

LA REPRÉSENTATION DE BONNE

Par

Abdelmajid BEN HADJ SALEM

INGÉNIEUR GÉOGRAPHE GÉNÉRAL

Février 2018

VERSION 1.

abenhadsalem@gmail.com

Table des matières

1	L'origine du découpage de la cartographie 1/50 000 type ancien .	2
2	Définition et Propriétés de la Représentation de Bonne	2
2.1	Formules	3
2.1.1	Modèle sphérique	3
2.1.2	Modèle ellipsoïdique	3
3	Calcul des coordonnées	4
3.1	Modèle sphérique	4
3.1.1	Calcul direct	4
3.1.2	Calcul indirect	4
3.2	Le modèle ellipsoïdique	5
3.2.1	Le calcul direct	5
3.2.2	Le calcul inverse	5
3.3	Calcul de la longueur de la méridienne d'un ellipsoïde de révolution	6
3.3.1	Résolution de l'équation $L(\varphi) = L_1$	8
3.3.2	Calculs d'erreurs	9
A	Le calcul des angles des feuilles à l'échelle 1/50 000	10
B	La désorientation entre les axes des coordonnées Lambert Tunisie et Lambert Algérie	10

La Représentation de Bonne

ABDELMAJID BEN HADJ SALEM, INGÉNIEUR
GÉOGRAPHE GÉNÉRAL ¹

Résumé

Cette note donne les éléments mathématiques de la représentation de Bonne utilisée dans l'ancienne cartographie à l'échelle 1/50 000 en Tunisie et en Algérie.

Mots-clefs : Représentation de Bonne, modèle sphérique, modèle ellipsoïdique, rayon de courbure de la méridienne d'une ellipse, cartes (type ancien) à l'échelle 1/50 000.

1 L'origine du découpage de la cartographie 1/50 000 type ancien

Le découpage de la cartographie à l'échelle 1/50 000 type ancien utilisait le découpage obtenu par la représentation de Bonne ² (origine $\varphi_0 = 39 \text{ gr}$, λ_0 = longitude de Paris), avec modèle ellipsoïdique. Nous présentons ci-dessous les éléments mathématiques de cette représentation utilisée dans l'ancienne cartographie à l'échelle 1/50 000 en Tunisie et en Algérie.

Soit O l'image du point origine de la représentation de Bonne. L'axe des Y dirigé vers le Nord est l'image du méridien origine λ_0 . L'axe des X dirigé vers l'Est est tangent à l'image du parallèle origine $\varphi_0 = 39 \text{ gr}$ (arc de cercle).

2 Définition et Propriétés de la Représentation de Bonne

Définition 2.1. *La représentation de Bonne est une représentation équivalente c'est-à-dire elle conserve les surfaces.*

Propriété 2.2. *Les images des parallèles sont des arcs de cercles, celles des méridiens des droites non concourantes. La représentation est dite "mériconique".*

1. Email : abenhadsalem@gmail.com .

2. **Rigobert Bonne** (1727-1795) : ingénieur, mathématicien et cartographe français.

Propriété 2.3. Les longueurs sont conservés sur le méridien origine et sur les parallèles ou encore le méridien origine et les parallèles sont automécoïques (Fig.1).

Propriété 2.4. L'image d'un cercle de rayon unité est une ellipse.

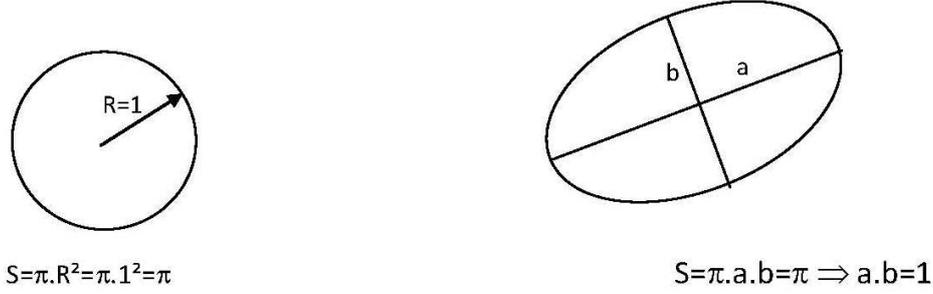


Fig. 1: Image du cercle

2.1 Formules

2.1.1 Modèle sphérique

Considérons un modèle sphérique (sphère de rayon R_0). A un point $M(\varphi, \lambda)$, on lui correspond son image m . Les coordonnées de m dans $X\omega_0 Y$ sont :

$$\left. \begin{aligned} X &= sm \cdot \sin\theta = R \cdot \sin\theta \\ Y &= s\omega_0 - R \cdot \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

mais $s\omega_0 = S\Omega_0 = R_0 \cdot \cotg\varphi_0$, d'où :

$$X = R \cdot \sin\theta \quad (2)$$

$$Y = R_0 \cdot \cotg\varphi_0 - R \cdot \cos\theta \quad (3)$$

Pour $\theta = 0$ ou $\lambda = \lambda_0$, on a :

$$Y = R_0 \cotg\varphi_0 - R \quad (4)$$

et

$$Y = \omega_0 m_0 = R_0(\varphi - \varphi_0) \implies R = R_0(\cotg\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)) \quad (5)$$

Tout parallèle est automécoïque (le module linéaire =1), donc $M_0M = m_0m$, d'où :

$$R_0 \cos\varphi \cdot (\lambda - \lambda_0) = R \cdot \theta \implies \theta = \frac{R_0(\lambda - \lambda_0) \cos\varphi}{R} \quad (6)$$

2.1.2 Modèle ellipsoïdique

Considérons maintenant un modèle ellipsoïdique. Les formules (1) restent inchangées :

$$\begin{aligned} X &= R \sin \theta \\ Y &= s \omega_0 - R \cos \theta \end{aligned}$$

avec :

$$s \omega_0 = N_0 \cot g \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_0}} \cdot \cot g \varphi_0 \quad (7)$$

où a et e^2 sont respectivement le demi-grand axe et le carré de la première excentricité de l'ellipsoïde de référence à savoir l'ellipsoïde de Clarke 1880 Français³ et :

$$R = sm = sm_0 = s \omega_0 - \omega_0 m_0 \quad (8)$$

or $\omega_0 m_0$ est la longueur de la méridienne entre les latitudes φ_0 et φ , soit :

$$R = s \omega_0 - \int_{\varphi_0}^{\varphi} \rho(t) dt = N_0 \cot g \varphi_0 + \int_{\varphi}^{\varphi_0} \rho(t) dt \quad (9)$$

où ρ est le rayon de courbure de la méridienne qui vaut :

$$\rho(\varphi) = a(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-3/2} \quad (10)$$

Posons :

$$L(\varphi) = \int_0^{\varphi} \rho(t) dt \quad (11)$$

Alors R s'exprime comme :

$$R = N_0 \cot g \varphi_0 + L(\varphi_0) - L(\varphi) \quad (12)$$

Pour avoir θ , on utilise la relation que $M_0 M = m_0 m$, soit :

$$r(\lambda - \lambda_0) = R \cdot \theta \implies \theta = \frac{r(\lambda - \lambda_0)}{R}$$

mais $r = N \cos \varphi$, d'où :

$$\theta = \frac{N(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R(\varphi)} \quad (13)$$

3. $a = 6378249,20 \text{ m}; e^2 = 0,0068034877$.

3 Calcul des coordonnées

3.1 Modèle sphérique

3.1.1 Calcul direct

Ayant (φ, λ) , on calcule :

$$R = R_0(\cotg\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)) \quad (14)$$

$$et \quad \theta = \frac{(\lambda - \lambda_0)\cos\varphi}{\cotg\varphi_0 - (\varphi - \varphi_0)} \quad (15)$$

$$d'o \quad X = R.\sin\theta \quad (16)$$

$$Y = R_0\cotg\varphi_0 - R.\cos\theta \quad (17)$$

3.1.2 Calcul indirect

On donne (X, Y) , l'équation (17) donne $R.\cos\theta = R_0\cotg\varphi_0 - Y$.

Utilisant (16), on a :

$$tg\theta = \frac{X}{R_0.\cotg\varphi_0 - Y} \quad (18)$$

d'où :

$$\theta = \text{Arctg}\left(\frac{X}{R_0.\cotg\varphi_0 - Y}\right) \quad (19)$$

L'équation (16) donne :

$$R = \frac{X}{\sin\theta} \quad (20)$$

Et utilisant (14), on a :

$$\varphi = \cotg\varphi_0 + \varphi_0 - \frac{R}{R_0} \quad (21)$$

et de (13), on obtient :

$$\lambda = \theta.\frac{R}{R_0\cos\varphi} + \lambda_0 \quad (22)$$

3.2 Le modèle ellipsoïdique

3.2.1 Le calcul direct

Ayant (φ, λ) et le modèle ellipsoïde concerné, on veut calculer les coordonnées planimétriques (X, Y) de la représentation plane de Bonne. Utilisant

respectivement les équations (12) et (13), on obtient R et θ :

$$R = N_0 \cotg \varphi_0 + L(\varphi_0) - L(\varphi)$$

$$\theta = \frac{N(\lambda - \lambda_0) \cos \varphi}{R(\varphi)}$$

D'où :

$$X = R \sin \theta \quad (23)$$

$$Y = N_0 \cotg \varphi_0 - R \cos \theta \quad (24)$$

3.2.2 Le calcul inverse

On donne (X, Y) , comme dans le cas du modèle sphérique, on a :

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{X}{N_0 \cotg \varphi_0 - Y} \implies \theta = \operatorname{Arctg} \left(\frac{X}{N_0 \cotg \varphi_0 - Y} \right) \quad (25)$$

$$R(\varphi) = \frac{X}{\sin \theta} \quad (26)$$

Le calcul de la latitude géodésique φ se fait en calculant premièrement la valeur numérique de :

$$L(\varphi) = L_1 = N_0 \cotg \varphi_0 + L(\varphi_0) - R \quad (27)$$

puis, on résout en φ l'équation $L(\varphi) = L_1$ (voir le paragraphe ci-dessous). On déduit par la suite la valeur de la longitude géodésique λ par :

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\theta \cdot R}{N \cos \varphi} \quad (28)$$

3.3 Calcul de la longueur de la méridienne d'un ellipsoïde de révolution

Soit (E) un ellipsoïde de révolution défini par ses paramètres :

a : le demi-grand axe,

e : la première excentricité.

L'expression de la longueur de la méridienne entre l'équateur et un point M de latitude géodésique φ est donnée par :

$$L(\varphi) = \int_0^\varphi \rho(u) du \quad (29)$$

avec :

$$\rho = \rho(u) = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}}$$

ρ est le rayon de courbure de la méridienne. Posons :

$$I(\varphi) = \int_0^\varphi (1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} du \quad (30)$$

L'équation (29) s'écrit :

$$L(\varphi) = a(1 - e^2)I(\varphi) \quad (31)$$

L'intégrale (30) est une intégrale, dite elliptique, n'est pas exprimée par une formule finie. Pour la calculer, on fait l'usage d'un développement limité de l'expression $(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise la formule :

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-1+p)}{p!}x^p + o(x^{p+1})$$

avec $|x| < 1$, q est un rationnel et $p!$ désigne factoriel p soit $p(p-1)\dots 3.2.1$. Comme $|e^2 \sin^2 u| < 1$, on a donc à l'ordre 12 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 u)^{\frac{3}{2}}} &= (1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3}{2}e^2 \sin^2 u + \frac{15}{8}e^4 \sin^4 u + \\ &\frac{35}{16}e^6 \sin^6 u + \frac{315}{128}e^8 \sin^8 u + \frac{693}{256}e^{10} \sin^{10} u + \frac{3003}{1024}e^{12} \sin^{12} u \end{aligned} \quad (32)$$

Pour pouvoir calculer les intégrales du type :

$$\int_0^\varphi \sin^{2p} u du$$

on va exprimer les termes $\sin^p u$ en fonction des lignes trigonométriques mul-

tiples de l'argument u . Ce qui donne :

$$\sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2}$$

$$\sin^4 u = \frac{3}{8} - \frac{\cos 2u}{2} + \frac{\cos 4u}{8}$$

$$\sin^6 u = \frac{5}{16} - \frac{15\cos 2u}{32} + \frac{13\cos 4u}{16} - \frac{\cos 6u}{32}$$

$$\sin^8 u = \frac{35}{128} - \frac{17\cos 2u}{16} + \frac{7\cos 4u}{32} - \frac{\cos 6u}{16} + \frac{\cos 8u}{128}$$

$$\sin^{10} u = \frac{63}{256} - \frac{105\cos 2u}{256} + \frac{15\cos 4u}{64} - \frac{45\cos 6u}{512} + \frac{5\cos 8u}{256} - \frac{\cos 10u}{512}$$

$$\sin^{12} u = \frac{231}{1024} - \frac{99\cos 2u}{256} + \frac{495\cos 4u}{2048} - \frac{55\cos 6u}{512} + \frac{33\cos 8u}{1024} - \frac{3\cos 10u}{512} + \frac{\cos 12u}{2048} \quad (33)$$

L'équation (32) s'écrit en utilisant les expressions de droite de (33) :

$$(1 - e^2 \sin^2 u)^{-\frac{3}{2}} = A_0 + A_2 \cos 2u + A_4 \cos 4u + A_8 \cos 8u + A_{10} \cos 10u + A_{12} \cos 12u \quad (34)$$

En intégrant (34) entre 0 et φ et après multiplication par le coefficient $a(1 - e^2)$, on trouve l'expression ci-dessous de la longueur de la méridienne :

$$L(\varphi) = a(1 - e^2) \cdot (C_0 \varphi + C_2 \sin 2\varphi + C_4 \sin 4\varphi + C_6 \sin 6\varphi + C_8 \sin 8\varphi + C_{10} \sin 10\varphi + C_{12} \sin 12\varphi) \quad (35)$$

où les coefficient A_k vérifient :

$$\begin{aligned} C_0 &= A_0 & C_2 &= \frac{A_2}{2} & C_4 &= \frac{A_4}{4} & C_6 &= \frac{A_6}{6} \\ C_8 &= \frac{A_8}{8} & C_{10} &= \frac{A_{10}}{10} & C_{12} &= \frac{A_{12}}{12} \end{aligned} \quad (36)$$

avec :

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} \\
C_2 &= -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} \\
C_4 &= \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} \\
C_6 &= -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{315}{12288}e^8 - \frac{31185}{786432}e^{10} - \frac{165165}{3145728}e^{12} \\
C_8 &= \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} \\
C_{10} &= -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} \\
C_{12} &= \frac{1001}{8388608}e^{12}
\end{aligned} \tag{37}$$

Posons :

$$J(\varphi) = a(1 - e^2) \sum_{n=1}^{n=6} C_{2n} \sin 2n\varphi \tag{38}$$

Alors, on obtient :

$$L(\varphi) = a(1 - e^2)C_0\varphi + J(\varphi) \tag{39}$$

3.3.1 Résolution de l'équation $L(\varphi) = L_1$

On peut écrire l'équation $L(\varphi) = L_1$ comme suit :

$$\varphi = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1 - e^2)C_0} \tag{40}$$

Posons :

$$F(\varphi) = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} - \frac{J(\varphi)}{a(1 - e^2)C_0} \tag{41}$$

Alors, on a à résoudre :

$$\varphi = F(\varphi) \tag{42}$$

La résolution de (42) se fait par itérations comme suit :

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{a(1 - e^2)C_0} \tag{43}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_1 - \frac{J(\varphi_1)}{a(1-e^2)C_0} \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_{j+1} &= \varphi_1 - \frac{J(\varphi_j)}{a(1-e^2)C_0} \end{aligned}$$

On fixe un nombre $\epsilon \ll 1$. Si $|\varphi_{j+1} - \varphi_j| < \epsilon$, alors $\varphi = \varphi_{j+1} = \varphi_j$, sinon on itère le processus. En prenant $\epsilon = 1,57 \times 10^{-10}$, on obtient la précision du *mm*. La résolution de (42) par itérations est convergente car on montre que $|F'(\varphi)| < 1$.

3.3.2 Calculs d'erreurs

Jusqu'à quel ordre faut-il s'arrêter dans le développement limité de l'expression de la longueur de la méridienne? Ecrivons (31) sous la forme :

$$L(\varphi) = a(1-e^2)I(\varphi) = a(1-e^2) \sum_{i=0}^{\varphi} \int_0^{\varphi} a_i \sin^{2i} t dt \quad (44)$$

On s'arrête à l'ordre $i - 1$ tel que :

$$|a(1-e^2)a_i \int_0^{\varphi} \sin^{2i} t dt| < 10^{-4} m \quad (45)$$

soit :

$$\begin{aligned} |a(1-e^2)a_i \int_0^{\varphi} \sin^{2i} t dt| &\leq |a(1-e^2)a_i \int_0^{\varphi} dt| \leq a(1-e^2)a_i \frac{\pi}{2} < 10^{-4} m \\ &\implies a_i < \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)} \quad (46) \end{aligned}$$

Numériquement pour $i = 10$, on trouve que $a_5 = \frac{693}{256} e^{10} > \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)}$. Par contre pour $i = 6$, on obtient que $a_6 = \frac{3003}{1024} e^{12} < \frac{2 \times 10^{-4}}{\pi a(1-e^2)}$. Donc on garde que les coefficients de e^2, e^4, e^6, e^8 et e^{10} de (32).

Références

1. **Abdelmajid Ben Hadj Salem.** 2017. *Eléments de Géodésie et de la Théorie des Moindres Carrés*. ISBN 978-3-330-96843-1. Edition Nour-Publishing. 365 pages.

2. **Abdelmajid Ben Hadj Salem.** 2018. *Eléments de Cartographie Mathématique.* version2. 143 pages.

A Le calcul des angles des feuilles à l'échelle 1/50 000

Le découpage résulte d'un quadrillage rectangulaire de dimensions $L = 32\text{ km}$ et $\ell = 20\text{ km}$. Les coordonnées d'un sommet d'une feuille dans la représentation de Bonne sont (Fig.2) :

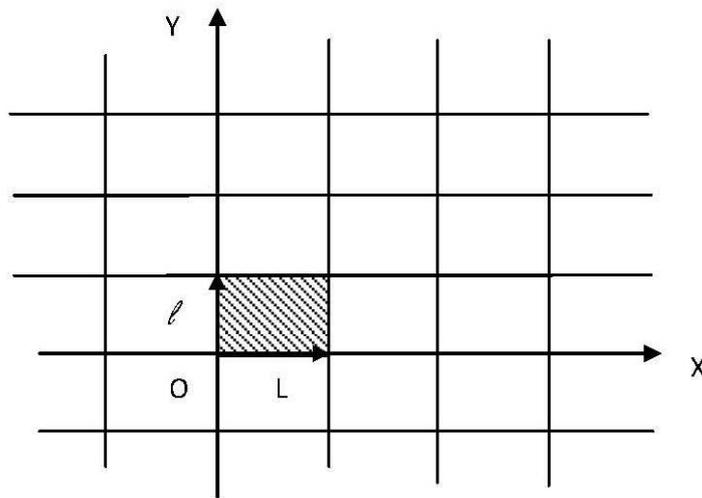


Fig. 2: Représentation d'une feuille à l'échelle 1/50000

$$\left. \begin{array}{l} X = n.L \\ Y = m.\ell \end{array} \right\} \quad (47)$$

où n et m sont des entiers positifs.

A partir de l'équation (47), on calcule les coordonnées géographiques correspondantes φ, λ . Ces coordonnées sont exprimées dans le système Voirol. On obtient alors les coordonnées rectangulaires (X_A, Y_A) Lambert Algérie (Nord ou Sud) en appliquant à φ, λ les formules du Lambert Algérie.

Quant aux coordonnées des angles de feuilles (X_T, Y_T) Lambert Tunisie (Nord ou Sud), elles sont calculées en utilisant les formules du Lambert Tunisie à $\varphi' = \varphi - \Delta\varphi$ et à $\lambda' = \lambda - \Delta\lambda$ où $\Delta\varphi, \Delta\lambda$ sont les corrections qu'il faut ajouter à φ, λ pour les transformer dans le système géodésique tunisien Carthage34.

B La désorientation entre les axes des coordonnées Lambert Tunisie et Lambert Algérie

Sur certaines cartes à l'échelle 1/50 000, sont dessinés 2 quadrillages de coordonnées relatifs respectivement au Lambert Tunisie (système Carthage34) et au Lambert Algérie (Système Voirol). Ces deux quadrillages présentent une désorientation angulaire non négligeable.

En faisant abstraction des translations et en négligeant les différences entre les systèmes Carthage34 et Voirol, on a le schéma suivant pour le Lambert Nord (Fig. 3).

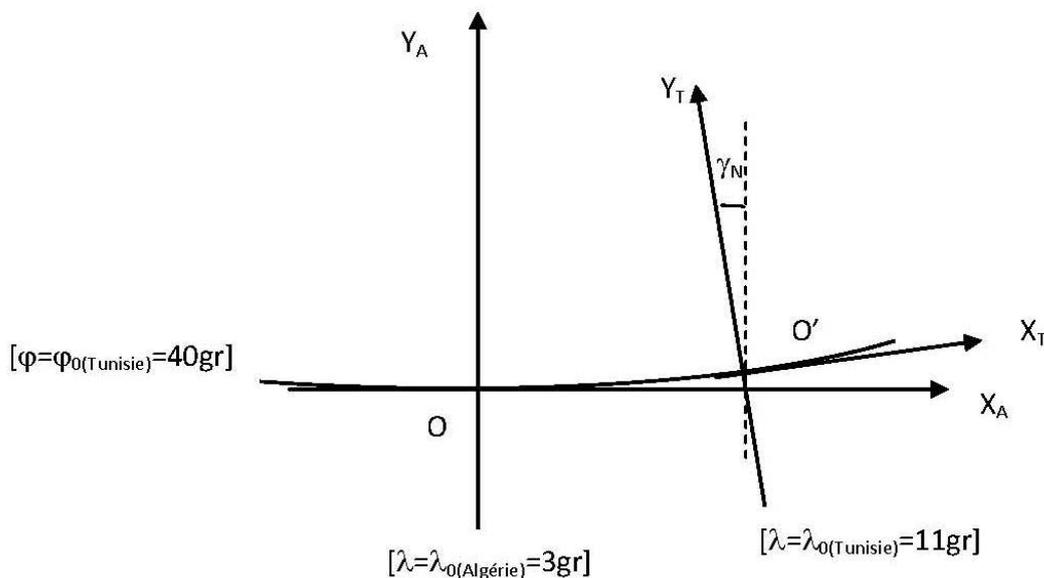


Fig. 3: La désorientation entre les axes des systèmes planimétriques Lambert Tunisie et Lambert Algérie

La désorientation des axes est la valeur de la "convergence des méridiens" au point O' , soit pour le Lambert Nord :

$$\gamma_N = (\lambda_{OT} - \lambda_{OA}) \sin \varphi_0 = (11 - 3) \sin(40 \text{ gr}) = 4,7023 \text{ gr} \quad (48)$$

et pour le Lambert Sud, on obtient :

$$\gamma_S = (\lambda_{OT} - \lambda_{OA}) \sin \varphi_0 = (11 - 3) \sin(37 \text{ gr}) = 4,7023 \text{ gr} \quad (49)$$