Transformaciones Generales de Lorentz

A. Blato

(2018) Buenos Aires
Argentina

Este artículo presenta las transformaciones generales de Lorentz de tiempo, espacio, velocidad y aceleración que pueden ser aplicadas en cualquier sistema inercial o no inercial (no rotante)

Introducción

Si consideramos un sistema (no rotante) S respecto a otro sistema inercial Σ entonces el tiempo (t), la posición ($\mathbf{r}$), la velocidad ($\mathbf{v}$) y la aceleración ($\mathbf{a}$) de una partícula (masiva o no masiva) respecto al sistema Σ están dados por:

$$t \;=\; \int_0^{\mathtt{t}} \gamma \, \mathtt{dt} \;+\; \gamma \, \frac{\vec{r} \cdot \boldsymbol{\varphi}}{c^2} \;+\; \mathtt{h}$$

$$\mathbf{r} \;=\; \vec{r} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \, \frac{(\, \vec{r} \cdot \boldsymbol{\varphi} \,)\, \boldsymbol{\varphi}}{c^2} \;+ \int_0^{\mathtt{t}} \gamma \, \boldsymbol{\varphi} \, \mathtt{dt} \;+\; \mathtt{k}$$

$$\mathbf{v} \;\doteq\; \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a} \;\doteq\; \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

donde ($\mathtt{t}$, $\vec{r}$) son el tiempo y la posición de la partícula respecto al sistema S ($\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\alpha}$) son la posición, la velocidad y la aceleración del origen del sistema S respecto al sistema Σ, ($\vec{\mu}$) es la posición del origen del sistema Σ respecto al sistema S, ($\mathtt{h}$, $\mathtt{k}$) son constantes entre los sistemas Σ & S, (c) es la velocidad de la luz en el vacío y $\gamma \;\doteq\; (1 - \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} / c^2)^{-1/2}$

- $\dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{1}{c^2} \;=\; \dfrac{\gamma-1}{\boldsymbol{\varphi}^2} \qquad (\,\boldsymbol{\varphi}^2 \doteq \boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,)$

- $\vec{r} \,+\, \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{(\,\vec{r}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,)\,\boldsymbol{\varphi}}{c^2} \;=\; \gamma\,\vec{r} \,+\, \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{(\,\vec{r}\times\boldsymbol{\varphi}\,)\times\boldsymbol{\varphi}}{c^2}$

- $\vec{\mu} \,+\, \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{(\,\vec{\mu}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,)\,\boldsymbol{\varphi}}{c^2} \;=\; \gamma\,\vec{\mu} \,+\, \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{(\,\vec{\mu}\times\boldsymbol{\varphi}\,)\times\boldsymbol{\varphi}}{c^2}$

- $\boldsymbol{\mu} \;=\; \int_{\mathtt{0}}^{\mathtt{t}} \gamma\,\boldsymbol{\varphi}\,\mathtt{dt} \,+\, \mathtt{k} \;=\; \int_{\mathtt{0}}^{t} \boldsymbol{\varphi}\,dt \,+\, \mathtt{k} \;=\; -\,\vec{\mu} \,-\, \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\,\dfrac{(\,\vec{\mu}\cdot\boldsymbol{\varphi}\,)\,\boldsymbol{\varphi}}{c^2}$

El sistema S es inercial cuando $(\,\boldsymbol{\alpha} \,=\, 0\,)$

El sistema S es no inercial (movimiento rectilíneo acelerado) cuando $(\,\boldsymbol{\alpha} \,\neq\, 0\,)$ y $(\,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

El sistema S es no inercial (movimiento circular uniforme) cuando $(\,\boldsymbol{\alpha} \,\neq\, 0\,)$ y $(\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es inercial entonces el observador S debe usar un origen fijo O tal que $(\,\vec{\mu}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es no inercial (movimiento rectilíneo acelerado) entonces el observador S debe usar un origen fijo O tal que $(\,\vec{\mu}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Pero si el sistema S es no inercial (movimiento circular uniforme) entonces el observador S debe usar un origen fijo O tal que $(\,\vec{\mu}\cdot\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es inercial entonces $(\,\boldsymbol{\alpha} \,=\, 0\,)$, $(\,\boldsymbol{\varphi} \,=\, \text{cte}\,)$, $(\,\gamma \,=\, \text{cte}\,)$ $(\,\int_{\mathtt{0}}^{\mathtt{t}} \gamma\,\mathtt{dt} = \gamma\,\mathtt{t}\,)$, $(\,\boldsymbol{\mu} \,=\, \gamma\,\boldsymbol{\varphi}\,\mathtt{t} + \mathtt{k}\,)$ y $(\,\vec{\mu}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es no inercial (movimiento rectilíneo acelerado) entonces $(\boldsymbol{\alpha} \,\neq\, 0)$ $(\,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$ y $(\,\vec{\mu}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es no inercial (movimiento circular uniforme) entonces $(\,\boldsymbol{\alpha} \,\neq\, 0)$ $(\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$, $(\,\gamma \,=\, \text{cte}\,)$, $(\,\int_{\mathtt{0}}^{\mathtt{t}} \gamma\,\mathtt{dt} = \gamma\,\mathtt{t}\,)$ y $(\,\vec{\mu}\cdot\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Si el sistema S es inercial o no inercial (no rotante) entonces el observador S puede usar partículas de prueba tales que $(\,\vec{r}\cdot\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$ y/o $(\,\vec{r}\times\boldsymbol{\varphi} \,=\, 0\,)$

Observaciones Generales

Es sabido que en sistemas inerciales la geometría local es euclidiana y que en sistemas no inerciales la geometría local es en general no euclidiana.

Según este artículo, el elemento de línea local del sistema S debe ser obtenido desde el elemento de línea local del sistema Σ.

Por lo tanto, el elemento de línea local (coordenadas rectilíneas) en el sistema Σ y el elemento de línea local en el sistema S están dados por:

$$ds^2 \; = \; c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2$$

$$ds^2 \; = \; \left[\; \left(1 + \frac{\mathbf{w} \cdot \vec{r}}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{\boldsymbol{\phi} \times \vec{r}}{c} \right)^2 \; \right] c^2 \, \mathtt{dt}^2 \; - \; 2 \left(\boldsymbol{\phi} \times \vec{r} \right) d\vec{r} \, \mathtt{dt} \; - \; d\vec{r}^{\,2}$$

$$\mathbf{w} \; \doteq \; \gamma^2 \left(\boldsymbol{\alpha} + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \, \frac{(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \, \boldsymbol{\varphi}}{c^2} \right) \qquad , \qquad \boldsymbol{\phi} \; \doteq \; \gamma^1 \left(\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \, \frac{(\boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\alpha})}{c^2} \right)$$

Según este artículo, las magnitudes cinemáticas ($t, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$) son las magnitudes cinemáticas propias del sistema Σ.

Por lo tanto, la magnitud cinemática (t) es un tensor de rango 0 y las magnitudes cinemáticas ($\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{a}$) son tensores de rango 1.

Finalmente, la velocidad de la luz en el vacío es ($\mathbf{c}$) en el sistema Σ y ($\vec{c}$) en el sistema S y ($\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}$) & ($\vec{c} \cdot \vec{c}$) son constantes en los sistemas Σ & S.

Bibliografía

[1] R. A. Nelson, J. Math. Phys. **28**, 2379 (1987).

[2] R. A. Nelson, J. Math. Phys. **35**, 6224 (1994).

[3] C. Møller, The Theory of Relativity (1952).