})] = \varepsilon\Gamma[\mathbf{E}_{\perp} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})]$$
$$\boxed{\mathbf{D}_{\perp} = \varepsilon\mathbf{E}_{\perp} + \varepsilon(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})}$$
$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mu\mathbf{H}'_{\parallel}$$
$$\boxed{\mathbf{B}_{\parallel} = \mu\mathbf{H}_{\parallel}}$$
$$\mathbf{B}'_{\perp} = \mu\mathbf{H}'_{\perp}$$
$$\Gamma[\mathbf{B}_{\perp} - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})] = \mu\Gamma[\mathbf{H}_{\perp} - (\mathbf{V}\times\mathbf{D})]$$
$$\boxed{\mathbf{B}_{\perp} = \mu\mathbf{H}_{\perp} - \mu(\mathbf{V}\times\mathbf{D}) + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})}$$

W układzie K

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})\\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} - \mu(\mathbf{V}\times\mathbf{D}) + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})\end{aligned}}$$

Równania Minkowskiego

- **Równania materiałowe Minkowskiego w czterowymiarowej postaci tensorowej**

W układzie laboratoryjnym K:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{V}\times\mathbf{B}) - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} - \mu(\mathbf{V}\times\mathbf{D}) + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})$$

W układzie stowarzyszonym z ośrodkiem, czyli w układzie K′:

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\mathbf{E}'$$

$$\mathbf{B}' = \mu\mathbf{H}'$$

Czterowektor prędkości ośrodka względem układu K:

$$\tilde{V} = (\tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{V}_3, \tilde{V}_4) = (\Gamma V_x, \Gamma V_y, \Gamma V_z, \Gamma ic) = (\Gamma V, 0, 0, \Gamma ic)$$

Czterowektor prędkości ośrodka względem układu K′:

$$\tilde{V}' = (\tilde{V}'_1, \tilde{V}'_2, \tilde{V}'_3, \tilde{V}'_4) = (\Gamma V'_x, \Gamma V'_y, \Gamma V'_z, \Gamma ic) = (0, 0, 0, ic)$$

$$H_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & iE_z & -iE_y & -cB_x \\ -iE_z & 0 & iE_x & -cB_y \\ iE_y & -iE_x & 0 & -cB_z \\ cB_x & cB_y & cB_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & icD_z & -icD_y & -H_x \\ -icD_z & 0 & icD_x & -H_y \\ icD_y & -icD_x & 0 & -H_z \\ H_x & H_y & H_z & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie

$$\mathbf{D} + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}) = \varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon(\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$

rozpiszemy dla składowej x.

$$D_x + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})_x = \varepsilon E_x + \varepsilon(\mathbf{V}\times\mathbf{B})_x$$

$$D_x + c^{-2}(V_yH_z - V_zH_y) = \varepsilon E_x + \varepsilon(V_yB_z - V_zB_y)$$

$$\tfrac{1}{c}H_zV_y - \tfrac{1}{c}H_yV_z - iD_xic = \varepsilon(cB_zV_y - cB_yV_z - iE_xic)$$

$$0\Gamma V_X + \tfrac{1}{c}H_z\Gamma V_y - \tfrac{1}{c}H_y\Gamma V_z - iD_x\Gamma ic =$$

$$= \varepsilon(0\Gamma V_X + cB_z\Gamma V_y - cB_y\Gamma V_z - iE_x\Gamma ic)$$

$$\tfrac{1}{c}\left(H_{11}\tilde{V}_1 + H_{12}\tilde{V}_2 + H_{13}\tilde{V}_3 + H_{14}\tilde{V}_4\right) =$$

$$= \varepsilon\left(F_{11}\tilde{V}_1 + F_{12}\tilde{V}_2 + F_{13}\tilde{V}_3 + F_{14}\tilde{V}_4\right)$$

Ogólnie:

$$\boxed{\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4} H_{\alpha\beta}\tilde{V}_\beta = \varepsilon\sum_{\beta=1}^{4} F_{\alpha\beta}\tilde{V}_\beta, \quad (\alpha = 1,2,3,4)}$$

Równanie

$$\mathbf{B} - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E}) = \mu\mathbf{H} - \mu(\mathbf{V}\times\mathbf{D})$$

rozpiszemy również dla składowej x.

$$B_x - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})_x = \mu H_x - \mu(\mathbf{V}\times\mathbf{D})_x$$

$$B_x - c^{-2}(V_yE_z - V_zE_y) = \mu H_x - \mu(V_yD_z - V_zD_y)$$

$$i0\Gamma V_x - iE_z\Gamma V_y + iE_y\Gamma V_z + cB_x\Gamma ic =$$

$$= c\mu(ic0\Gamma V_x - icD_z\Gamma V_y + icD_y\Gamma V_z + H_x\Gamma ic)$$

$$i0\Gamma V_x + iE_z\Gamma V_y - iE_y\Gamma V_z - cB_x\Gamma ic =$$

$$= c\mu(ic0\Gamma V_x + icD_z\Gamma V_y - icD_y\Gamma V_z - H_x\Gamma ic)$$

$$E_{11}\tilde{V}_1 + E_{12}\tilde{V}_2 + E_{13}\tilde{V}_3 + E_{14}\tilde{V}_4 =$$

$$= c\mu(D_{11}\tilde{V}_1 + D_{12}\tilde{V}_2 + D_{13}\tilde{V}_3 + D_{14}\tilde{V}_4)$$

Ogólnie:

$$\boxed{\sum_{\beta=1}^{4} E_{\alpha\beta}\tilde{V}_\beta = c\mu\sum_{\beta=1}^{4} D_{\alpha\beta}\tilde{V}_\beta, \quad (\alpha = 1,2,3,4)}$$

Ostatnie równanie zapisywane jest także przy pomocy tensorów $F_{\alpha\beta}$ i $H_{\alpha\beta}$.

$$F_{43}\tilde{V}_2 + F_{24}\tilde{V}_3 + F_{23}\tilde{V}_4 = c\mu(H_{43}\tilde{V}_2 + H_{24}\tilde{V}_3 + H_{23}\tilde{V}_4)$$

$$F_{34}\tilde{V}_1 + F_{41}\tilde{V}_3 + F_{13}\tilde{V}_4 = c\mu(H_{34}\tilde{V}_1 + H_{41}\tilde{V}_3 + H_{13}\tilde{V}_4)$$

$$F_{42}\tilde{V}_1 + F_{14}\tilde{V}_2 + F_{21}\tilde{V}_4 = c\mu(H_{42}\tilde{V}_1 + H_{14}\tilde{V}_3 + H_{21}\tilde{V}_4)$$

$$F_{23}\tilde{V}_1 + F_{31}\tilde{V}_2 + F_{12}\tilde{V}_3 = c\mu(H_{23}\tilde{V}_1 + H_{31}\tilde{V}_2 + H_{12}\tilde{V}_3)$$

Ogólnie:

$$F_{\tau\nu}\tilde{V}_\sigma + F_{\nu\sigma}\tilde{V}_\tau + F_{\sigma\tau}\tilde{V}_\nu = c\mu(H_{\tau\nu}\tilde{V}_\sigma + H_{\nu\sigma}\tilde{V}_\tau + H_{\sigma\tau}\tilde{V}_\nu)$$

$$\tau, \nu, \sigma = 4,3,2 = 3,4,1 = 4,2,1 = 2,3,1$$

9 PRAWO OHMA DLA PORUSZAJĄCYCH SIĘ OŚRODKÓW

- **Prawo Ohma dla poruszających się ośrodków**

$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right)$$
$$\tilde{J}_1 = \Gamma\left(\tilde{J}_1' - iVc^{-1}\tilde{J}_4'\right)$$
$$\tilde{J}_2 = \tilde{J}_2'$$
$$\tilde{J}_3 = \tilde{J}_3'$$
$$\tilde{J}_4 = \Gamma\left(\tilde{J}_4' + iVc^{-1}\tilde{J}_1'\right)$$

$$\mathbf{E}' = \left(\mathbf{E}_x', \mathbf{E}_y', \mathbf{E}_z'\right)$$
$$E_x' = E_x$$
$$E_y' = \Gamma\left(E_y - VB_z\right)$$
$$E_z' = \Gamma\left(E_z + VB_y\right)$$

$$(\mathbf{V}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{V} = 0$$

Niech w układzie stowarzyszonym K' płynie prąd przewodnictwa o gęstości $\mathbf{j}'$ spełniającej prawo Ohma.

$$\boxed{\mathbf{j}' = \lambda\mathbf{E}'} \qquad \begin{cases} j_x' = \lambda E_x' \\ j_y' = \lambda E_y' \\ j_z' = \lambda E_z' \end{cases} \qquad \text{Prawo Ohma}$$

$$\tilde{\mathbf{V}}' = (0,0,0,ic)$$
$$\tilde{\mathbf{J}}' = \left(\tilde{J}_1', \tilde{J}_2', \tilde{J}_3', \tilde{J}_4'\right) = \left(j_x', j_y', j_z', 0\right)$$

W układzie laboratoryjnym K :

$$\tilde{\mathbf{V}} = (\Gamma V, 0, 0, \Gamma ic)$$
$$\tilde{\mathbf{J}} = \left(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3, \tilde{J}_4\right) = \left(j_x, j_y, j_z, ic\rho\right)$$
$$\tilde{J}_1 = j_x = \Gamma\left(\tilde{J}_1' - iVc^{-1}\tilde{J}_4'\right) = \Gamma j_x' = \Gamma\lambda E_x' = \Gamma\lambda E_x$$
$$\tilde{J}_2 = j_y = j_y' = \lambda E_y' = \lambda\Gamma\left(E_y - VB_z\right)$$
$$\tilde{J}_3 = j_z = j_z' = \lambda E_z' = \lambda\Gamma\left(E_z + VB_y\right)$$
$$\tilde{J}_4 = ic\rho = \Gamma\left(\tilde{J}_4' + iVc^{-1}\tilde{J}_1'\right) = \Gamma iVc^{-1}j_x' =$$
$$= \Gamma iVc^{-1}\lambda E_x' = \Gamma ic^{-1}\lambda E_x V = \Gamma ic^{-1}\lambda\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}$$

$$\boxed{\mathbf{j} = \Gamma\lambda[\mathbf{E} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})]} \qquad \text{Prawo Ohma}$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{V} = \Gamma\lambda[\mathbf{E} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})]\cdot\mathbf{V} = \Gamma\lambda[\mathbf{E}\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{V}] = \Gamma\lambda\mathbf{E}\cdot\mathbf{V}$$

$$\boxed{\tilde{J}_4 = ic^{-1}\mathbf{j}\cdot\mathbf{V}} \qquad \text{Czwarta składowa czterowektora gęstości prądu}$$

- **Różniczkowe (lokalne) prawo Ohma w czterowymiarowej postaci tensorowej**

Równanie

$$\mathbf{j} = \Gamma\lambda[\mathbf{E} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})]$$

rozpiszemy dla składowej x.

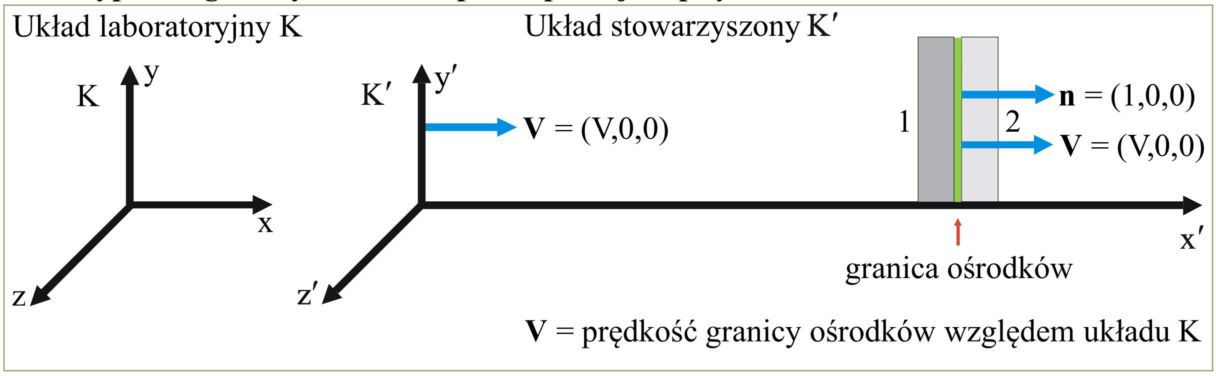
$$j_x = \Gamma\lambda E_x + \Gamma\lambda\left(V_y B_z - V_z B_y\right)$$
$$j_x = \lambda c^{-1}\left(cB_z\Gamma V_y - cB_y\Gamma V_z - iE_x\Gamma ic\right)$$
$$\tilde{J}_1 = \lambda c^{-1}\left(F_{12}\tilde{V}_2 + F_{13}\tilde{V}_3 + F_{14}\tilde{V}_4\right)$$

Ogólnie:

$$\boxed{\tilde{J}_\alpha = \lambda c^{-1}\sum_{\beta=1}^{4} F_{\alpha\beta}\tilde{V}_\beta \qquad (\alpha = 1,2,3,4)} \qquad \text{Prawo Ohma}$$

10 WARUNKI GRANICZNE DLA PORUSZAJACYCH SIĘ OŚRODKÓW

- **Przypadek granicy ośrodków prostopadłej do prędkości**



Dla ośrodka spoczywającego względem układu K′:

$$\boxed{\begin{aligned} B'_{2n} &= B'_{1n} \\ E'_{2t} &= E'_{1t} \\ D'_{2n} &= D'_{1n} \\ H'_{2t} &= H'_{1t} \end{aligned}}$$

$$\mathbf{n} = (1,0,0)$$
$$\mathbf{V} = (V,0,0)$$
$$\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_{\parallel} = (B_x,0,0)$$
$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{\perp} = (0, E_y, E_z)$$
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} \perp \mathbf{E}_{\perp}$$
$$\mathbf{V} \times \mathbf{E} = \mathbf{V} \times \mathbf{E}_{\perp}$$
$$\mathbf{B}_t = \mathbf{B}_{\perp} = (0, B_y, B_z)$$
$$\mathbf{n} \perp (\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t})$$
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t}) = 0$$
$$\mathbf{D}_n = \mathbf{D}_{\parallel} = (D_x,0,0)$$
$$\mathbf{D}_t = \mathbf{D}_{\perp} = (0, D_y, D_z)$$
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{D}_{\perp} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{V} \perp \mathbf{D}_{\perp}$$
$$\mathbf{V} \times \mathbf{D} = \mathbf{V} \times \mathbf{D}_{\perp}$$
$$\mathbf{n} \perp (\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t})$$
$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t}) = 0$$

$$B'_{2n} = B'_{1n}$$
$$B'_{2\parallel} = B'_{1\parallel}$$
$$B_{2\parallel} = B_{1\parallel}$$

$$\boxed{B_{2n} = B_{1n}}$$

$$E'_{2t} = E'_{1t}$$
$$E'_{2\perp} = E'_{1\perp}$$
$$\Gamma[\mathbf{E}_{2\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{2\perp})] = \Gamma[\mathbf{E}_{1\perp} + (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{1\perp})]$$
$$\mathbf{E}_{2\perp} - \mathbf{E}_{1\perp} = (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{1\perp}) - (\mathbf{V} \times \mathbf{B}_{2\perp})$$

$$\boxed{\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t} = \mathbf{V} \times (\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t})} \quad \text{lub}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t}) = \mathbf{n} \times [\mathbf{V} \times (\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t})] =$$
$$= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t})\mathbf{V} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{B}_{1t} - \mathbf{B}_{2t}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{B}_{2t} - \mathbf{B}_{1t})$$

$$D'_{2n} = D'_{1n}$$
$$D'_{2\parallel} = D'_{1\parallel}$$
$$D_{2\parallel} = D_{1\parallel}$$

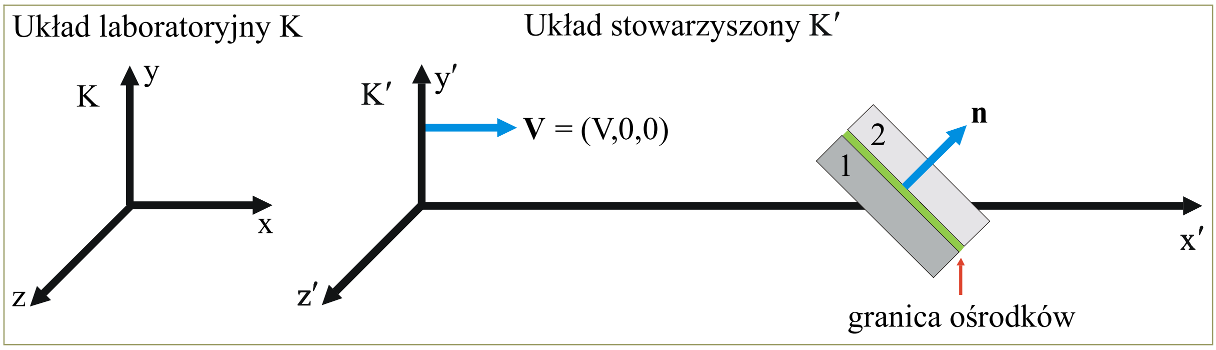
$$\boxed{D_{2n} = D_{1n}}$$

$$H'_{2t} = H'_{1t}$$
$$H'_{2\perp} = H'_{1\perp}$$
$$\Gamma[\mathbf{H}_{2\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D}_{2\perp})] = \Gamma[\mathbf{H}_{1\perp} - (\mathbf{V} \times \mathbf{D}_{1\perp})]$$
$$\mathbf{H}_{2\perp} - \mathbf{H}_{1\perp} = (\mathbf{V} \times \mathbf{D}_{2\perp}) - (\mathbf{V} \times \mathbf{D}_{1\perp})$$

$$\boxed{\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{V} \times (\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t})} \quad \text{lub}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t}) = \mathbf{n} \times [\mathbf{V} \times (\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t})] =$$
$$= \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t})\mathbf{V} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{D}_{2t} - \mathbf{D}_{1t})$$

- **Przypadek ogólny**



n = jednostkowy wektor (wersor) normalny do powierzchni granicznej
V = prędkość granicy ośrodków względem układu K
nV = rzut prędkości **V** na kierunek **n**
= składowa prędkości **V** prostopadła do powierzchni granicznej

Dla ośrodka spoczywającego względem układu K′:

$$\boxed{\begin{aligned} B'_{2n} &= B'_{1n} \\ E'_{2t} &= E'_{1t} \\ D'_{2n} &= D'_{1n} \\ H'_{2t} &= H'_{1t} \end{aligned}}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E} = \mathbf{n}\times(\mathbf{E}_n + \mathbf{E}_t) = \mathbf{n}\times\mathbf{E}_t$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{H} = \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_n + \mathbf{H}_t) = \mathbf{n}\times\mathbf{H}_t$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_n + \mathbf{B}_t) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_n$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_n + \mathbf{D}_t) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_n$$

Dla małych prędkości, $\Gamma \approx 1$:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})$$
$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})$$
$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - (\mathbf{V}\times\mathbf{D})$$

$$\mathbf{B}'_{2n} = \mathbf{B}'_{1n}$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}'_{2n} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}'_{1n}$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}'_{2} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}'_{1}$$
$$\mathbf{n}\cdot[\mathbf{B}_2 - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_2)] = \mathbf{n}\cdot[\mathbf{B}_1 - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_1)]$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 - c^{-2}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_2) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 - c^{-2}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_1)$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 + c^{-2}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_2) - \mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{E}_1)]$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 + c^{-2}[-(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2)\cdot\mathbf{V} + (\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1)\cdot\mathbf{V}]$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 - c^{-2}\mathbf{V}\cdot[(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2) - (\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1)]$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 &= \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 - c^{-2}\mathbf{V}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)] \\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2 &= \mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1 - c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \\ \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n}) &= -c^{-2}\mathbf{V}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t})] \\ \mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_{2n} - \mathbf{B}_{1n}) &= -c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{E}_{2t} - \mathbf{E}_{1t}) \end{aligned}}$$

PRZYKŁADY

$$\mathbf{n} = (1,0,0) \quad \mathbf{V} = (V,0,0)$$
$$\mathbf{V}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \qquad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = V$$
$$B_{2x} = B_{1x} \qquad \mathbf{B}_{2n} = \mathbf{B}_{1n}$$

$$\mathbf{n} = (0,1,0) \quad \mathbf{V} = (V,0,0)$$
$$\mathbf{V}\times\mathbf{n} = (0,0,V) \qquad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = 0$$
$$B_{2y} = B_{1y} - c^{-2}V(E_{2z} - E_{1z})$$

$$\mathbf{n} = (0,0,1) \quad \mathbf{V} = (V,0,0)$$
$$\mathbf{V}\times\mathbf{n} = (0,-V,0) \qquad \mathbf{V}\cdot\mathbf{n} = 0$$
$$B_{2z} = B_{1z} + c^{-2}V(E_{2y} - E_{1y})$$

Dla ośrodka spoczywającego względem układu K′:

$$\boxed{\begin{aligned} B'_{2n} &= B'_{1n}\\ E'_{2t} &= E'_{1t}\\ D'_{2n} &= D'_{1n}\\ H'_{2t} &= H'_{1t}\end{aligned}}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{E}=\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_n+\mathbf{E}_t)=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_t$$
$$\mathbf{n}\times\mathbf{H}=\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_n+\mathbf{H}_t)=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_t$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_n+\mathbf{B}_t)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_n$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_n+\mathbf{D}_t)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_n$$

Dla małych prędkości, $\Gamma\approx 1$:

$$\mathbf{E}'=\mathbf{E}+(\mathbf{V}\times\mathbf{B})$$
$$\mathbf{B}'=\mathbf{B}-c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E})$$
$$\mathbf{D}'=\mathbf{D}+c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H})$$
$$\mathbf{H}'=\mathbf{H}-(\mathbf{V}\times\mathbf{D})$$

PRZYKŁADY

$\mathbf{n}=(1,0,0)$

$\mathbf{V}=(V,0,0)$

$\mathbf{V}\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$

$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=V$

$\mathbf{D}_{2n}=\mathbf{D}_{1n}$

$\mathbf{n}=(0,1,0)$

$\mathbf{V}=(V,0,0)$

$\mathbf{V}\times\mathbf{n}=(0,0,V)$

$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0$

$\mathbf{n}=(0,0,1)$

$\mathbf{V}=(V,0,0)$

$\mathbf{V}\times\mathbf{n}=(0,-V,0)$

$\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}=0$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}'_{2t}=\mathbf{E}'_{1t}\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{E}'_{2t}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}'_{1t}\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{E}'_{2}=\mathbf{n}\times\mathbf{E}'_{1}\\
&\mathbf{n}\times[\mathbf{E}_2+(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_2)]=\mathbf{n}\times[\mathbf{E}_1+(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_1)]\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2+\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_2)=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1+\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_1)\\
&(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2)-(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1)=\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_1)-\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{B}_2)\\
&\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_{1'})=\\
&=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1)\mathbf{V}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})\mathbf{B}_1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2)\mathbf{V}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})\mathbf{B}_2=\\
&=\mathbf{V}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_1-\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_2)+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=\mathbf{V}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\\
&\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_{2t}-\mathbf{E}_{1t})=\mathbf{V}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_{1n}-\mathbf{B}_{2n})]+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}'_{2n}=\mathbf{D}'_{1n}\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}'_{2n}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}'_{1n}\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}'_{2}=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}'_{1}\\
&\mathbf{n}\cdot[\mathbf{D}_2+c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_2)]=\mathbf{n}\cdot[\mathbf{D}_1+c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_1)]\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2+c^{-2}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_2)=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1+c^{-2}\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_1)\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1+c^{-2}[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_1)-\mathbf{n}\cdot(\mathbf{V}\times\mathbf{H}_2)]\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1+c^{-2}[(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2)\cdot\mathbf{V}-(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1)\cdot\mathbf{V}]\\
&\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2=\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1+c^{-2}\mathbf{V}\cdot[(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2)-(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1)]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=c^{-2}\mathbf{V}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)]\\
&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})\cdot(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)\\
&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_{2n}-\mathbf{D}_{1n})=c^{-2}\mathbf{V}\cdot[\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t})]\\
&\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_{2n}-\mathbf{D}_{1n})=c^{-2}(\mathbf{V}\times\mathbf{n})(\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t})
\end{aligned}}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}'_{2t}=\mathbf{H}'_{1t}\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{H}'_{2t}=\mathbf{n}\times\mathbf{H}'_{1t}\\
&\mathbf{n}\times[\mathbf{H}_2-(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_2)]=\mathbf{n}\times[\mathbf{H}_1-(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_1)]\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2-\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_2)=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1-\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_1)\\
&\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2-\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1=\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_2)-\mathbf{n}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{D}_1)\\
&\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2)\mathbf{V}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})\mathbf{D}_2-\\
&\qquad\qquad-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1)\mathbf{V}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})\mathbf{D}_1\\
&\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{V}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_2-\mathbf{n}\cdot\mathbf{D}_1)-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)]\mathbf{V}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\\
&\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_{2t}-\mathbf{H}_{1t})=[\mathbf{n}\cdot(\mathbf{D}_{2n}-\mathbf{D}_{1n})]\mathbf{V}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{V})(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)
\end{aligned}}$$

11 TENSOR PĘDU-ENERGII POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO

- **Tensor pędu-energii pola elektromagnetycznego w próżni**

Opierając się na równaniach bilansu pędu i energii pola elektromagnetycznego, skonstruujemy tensor pędu-energii i czterowektor gęstości siły w próżni oraz znajdziemy związek między nimi.

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}$$

$$T^{M}_{\alpha\beta} = \varepsilon_o E_\alpha E_\beta + \mu_o H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2\right)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon_o\mu_o \mathbf{E}\times\mathbf{H} = c^{-2}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = c^{-2}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = c^2\mathbf{g}$$

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2\right)$$

$$f_\alpha = \rho E_\alpha + \left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$g_\alpha = \left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)_\alpha = c^{-2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$P_\beta = \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{\alpha 4} = -icg_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$x_4 = ict$$

$$f_4 = \tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

$$T_{4\beta} = -\tfrac{i}{c}P_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{44} = w$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$$

Tensor pędu-energii:

$$\left[T_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} T^M_{11} & T^M_{12} & T^M_{13} & -icg_1 \\ T^M_{21} & T^M_{22} & T^M_{23} & -icg_2 \\ T^M_{31} & T^M_{32} & T^M_{33} & -icg_3 \\ -\tfrac{i}{c}P_1 & -\tfrac{i}{c}P_2 & -\tfrac{i}{c}P_3 & w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\operatorname{div}\mathbf{P} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial (icg_\alpha)}{\partial (ict)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = -\tfrac{i}{c}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - \tfrac{i}{c}\tfrac{ic}{ic}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (-icg_\alpha)}{\partial (ict)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\left(-\tfrac{i}{c}P_\beta\right)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w}{\partial (ict)}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial x_4}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$f_4 = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}$$

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

lub

$$\tilde{\mathbf{f}} = \operatorname{div}\left[T_{\mu\nu}\right]$$

W próżni czterowektor gęstości siły $\tilde{\mathbf{f}}$ jest czterowymiarową dywergencją tensora pędu-energii $\left[T_{\mu\nu}\right]$.

$$\boxed{f_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)}$$

Trzy pierwsze składowe czterowektora gęstości siły stanowią równania bilansu gęstości pędu pola elektromagnetycznego. Czwarta składowa czterowektora gęstości siły stanowi równanie bilansu gęstości energii pola elektromagnetycznego.

- **Własności tensora pędu-energii w próżni**

$$[T_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} T_{11}^M & T_{12}^M & T_{13}^M & -icg_1 \\ T_{21}^M & T_{22}^M & T_{23}^M & -icg_2 \\ T_{31}^M & T_{32}^M & T_{33}^M & -icg_3 \\ -\frac{i}{c}P_1 & -\frac{i}{c}P_2 & -\frac{i}{c}P_3 & w \end{bmatrix}$$

$$w = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2)$$
$$g_k = (\mathbf{D}\times\mathbf{B})_k = \varepsilon_o\mu_o(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_k = c^{-2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_k = c^{-2}P_k, \quad (k = 1,2,3)$$
$$P_k = (\mathbf{E}\times\mathbf{H})_k = c^2 g_k \quad (k = 1,2,3)$$
$$T_{\alpha\beta}^M = \varepsilon_o E_\alpha E_\beta + \mu_o H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2), \quad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$
$$T_{\alpha\beta}^M = T_{\beta\alpha}^M, \quad (\alpha,\beta = 1,2,3)$$

WŁASNOŚĆ 1

Tensor $[T_{\mu\nu}]$ jest w próżni tensorem symetrycznym, $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

DOWÓD

Zawsze $T_{\alpha\beta}^M = T_{\beta\alpha}^M$. Dla próżni $(\varepsilon = \varepsilon_o,\ \mu = \mu_o,\ \varepsilon_r = 1,\ \mu_r = 1,\ n = 1)$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon_o\mu_o\mathbf{E}\times\mathbf{H} = c^{-2}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = c^{-2}\mathbf{P}, \quad g_k = \frac{1}{c^2}P_k, \quad (k = 1,2,3),$$

co powoduje, że $T_{14} = T_{41}$, $T_{24} = T_{42}$, $T_{34} = T_{43}$.

WŁASNOŚĆ 2

Ślad tensora $[T_{\alpha\beta}]$ jest równy zeru: $T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} = 0$.

DOWÓD

$$T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} \overset{?}{=} 0$$
$$T_{11} + T_{22} + T_{33} + T_{44} =$$
$$= \varepsilon_o E_x^2 + \mu_o H_x^2 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2) + \varepsilon_o E_y^2 + \mu_o H_y^2 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2) +$$
$$+ \varepsilon_o E_z^2 + \mu_o H_z^2 - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2) =$$
$$= \varepsilon_o(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2) + \mu_o(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2) - \varepsilon_o E^2 - \mu_o H^2 =$$
$$= \varepsilon_o E^2 + \mu_o H^2 - \varepsilon_o E^2 - \mu_o H^2 = 0$$

- **Transformacja Lorentza wybranych składowych tensora pędu-energii w próżni**

$$T_{41} = -ic^{-1}P_1 = -icg_1 = T_{14}$$
$$T'_{41} = -ic^{-1}P'_1 = -icg'_1 = T'_{14}$$
$$T_{42} = -ic^{-1}P_2 = -icg_2 = T_{24}$$
$$T'_{42} = -ic^{-1}P'_2 = -icg'_2 = T'_{24}$$
$$T_{43} = -ic^{-1}P_3 = -icg_3 = T_{34}$$
$$T'_{43} = -ic^{-1}P'_3 = -icg'_3 = T'_{34}$$
$$T_{14} + T_{41} = -icg_1 - icg_1 = = -2icg_1$$

$$[T_{\mu\nu}] = = \begin{bmatrix} T^M_{11} & T^M_{12} & T^M_{13} & -icg_1 \\ T^M_{21} & T^M_{22} & T^M_{23} & -icg_2 \\ T^M_{31} & T^M_{32} & T^M_{33} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c}P_1 & -\frac{i}{c}P_2 & -\frac{i}{c}P_3 & w \end{bmatrix}$$

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (\mu, \nu = 1,2,3,4)$$

$$T_{\alpha\beta} = T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \delta_{\alpha\beta} w$$
$$(\alpha, \beta = 1,2,3)$$

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$g_\alpha = \frac{n^2}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\alpha$$

$$T'_{14} = -icg'_1 = \Gamma^2\left[T_{14} + B^2 T_{41} + iB(T_{44} - T_{11})\right] = = -ic\Gamma^2\left[g_1\left(1 + V^2c^{-2}\right) - Vc^{-2}(T_{44} - T_{11})\right]$$

$$T'_{41} = -icg'_1 = \Gamma^2\left[T_{41} + B^2 T_{14} + iB(T_{44} - T_{11})\right] = = -ic\Gamma^2\left[g_1\left(1 + V^2c^{-2}\right) - Vc^{-2}(T_{44} - T_{11})\right]$$

$$\boxed{g'_1 = \Gamma^2\left[g_1\left(1 + V^2c^{-2}\right) - Vc^{-2}(T_{44} - T_{11})\right]}$$

$$T'_{24} = -icg'_2 = \Gamma(T_{24} - iBT_{21}) = -ic\Gamma\left(g_2 + Vc^{-2}T_{21}\right)$$

$$T'_{42} = -icg'_2 = \Gamma(T_{42} - iBT_{12}) = -ic\Gamma\left(g_2 + Vc^{-2}T_{12}\right)$$

$$\boxed{g'_2 = \Gamma\left(g_2 + Vc^{-2}T_{12}\right)}$$

$$T'_{34} = -icg'_3 = \Gamma(T_{34} - iBT_{31}) = -ic\Gamma\left(g_3 + Vc^{-2}T_{31}\right)$$

$$T'_{43} = -icg'_3 = \Gamma(T_{43} - iBT_{13}) = -ic\Gamma\left(g_3 + Vc^{-2}T_{13}\right)$$

$$\boxed{g'_3 = \Gamma\left(g_3 + Vc^{-2}T_{13}\right)}$$

$$T'_{44} = w' = \Gamma^2\left[T_{44} - B^2 T_{11} - iB(T_{14} + T_{41})\right] = = \Gamma^2\left(w - V^2c^{-2}T_{11} + 2Vg_1\right)$$

$$\boxed{w' = \Gamma^2\left(w - V^2c^{-2}T_{11} + 2Vg_1\right)}$$

- **Równanie łączące czterowektor gęstości siły, czterowektor gęstości prądu i jeden z tensorów pola elektromagnetycznego**

Czterowektor gęstości siły:

$$\widetilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$
$$f_1 = f_x = \rho E_x + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_x = \rho E_x + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x = \rho E_x + \rho(v_y B_z - v_z B_y) = f_x^L$$
$$f_2 = f_y = \rho E_y + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_y = \rho E_y + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_y = \rho E_y + \rho(v_z B_x - v_x B_z) = f_y^L$$
$$f_3 = f_z = \rho E_z + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_z = \rho E_z + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_z = \rho E_z + \rho(v_x B_y - v_y B_x) = f_z^L$$
$$f_4 = \tfrac{i}{c}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}) = \tfrac{i}{c}(\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) = \tfrac{i}{c}(\rho v_x E_x + \rho v_y E_y + \rho v_z E_z)$$
$$\mathbf{f}^L = (f_x^L, f_y^L, f_z^L) = \rho\mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

Czterowektor gęstości prądu:

$$\widetilde{\mathbf{J}} = (J_1, J_2, J_3, J_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$$
$$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z) = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z) = \rho\mathbf{v}, \quad j_x = \rho v_x,\ j_y = \rho v_y,\ j_z = \rho v_z$$

Tensor pola elektromagnetycznego:

$$[F_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}$$

Czterowektor gęstości siły $\widetilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ przedstawimy w postaci wygodnej do dalszej obróbki.

$$f_1 = \tfrac{1}{c}\left[0 + \rho v_y \cdot cB_z + \rho v_z \cdot (-)cB_y + ic\rho \cdot (-)iE_x\right]$$
$$f_2 = \tfrac{1}{c}\left[\rho v_x \cdot (-)cB_z + 0 + \rho v_z \cdot cB_x + ic\rho \cdot (-)iE_y\right]$$
$$f_3 = \tfrac{1}{c}\left[\rho v_x \cdot cB_y + \rho v_y \cdot (-)cB_x + 0 + ic\rho \cdot (-)iE_z\right]$$
$$f_4 = \tfrac{1}{c}\left[\rho v_x \cdot iE_x + \rho v_y \cdot iE_y + \rho v_z \cdot iE_z + 0\right]$$

$$f_1 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{11} + J_2F_{12} + J_3F_{13} + J_4F_{14})$$
$$f_2 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{21} + J_2F_{22} + J_3F_{23} + J_4F_{24})$$
$$f_3 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{31} + J_2F_{32} + J_3F_{33} + J_4F_{34})$$
$$f_4 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{41} + J_2F_{42} + J_3F_{43} + J_4F_{44})$$

$$\boxed{f_\alpha = \tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4} J_\beta F_{\alpha\beta}, \quad (\alpha = 1,2,3,4)}$$

Przy pomocy tego równania wyrazimy składowe tensora $T_{\mu\nu}$ przez składowe tensorów $F_{\mu\nu}$ i $H_{\mu\nu}$.

- **Składowe tensora pędu-energii wyrażone przez składowe tensorów** $F_{\mu\nu}$ i $H_{\mu\nu}$

$$\left[F_{\alpha\beta}\right]=\begin{bmatrix} 0 & cB_z & -cB_y & -iE_x \\ -cB_z & 0 & cB_x & -iE_y \\ cB_y & -cB_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[H_{\beta\nu}\right]=\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -icD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -icD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -icD_z \\ icD_x & icD_y & icD_z & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial H_{\beta\nu}}{\partial x_\nu}=J_\beta$$

$$F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha}$$
$$H_{\beta\nu}=-H_{\nu\beta}$$

$$\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}H_{\nu\beta}\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x_\nu}=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}=0$$
$$\downarrow$$
$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}=-\frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}$$

$$\mathbf{D}=\varepsilon_o\mathbf{E}$$
$$D_1=\varepsilon_o E_1$$
$$D_2=\varepsilon_o E_2$$
$$D_3=\varepsilon_o E_3$$

$$\mathbf{B}=\mu_o\mathbf{H}$$
$$B_1=\mu_o H_1$$
$$B_2=\mu_o H_2$$
$$B_3=\mu_o H_3$$

$$f_\alpha=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial T_{\alpha\nu}}{\partial x_\nu}$$

$$\tfrac{1}{4c}\sum_{s=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}F_{sn}H_{sn}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\mu_o H^2-\varepsilon_o E^2\right)$$

$$H_{\alpha\beta}=c\varepsilon_o F_{\alpha\beta}$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}J_\beta$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial H_{\beta\nu}}{\partial x_\nu}$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}F_{\alpha\beta}\frac{\partial H_{\beta\nu}}{\partial x_\nu}$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\alpha\beta}H_{\beta\nu}\right)-H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}\right]$$

$$-\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}=-\tfrac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left(H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+H_{\nu\beta}\frac{\partial F_{\beta\alpha}}{\partial x_\nu}\right)=$$
$$=-\tfrac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\left(H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\right)=$$
$$=-\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\tfrac{1}{2}H_{\beta\nu}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial F_{\nu\alpha}}{\partial x_\beta}\right)=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\tfrac{1}{2}H_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}=\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\tfrac{1}{2}c\varepsilon_o F_{\beta\nu}\frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\alpha}=$$
$$=\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(F_{\beta\nu}c\varepsilon_o F_{\beta\nu}\right)=\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\tfrac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(F_{\beta\nu}H_{\beta\nu}\right)$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(F_{\alpha\beta}H_{\beta\nu}\right)+\tfrac{1}{4c}\sum_{\beta=1}^{4}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(F_{\beta\nu}H_{\beta\nu}\right)$$

$$f_\alpha=\tfrac{1}{c}\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}H_{\beta\nu}\right)+\tfrac{1}{4c}\delta_{\alpha\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sum_{s=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}F_{sn}H_{sn}\right)$$

$$f_\alpha=\sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}H_{\beta\nu}+\tfrac{1}{4c}\delta_{\alpha\nu}\sum_{s=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}F_{sn}H_{sn}\right)$$

$$\boxed{T_{\alpha\nu}=\tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}H_{\beta\nu}+\tfrac{1}{4c}\delta_{\alpha\nu}\sum_{s=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}F_{sn}H_{sn}}$$

$$\boxed{T_{\alpha\nu}=\varepsilon_o\sum_{\beta=1}^{4}F_{\alpha\beta}F_{\beta\nu}+\tfrac{1}{4}\delta_{\alpha\nu}\varepsilon_o\sum_{s=1}^{4}\sum_{n=1}^{4}F_{sn}^2}$$

- **Macierz pędu-energii pola elektromagnetycznego w ośrodku**

Zaczniemy od problemów związanych z konstrukcją tensora pędu-energii po za próżnią w ośrodku materialnym w oparciu o równania bilansu pędu i energii pola elektromagnetycznego.

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu$$

$$T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \varepsilon_o\mu_o\varepsilon_r\mu_r\mathbf{E}\times\mathbf{H} =$$

$$= \frac{n^2}{c^2}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{n^2}{c^2}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \overset{df}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\mathbf{g} = \frac{c^2}{n^2}\mathbf{g}$$

$$h = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial t}$$

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$f_\alpha = \rho E_\alpha + \left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\alpha - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_\alpha}$$

$$\alpha = 1,2,3$$

$$g_\alpha = \left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$P_\beta = \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{\alpha 4} = -icg_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$x_4 = ict$$

$$f_4 = \tfrac{i}{c}h = \tfrac{i}{c}\left(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial t}\right) =$$

$$= \tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}E^2\tfrac{i}{c}\tfrac{i}{i}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}H^2\tfrac{i}{c}\tfrac{i}{i}\frac{\partial\mu}{\partial t} =$$

$$= \tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial(ict)} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial(ict)} =$$

$$= \tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4}$$

$$T_{4\beta} = -\tfrac{i}{c}P_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{44} = w$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$\left[T_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} T^M_{11} & T^M_{12} & T^M_{13} & -icg_1 \\ T^M_{21} & T^M_{22} & T^M_{23} & -icg_2 \\ T^M_{31} & T^M_{32} & T^M_{33} & -icg_3 \\ -\tfrac{i}{c}P_1 & -\tfrac{i}{c}P_2 & -\tfrac{i}{c}P_3 & w \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f} = \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}$$

$$h = -\operatorname{div}\mathbf{P} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$h = -\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial(icg_\alpha)}{\partial(ict)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}h = -\tfrac{i}{c}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial P_\beta}{\partial x_\beta} - \tfrac{i}{c}\tfrac{ic}{ic}\frac{\partial w}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(-icg_\alpha)}{\partial(ict)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}h = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\left(-\tfrac{i}{c}P_\beta\right)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial w}{\partial(ict)}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial x_4}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$f_4 = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}$$

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

lub

$$\tilde{\mathbf{f}} = \operatorname{div}\left[T_{\mu\nu}\right]$$

Czterowektor gęstości siły $\tilde{\mathbf{f}}$ jest czterowymiarową dywergencją z macierzy $\left[T_{\mu\nu}\right]$. Szkoda tylko, że macierz ta nie jest tensorem.

Co można wykazać, transformując na przykład elementy T_{24} i T_{42} tej macierzy. Otrzymujemy dwa równania: $g_2' = \Gamma\left(g_2 + Vc^{-2}T_{21}\right)$ oraz $g_2' = \Gamma\left(g_2 + Vn^2c^{-2}T_{12}\right)$, które dla n>1 nie mogą być jednocześnie prawdziwe $(T_{12} = T_{21})$.

- **Problemy związane z konstrukcją tensora pędu-energii w ośrodku**

Po prostych przekształceniach bez żadnych dodatkowych założeń równanie bilansu energii przepiszemy do innej postaci.

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{P} - \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial \mu}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t} = n^2\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial n^2}{\partial t} = n^2\frac{\partial w}{\partial t} + 2w\,n\frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\left(n^2\mathbf{P}\right) = n^2\mathrm{div}\mathbf{P} + \mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}\left(n^2\right) = n^2\mathrm{div}\mathbf{P} + 2n\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}\,n$$

$$\boxed{\frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t} = -\mathrm{div}\left(n^2\mathbf{P}\right) + 2n\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}\,n + 2w\,n\frac{\partial n}{\partial t} - n^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}n^2E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \tfrac{1}{2}n^2H^2\frac{\partial \mu}{\partial t}}$$

Ostatnie równanie, po zapisaniu go w bardziej zwartej formie, wykorzystamy w dalszych rozważaniach.

$$n^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}n^2E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}n^2H^2\frac{\partial \mu}{\partial t} - 2n\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}\,n - 2w\,n\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t} - \mathrm{div}\left(n^2\mathbf{P}\right)$$

$$q \overset{\mathrm{df}}{=} n^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}n^2E^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}n^2H^2\frac{\partial \mu}{\partial t} - 2n\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}\,n - 2w\,n\frac{\partial n}{\partial t}$$

$$\boxed{q = -\frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t} - \mathrm{div}\left(n^2\mathbf{P}\right)} \qquad n^2 = \varepsilon_r\mu_r$$

- **Tensor pędu-energii pola elektromagnetycznego w ośrodku**

Opierając się na równaniach bilansu pędu i energii pola elektromagnetycznego w ośrodku skonstruujemy tensor pędu-energii i czterowektor gęstości siły.

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \tfrac{1}{2}E^2 \operatorname{grad}\varepsilon - \tfrac{1}{2}H^2 \operatorname{grad}\mu$$

$$T^M_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B} = \varepsilon\mu\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \varepsilon_o\mu_o\varepsilon_r\mu_r\mathbf{E}\times\mathbf{H} =$$

$$= \frac{n^2}{c^2}\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{n^2}{c^2}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} \overset{df}{=} \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\mathbf{g} = \frac{c^2}{n^2}\mathbf{g}$$

$$q = n^2\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}n^2E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}n^2H^2\frac{\partial\mu}{\partial t} - $$

$$- 2n\mathbf{P}\cdot\operatorname{grad} n - 2nw\frac{\partial n}{\partial t}$$

$$w = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$

$$f_\alpha = \rho E_\alpha + \left(\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_\alpha - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_\alpha}$$

$$\alpha = 1,2,3$$

$$g_\alpha = \left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$P_\beta = \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{\alpha 4} = -icg_\alpha, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$x_4 = ict$$

$$f_4 = \tfrac{i}{c}q$$

$$T_{4\beta} = -\tfrac{i}{c}n^2P_\beta, \quad (\beta = 1,2,3)$$

$$T_{44} = n^2 w$$

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \left(f_1, f_2, f_3, f_4\right)$$

$$\left[T_{\mu\nu}\right] = \begin{bmatrix} T^M_{11} & T^M_{12} & T^M_{13} & -icg_1 \\ T^M_{21} & T^M_{22} & T^M_{23} & -icg_2 \\ T^M_{31} & T^M_{32} & T^M_{33} & -icg_3 \\ -\tfrac{i}{c}n^2P_1 & -\tfrac{i}{c}n^2P_2 & -\tfrac{i}{c}n^2P_3 & n^2 w \end{bmatrix}$$

$$n^2 = \varepsilon_r\mu_r, \quad \varepsilon_o\mu_o = \frac{1}{c^2}, \quad \varepsilon\mu = \frac{1}{v^2}, \quad n = \frac{c}{v}$$

$$\mathbf{f} = \operatorname{div}\left[T^M_{\alpha\beta}\right] - \frac{\partial\mathbf{g}}{\partial t}$$

$$q = -\operatorname{div}\left(n^2\mathbf{P}\right) - \frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial t}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$q = -\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\left(n^2P_\beta\right)}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial\left(icg_\alpha\right)}{\partial\left(ict\right)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}q = -\tfrac{i}{c}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\left(n^2P_\beta\right)}{\partial x_\beta} - \tfrac{i}{c}\tfrac{ic}{ic}\frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial t}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\left(-icg_\alpha\right)}{\partial\left(ict\right)}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$\tfrac{i}{c}q = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial\left(-\tfrac{i}{c}n^2P_\beta\right)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial\left(n^2 w\right)}{\partial\left(ict\right)}$$

$$f_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T^M_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial x_4}, \quad (\alpha = 1,2,3)$$

$$f_4 = \sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial T_{4\beta}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4}$$

$$f_\mu = \sum_{\nu=1}^{4}\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu}, \quad (\mu = 1,2,3,4)$$

lub

$$\widetilde{\mathbf{f}} = \operatorname{div}\left[T_{\mu\nu}\right]$$

Czterowektor gęstości siły $\widetilde{\mathbf{f}}$ jest cztero-wymiarową dywergencją tensora pędu-energii $\left[T_{\mu\nu}\right]$.

- **Własności tensora pędu-energii w ośrodku**

$$\left[T_{\mu\nu}\right]=\begin{bmatrix} T_{11}^{M} & T_{12}^{M} & T_{13}^{M} & -icg_1 \\ T_{21}^{M} & T_{22}^{M} & T_{23}^{M} & -icg_2 \\ T_{31}^{M} & T_{32}^{M} & T_{33}^{M} & -icg_3 \\ -\frac{i}{c}n^2P_1 & -\frac{i}{c}n^2P_2 & -\frac{i}{c}n^2P_3 & n^2w \end{bmatrix}$$

$$w=\tfrac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{H})=\tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)$$

$$g_\alpha=(\mathbf{D}\times\mathbf{B})_\alpha=\varepsilon\mu(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_\alpha=\frac{n^2}{c^2}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_\alpha\,,\quad (\alpha=1,2,3)$$

$$P_\alpha=(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_\alpha\,,\quad (\alpha=1,2,3)$$

$$T_{\alpha\beta}=T_{\alpha\beta}^{M}=\varepsilon E_\alpha E_\beta+\mu H_\alpha H_\beta-\tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right)=\varepsilon E_\alpha E_\beta+\mu H_\alpha H_\beta-\delta_{\alpha\beta}w\,,\quad (\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$T_{\alpha\beta}^{M}=T_{\beta\alpha}^{M}\,,\quad (\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$T_{11}^{M}+T_{22}^{M}+T_{33}^{M}=-w$$

WŁASNOŚĆ 1
Tensor pędu-energii $\left[T_{\mu\nu}\right]$ w ośrodku jest tensorem symetrycznym, $T_{\mu\nu}=T_{\nu\mu}$.

DOWÓD
$T_{\alpha\beta}^{M}=T_{\beta\alpha}^{M}$, $(\alpha,\beta=1,2,3)$ oraz $T_{\kappa 4}=-icg_\kappa=-ic^{-1}n^2P_\kappa=T_{4\kappa}$, $(\kappa=1,2,3,4)$.

WŁASNOŚĆ 2
Ślad tensora pędu-energii $\left[T_{\mu\nu}\right]$ w ośrodku jest równy iloczynowi gęstości (objętościowej) energii pola elektromagnetycznego przez różnicę kwadratu współczynnika załamania ośrodka i jedynki.

$$\boxed{T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}=w\left(n^2-1\right)}$$

DOWÓD
$T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}=T_{11}^{M}+T_{22}^{M}+T_{33}^{M}+T_{44}=-w+wn^2=w\left(n^2-1\right)$.

WNIOSEK
Gęstość (objętościowa) energii pola elektromagnetycznego przemnożona przez różnicę kwadratu współczynnika załamania ośrodka i jedynki jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

- **Transformacja Lorentza wybranych składowych tensora pędu-energii w ośrodku**

$$T_{14} = -icg_1$$
$$T_{24} = -icg_2$$
$$T_{34} = -icg_3$$
$$T_{44} = n^2 w$$
$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$$
$$T_{\alpha\beta} = \varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu H_\alpha H_\beta - \delta_{\alpha\beta} w$$
$$(\alpha, \beta = 1,2,3)$$
$$w = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right)$$
$$g_\alpha = \frac{n^2}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\alpha$$
$$B = \frac{V}{c} = Vc^{-1}$$
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-B^2}} = \left(1 - V^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$T'_{14} = -icg'_1 = \Gamma^2\left[T_{14} + B^2 T_{41} + iB(T_{44} - T_{11})\right] =$$
$$= -ic\Gamma^2\left[g_1\left(1 + V^2 c^{-2}\right) - Vc^{-2}(T_{44} - T_{11})\right]$$

$$\boxed{g'_1 = \Gamma^2\left[g_1\left(1 + V^2 c^{-2}\right) - Vc^{-2}(T_{44} - T_{11})\right]}$$

$$T'_{24} = -icg'_2 = \Gamma(T_{24} - iBT_{21}) = -ic\Gamma\left(g_2 + Vc^{-2} T_{21}\right)$$

$$\boxed{g'_2 = \Gamma\left(g_2 + Vc^{-2} T_{21}\right)}$$

$$T'_{34} = -icg'_3 = \Gamma(T_{34} - iBT_{31}) = -ic\Gamma\left(g_3 + Vc^{-2} T_{31}\right)$$

$$\boxed{g'_3 = \Gamma\left(g_3 + Vc^{-2} T_{31}\right)}$$

$$T'_{44} = n'^2 w' = \Gamma^2\left[T_{44} - B^2 T_{11} - iB(T_{14} + T_{41})\right] =$$
$$= \Gamma^2\left[n^2 w - V^2 c^{-2} T_{11} + 2Vg_1\right]$$

$$\boxed{n'^2 w' = \Gamma^2\left[n^2 w - V^2 c^{-2} T_{11} + 2Vg_1\right]}$$

- **Czterowektor gęstości siły w ośrodku**

$$\widetilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$$

$$f_1 = f_x = f_x^L - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x} = \rho E_x + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_x - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x} =$$

$$= \rho E_x + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$$f_2 = f_y = f_y^L - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial y} = \rho E_y + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_y - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial y} =$$

$$= \rho E_y + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_y - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial y}$$

$$f_3 = f_z = f_z^L - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial z} = \rho E_z + (\mathbf{j}\times\mathbf{B})_z - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial z} =$$

$$= \rho E_z + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_z - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial z}$$

$$f_4 = \tfrac{i}{c}j\cdot\mathbf{E} + \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial t} = \tfrac{i}{c}\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4}$$

$$\mathbf{f}^L = \rho\mathbf{E} + (\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \rho\mathbf{E} + \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

Czterowektor gęstości siły $\widetilde{\mathbf{f}} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ przedstawimy w postaci wygodnej do dalszej obróbki.

$$\boxed{f_\alpha \overset{?}{=} \tfrac{1}{c}\sum_{\beta=1}^{4} J_\beta F_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_\alpha} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_\alpha}}$$

$$\widetilde{\mathbf{J}} = (J_1, J_2, J_3, J_4) = (j_x, j_y, j_z, ic\rho) = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z, ic\rho)$$

$$\mathbf{j} = (j_x, j_y, j_z) = (\rho v_x, \rho v_y, \rho v_z) = \rho\mathbf{v}, \quad j_x = \rho v_x,\ j_y = \rho v_y,\ j_z = \rho v_z$$

$$f_1 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{11} + J_2F_{12} + J_3F_{13} + J_4F_{14}) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_1} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_1} =$$

$$= \tfrac{1}{c}(0 + \rho v_y cB_z - \rho v_z cB_y - ic\rho iE_x) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x} =$$

$$= \rho(v_yB_z - v_zB_y) + \rho E_x - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x} =$$

$$= \rho(\mathbf{v}\times\mathbf{B})_x + \rho E_x - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x}$$

$f_2 =$

$f_3 =$

$$f_4 = \tfrac{1}{c}(J_1F_{41} + J_2F_{42} + J_3F_{43} + J_3F_{44}) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4} =$$

$$= \tfrac{1}{c}(\rho v_x iE_x + \rho v_y iE_y + \rho v_z iE_z + 0) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4} =$$

$$= \tfrac{i}{c}\rho(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4} = \tfrac{i}{c}(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}) - \tfrac{1}{2}E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_4} - \tfrac{1}{2}H^2\frac{\partial\mu}{\partial x_4}$$

12 CZĘSTOTLIWOŚĆ I KIERUNEK ROZCHODZENIA SIĘ PŁASKIEJ FALI ELEKTROMAGNETYCZNEJ WZGLĘDEM RÓŻNYCH OBSERWATORÓW INERCJALNYCH

- **Faza fali jako niezmiennik**

Fazę fali Φ można przedstawić w postaci iloczynu skalarnego czterowektora falowego $\tilde{\mathbf{k}}$ i czterowektora położenia $\tilde{\mathbf{R}}$.

$$\Phi = \tilde{\mathbf{k}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$$

$$\tilde{\mathbf{k}} = \left(\mathbf{k}, i\omega c^{-1}\right) = \left(k_1, k_2, k_3, i\omega c^{-1}\right), \quad \mathbf{k} = \omega c^{-1}\mathbf{n}$$

$$\tilde{\mathbf{R}} = \left(\mathbf{r}, ict\right) = \left(x_1, x_2, x_3, ict\right), \quad \mathbf{r} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$$

$$\boxed{\Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - \omega t}$$

Faza fali jest niezmiennikiem przekształceń Lorentza, ponieważ jest iloczynem skalarnym dwóch czterowektorów.

k = wektor falowy
n = wersor kierunku i zwrotu rozchodzenia się fali

- **Efekt Dopplera**

Niech w układzie K bardzo daleko od jego początku spoczywa źródło fal elektromagnetycznych o częstotliwości ν, które w początku układu mogą być traktowane jako fale płaskie. Obserwator znajduje się w spoczynku względem poruszającego się układu K'.

$$\tilde{k}'_1 = \Gamma\left(\tilde{k}_1 + iB\tilde{k}_4\right)$$

$$\tilde{k}'_2 = \tilde{k}_2$$

$$\tilde{k}'_3 = \tilde{k}_3$$

$$\tilde{k}'_4 = \Gamma\left(\tilde{k}_4 - iB\tilde{k}_1\right)$$

Z ostatniego równania otrzymujemy

$$i\frac{\omega'}{c} = \Gamma\left(i\frac{\omega}{c} - iB\frac{\omega}{c}n_1\right)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \quad B = \frac{V}{c}, \quad n_1 = \cos\varphi, \quad \omega' = 2\pi\nu', \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\boxed{\nu' = \frac{\nu\left(1-\frac{V}{c}\cos\varphi\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}}$$

φ = kąt zawarty między promieniem wodzącym **r** łączącym źródło światła z obserwatorem a prędkością **V** obserwatora względem układu K
ν' = częstotliwość światła mierzona przez obserwatora

$\varphi = 0$ Podłużny efekt Dopplera $\varphi = \pi$

Obserwator oddala się od źródła:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}}$$

$$\nu' = \frac{\nu\left(1-\frac{V}{c}\cos\varphi\right)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Obserwator zbliża się do źródła:

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}}}$$

Poprzeczny efekt Dopplera: $\varphi = \frac{1}{2}\pi$

$$\nu' = \frac{\nu}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

- **Aberracja**

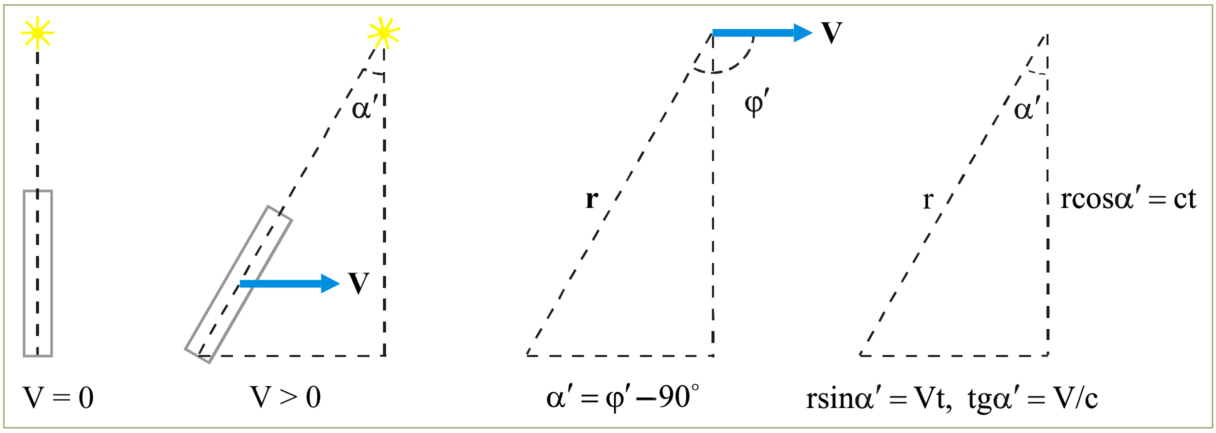
$$\tilde{k}_1' = \Gamma\left(\tilde{k}_1 + iB\tilde{k}_4\right)$$

$$\tilde{k}_1' = \frac{\omega'}{c}\cos\varphi', \quad \tilde{k}_1 = \frac{\omega}{c}\cos\varphi, \quad \tilde{k}_4 = i\frac{\omega}{c}, \quad B = \frac{V}{c}, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{1}{\Gamma(1-B\cos\varphi)}$$

$$\cos\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{V}{c}}{1-\frac{V}{c}\cos\varphi} \xrightarrow{\operatorname{ctg}\varphi' = \frac{\cos\varphi'}{\sqrt{1-\cos^2\varphi'}}} \operatorname{ctg}\varphi' = \frac{\cos\varphi - \frac{V}{c}}{\sin\varphi\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = -\operatorname{tg}\left(\varphi' - 90^\circ\right)$$

PRZYKŁAD

Poruszający się z prędkością **V** teleskop względem źródła światła docierającego z zenitu $\left(\varphi = 90^\circ\right)$ należy odchylić o kąt $\alpha' = \varphi' - 90^\circ$.



$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{V}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

BIBLIOGRAFIA

W bibliografii podałem książki wydane w języku polskim, które inspirowały mnie lub urzekły elegancją, rzetelnością i jednocześnie prostotą prezentowanych w nich wywodów.

1. B. Baranowski: *Nierównowagowa termodynamika w chemii fizycznej*. PWN, W-wa 1974.
2. H. Bondi: *Kosmologia*. PWN, Warszawa 1965.
3. I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew: *Matematyka (Poradnik encyklopedyczny)*. PWN, W-wa 1998.
4. J. Bukowski: *Mechanika płynów*. PWN, W-wa 1968.
5. A. Chełkowski: *Fizyka dielektryków*. PWN, W-wa 1993.
6. M. P. Douchanow: *Rozchodzenie się fal radiowych*. PWN, W-wa 1965.
7. A. Einstein: *Istota teorii względności*. PWN, W-wa 1962.
8. A. Einstein, L. Infeld: *Ewolucja fizyki (Rozwój poglądów od najdawniejszych pojęć do teorii względności i kwantów)*. PWN, W-wa 1962.
9. *Encyklopedia fizyki (Tom 1)*. PWN, W-wa 1972.
10. *Encyklopedia fizyki (Tom 2)*. PWN, W-wa 1973.
11. *Encyklopedia fizyki (Tom 3)*. PWN, W-wa 1974.
12. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands: *Feynmana wykłady z fizyki (Tom II – Część 2)*. PWN, W-wa 1970.
13. G. M. Fichtenholz: *Rachunek różniczkowy i całkowy (Tom III)*. PWN, W-wa 1966.
14. S. Frisz, A. Timoriewa: *Kurs fizyki (Tom II – zjawiska elektryczne i elektromagnetyczne*). PWN, W-wa 1965.
15. I. M. Gelfand: *Wykłady z algebry liniowej*. PWN, W-wa 1971.
16. J. Ginter: *Fizyka fal*. PWN, W-wa 1993.
17. A. Goetz: *Geometria różniczkowa*. PWN, W-wa 1965.
18. D. J. Griffiths: *Podstawy elektrodynamiki.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2001.
19. D. Halliday, R. Resnick: *Fizyka (Tom II)*. PWN, W-wa 1967.
20. S. W. Hawking: *Krótka historia czasu*. ZYSK i S-KA, Poznań 1996.
21. S. W. Hawking: *Czarne dziury i wszechświaty niemowlęce oraz inne eseje*. ZYSK i S-KA, Poznań 1997.
22. S. W. Hawking, R. Penrose: *Natura czasu i przestrzeni*. ZYSK i S-KA, Poznań 1996.
23. J. D. Jackson: *Elektrodynamika klasyczna*. PWN, W-wa 1982.
24. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom I – cząstki)*. PWN, W-wa 1977.
25. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom II – pola)*. PWN, W-wa 1982.
26. A. Januszajtis: *Fizyka (Tom III – fale)*. PWN, W-wa 1991.
27. B. M. Jaworski, A. A. Dietłaf: *Fizyka (Poradnik encyklopedyczny)*. PWN, W-wa 1997.
28. M. Kaku: *Hiperprzestrzeń (Wszechświaty równoległe, pętle czasowe i dziesiąty wymiar)*. Prószyński i S-ka, W-wa 1997.
29. E. Karaśkiewicz: *Zarys teorii wektorów i tensorów*. PWN, W-wa 1964.
30. R. Katz: *Wstęp do szczególnej teorii względności*. PWN, W-wa 1967.
31. C. Kittel, W. D. Knight, M. A. Ruderman: *Mechanika*. PWN, W-wa 1969.
32. A. S. Kompaniejec: *Fizyka teoretyczna*. PWN, W-wa 1961.
33. L. Landau, E. Lifszic: *Elektrodynamika ośrodków ciągłych*. PWN, W-wa 1960.
34. L. Landau, E. Lifszic: *Mechanika*. PWN, W-wa 1965.
35. L. Landau, E. Lifszic: *Mechanika ośrodków ciągłych*. PWN, W-wa 1958.

36. L. Landau, E. Lifszic: *Teoria pola*. PWN, W-wa 1958.
37. M. von Laue: *Historia fizyki*. PWN, W-wa 1960.
38. F. Leja: *Geometria analityczna*. PWN, W-wa 1965.
39. S. Loria: *Względność i grawitacya (Teorya A. Einsteina)*. Altenberg, Lwów 1921.
40. G. J. Lubarski: *Teoria grup i jej zastosowania w fizyce*. PWN, W-wa 1961.
41. H. Margenau, G. M. Murphy: *Matematyka w fizyce i chemii*. PWN, W-wa 1962.
42. A. N. Matwiejew: *Teoria pola elektromagnetycznego*. PWN, 1967.
43. A. P. Miszyna, I. W. Proskuriakow: *Algebra wyższa (Algebra liniowa, wielomiany, algebra ogólna)*. PWN, W-wa 1966.
44. J. Mozrzymas: *Zastosowania teorii grup w fizyce współczesnej (Część I)*. PWN, Warszawa – Wrocław 1967.
45. A. H. Piekara: *Mechanika ogólna*. PWN, W-wa 1961.
46. A. H. Piekara: *Elektryczność i magnetyzm*. PWN, W-wa 1970.
47. E. M. Purcell: *Elektryczność i magnetyzm*. PWN, W-wa 1974.
48. P. K. Raszewski: *Geometria Riemanna i analiza tensorowa*. PWN, W-wa 1958.
49. P. K. Raszewski: *Wstęp do rachunku tensorowego*. PWN, W-wa 1964.
50. W. Rubinowicz, W. Królikowski: *Mechanika teoretyczna*. PWN, W-wa 1967.
51. B. F. Schutz: *Wstęp do ogólnej teorii względności*. PWN, W-wa 1995.
52. *Słownik fizyczny*. Wiedza Powszechna, W-wa 1984.
53. W. I. Smirnow: *Matematyka wyższa (Tom III, część pierwsza)*. PWN, W-wa 1964.
54. M. Stark: *Geometria analityczna*. PWN, W-wa 1958.
55. M. Sufczyński: *Elektrodynamika*. PWN, W-wa 1969.
56. J. L. Synge, A. Schild: *Rachunek tensorowy*.PWN, W-wa 1964.
57. S. Szczeniowski: *Fizyka doświadczalna (Część I – mechanika i akustyka)*. PWN, W-wa 1972.
58. S. Szczeniowski: *Fizyka doświadczalna (Część III – elektryczność i magnetyzm)*. PWN, W-wa 1972.
59. I. E. Tamm: *Podstawy teorii elektryczności*. WNT, W-wa 1967.
60. E. F. Taylor, J. A. Wheeler: *Fizyka czasoprzestrzeni*. PWN, W-wa 1972.
61. T. Trajdos: *Matematyka (Część III)*.WNT, W-wa 1993.
62. W. Pogorzelski: *Analiza matematyczna (Tom III)*. PWN. W-wa 1954.
63. W. A. Ugarow: *Szczególna teoria względności*. PWN, W-wa 1985.
64. J. Werle: *Termodynamika fenomenologiczna*. PWN, W-wa 1957.
65. E. T. Whittaker: *Dynamika analityczna*. PWN, W-wa 1959.

DODATEK

W 2008 zamieściłem w internecie pierwotną wersję tej książki. W lipcu 2010 dokonałem radykalnych zmian w sześciu rozdziałach wymienionych poniżej.

Mechanika relatywistyczna
11 Dynamika relatywistyczna

Pole elektromagnetyczne w ośrodkach spoczywających
1 Równania pola elektromagnetycznego dla wektorów **E**, **B**, **D**, **H** – równania Maxwella
2 Równania materiałowe
4 Równania ruchu – siła Lorentza
5 Równania bilansu

Pole elektromagnetyczne w ośrodkach poruszających się
7 Wzajemne oddziaływanie dwóch poruszających się ładunków

W Dodatku znajdują się pierwotne wersje tych rozdziałów.

11 DYNAMIKA RELATYWISTYCZNA

- **Czterowymiarowe relatywistyczne równania ruchu, siła Minkowskiego**

$$d\tau = \gamma^{-1}dt$$
$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\tilde{p}_\alpha = m\tilde{v}_\alpha$$
$$\tilde{v}_\alpha = \gamma v_\alpha$$
$$\alpha = 1,2,3,4$$
$$\mathbf{R} = \left(R_x, R_y, R_z\right)$$
$$\mathbf{R} = \left(x, y, z\right)$$
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$$
$$\mathbf{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$
$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$
$$\mathbf{p} = \left(p_x, p_y, p_z\right)$$
$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$
$$\mathbf{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right)$$
$$v_4 = ic$$

$$\boxed{\tilde{\mathbf{F}} = \frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{d\tau}}$$

$$\tilde{F}_\alpha = \frac{d\tilde{p}_\alpha}{d\tau} = \frac{d\left(m\tilde{v}_\alpha\right)}{d\tau} = \gamma\frac{d\left(m\tilde{v}_\alpha\right)}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_\alpha\right)}{dt} \qquad \left(\alpha = 1,2,3,4\right)$$
$$\tilde{\mathbf{F}} = \left(\tilde{F}_1, \tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \tilde{F}_4\right) = \text{siła Minkowskiego}$$
$$\tilde{F}_1 = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_1\right)}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_x\right)}{dt} = \gamma F_x$$
$$\tilde{F}_2 = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_2\right)}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_y\right)}{dt} = \gamma F_y$$
$$\tilde{F}_3 = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_3\right)}{dt} = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_z\right)}{dt} = \gamma F_z$$
$$\tilde{F}_4 = \gamma\frac{d\left(m\gamma v_4\right)}{dt} = i\gamma\frac{d\left(m\gamma c\right)}{dt}$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \left(\gamma\frac{d\left(m\gamma\mathbf{v}\right)}{dt}, i\gamma\frac{d\left(m\gamma c\right)}{dt}\right) = \left(\gamma\frac{d\mathbf{p}}{dt}, i\gamma\frac{d\left(m\gamma c\right)}{dt}\right) = \left(\gamma\mathbf{F}, i\gamma\frac{d\left(m\gamma c\right)}{dt}\right)$$

- **Czwarta składowa czterowektora siły Minkowskiego**

$$\tilde{\mathbf{v}}^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_\alpha^2 = -c^2$$
$$\tilde{F}_\alpha = m\frac{d\tilde{v}_\alpha}{d\tau}$$
$$\alpha = 1,2,3,4$$
$$\tilde{v}_1 = \gamma v_1$$
$$\tilde{v}_2 = \gamma v_2$$
$$\tilde{v}_3 = \gamma v_3$$
$$\tilde{v}_4 = ic\gamma$$
$$\tilde{F}_1 = \gamma F_1$$
$$\tilde{F}_2 = \gamma F_2$$
$$\tilde{F}_3 = \gamma F_3$$
$$\tilde{F}_4 = i\gamma\frac{d\left(m\gamma c\right)}{dt} = $$
$$= i\gamma c^{-1}\frac{d\left(m\gamma c^2\right)}{dt}$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}^2}{d\tau} = 2\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_\alpha\frac{d\tilde{v}_\alpha}{d\tau} = -\frac{dc^2}{d\tau} = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_\alpha\frac{d\tilde{v}_\alpha}{d\tau} = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_\alpha\frac{\tilde{F}_\alpha}{m} = 0$$
$$\sum_{\alpha=1}^{4}\tilde{v}_\alpha\tilde{F}_\alpha = 0$$
$$\gamma v_1\gamma F_1 + \gamma v_2\gamma F_2 + \gamma v_3\gamma F_3 + ic\gamma\tilde{F}_4 = 0$$
$$\gamma^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{F} + ic\gamma\tilde{F}_4 = 0$$
$$\boxed{\tilde{F}_4 = i\gamma c^{-1}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)}$$
$$i\gamma c^{-1}\frac{d\left(m\gamma c^2\right)}{dt} = i\gamma c^{-1}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)$$
$$\boxed{\frac{d\left(m\gamma c^2\right)}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}$$

Relacja ta ma rewelacyjną interpretację, wielkość $m\gamma c^2 = E$ jest całkowitą energią ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**.

- **Trójwymiarowe relatywistyczne równania ruchu Plancka**

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt}$$

$$F_\alpha = \frac{d(m\gamma v_\alpha)}{dt} \qquad (\alpha = 1,2,3)$$

$$F_1 = F_x = \frac{d(m\gamma v_x)}{dt}$$

$$F_2 = F_y = \frac{d(m\gamma v_y)}{dt}$$

$$F_3 = F_z = \frac{d(m\gamma v_z)}{dt}$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = (F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{d(m\gamma v_x)}{dt}, \frac{d(m\gamma v_y)}{dt}, \frac{d(m\gamma v_z)}{dt}\right)$$

Przypomnijmy dla porównania czterowymiarową postać równań ruchu.

$$\widetilde{\mathbf{F}} = \frac{d\widetilde{\mathbf{p}}}{dt} = \left(\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2, \widetilde{F}_3, \widetilde{F}_4\right) = \left(\gamma F_x, \gamma F_y, \gamma F_z, i\gamma c^{-1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)$$

$$\mathbf{a}_\parallel \parallel \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a}_\perp \perp \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 c^{-2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_\parallel$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_\parallel) = v^2\mathbf{a}_\parallel$$

$$v^2c^{-2} + \gamma^{-2} = 1$$

Relatywistyczną siłę trójwymiarową zapiszemy w postaci ułatwiającej zbadanie pseudo-problemu dotyczącego zależności masy od prędkości.

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\gamma\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{v}\frac{d\gamma}{dt} + m\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v}\gamma^3c^{-2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_\parallel + m\gamma(\mathbf{a}_\parallel + \mathbf{a}_\perp) =$$

$$= m\gamma^3v^2c^{-2}\mathbf{a}_\parallel + m\gamma\mathbf{a}_\parallel + m\gamma\mathbf{a}_\perp = m\gamma^3\mathbf{a}_\parallel\left(v^2c^{-2} + \gamma^{-2}\right) + m\gamma\mathbf{a}_\perp =$$

$$= m\gamma^3\mathbf{a}_\parallel + m\gamma\mathbf{a}_\perp$$

$$\boxed{\mathbf{F} = m\gamma^3\mathbf{a}_\parallel + m\gamma\mathbf{a}_\perp}$$

Relatywistyczna siła trójwymiarowa **F** i nierelatywistyczne przyspieszenie $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ nie są w ogólności równoległe.

$m\gamma^3$ = relatywistyczna masa podłużna
$m\gamma$ = relatywistyczna masa poprzeczna

Masa nie zależy od prędkości, posługiwanie się pojęciem „masy relatywistycznej” prowadzi tylko do zbędnych nieporozumień.

PRZYKŁAD

$$\mathbf{F} \perp \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\gamma\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

$$\mathbf{F} \parallel \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = m\gamma^3\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

- **Energia kinetyczna, całkowita i spoczynkowa w mechanice relatywistycznej**

Niech cząstka o masie m porusza się (dla prostoty) po osi x z prędkoscią **v.** Obliczymy energię kinetyczną tej cząstki, czyli pracę jaką należy wykonać aby spoczywającą cząstkę rozpędzić do prędkości **v**.

$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}$

$\mathbf{F}_{\parallel} = m\gamma^3 \mathbf{a}_{\parallel}$

$\mathbf{F}_{\perp} = m\gamma \mathbf{a}_{\perp}$

$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$\mathbf{a}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}$

$\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$

$d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$

$\mathbf{v} \cdot \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \dfrac{1}{2}\dfrac{dv^2}{dt}$

$\downarrow$

$\mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} dv^2$

$\int \gamma^3 dv^2 =$

$= \int \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} dv^2 =$

$= 2c^2 \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$= 2c^2 \gamma$

$\gamma = \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} =$

$= 1 + \frac{1}{2} v^2 c^{-2} + \cdots$

$$E_k \overset{df}{=} \int_0^v \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} = m\gamma^3 \mathbf{a}_{\parallel} \cdot d\mathbf{x} = m\gamma^3 \mathbf{a} \cdot d\mathbf{x} =$$

$$= m\gamma^3 \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}dt = \frac{1}{2} m\gamma^3 \frac{dv^2}{dt} dt = \frac{1}{2} m\gamma^3 dv^2$$

$$E_k = \int_0^v \tfrac{1}{2} m\gamma^3 dv^2 = \tfrac{1}{2} m \int_0^v \gamma^3 dv^2 = \left[mc^2 \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right]_0^v =$$

$$= mc^2 \left(1 - v^2 c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} - mc^2 = m\gamma c^2 - mc^2$$

$$\boxed{E_k = m\gamma c^2 - mc^2}$$

$$m\gamma c^2 = E$$

$$mc^2 = E_o$$

E_k = energia kinetyczna ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**

E = całkowita energia ciała o masie m poruszającego się z prędkością **v**

E_o = energia spoczynkowa ciała o masie m

Dla małych prędkości $(v << c)$ energia kinetyczna jest w przybliżeniu równa

$$E_k = m\gamma c^2 - mc^2 = mc^2(\gamma - 1) = mc^2\left(1 + \tfrac{1}{2} v^2 c^{-2} + \cdots - 1\right) = \tfrac{1}{2} mv$$

Tak więc w przypadku nierelatywistycznym $(v << c)$ energia całkowita wynosi

$$\boxed{E = mc^2 + \tfrac{1}{2} mv^2}$$

KOMENTARZ

Relacja $E_0 = mc^2$ jest powszechnie kojarzona z nazwiskiem Einsteina i teorią względności. Wynika to ze spektakularnych zastosowań tej relacji, wśród których należy wymienić bomby atomową i termojądrową, energetykę jądrową, zjawiska anihilacji i kreacji, zakrzywienie toru promieni świetlnych w polu grawitacyjnym oraz reakcje termojądrowe na Słońcu.

- **Relatywistyczna transformacja siły**

$$\widetilde{F}_1 = \gamma F_x$$
$$\widetilde{F}_2 = \gamma F_y$$
$$\widetilde{F}_3 = \gamma F_z$$
$$\widetilde{F}_4 = i\gamma c^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})$$

$$\widetilde{F}_1' = \gamma' F_x'$$
$$\widetilde{F}_2' = \gamma' F_y'$$
$$\widetilde{F}_3' = \gamma' F_z'$$
$$\widetilde{F}_4' = i\gamma' c^{-1}(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}')$$

$$\Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$B = Vc^{-1}$$
$$\gamma = \left(1 - v^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\gamma' = \left(1 - v'^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$

$$\widetilde{F}_1' = \Gamma\left(\widetilde{F}_1 + iB\widetilde{F}_4\right)$$
$$\widetilde{F}_2' = \widetilde{F}_2$$
$$\widetilde{F}_3' = \widetilde{F}_3$$
$$\widetilde{F}_4' = \Gamma\left(\widetilde{F}_4 - iB\widetilde{F}_1\right)$$

$$F_x' = \Gamma\frac{\gamma}{\gamma'}\left[F_x - Bc^{-1}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})\right]$$
$$F_y' = \frac{\gamma}{\gamma'}F_y$$
$$F_z' = \frac{\gamma}{\gamma'}F_z$$
$$\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}' = \Gamma\frac{\gamma}{\gamma'}\left[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}) - BcF_x\right]$$

$$F_x' = \frac{F_x - Vc^{-2}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$F_y' = F_y\cdot\frac{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$F_z' = F_z\cdot\frac{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}{1 - Vv_xc^{-2}}$$
$$\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} - VF_x}{1 - Vv_xc^{-2}}$$

Przeprowadzając analogiczne rachunki dla transformacji odwrotnej, otrzymujemy:

$$F_x = \frac{F_x' + Vc^{-2}(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}')}{1 + Vv_x'c^{-2}}$$
$$F_y = F_y'\cdot\frac{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}{1 + Vv_x'c^{-2}}$$
$$F_z = F_z'\cdot\frac{\sqrt{1-V^2c^{-2}}}{1 + Vv_x'c^{-2}}$$
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}' + VF_x'}{1 + Vv_x'c^{-2}}$$

- **Czterowektor pędu-energii**

$$\tilde{v}_1 = \gamma v_x \quad \tilde{v}_2 = \gamma v_y \quad \tilde{v}_3 = \gamma v_z \quad \tilde{v}_4 = i\gamma c \quad E = m\gamma c^2$$

$$\tilde{\mathbf{p}} \overset{df}{=} m\tilde{\mathbf{v}} = \left(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4\right)$$

$$\tilde{p}_1 = m\tilde{v}_1 = m\gamma v_x \overset{df}{=} p_x$$
$$\tilde{p}_2 = m\tilde{v}_2 = m\gamma v_y \overset{df}{=} p_y$$
$$\tilde{p}_3 = m\tilde{v}_3 = m\gamma v_z \overset{df}{=} p_z$$
$$\tilde{p}_4 = m\tilde{v}_4 = im\gamma c = ic^{-1}E$$

$$\tilde{\mathbf{p}} = \left(m\gamma\mathbf{v}, im\gamma c\right) = \left(\mathbf{p}, ic^{-1}E\right) = \left(p_x, p_y, p_z, ic^{-1}E\right)$$

$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ = trójwymiarowy pęd relatywistyczny

$$\mathbf{p} = \left(p_x, p_y, p_z\right) = \left(m\gamma v_x, m\gamma v_y, m\gamma v_z\right)$$

- **Kwadrat modułu czterowektora pędu-energii, związek między energią i pędem**

$$\tilde{\mathbf{p}} = m\tilde{\mathbf{v}} \quad \tilde{\mathbf{v}}^2 = -c^2 \quad \tilde{\mathbf{p}} = \left(\mathbf{p}, ic^{-1}E\right) \quad \mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$
$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx 1 + \frac{p^2}{2m^2c^2}$$

$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = m^2\tilde{\mathbf{v}}^2 = -m^2c^2$$
$$\tilde{\mathbf{p}}^2 = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{p}} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - c^{-2}E^2 = \mathbf{p}^2 - c^{-2}E^2$$
$$-m^2c^2 = \mathbf{p}^2 - c^{-2}E^2$$

$$\boxed{E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4}$$ lub $$\boxed{E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \overset{v<<c}{\approx} mc^2 + \frac{p^2}{2m}}$$

- **Transformacja czterowektora pędu-energii**

$$\tilde{p}_1 = p_x \quad \tilde{p}_2 = p_y \quad \tilde{p}_3 = p_z \quad \tilde{p}_4 = ic^{-1}E$$
$$\tilde{p}_1' = p_x' \quad \tilde{p}_2' = p_y' \quad \tilde{p}_3' = p_z' \quad \tilde{p}_4' = ic^{-1}E'$$
$$B = Vc^{-1}$$
$$\Gamma = \left(1 - V^2c^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{p}_1' = \Gamma\left(\tilde{p}_1 + iB\tilde{p}_4\right)$$
$$\tilde{p}_2' = \tilde{p}_2$$
$$\tilde{p}_3' = \tilde{p}_3$$
$$\tilde{p}_4' = \Gamma\left(\tilde{p}_4 - iB\tilde{p}_1\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_x' &= \Gamma\left(p_x - Vc^{-2}E\right) \\ p_y' &= p_y \\ p_z' &= p_z \\ E' &= \Gamma\left(E - Vp_x\right) \end{aligned}}$$

Przeprowadzając analogiczne rachunki dla transformacji odwrotnej, otrzymujemy:

$$\boxed{\begin{aligned} p_x &= \Gamma\left(p_x' + Vc^{-2}E'\right) \\ p_y &= p_y' \\ p_z &= p_z' \\ E &= \Gamma\left(E' + Vp_x'\right) \end{aligned}}$$

- **Funkcja Lagrange'a punktu materialnego**

Równania ruchu Plancka

$$F_\alpha = \frac{d(m\gamma v_\alpha)}{dt}$$

Równania ruchu Lagrange'a

$$F_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v_\alpha}\right)$$

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

L = funkcja Lagrange'a

$$\boxed{L = -mc^2\gamma^{-1} + \text{const}}$$

bo

$$\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m\gamma v_\alpha$$

- **Funkcja Hamiltona punktu materialnego**

$$H \overset{df}{=} v_\alpha \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} - L$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m\gamma v_\alpha, \quad L = -mc^2\gamma^{-1} + \text{const}$$

$$\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2} = 1$$

$$H = m\gamma c^2\left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2}\right) - \text{const}$$

$$\boxed{H = m\gamma c^2 + \text{const}'}$$

- **Kanoniczne równania ruchu Hamiltona**

  Aby móc posługiwać się kanonicznymi równaniami ruchu Hamiltona

$$\boxed{\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = F_\alpha, \quad \frac{dx_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}}$$

wyrazimy hamiltonian cząstki H przez pędy p_α

$$p_\alpha \overset{df}{=} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} = m\gamma v_\alpha$$

$$p^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha^2$$

$$E = m\gamma c^2$$

$$E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}$$

$$H = m\gamma c^2 + \text{const}'$$

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}}$$

$$\boxed{H = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} + \text{const}'}$$

POLE ELEKTROMAGNETYCZNE W OŚRODKACH SPOCZYWAJĄCYCH

1 RÓWNANIA POLA ELEKTROMAGNETYCZNEGO DLA WEKTORÓW E, B, D, H – RÓWNANIA MAXWELLA

- **Równania Maxwella w postaci lokalnej (różniczkowej)**

Pole elektromagnetyczne w ośrodku spoczywającym względem danego inercjalnego układu odniesienia, nie zawierającym ferroelektryków, ferromagnetyków i magnesów stałych, opisywane jest przez równania Maxwella.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho \end{aligned}}$$

E = natężenie pola elektrycznego
D = indukcja elektryczna
H = natężenie pola magnetycznego
B = indukcja magnetyczna
$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ = gęstość prądu
$\rho = \frac{dq}{dV}$ = gęstość objętościowa ładunku
v = prędkość ładunku dq rozmieszczonego w objętości dV

Osiem równań Maxwella, w których występuje szesnaście zmiennych:
$E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, D_x, D_y, D_z, H_x, H_y, H_z, j_x, j_y, j_z, \rho$,
należy uzupełnić dla izotropowego ośrodka dziewięcioma równaniami materiałowymi:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H} \\ \mathbf{j} &= \lambda\mathbf{E} \end{aligned}}$$

ε = przenikalność elektryczna ośrodka
μ = przenikalność magnetyczna ośrodka
λ = przewodnictwo elektryczne właściwe, konduktywność

które zawierają trzy nowe zmienne: ε, μ, λ.
Najczęściej, zmienne $j_x, j_y, j_z, \rho, \varepsilon, \mu, \lambda$ są zadane.
UWAGA

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\mathbf{j}}$$

Równanie ciągłości (jak pokażemy dalej) jest zawarte w równaniach Maxwella.

- **Równania Maxwella w postaci globalnej (całkowej)**

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\mathrm{SEM} = \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\Phi_B = \iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

Z jednej strony

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\ ,$$

z drugiej strony

$$\iint_S (-)\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

ostatecznie

$$\oint_l \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

lub

$$\mathrm{SEM} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}\ .$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{A}\, dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{B}\, dV = \oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oiint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Twierdzenie Stokesa

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}$$

$$\mathrm{I} = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\Phi_D = \iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

Z jednej strony

$$\iint_S \mathrm{rot}\mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = \oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}\ ,$$

z drugiej strony

$$\iint_S \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} + \iint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = \mathrm{I} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

ostatecznie

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \mathrm{I} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}$$

lub

$$\oint_l \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \mathrm{I} + \frac{\partial \Phi_D}{\partial t}\ .$$

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$$

Twierdzenie Gaussa

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{A}\, dV = \oiint_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \rho dV = q$$

Z jednej strony

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{D}\, dV = \oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}\ ,$$

z drugiej strony

$$\iiint_V \rho dV = q\ ,$$

ostatecznie

$$\oiint_S \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho dV = q\ .$$

2 RÓWNANIA MATERIAŁOWE

- **Równania materiałowe dla ośrodków izotropowych nie zawierających ferroelektryków, ferromagnetyków i magnesów stałych**

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathrm{H}$$
$$\mu = \mu_o \mu_r$$
$$\varepsilon_o \mu_o = \frac{1}{c^2}$$
$$\varepsilon \mu = \frac{1}{v^2}$$
$$n = \frac{c}{v}$$
$$\varepsilon_r \mu_r = n^2$$
$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$$
$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{u}$$
$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

ε = przenikalność elektryczna ośrodka
ε_o = przenikalność elektryczna próżni = $8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$
ε_r = względna przenikalność elektryczna ośrodka
μ = przenikalność magnetyczna ośrodka
μ_o = przenikalność magnetyczna próżni = $4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$
μ_r = względna przenikalność magnetyczna ośrodka
c = wartość prędkości światła w próżni
v = wartość prędkości światła w danym ośrodku
n = współczynnik załamania ośrodka
λ = przewodnictwo elektryczne właściwe, konduktywność
ρ = gęstość objętościowa ładunku
dV = objętość w której rozmieszczony jest ładunek dq
j = gęstość prądu
u = prędkość ładunku dq
E = natężenie pola elektrycznego
D = indukcja elektryczna
H = natężenie pola magnetycznego
B = indukcja magnetyczna

- **Równania materiałowe dla ośrodków anizotropowych**

W ośrodkach anizotropowych ε_r, μ_r oraz γ są tensorami.

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{xx}E_x + \varepsilon_{xy}E_y + \varepsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \varepsilon_{yx}E_x + \varepsilon_{yy}E_y + \varepsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \varepsilon_{zx}E_x + \varepsilon_{zy}E_y + \varepsilon_{zz}E_z \end{aligned} \qquad \varepsilon_{pq} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} B_x &= \mu_{xx}H_x + \mu_{xy}H_y + \mu_{xz}H_z \\ B_y &= \mu_{yx}H_x + \mu_{yy}H_y + \mu_{yz}H_z \\ B_z &= \mu_{zx}H_x + \mu_{zy}H_y + \mu_{zz}H_z \end{aligned} \qquad \mu_{pq} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} j_x &= \lambda_{xx}E_x + \lambda_{xy}E_y + \lambda_{xz}E_z \\ j_y &= \lambda_{yx}E_x + \lambda_{yy}E_y + \lambda_{yz}E_z \\ j_z &= \lambda_{zx}E_x + \lambda_{zy}E_y + \lambda_{zz}E_z \end{aligned} \qquad \lambda_{pq} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$

ε_{pq} = tensor przenikalności elektrycznej ośrodka
μ_{pq} = tensor przenikalności magnetycznej ośrodka
λ_{pq} = tensor przewodnictwa elektrycznego właściwego (konduktywności)

4 RÓWNANIA RUCHU – SIŁA LORENTZA

$$\boxed{\mathbf{F}^{L} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}$$

$$\rho^{q} = \frac{dq}{dV}$$

$$\rho^{m} = \frac{dm}{dV}$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{L} = \rho^{q}\mathbf{E} + \rho^{q}\mathbf{v}\times\mathbf{B}}$$

$$\mathbf{j} = \rho^{q}\mathbf{v}$$

$$\boxed{\mathbf{f}^{L} = \rho^{q}\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}}$$

$\mathbf{F}^{L}$ = siła Lorentza, q = ładunek

$\mathbf{E}$ = natężenie pola elektrycznego

dV = element objętości w której rozmieszczony jest ładunek dq o masie dm

$\mathbf{B}$ = indukcja pola magnetycznego

$\mathbf{F} = m\dfrac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}$ = trójwymiarowe równania ruchu Plancka

$\mathbf{f} = \rho^{m}\dfrac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt}$ = objętościowa gęstość siły

$\rho^{m} = \gamma\rho_0^{m}$ = objętościowa gęstość masy

ρ_0^{m} = spoczynkowa gęstość objętościowa masy

$\mathbf{f}^{L}$ = objętościowa gęstość siły Lorentza

$\rho^{q} = \gamma\rho_0^{q}$ = objętościowa gęstość ładunku

ρ_0^{q} = spoczynkowa gęstość objętościowa ładunku

$\mathbf{j} = \rho_0^{q}\gamma\mathbf{v}$ = gęstość prądu

$\gamma = \left[1 + v^{2}c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

5 RÓWNANIA BILANSU

- **Lokalne równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej**

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J} \quad \text{lub} \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial J_\beta}{\partial x_\beta}$$

Nierelatywistyczne trójwymiarowe równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

$a = \frac{dA}{dV}$ = gęstość objętościowa bilansowanej wielkości skalarnej A

$\sigma = \frac{d_i a}{dt}$ = źródło bilansowanej wielkości skalarnej = człon źródłowy

div$\mathbf{J}$ = człon dywergencyjny

$\mathbf{J} = \sum_{\beta=1}^{3} J_\beta \mathbf{e}_\beta = \sum_{\beta=1}^{3} a v_\beta \mathbf{e}_\beta = a\mathbf{v}$ = trójwymiarowy strumień wielkości skalarnej

$\mathbf{v} = \sum_{\beta=1}^{3} v_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad v_\beta = \frac{dx_\beta}{dt}$

$J_\beta = a v_\beta, \quad (\beta = 1, 2, 3)$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial a}{\partial t} = \sigma$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (ic\, a)}{\partial (ict)} = \sigma$$

$x_4 = ict, \quad v_4 = ic, \quad J_\alpha = a v_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$$\sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial (a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial (a v_4)}{\partial x_4} = \sigma$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial (a v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \sigma \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial J_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma$$

Nierelatywistyczne czterowymiarowe równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

$a \rightarrow \gamma a$ = relatywistyczna gęstość objętościowa wielkości skalarnej

a = spoczynkowa gęstość objętościowa wielkości skalarnej

$J_\alpha \rightarrow \tilde{J}_\alpha = \gamma a v_\alpha = a\tilde{v}_\alpha, \quad \tilde{v}_\alpha = \gamma v_\alpha, \quad v_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}, \quad x_4 = ict, \quad v_4 = ic, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$

$\tilde{J}_\alpha$ = składowe czterowektora strumienia wielkości skalarnej

$\sigma = \frac{d_i a}{dt} \rightarrow \tilde{\sigma} = \frac{d_i \gamma a}{dt}$

$\gamma = \left[1 - v^2 c^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

$$\boxed{\sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial (\gamma a v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma} \quad \text{lub} \quad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\partial \tilde{J}_\alpha}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma}}$$

Relatywistyczne równanie bilansu gęstości objętościowej wielkości skalarnej

- **Nierelatywistyczne globalne równanie bilansu wielkości skalarnej**

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \sigma - \mathrm{div}\mathbf{J}$$

$$\iiint_V \frac{\partial a}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V a\, dV$$

$$A = \iiint_V a\, dV$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\mathbf{J}\, dV = \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \frac{\partial a}{\partial t}\, dV = \iiint_V \sigma\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{J}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V a\, dV = \iiint_V \sigma\, dV - \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = \iiint_V \sigma\, dV - \oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}}$$

$\dfrac{\partial A}{\partial t}$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A w obszarze o objętości V ograniczonym powierzchnią zamkniętą o polu S

$\iiint_V \sigma\, dV$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A związana z przebiegiem procesów wewnątrz obszaru V

$\oiint_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$ = szybkość zmian w czasie wielkości skalarnej A związana z przepływami przez powierzchnię zamkniętą S

Strumień jest wektorem o kierunku i zwrocie pokrywającym się z kierunkiem i zwrotem transportu danej wielkości skalarnej A. Strumień i produkcja są wielkościami lokalnymi.

$J > 0$, gdy dana wielkość skalarna A wypływa z objętości V na zewnątrz
$J < 0$, gdy dana wielkość skalarna A wpływa z zewnątrz do objętości V
$\sigma > 0$, gdy wartość danej wielkość skalarnej A zwiększa się w wyniku procesów przebiegających w rozpatrywanym elemencie objętości V
$\sigma < 0$, gdy wartość danej wielkości skalarnej A zmniejsza się w wyniku procesów przebiegających w rozpatrywanym elemencie objętości V

- **Relatywistyczne globalne równanie bilansu wielkości skalarnej**

$$x_4 = ic, \quad v_4 = ict$$

$$\tilde{\sigma} = \frac{d_i \gamma a}{dt}$$

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial(\gamma a v_\beta)}{\partial x_\beta} = \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \gamma a}{\partial t}\, dV = \frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \gamma a\, dV$$

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}\, dV = \oiint_S \gamma\mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_V \gamma a\, dV = \iiint_{V_0} a\, dV_0 = A$$

$$dV = \gamma dV_0$$

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\frac{\partial(\gamma a v_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \tilde{\sigma}$$

$$\sum_{\beta=1}^{3}\frac{\partial(\gamma a v_\beta)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial(\gamma a v_4)}{\partial x_4} = \tilde{\sigma}$$

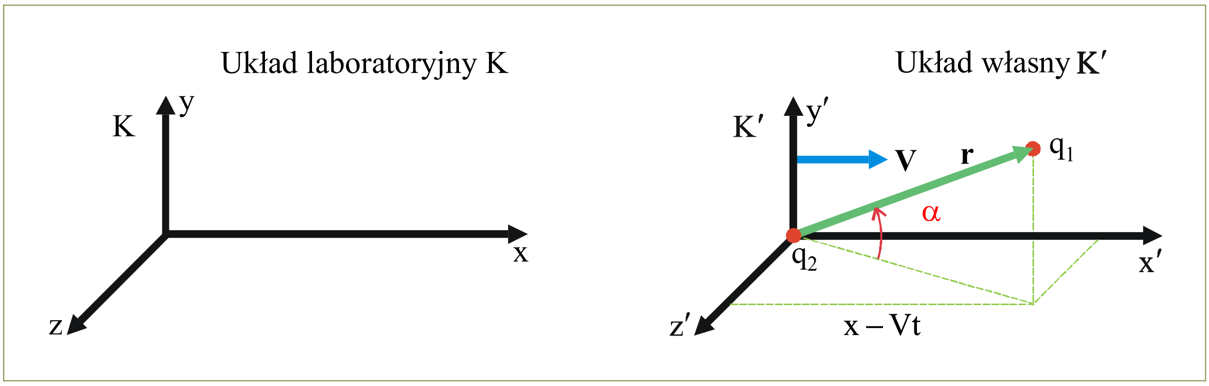
$$\frac{\partial \gamma a}{\partial t} = \tilde{\sigma} - \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}$$

$$\iiint_V \frac{\partial \gamma a}{\partial t}\, dV = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}\, dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \gamma a\, dV = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}\, dV$$

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = \iiint_V \tilde{\sigma}\, dV - \iiint_V \mathrm{div}\,\gamma\mathbf{J}\, dV}$$

7 WZAJEMNE ODDZIAŁYWANIE DWÓCH PORUSZAJĄCYCH SIĘ ŁADUNKÓW



Rozpatrzmy dwa ładunki q_1 i q_2 odległe od siebie o **r**, poruszające się względem układu laboratoryjnego każdy z prędkością **V.** Ładunek q_2 umieścimy w środku układu K'. Względem układu K' oba ładunki spoczywają. Ładunek q_1, znajdując się w polu elektrycznym i magnetycznym ładunku q_2, doznaje działania siły Lorentza $\mathbf{F}_{21}$.

$$\mathbf{F}_{21} = q_1\mathbf{E}_2 + q_1(\mathbf{V}\times\mathbf{B_2})$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\frac{1-V^2c^{-2}}{(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\mathbf{r}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon r^3}\frac{c^{-2}(1-V^2c^{-2})}{(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}(\mathbf{V}\times\mathbf{r})$$

$$\mathbf{V}\times(\mathbf{V}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{V}\cdot\mathbf{r})\mathbf{V} - V^2\mathbf{r} = (Vr\cos\alpha)\mathbf{V} - V^2\mathbf{r}$$

$$\boxed{\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}\frac{1-V^2c^{-2}}{(1-V^2c^{-2}\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}\left[(1-V^2c^{-2})\frac{\mathbf{r}}{r} + (Vc^{-2}\cos\alpha)\mathbf{V}\right]}$$

Dla kąta $\alpha = \frac{1}{2}\pi$

$$\boxed{\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon r^2}(1-V^2c^{-2})^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}}$$

Zbigniew Osiak

Należę do pokolenia fizyków, dla których idolami byli Albert Einstein, Lew Dawidowicz Landau i Richard P. Feynman. Einstein zniewolił mnie potęgą swej intuicji. Landaua podziwiam za rzetelność, precyzję i prostotę wywodów oraz instynktowne wyczuwanie istoty zagadnienia. Feynman urzekł mnie lekkością narracji i subtelnym poczuciem humoru.