PMO33.5. Problema del Duelo Matemático 08 (Olomouc – Chorzow – Graz).

Article · February 2009

1 author:

Jesús Álvarez Lobo
Profesores de Enseñanza Secundaria

PMO33.5. Problema del Duelo Matemático 08 (Olomouc – Chorzow - Graz).

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuéstrese que

$$V = 4(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b)^2 - (b+c)^2 - (c+a)^2 \geq 0,$$

y determínense todos los valores de a, b, c para los que $V = 0$.

Solución *de Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España.*

La expresión es equivalente a

$$V = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc,$$

que puede ser escrita en la forma,

$$V = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

quedando probado que $V \geq 0,$ puesto que el cuadrado de un número real es *no negativo*.

Por la misma razón,

$$V = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

Por tanto, el conjunto de soluciones de $V = 0$ es el de las ternas $(x, x, x) \in \mathbb{R}^3$, que, geométricamente, definen una recta que pasa por el origen y forma ángulos iguales con los ejes en un sistema de referencia ortonormal.