Les équations KdV sur les variétés

A.Balan

February 27, 2018

Abstract

Sur des variétés différentielles, des équations KdV sont définies. Avec une condition initiale, on montre qu'on a une solution.

1 Les équations KdV

Les équations KdV sont les suivantes [KdV] :

$$u_t = -u_{xxx} + 6uu_x$$

avec u_t la dérivée par rapport au temps de $u(x,t)$ et u_x celle par rapport à l'espace.

Il s'agit d'un système intégrable [D].

2 Les équations KdV sur des variétés

On se donne une variété différentielle compacte M et un champ de vecteurs X. Dès lors, les équations KdV peuvent être définies pour une fonction lisse sur M :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il s'agit d'un système intégrable. On pourrait remplacer la dérivée par rapport au temps par un autre champ de vecteurs Y :

$$Y(f) = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il y a une paire de Lax A, B:

$$A = -X^2 + f \qquad B = 4X^3 - 6fX - 3X(f)$$

Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = [A, B]$$

Cela montre que les équations sont intégrables.

3 Les équations KdV sur le tore

Si on choisit un tore comme variété, on peut se placer sur $[0,1]^2$ et se donner un champ de vecteur constant $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$.

3.1 Développement en séries de Fourier

La fonction u est alors développable en séries de Fourier :

$$u(x,y,t) = \sum_{k,k'} u_{k,k'}(t) e^{2i\pi kx} e^{2i\pi k'y}$$

et l'équation KdV se calcul sur les coefficients de la série de Fourier.

$$\frac{\partial u_{k,k'}(t)}{\partial t} = (2i\pi)^3 (ak+bk')^3 u_{k,k'}(t) + 6\sum_{i,i'} 2i\pi(ai+bi') u_{i,i'}(t) u_{k-i,k'-i'}(t)$$

3.2 Solution quand la pente est rationnelle

On peut se servir de la solution de KdV [D] pour définir une solution à KdV sur le tore. En effet,

$$u(x,t) = \frac{2\chi^2}{cosh^2(\chi(x - 4\chi^2 t - \eta))}$$

est la solution usuelle de KdV, ce qui donne dans le cas périodique, x est remplacé par $(x/2a) + (y/2b)$ et on pose, comme la pente est rationnelle, $\mu_k = 2kpa = 2kqb$, on choisit $\chi = 2i\pi\mu_k$, c'est la solution de KdV sur le tore :

$$u_k(x,y,t) = \frac{-8\pi^2\mu_k^2}{cos^2(2\pi(kpx + kqy) + 32\pi^3\mu_k^3 t - \eta)}$$

On a une famille indexée par les entiers de solutions à KdV sur le tore.

4 Résolution par le flot

4.1 Unicité

On considère le flot du champ de vecteurs X sur M compacte, $g_z = e^{zX}$ c'est un groupe à un paramètre de difféomorphismes qui existe car on a supposé le champ de vecteurs à support compacte ; on a, pour une fonction f lisse sur M :

$$\frac{\partial f(g_z(x))}{\partial z} = X(f(g_z(x)))$$

On pose :

$$u(x,z,t) = u(g_z(x),t) = v_x(z,t)$$

Dès lors on a :

$$\frac{\partial v_x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 v_x(z,t)}{\partial z^3} + 6v_x(z,t)\frac{\partial v_x(z,t)}{\partial z}$$

De sorte qu'on obtient KdV usuel pour v_x, la solution de KdV pour le champ de vecteurs X est donc unique :

$$u(x,t) = v_x(0,t) = u(x,0,t)$$

4.2 Existence

En chaque point $m \in M$, on peut trouver une solution locale pour un temps petit à M-KdV pour des conditions initiales et un champ de vecteurs analytiques (théorème de Cauchy-Kovalevskaya), sur un ouvert $O(m)$ de M. On recouvre $M = \cup_m O(m)$; comme on suppose M compacte, on aura $M = \cup_{i=1}^n O(m_i)$. Sur chaque intersection $O(m_i) \cap O(m_j)$, les deux solutions vont coïncider car on a unicité pour des conditions initiales données ; donc on obtient une solution en temps court pour la variété M.

References

[D] M.Dunajski, ”Solitons, Instantons and Twistors”, Oxford University Press, New-York, 2010.

[KdV] D. J. Korteweg et G. de Vries, ”On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves ”, Philosophical Magazine, vol. 39, 1895, p. 422-443.