

ÉLÉMENTS DE GEOSTATISTIQUE

COURS DONNÉ AUX ÉTUDIANTS DE LA
TROISIÈME ANNÉE DE LA LICENCE
APPLIQUÉE EN GÉOMATIQUE TERRE ET
ENVIRONNEMENT DE LA FACULTÉ DES
SCIENCES DE TUNIS

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

Ingénieur Général à l'Office de la Topographie
et du Cadastre

VERSION 3.3
SEPTEMBRE 2012

OFFICE DE LA TOPOGRAPHIE ET DU CADASTRE
abenhadsalem@gmail.com

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Définitions	7
1.2	Les Trois âges de la géostatistique	8
1.2.1	La Première étape :1950-1960	8
1.2.2	La Deuxième étape :1970-1980	9
1.2.3	1990 - 20..	9
1.3	Objectif de la Géostatistique	9
2	Rappels Statistiques	11
2.1	Variable Aléatoire	11
2.1.1	Description d'une variable aléatoire	11
2.1.2	Propriétés	12
2.2	L'interprétation propre à la géostatistique	14
3	Le Variogramme	17
3.1	Définition	18
3.1.1	Hypothèses de base et définition	19

3.2	Estimation du variogramme	22
3.3	Exemple numérique :	23
3.4	Types de modèles courants	23
4	Le Krigeage	27
4.1	Le Krigeage Ordinaire	27
4.2	Le Krigeage simple	30
4.3	Exemple numérique de krigeage	32
5	Le Cokrigeage	37
5.1	Le Cokrigeage ordinaire	38
5.1.1	Le Cokrigeage simple	41
	Bibliographie	42
	Liste des Figures	43
	Liste des Tables	46

Préface

Ce cours d'éléments de géostatistique donné aux étudiants de la troisième année de la *Licence Appliquée en Géomatique Terre et environnement* de la Faculté des Sciences de Tunis a été inspiré surtout du cours intitulé *Aide-Mémoire de Géostatistique Linéaire*¹ de Pierre Chauvet. Qu'il trouve toutes nos sincères compléments.

Tunis,
Septembre 2012

*Abdelmajid
Ben Hadj Salem, Dipl.-Ing.
Ingénieur Général Géographe*

1. <http://cg.ensmp.fr/Chauvet/Tome2/ParisTech/AideMemoire.pdf>

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définitions

Le mot de **Géostatistique** a fait son apparition en 1962. On peut définir la Géostatistique comme l'étude des variables numériques réparties dans l'espace ou encore la méthode de traitement statistique de données localisées. Il est clair alors que des problèmes essentiellement géostatistiques ont été abordés depuis fort longtemps : en art des mines certes, mais aussi en météorologie, topographie, cartographie, pour ne citer que quelques exemples.

L'innovation ne réside pas non plus dans l'arsenal mathématique requis. Ainsi les Fonctions Aléatoires ont-elles été introduites et étudiées dès les années 1930 par les écoles française et soviétique (P. Lévy, A. Kolmogorov, A. Khintchine) ; les outils théoriques que nous utilisons en Géostatistique Linéaire étaient en place dès les années 1940 (H. Cramér, N. Wiener, S. Bochner) ; et les méthodes comme les moindres carrés de Gauss ou les paramètres de Lagrange, sont des plus classiques et font partie du bagage mathématique de base de l'ingénieur.

Le déclic, si l'on peut dire, qui a conduit à l'élaboration de ce que nous appelons ici et aujourd'hui la Géostatistique, c'est le rapprochement de ces deux domaines : des problèmes techniques parfois fort terre-à-terre

d'une part, et d'autre part un arsenal de méthodes mathématiques. Sans doute d'ailleurs, dans l'espace d'une décennie, la Géostatistique s'est élaborée indépendamment dans le domaine minier, dans le domaine forestier (B. Matérn, en Suède), en météorologie (L.S. Gandin, en URSS). Sans doute une recherche bibliographique approfondie trouverait-elle une évolution semblable dans d'autres disciplines encore.

1.2 Les Trois âges de la géostatistique

Pour fixer les idées, nous examinerons ici les grandes lignes de l'évolution de la Géostatistique.

1.2.1 La Première étape :1950-1960

La première étape est d'inspiration exclusivement minière. Pour être plus précis, ce sont les problèmes rencontrés par les mineurs d'or d'Afrique du Sud qui suscitent les premières recherches. L'idée directrice de ces recherches est de pallier les insuffisances de la statistique «classique» constatées dans l'étude des gisements. Le néologisme «krigeage» est là pour rappeler cette rencontre entre une technique mathématique de régression et les difficultés d'exploitation du minerai d'or. Mais déjà, les applications s'étendent à d'autres produits : uranium, fer, nickel, cuivre.

Deux traits caractérisent cette première période de la Géostatistique. Au niveau pratique d'abord, les moyens de calculs demeurent rudimentaires, aussi les publications abondent-elles en formules d'approximation, courbes ou abaques, qui progressivement constituent un véritable capital afin d'éviter aux utilisateurs de reprendre des calculs fastidieux. Au niveau théorique ensuite, on remarque que les formalismes qui s'élaborent se placent souvent dans le cadre d'une loi de distribution donnée. Il s'agit non pas tant du modèle Gaussien - inadapté aux variables disséminées - que du modèle log-norma(logarithme de la loi normale), pour lequel se manifeste un engouement extraordinaire dans les années 1950. D'autres modèles de distributions font l'objet de recherches théoriques (travaux de H.S. Sichel).

1.2.2 La Deuxième étape :1970-1980

Avec la deuxième période de la Géostatistique, que l'on peut situer de 1965 à la fin des années 1970, c'est la référence à des modèles statistiques qui est abandonnée. Ou bien on élabore des modèles qui ne font pas intervenir les lois de distribution (Géostatistique Linéaire), ou bien on se ramène préalablement à des modèles de référence par le jeu des anamorphoses. Parallèlement, on cherche à élargir les hypothèses de travail : c'est le développement d'une Géostatistique Non Stationnaire, puis d'une Géostatistique Non Linéaire. La Géostatistique Non Stationnaire-Non Linéaire reste encore à faire. Des formalismes nouveaux apparaissent : Simulations conditionnelles ou non, Ensembles Aléatoires. Dans ce dernier domaine, il s'agit cette fois d'innovations théoriques. Ce foisonnement méthodologique peut être immédiatement mis en valeur grâce à la remarquable amélioration des moyens de calculs.

1.2.3 1990 - 20..

Il n'est pas facile de parler de la Géostatistique de troisième génération, actuellement en pleine expansion. Dans un contexte informatique de plus en plus confortable, la Géostatistique se développe dans les directions les plus variées. Les champs d'application ne se limitent plus désormais aux ressources naturelles comme les mines ou le pétrole. Plus fondamentalement, les recherches s'orientent vers des domaines théoriques extrêmement divers. Il est aussi intéressant de noter que l'on se remet à prendre en compte les lois de distribution. Cependant, il ne s'agit pas là d'un quelconque retour en arrière : ce sont au contraire des outils nouveaux dont le besoin se fait sentir et qui sont élaborés actuellement. On peut donc penser que cette troisième phase de la Géostatistique est une étape de synthèse, dont il est encore trop tôt pour prévoir les aboutissants.

1.3 Objectif de la Géostatistique

L'objectif est de disposer d'une carte représentative des phénomènes qui soit :

- claire,

- facile à comprendre,
- et fiable.

Parmi ces phénomènes, on peut citer :

- contamination d'un site,
- évaluation de volumes de sols à traiter,
- communication autour d'une pollution de nappe,
- pollution atmosphérique..

Le coeur du problème de la géostatistique est : comment à partir d'un nombre limité de mesures avoir **une représentation fidèle** d'un phénomène localisé dans l'espace.

Chapitre 2

Rappels Statistiques

2.1 Variable Aléatoire

Définition 2.1.1. *Variable aléatoire (v.a) : c'est une fonction dont les résultats possibles sont connus mais dont le résultat final ne peut être déterminé, à priori, avant d'effectuer la mesure.*

Exemples :

- teneur de cuivre d'une carotte de 1 m,
- épaisseur d'une veine minéralisée,
- concentration d'un polluant dans l'eau souterraine,
- Ph de l'eau de pluie.

2.1.1 Description d'une variable aléatoire

Sans connaître la valeur que prendra le résultat final, on peut parfois connaître la probabilité qu'une v.a prenne chacun des résultats possibles. C'est la description la plus complète que l'on puisse faire de la v.a.

La fonction qui décrit ces probabilités est la fonction de densité f pour les v.a. continues et c'est la fonction de masse pour les v.a discrètes.

2.1.2 Propriétés

On a :

- $f_X(x) \geq 0$ toute probabilité est positive,

- $\sum_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$, l'intégrale de la fonction densité donne 1,

- $\sum_a^b f_X(x)dx = P(a \leq X \leq b)$, c'est la probabilité que x prenne une valeur comprise entre a et b .

Certaines quantites résumant les caractéristiques principales de la variable aléatoire.

*Mesures de tendance centrale :

- mode : x tel que $f_X(x)$ est maximum,

- médiane : x tel que $P(X < x) = 0.5$,

- moyenne (ou espérance mathématique) : μ_X ou $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx$,

*Mesures de dispersion :

-Variance : $\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x)dx$.

-Ecart-type : $\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2}$.

-Asymétrie : $E \left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^3 \right]$.

-Aplatissement : $E \left[\left(\frac{X - E(X)}{\sigma_X} \right)^4 \right]$.

Toutes ces quantites sont généralement, à priori, inconnues. On doit donc les estimer à partir d'un ensemble d'observations appelé l'échantillon (par abus de langage, on parlera souvent des échantillons pour désigner ces observations).

A partir de l'échantillon, on peut construire des estimateurs :

- de la moyenne :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.1)$$

- de la variance :

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.2)$$

$$\text{ou } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.3)$$

- de la fonction de densité : histogramme,

- de la fonction de densité cumulative : courbe des fréquences cumulées ($F_X(x) = P(X \leq x)$ estimée par rang $(x_i)/n$).

Une des caractéristiques importantes d'un estimateur est d'être sans biais, c'est-à-dire d'avoir la même espérance mathématique que la quantité qu'il cherche à évaluer.

Exemple : $E[\bar{X}] = E\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{n}{n} E(X_i) = E(X_i) = \mu_X$ donc \bar{X} est sans biais pour μ_X .

De même, s^2 est sans biais pour σ_X^2 , alors que $\hat{\sigma}^2$ est biaisé.

Passage à plus d'une variable :

On peut aussi étudier et décrire le comportement simultané de plus d'une

variable aléatoire.

La fonction de densité conjointe : $f_{xy}(x, y)$ donne la probabilité que, simultanément $X = x$ et $Y = y$. On a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (2.4)$$

$$P[x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (2.5)$$

Deux mesures additionnelles permettent de décrire des caractéristiques importantes de la fonction de densité conjointe.

La covariance :

$$Cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \quad (2.6)$$

mesure la force du lien linéaire entre les variables X et Y .

La corrélation :

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (2.7)$$

comme la covariance mais avec des unités "normalisées".

Propriétés de ρ_{XY} , on a :

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \quad (2.8)$$

$$\rho_{XY} = \rho_{aX, bY} \quad (2.9)$$

avec a et b des constantes quelconques. Notons que :

$\rho_{XY} = 0$ --- > absence de lien linéaire, et $\rho_{XY} \neq 0$ indépendance de X et Y . En effet on a indépendance si et seulement si $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Par contre, l'indépendance de X et Y --- > $\rho_{XY} = 0$.

2.2 L'interprétation propre à la géostatistique

Les variables aléatoires sont régionalisées c'est-à-dire elles dépendent de leur localisation dans le gisement.

Exemple : $Z(x)$. Z : teneur de cuivre mesurée au point x (ou dans un volume centré en x).

Différentes visions du même gisement : G

* collection infinie de valeurs ponctuelles

$$Z_G = \frac{1}{G} \int_G Z(x) dx \quad (2.10)$$

Z_G est la teneur moyenne du gisement obtenue en faisant la moyenne de toutes les valeurs ponctuelles. * collection finie de petits blocs v

$$Z_G = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Z_v(x) dx \quad (2.11)$$

* collection finie de gros blocs V

$$Z_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Z_V(x) dx \quad (2.12)$$

et ainsi de suite... Le gisement est donc assimilé à un ensemble fini ou infini (cas ponctuel) de variables aléatoires. Si on connaît le comportement de la variable aléatoire au niveau ponctuel (ou quasi-ponctuel) alors on peut aussi décrire le comportement de Z_v , Z_V et Z_G .

Cette collection de variables aléatoires s'appelle fonction aléatoire. Le gisement en est une réalisation limitée dans le temps et dans l'espace. On cherchera à caractériser $Z(x)$ pour pouvoir dire quelque chose sur Z_v , Z_V et Z_G .

Chapitre 3

Le Variogramme

Idée fondamentale : Deux observations situées l'une près de l'autre devraient, en moyenne, se rassembler davantage que deux observations éloignées.

Exemple :

Soit trois localisations x_0, x_1 et x_2 , que l'on promène dans le gisement. On mesure la teneur en chacun de ces points.



La teneur au point x_1 devrait ressembler plus (en moyenne) à celle observée en x_0 qu'à celle en x_2 .

On a peut-être intérêt à utiliser l'information contenue en x_1 et x_2 pour fournir un meilleur estimé de x_0 que si l'on n'utilisait que x_1 .

Notion de "continuité" de la minéralisation. Implicitement toutes les méthodes d'estimation reposent sur ce concept plus ou moins défini.

En géostatistique, on cherche à quantifier cette continuité préalablement à tout calcul effectué sur le gisement. Soit deux points x et $x + h$ séparés d'une distance h .

x ————— $x + h$

La teneur en x est une variable aléatoire $Z(x)$. La teneur en $x + h$ aussi, $Z(x + h)$.

La différence entre les valeurs prises par ces deux v.a. est $Z(x) - Z(x + h)$. C'est également une v.a. dont on peut calculer la variance. Cette variance devrait être plus petite lorsque les points sont rapprochés (les valeurs se ressemblent plus en moyenne) et plus grande lorsque les points sont éloignés.

3.1 Définition

On appelle **variogramme** la demi-variance de cette différence, soit :

$$\boxed{\gamma(x, x + h) = 0.5 * Var(Z(x) - Z(x + h))} \quad (3.1)$$

La géostatistique a des visées plus modestes. On veut estimer des paramètres statistiques à partir des données et non imposer un modèle à priori qui aurait toutes les chances de s'avérer inadéquat. Les paramètres que l'on cherchera à estimer ne sont pas la fonction de distribution conjointe, ni même la fonction de distribution bivariable (i.e. les v.a. considérées deux à deux) mais simplement les deux premiers moments (moyenne, variance, covariance) des v.a. prises deux à deux. Même réduit à cela, on ne dispose toujours que d'une seule paire d'observations situées précisément aux points x et $x + h$. On ne peut donc estimer les paramètres statistiques sans formuler certaines hypothèses.

Ces hypothèses ont uniquement pour but de permettre l'estimation des paramètres statistiques de notre modèle à partir des données. On les appelle hypothèses de stationnarité du second ordre ; elles visent essentiellement à "détacher" les deux premiers moments de localisation précise en permettant des translations des emplacements x et $x + h$. La covariance (et le variogramme) deviennent donc des fonctions dépendant uniquement de la distance séparant les points d'observation et non plus de leur localisation exacte.

3.1.1 Hypothèses de base et définition

Bref, on suppose que :

i. L'espérance mathématique ne dépend pas de x , soit $E[Z(x)] = m$ ou l'espérance des écarts est zéro, c'est-à-dire

$$E[Z(x) - Z(x + h)] = 0 \quad (3.2)$$

ii. La covariance entre $Z(x)$ et $Z(x + h)$ ne dépend que de h soit :

$$Cov(Z(x), Z(x + h)) = C(h) \quad (3.3)$$

$C(h)$ est appelé fonction de covariance ou covariogramme ou le variogramme $\gamma(h)$ ne dépend pas de la localisation x , seulement de h (soit en module, soit en module et en direction).

$$\frac{1}{2} \cdot Var(Z(x) - Z(x + h)) = \gamma(h)$$

Evidemment, ces hypothèses supposent une certaine régularité, une certaine homogénéité du gisement étudié. Si on peut reconnaître des zones très différentes géologiquement, on a habituellement intérêt à les traiter séparément.

La fonction la plus utilisée en géostatistique pour décrire la continuité de la minéralisation est le variogramme, et ce surtout parce qu'elle est plus simple à estimer que la covariance (qui demande l'estimation préalable de l'espérance mathématique), mais également parce qu'elle permet d'accommoder les situations où $Var(Z(x))$ n'est pas définie.

Le variogramme théorique est défini comme :

$$\boxed{\gamma(h) = \frac{1}{2} [Var(Z(x) - Z(x + h))] = \frac{1}{2} E[(Z(x) - Z(x + h))^2]} \quad (3.4)$$

où x est le vecteur de coordonnées (1, 2 ou 3 coordonnées selon le cas) et h est le vecteur distance.

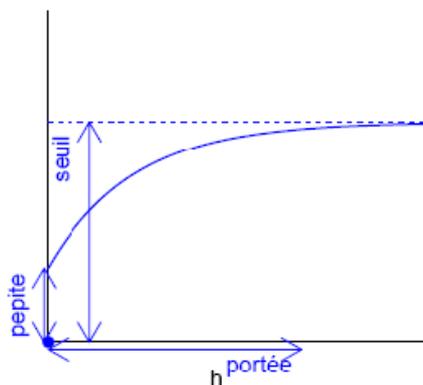


FIGURE 3.1 – le variogramme

Cette fonction, habituellement croissante en fonction de h , synthétise beaucoup d'information concernant le comportement conjoint des variables aléatoires et concernant "la continuité" de la minéralisation. Ainsi, pour les modèles de variogramme montrant un seuil, on a :

i. Portée a : Distance où deux observations ne se ressemblent plus du tout en moyenne, elles ne sont plus liées (donc covariance nulle) linéairement. A cette distance, la valeur du variogramme correspond à la variance de la variable aléatoire :

$$\gamma(h) = Var(Z(x)) = \sigma^2$$

ii. Palier $\sigma^2 = C_0 + C$: Variance de la v.a. ($Var(Z(x))$)

iii. Effet de pépité : C_0 : Variation à très courte échelle, erreurs de localisation, erreurs d'analyse et précision analytique.

Notons lorsque $h = 0$ on a :

$$\gamma(0) = 1/2Var(Z(x) - Z(x)) = 0$$

et non C_0 par contre,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \gamma(\epsilon) = C_0$$

soit une discontinuité à l'origine du variogramme.

iv. Parfois les variogrammes ne montrent pas de palier (dans ce cas, la covariance et la variance n'existent pas).

v. Lorsque les variogrammes montrent un palier, alors on peut facilement établir le lien entre la valeur du variogramme pour la distance h et la covariance pour deux observations séparées de h .

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= 1/2(\text{Var}(Z(x) - Z(x+h))) \\ &= 1/2[\text{Var}(Z(x)) + \text{Var}(Z(x+h)) - 2\text{Cov}(Z(x), Z(x+h))] = \\ &\quad \text{Var}(Z(x)) - \text{Cov}(Z(x), Z(x+h)) = \sigma^2 - C(h) \end{aligned} \quad (3.5)$$

donc,

$$\boxed{\gamma(h) = \sigma^2 - C(h)} \quad (3.6)$$

$C(h)$ est appelé le **covariogramme** de Z . Cette relation est importante et elle est continuellement utilisée en géostatistique.

On voit que lorsque la portée est atteinte, il n'y a plus de covariance entre les v.a., i.e. $C(h) = 0$ si $h \geq a$. Lorsqu'il y a un palier, les deux fonctions sont équivalentes en ce sens qu'elles fournissent la même information sur le processus.

Le variogramme possède toutefois deux avantages sur le covariogramme.

1. Le variogramme est défini même s'il n'y a pas de palier.
2. Dans l'expression du variogramme, la constante m moyenne de la v.a. n'apparaît pas et l'on n'a donc pas besoin comme c'est le cas lorsqu'on veut calculer directement le covariogramme.

3.2 Estimation du variogramme

On estime le variogramme à l'aide de

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \quad (3.7)$$

où $N(h)$ le nombre de paires dont les points sont espacées de h .

Pour un champ donné, rien n'assure que la continuité soit identique dans toutes les directions. Par exemple, il se pourrait que des teneurs montrent une meilleure continuité parallèlement à la stratigraphie que perpendiculairement à celle-ci. De même, pour la contamination par des hydrocarbures, on pourrait observer une meilleure continuité horizontalement que verticalement en raison de la gravité. Si le nombre d'observations le permet (typiquement au moins 50, préférablement 100), on peut chercher à vérifier ce point en calculant le variogramme expérimental dans différentes directions.

On peut aussi calculer le variogramme selon certaines directions spécifiques :

$$\gamma(h, \theta) = \frac{1}{2N(h, \theta)} \sum_{i=1}^{N(h, \theta)} [Z(x_i) - Z(x_i + h)]^2 \quad (3.8)$$

où $N(h, \theta)$ = nombre de paires séparées de h dans la direction θ . En pratique on s'accorde une tolérance sur h et sur θ afin d'avoir suffisamment de paires pour chaque h et chaque θ . Pour chacune des classes ainsi formées, on calcule la distance moyenne séparant les extrémités des paires (abscisse) et on évalue le variogramme expérimental pour chaque classe. On obtient donc une série de points expérimentaux auxquels on cherche à ajuster un modèle (i.e. expression analytique) permettant de déduire la covariance entre deux points quelconques en fonction de leur espacement géographique (et, éventuellement, de la direction qu'ils définissent). Une fois le modèle adopté, toute la suite des calculs se fait avec les valeurs obtenues du modèle et non avec les valeurs expérimentales.

3.3 Exemple numérique :

Soit une matrice de données 3×3 ayant les valeurs suivantes (la distance horizontale et verticale entre 2 éléments consécutifs est de 1 m et NaN indique une donnée manquante).

3	6	5
7	2	2
4	NaN	0

Le calcul du variogramme selon la direction horizontale donne :

h	$\gamma(h)$	$N(h)$
1	4.375	4
2	7.5	3

Note :

$$\gamma(1) = 0.5 * [(3 - 6)^2 + (6 - 5)^2 + (7 - 2)^2 + (2 - 2)^2] / 4$$

Dans la direction verticale, on calcule :

h	$\gamma(h)$	$N(h)$
1	5.4	5
2	6.5	2

Dans la direction 45, on calcule :

h	$\gamma(h)$	$N(h)$
1.41	2.33	3
2.82	0.5	1

3.4 Types de modèles courants

En géologie, les modèles les plus courants sont :

- Effet de pépite.
- Puissance (cas particulier : linéaire).

- Sphérique.
- Gaussien.
- Exponentiel.
 - 1. Effet de pépite :

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ C_0 & \text{si } h \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

- 2. Sphérique :

$$\gamma(h) = \begin{cases} = C[1.5\frac{h}{a} - 0.5(\frac{h}{a})^3] & \text{si } 0 < h < a \\ = C & \text{si } h \geq a \end{cases} \quad (3.10)$$

- 3. Gaussien :

$$\gamma(h) = C \left[1 - e^{-3(\frac{h}{a})^2} \right] \quad (3.11)$$

- 4. Exponentiel :

$$\gamma(h) = C[1 - \exp(-3\frac{h}{a})] \quad (3.12)$$

- 5. Puissance :

$$\gamma(h) = Ch^b \quad 0 < b < 2 \quad (\text{linéaire si } : b = 1) \quad (3.13)$$

On peut combiner plusieurs modèles en les additionnant. Ainsi, l'effet de pépite est presque toujours présent en association avec un ou plusieurs des autres modèles décrits plus haut. Il est important de noter que ces cinq modèles ne sont pas les seuls que l'on peut utiliser, en réalité, il en existe un très grand nombre.

Il y a un lien étroit entre la nature de la variable étudiée et le type de modèle que l'on est susceptible de rencontrer. Ainsi, le modèle gaussien exprime une très grande continuité typique d'une variable comme la topographie, l'épaisseur d'une formation, le champ gravimétrique, la charge hydraulique. Ce modèle n'est pratiquement jamais rencontré pour des variables comme les teneurs de gisement, les propriétés mécaniques des roches, les analyses géochimiques en général. Pour ces variables, les modèles sphériques et exponentiels sont beaucoup plus courants. Pour des variables discrètes, le modèle gaussien est même à proscrire complè-

tement.

Notes :

i. Lorsque $h = 0$, par définition $\gamma(0) = 0$. Lorsque $h = 0^+$, alors $\gamma(h) = C_0$.

i. Parfois les variogrammes ne montrent pas de palier (cas du modèle linéaire). D'autre fois ils ne montrent qu'un palier atteint asymptotiquement (cas des modèles exponentiel et gaussien). Dans ce dernier cas, l'on définit la portée effective comme la distance où est atteint 95% du palier. Ainsi, pour les modèles exponentiel et gaussien, la portée effective est "a". Lorsque le variogramme ne montre pas de palier et que sa croissance s'effectue à un taux supérieur à h^2 alors il y a lieu de suspecter une dérive de la moyenne (i.e. l'hypothèse stationnaire ou intrinseque ne tient pas).

ii. Lorsque les variogrammes montrent un palier alors on peut facilement établir le lien entre la valeur du variogramme pour la distance h et la covariance pour deux observations séparées de h . Lorsqu'il y a un palier, covariogramme et variogramme sont équivalents en ce sens que les deux fonctions fournissent la même information spatiale sur le phénomène étudié.

Le variogramme possède toutefois deux avantages sur le covariogramme.

- Le variogramme est défini même s'il n'y a pas de palier. - Dans l'expression du variogramme, la constante "m" n'apparaît pas. On n'a donc pas besoin de l'estimer comme c'est le cas lorsqu'on veut calculer directement le covariogramme.

Chapitre 4

Le Krigage

Puisqu'on peut calculer la variance d'estimation pour tout estimateur linéaire, pourquoi ne pas choisir celui qui assure la variance d'estimation minimale? C'est précisément ce qu'effectue le krigage. Dans le cas stationnaire, on en reconnaît 2 types principaux :

- a- la moyenne du processus est connue, c'est **le krigage simple**.
- b- la moyenne est inconnue, c'est **le krigage ordinaire**. Ce dernier est, de loin, le plus fréquemment utilisé.

4.1 Le Krigage Ordinaire

Supposons que l'on veuille estimer un bloc v centré au point x_0 . Notons Z_v la vraie valeur (inconnue) de ce bloc et Z_v^* l'estimateur que l'on obtient. L'estimateur est linéaire à savoir :

$$Z_v^* = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Z_i \quad (4.1)$$

où les Z_i désignent les v.a. correspondant aux points échantillons. On veut minimiser :

$$\sigma_e^2 = Var(Z_v - Z_v^*) = Var[Z_v - Z_v^*] = Var[Z_v] + Var[Z_v^*] - 2Cov[Z_v, Z_v^*] \quad (4.2)$$

Substituant l'expression de l'estimateur dans cette équation, on obtient :

$$\sigma_e^2 = Var[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] \quad (4.3)$$

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (4.4)$$

En effet, dans ce cas,

$$E[Z_v^*] = E\left[\sum_i \lambda_i Z_i\right] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] = \sum_i \lambda_i m = m \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i = m \Rightarrow \sum_i \lambda_i = 1$$

On a donc un problème de minimisation d'une fonction avec une contrainte ou condition que l'on solutionne par la méthode de Lagrange \mathcal{L} . On forme le lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu) &= \sigma_e^2 + 2\mu \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 1 \right) \\ &= Var[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] + 2\mu \left(\sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

où μ est le multiplicateur de Lagrange. Le minimum est atteint lorsque toutes les dérivées partielles de \mathcal{L} par rapport à chacun des λ_i et par rapport à μ s'annulent. Ceci conduit au système de krigeage ordinaire,

soit :

$$\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] + \mu = Cov[Z_v, Z_i] \quad \forall i = 1, ..n \quad (4.6)$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} \lambda_j = 1 \quad (4.7)$$

La variance d'estimation minimale σ_{ko}^2 , appelée variance de krigeage, est obtenue en substituant les équations de krigeage (4.6) dans l'expression générale pour la variance d'estimation (équation 4.3) :

$$\boxed{\sigma_{ko}^2 = Var[Z_v] - \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] - \mu} \quad (4.8)$$

Note : Cette variance de krigeage ne depend pas des valeurs observées, elle ne depend que du variogramme et de la configuration des points servant à l'estimation par rapport au point (ou bloc) à estimer.

Ecrivons le système de krigeage en utilisant le variogramme $\gamma(h) = \gamma(x_i, x_j)$ avec $h =$ distance $x_i x_j$: Comme la variance d'estimation s'écrit aussi directement en terme du variogramme, on peut aussi écrire le système de krigeage en fonction du variogramme. Ceci tient au fait que $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h)$ et que $\sum \lambda_i = 1$. En effet, on a :

$$Var[Z_v] = C(Z_v) = \sigma^2 - \gamma(v, v) \text{ et } Cov[Z_v, Z_i] = \sigma^2 - \gamma(v, x_i)$$

L'équation (4.8) devient alors en tenant compte que $\sum_i \lambda_i = 1$:

$$\begin{aligned} \sigma_{ko}^2 &= \sigma^2 - \gamma(v, v) - \sum_i \lambda_i (\sigma^2 - \gamma(v, x_i)) - \mu = \\ &= \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \gamma(v, x_i) - \gamma(v, v) - \mu \end{aligned} \quad (4.9)$$

Il est intéressant de visualiser le système de krigeage ordinaire donné par les équations (4.5) et (4.6) et la variance de krigeage ordinaire sous

forme matricielle. Posons :

$$K = \begin{pmatrix} \text{Var}(Z_1) & \text{Cov}(Z_1, Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_1, Z_n) & 1 \\ \text{Cov}(Z_2, Z_1) & \text{Var}(Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_2, Z_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \text{Cov}(Z_n, Z_1) & \text{Cov}(Z_n, Z_2) & \cdots & \text{Cov}(Z_n, Z_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} \text{Cov}(Z_v, Z_1) \\ \text{Cov}(Z_v, Z_2) \\ \vdots \\ \text{Cov}(Z_v, Z_n) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Les équations (4.5) et (4.6) s'écrivent sous forme matricielle :

$$\boxed{K \cdot \Lambda = \mathbf{k}} \quad (4.12)$$

Alors, la solution donnée par :

$$\Lambda = K^{-1} \mathbf{k} \quad (4.13)$$

et σ_{ko}^2 s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{ko}^2 = \text{Var}[Z_v] - \Lambda \cdot \mathbf{k} = \sigma_v^2 - \Lambda \cdot \mathbf{k}} \quad (4.14)$$

4.2 Le Krigage simple

Parfois on connaît la moyenne "m" du champ à estimer ou du moins on en possède un estimateur fiable. On peut alors former un estimateur sans biais sans imposer la contrainte que la somme des poids soit égale à 1.

$$\boxed{Z_v^* - m = \sum_i^n \lambda_i (Z_i - m)} \quad (4.15)$$

La variance d'estimation est donnée par :

$$\sigma_e^2 = Var[Z_v] + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=n} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) - 2 \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i Cov[Z_v, Z_i] \quad (4.16)$$

Tout comme pour le krigage ordinaire, l'idée est de choisir les λ_i de façon à minimiser la variance d'estimation σ_e^2 .

Pour trouver le minimum, on dérive σ_e^2 par rapport à chacun des λ_i et l'on pose ces dérivées partielles égales à 0.

- Le système de krigage simple (KS) ne peut s'écrire directement en termes de variogrammes puisqu'on n'a pas $\sum_i \lambda_i = 1$.

- En termes pratiques, les estimés obtenus par krigage ordinaire (KO) et simple (KS) sont très similaires lorsqu'on effectue le krigage à courte distance par rapport aux points connus et par rapport à la portée du variogramme et que ce dernier montre une structure importante.

- Règle générale, le KO est préférable au KS.

Les principales propriétés et caractéristiques associées au krigage sont :

- i. Linéaire, sans biais, à variance minimale, par construction.
- ii. Interpolateur exact : si l'on estime un point connu, on retrouve la valeur connue.
- iii. Présente un effet d'écran : les points les plus près reçoivent les poids les plus importants. Cet effet d'écran varie selon la configuration et selon le modèle de variogramme utilisé pour le krigage. Plus l'effet de pépité est important, moins il y a d'effet d'écran.
- iv. Tient compte de la taille du champ à estimer et de la position des points entre eux.
- v. Par l'utilisation du variogramme, tient compte de la continuité du phénomène étudié (effet de pépité, anisotropie, etc...).

4.3 Exemple numérique de krigage

Soit les points suivants :

x_0

x_2 x_1 x_3

avec :

$x_0 = (0, 1)$ $x_1 = (1, 0)$ $x_2 = (0, 0)$ $x_3 = (3, 0)$ avec $Z_1 = 9$; $Z_2 = 3$, $Z_3 = 4$

On veut estimer la variable aléatoire Z au point x_0 situé à $(0,1)$. Supposons que l'on a un modèle sphérique, avec effet de pépité 1, palier 11 et portée 3.

On calcule d'abord les distances entre toutes les paires de points :

<i>Point</i>	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	0	1.41	1	3.16
x_1	1.41	0	1	2
x_2	1	1	0	3
x_3	3.16	2	3	0

TABLE 4.1 – Tableau des distances h

On évalue le variogramme sphérique à chacune de ces distances avec l'équation :

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h = 0 \\ 1 + 10[1.5\frac{h}{3} - 0.5(\frac{h}{3})^3] & \text{si } 0 < h < 3 \\ = 11 & \text{si } h \geq 3 \end{cases} \quad (4.17)$$

<i>Point</i>	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	0	7.53	5.81	10.96
x_1	7.53	0	5.81	9.52
x_2	5.81	5.81	0	11
x_3	10.96	9.52	11	0

TABLE 4.2 – Tableau de $\gamma(h)$

On calcule la covariance correspondante en utilisant la relation $C(h) = \sigma^2 - \gamma(h) = 11 - \gamma(h)$. On obtient le tableau suivant :

<i>Point</i>	x_0	x_1	x_2	x_3
x_0	11.0	3.47	5.19	0.04
x_1	3.47	11	5.19	1.48
x_2	5.19	5.19	11	0
x_3	0.04	1.48	0	11

TABLE 4.3 – Tableau de covariance

Ceci permet de construire le système de krigage donné par l'équation (4.12) soit :

$$\begin{pmatrix} 11 & 5.19 & 1.48 & 1 \\ 5.19 & 11 & 0 & 1 \\ 1.48 & 0 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.47 \\ 5.19 \\ 0.04 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Le système précédent s'écrit :

$$11\lambda_1 + 5.19\lambda_2 + 1.48\lambda_3 + \mu = 3.47 \quad (4.19)$$

$$5.19\lambda_1 + 11\lambda_2 + \mu = 5.19 \quad (4.20)$$

$$1.48\lambda_1 + 11\lambda_3 + \mu = 0.04 \quad (4.21)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (4.22)$$

On élimine μ du système par (4.19)-(4.21) et (4.20)-(4.21), d'où :

$$9.52\lambda_1 + 5.19\lambda_2 - 9.52\lambda_3 = 3.43 \quad (4.23)$$

$$3.71\lambda_1 + 11\lambda_2 - 11\lambda_3 = 5.15 \quad (4.24)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (4.25)$$

De la dernière équation, on a :

$$\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \quad (4.26)$$

En remplaçant λ_3 dans (4.23) et (4.24), on obtient le système linéaire à deux inconnues :

$$19.04\lambda_1 + 14.71\lambda_2 = 12.95 \quad (4.27)$$

$$14.71\lambda_1 + 22\lambda_2 = 16.15 \quad (4.28)$$

qu'on résout par substitution ou par la méthode des déterminants et on trouve (à vérifier!) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.234 \\ 0.578 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Par suite λ_3 vaut :

$$\lambda_3 = 1 - 0.234 - 0.578 = 0.188 \quad (4.30)$$

On obtient μ en utilisant par exemple (4.19) :

$$\mu = 3.47 - 11\lambda_1 - 5.19\lambda_2 - 1.48\lambda_3 \quad (4.31)$$

Soit :

$$\mu = -2.382 \quad (4.32)$$

Donc le vecteur des inconnues Λ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.234 \\ 0.578 \\ 0.188 \\ -2.382 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

L'estimation est alors :

$$Z^* = \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_i Z_i = (.234) \times 9 + (.578) \times 3 + (.188) \times 4 = 4.592 \quad (4.34)$$

La variance de krigage est donnée par :

$$\sigma_{ko}^2 = Var(Z^*) - \Lambda \cdot \mathbf{k} = 11 - \Lambda \cdot \mathbf{k} \quad (4.35)$$

Soit numériquement :

$$\begin{aligned} \sigma_{ko}^2 &= 11 - [(.234) \times 3.47 + (.578) \times 5.19 + (.188) \times 0.04 + 1 \times (-2.382)] = \\ &11 - 1.437 = 9.563 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Chapitre 5

Le Cokrigage

L'idée : c'est améliorer les estimations obtenues par krigeage en utilisant l'information fournie par d'autres variables (variables secondaires) que la variable principale.

Souvent l'on a plusieurs variables mesurées, soit aux mêmes points échantillons, soit en des points différents. Par exemple on pourrait connaître la position du sommet d'un réservoir pétrolier en quelques points et disposer d'une large couverture sismique donnant la position approximative pour ce sommet. On pourrait avoir un gisement de Cu et du Ni où les deux variables sont mesurées en tout point. En hydrogéologie, on pourrait connaître les charges hydrauliques en quelques points et les transmissivités en un nombre plus restreint de points, etc...

Exemples :

- 1. Cartographie de la température de l'eau en surface :
Variable principale : température de l'eau mesurée directement (bateau).
Variable secondaire : température obtenue par interprétation du signal spectral d'un satellite.
- 2. Cartographie de la bathymétrie :
Variable principale : mesures directes (bateau).
Variable secondaire : interprétation d'un levé hydro-acoustique.
- 3. Cartographie de la contamination :

Variable principale : teneurs d'un polluant.

Variables secondaires : topographie, surface piézométrique,...

Sans perte de généralité, l'on va considérer le cas où une des variables est identifiée comme prioritaire (variable principale Z), et les autres sont des variables secondaires. Pour simplifier l'écriture, on va considérer que l'on a une seule variable secondaire (Y). Toutefois l'extension à plusieurs variables est immédiate et ne pose aucun problème théorique particulier.

a - Si la moyenne de la variable principale est connue, c'est le **cokrigage simple**.

b - Si la moyenne de la variable principale est inconnue, c'est le **cokrigage ordinaire**.

5.1 Le Cokrigage ordinaire

On veut donc former une estimation linéaire de la variable principale Z en un point x_0 à partir de la variable principale en des points x_i et de la variable secondaire Y en des points x_k . Notons Z_0 la vraie valeur (inconnue) et Z_0^* l'estimateur que l'on obtient. L'estimateur est linéaire à savoir :

$$Z_0^* = \sum_{i=1}^{i=nz} \lambda_i Z_i + \sum_{j=1}^{j=ny} \alpha_j Y_j \quad (5.1)$$

où les Z_i et Y_j désignent les v.a. correspondant aux points échantillons.

Pour que l'estimateur soit sans biais, il faut que :

$$\sum_{i=1}^{i=nz} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{j=ny} \alpha_j = 0 \quad (5.2)$$

En effet, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
E[Z_0^*] &= E\left[\sum_i \lambda_i Z_i + \sum_j \alpha_j Y_j\right] = \sum_i \lambda_i E[Z_i] + \sum_j \alpha_j E[Y_j] = \\
&\sum_i \lambda_i m_Z + \sum_j \alpha_j m_Y = m_Z \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i + m_Y \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j = m_Z \implies \\
&\sum_i \lambda_i = 1 \text{ et } \sum_j \alpha_j = 0 \quad (5.3)
\end{aligned}$$

On veut minimiser la variance d'estimation :

$$\sigma_e^2 = Var(Z_0 - Z_0^*) = Var[Z_0 - Z_0^*] = Var[Z_0] + Var[Z_0^*] - 2Cov[Z_0, Z_0^*] \quad (5.4)$$

l'expression de l'estimateur dans cette équation, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma_e^2 &= Var[Z_0] + \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{nz} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{ny} \sum_{j=1}^{ny} \alpha_i \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{ny} \lambda_i \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) - 2 \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov[Z_0, Z_i] \\
&\quad - 2 \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov(Z_0, Y_j) \quad (5.5)
\end{aligned}$$

On a donc un problème de minimisation d'une fonction avec deux contraintes ou conditions que l'on solutionne par la méthode de Lagrange \mathcal{L} . On forme le lagrangien :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{nz}, \alpha_1, \dots, \alpha_{ny}, \mu_1, \mu_2) &= \sigma_e^2 + 2\mu_1 \left(\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i - 1 \right) + 2\mu_2 \left(\sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \right) = \\
&Var[Z_0] + \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{nz} \lambda_i \lambda_j Cov(Z_i, Z_j) + \sum_{i=1}^{ny} \sum_{j=1}^{ny} \alpha_i \alpha_j Cov(Y_i, Y_j) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^{nz} \sum_{j=1}^{ny} \lambda_i \alpha_j Cov(Z_i, Y_j) - 2 \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov[Z_0, Z_i] - 2 \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov(Z_0, Y_j) + \\
&2\mu_1 \left(\sum_{i=1}^{nz} \lambda_i - 1 \right) + 2\mu_2 \left(\sum_{j=1}^{ny} \alpha_j \right) \quad (5.6)
\end{aligned}$$

où μ_1 et μ_2 sont les multiplicateurs de Lagrange. Le minimum est atteint

lorsque toutes les dérivées partielles de \mathcal{L} par rapport à chacun des λ_i , α_j et par rapport à μ_1 et μ_2 s'annulent. Ceci conduit au système de cokrigeage ordinaire, soit :

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov[Z_i, Y_j] + \mu_1 = Cov[Z_0, Z_i] \forall i = 1, \dots, nz \quad (5.7)$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov[Y_i, Z_j] + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov[Y_i, Y_j] + \mu_2 = Cov[Z_0, Y_i] \forall i = 1, \dots, ny \quad (5.8)$$

$$\sum_{j=1}^{nz} \lambda_j = 1 \quad (5.9)$$

$$\sum_{j=1}^{ny} \alpha_j = 0 \quad (5.10)$$

La variance d'estimation minimale σ_{co}^2 , appelée variance de cokrigeage, est obtenue en substituant les équations de krigeage (5.7-5.8) dans l'expression générale pour la variance d'estimation (équation 5.5) :

$$\sigma_{co}^2 = Var[Z_0] - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov[Z_0, Z_i] - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Cov[Z_0, Y_i] - \mu_1 \quad (5.11)$$

Il est intéressant de visualiser le système de cokrigeage ordinaire donné par les équations (5.7-5.10) et la variance de cokrigeage ordinaire sous forme matricielle. Posons :

$$K = \begin{pmatrix} Var(Z_1) & Cov(Z_1, Z_2) & \cdots & Cov(Z_1, Y_{ny}) & 1 & 0 \\ Cov(Z_2, Z_1) & Var(Z_2) & \cdots & Cov(Z_2, Y_{ny}) & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Cov(Y_1, Z_1) & Cov(Y_1, Z_2) & \cdots & Cov(Y_1, Y_{ny}) & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

et

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{nz} \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{ny} \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} ; \mathbf{k} = \begin{pmatrix} Cov(Z_0, Z_1) \\ Cov(Z_0, Z_2) \\ \vdots \\ Cov(Z_0, Z_{nz}) \\ Cov(Z_0, Y_1) \\ \vdots \\ Cov(Z_0, Y_{ny}) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Les équations (5.7-5.10) s'écrivent sous la forme matricielle :

$$\boxed{K \cdot \Lambda = \mathbf{k}} \quad (5.14)$$

Alors, la solution est donnée par :

$$\Lambda = K^{-1} \mathbf{k} \quad (5.15)$$

et σ_{co}^2 s'écrit :

$$\boxed{\sigma_{co}^2 = Var[Z_0] - \Lambda \cdot \mathbf{k} = \sigma_0^2 - \Lambda \cdot \mathbf{k}} \quad (5.16)$$

Note : Il est nécessaire d'avoir au moins une observation de la variable principale et deux observations de la variable secondaire pour effectuer le cokrigeage ordinaire c'est-à-dire $nz \geq 1$ et $ny \geq 2$.

5.1.1 Le Cokrigeage simple

Si on connaît les deux moyennes m_Z et m_Y , les conditions de non-biais ne sont plus requises. Le système linéaire de cokrigeage est :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov[Z_i, Z_j] + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov[Z_i, Y_j] &= Cov[Z_0, Z_i] \quad \forall i = 1, \dots, nz \\ \sum_{j=1}^{nz} \lambda_j Cov[Y_i, Z_j] + \sum_{j=1}^{ny} \alpha_j Cov[Y_i, Y_j] &= Cov[Z_0, Y_i] \quad \forall i = 1, \dots, ny \end{aligned}$$

La variance d'estimation est donnée par :

$$\sigma_e^2 = Var[Z_0] - \sum_{i=1}^{nz} \lambda_i Cov(Z_0, Z_i) - \sum_{i=1}^{ny} \alpha_i Cov[Z_0, Y_i] \quad (5.17)$$

Toutes les propriétés du krigage sont valides pour le cokrigeage.

Bibliographie

- 1. P. Chauvet.** Aide-Mémoire de Géostatistique Linéaire. Collection *Les cours de l'Ecole des Mines de Paris*.
- 2. D. Marcotte.** Cours de Géostatistique. École Polytechnique de Montréal.
- 3. D. Causeur.** Modélisation Géostatistique. Laboratoire de Mathématiques Appliquées. Pôle d'Enseignement Supérieur et de Recherche Agronomique de Rennes. 26p. 2000.

Table des figures

3.1 le variogramme	20
------------------------------	----

Liste des tableaux

4.1	Tableau des distances h	32
4.2	Tableau de $\gamma(h)$	33
4.3	Tableau de covariance	33