Les équations KdV sur des variétés

A.Balan

February 10, 2018

Abstract

Sur des variétés différentielles, des équations KdV sont définies.

1 Les équations KdV

Les équations KdV sont les suivantes [KdV] :

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x$$

avec u_t la dérivée par rapport au temps et u_x celle par rapport à l'espace.

Il s'agit d'un système intégrable [D].

2 Les équations KdV sur des variétés

On se donne une variété différentielles M et un champ de vecteurs X. Dès lors, les équations KdV peuvent être définies pour une fonction lisse sur M :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il s'agit d'un système intégrable. On pourrait remplacer la dérivée par rapport au temps par un autre champ de vecteur Y :

$$Y(f) = X^3(f) + 6f.X(f)$$

Il y a une paire de Lax A, B:

$$A = -X^2 + f \qquad B = 4X^3 - 3fX - 3X(f)$$

Les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\frac{dA}{dt} = [A, B]$$

Cela montre que les équations sont intégrables.

References

[D] M.Dunajski, ”Solitons, Instantons and Twistors”, Oxford University Press, New-York, 2010.

[KdV] D. J. Korteweg et G. de Vries, ”On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves ”, Philosophical Magazine, vol. 39, 1895, p. 422-443.