11D04

Краткое доказательство гипотезы Коллатца

Султан К.С.
г. Алматы, Казахстан
e-mail: kurmetsultan@mail.ru

Абстракт: В статье приводиться краткое доказательство гипотезы Коллатца. Показано, что эффективнее начать расчет функции Коллатца $C(n)$ с нечетных чисел $6m \pm 1$. Далее доказано, что если на основе последовательности чисел $6n \pm 1$ провести расчет по формуле $((6n \pm 1) \cdot 2^q - 1)/3$, увеличивая на каждой итерации показатель степени двойки на 1, то каждому числу вида $6n \pm 1$ будут соответствовать множество, элементами которого является числа вида $3t$, $6m-1$ и $6m+1$. При этом все множества являются непересекающимся. Затем показано, что если построить микро графы чисел, путем соединения чисел $6n \pm 1$ с их элементами множества $3t$, $6m-1$ и $6m+1$, после чего объединить микро графы совмещением равных чисел $6n \pm 1$ и $6m \pm 1$, то образуется древовидный фрактальный граф чисел. Древовидный фрактальный граф чисел, каждая вершина которого соответствует числам вида $6m \pm 1$, является доказательством гипотезы Коллатца, так как любая его вершина связана с конечной вершиной, связанной с единицей.

Ключевые слова: гипотеза Коллатца, проблема $3n+1$, сиракузская проблема, доказательство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза Коллатца, известная также как проблема $3n + 1$, сиракузская проблема, является одной из нерешенных проблем математики. Можно отметить следующие работы посвященные проблеме $3n + 1$ [1, 2, 3, 4, 5].

Функция Коллатца $C(n)$ определяется на натуральных числах следующим образом:

$$C(n) = \begin{cases} n/2, & \text{если} \quad n - \text{четное}, \\ 3n+1, & \text{если} \quad n - \text{нечетное}. \end{cases} \tag{1}$$

Для объяснения гипотезы Коллатца, берем любое натуральное число n, если оно четное, то делим его на 2, а если нечетное, то умножаем на 3 и прибавляем 1 (получаем $3n + 1$). Над полученным числом выполняем те же самые действия, и так далее. Гипотеза Коллатца заключается в том, что какое бы начальное число n ни взяли, рано или поздно мы получим единицу.

Ранее в статье [6] автором было представлено доказательство гипотезы Коллатца, основанное на закономерностях чисел вида $6n \pm 1$, образуемых в результате расчета функции Коллатца. В работе [6] было много таблиц, рисунков, определений, примеров и пояснений, что создавали трудности восприятию материала. Учитывая это, в данной работе приводиться укороченный вариант доказательства гипотезы Коллатца.

2. СТАРТОВОЕ ЧИСЛО

По условию гипотезы расчет можно начать с любого натурального числа больше 1. Тем не менее, очевидно, что эффективнее стартовать с нечетного числа, так как любое четное число при делении на 2 (один или несколько раз) превратиться в нечетное число.

Поскольку нечетные числа делятся на кратные и некратные на число 3, то возникает следующий вопрос:

Вопрос 1. С каких нечетных чисел эффективнее начать расчет?

Известно, что все натуральные числа, за исключением 1, можно представить по формулам: 1) $3t$; 2) $3t - 1$; 3) $3t + 1$, где $t = 1, 2, 3 \dots$.

При этом все нечетные числа имеющие вид $3t - 1$; $3t + 1$, т.е. числа образующие при четном множителе t соответствуют числам вида $6m - 1$; $6m + 1$, где $m = 1, 2, 3 \dots$.

Очевидно, что в результате расчета функции Коллатца из любого натурального числа образуется число вида $3t + 1$, которое может быть или четным, или нечетным числом. Если число, имеющий вид $3t + 1$, является нечетным, то, безусловно, оно будет числом вида $6m + 1$. А если число вида $3t + 1$ является четным числом, то, при делении на 2 (один или несколько раз) до получения нечетного числа, образуется число вида $6m - 1$ или $6m + 1$. Это объясняется просто – чтобы получить из четного числа число кратное 3 путем деления первого на степень двойки, четное число должно быть кратным 3.

Таким образом, можно утверждать, что все натуральные числа кратные 3 через одну операцию $3m+1$, и деления на определенные степени двойки, в случае образования четного числа, превращается в нечетные числа имеющие виды $6n-1$ и $6n+1$. Исключением являются числа, которые после операции $3m+1$ будут равными степени двойки. Оформим данный факт в виде теоремы.

Теорема 1. Если любое натуральное число кратное 3 умножить на 3 и прибавить 1, затем полученное четное число делить на определенную степень 2 до получения целого числа, то это число будет иметь вид $6n-1$ *или* $6n+1$.

Из теоремы 1 следует, что эффективнее начать расчет функции Коллатца с нечетных чисел имеющих вид $6m-1$ или $6m+1$.

Примечание. Разные буквы m *и* n *используется в обозначениях чисел одинакового вида* $6m\mp 1$ *и* $6n\mp 1$ *только для подчеркивания статуса соответственно входящего и исходящего числа в расчетах.*

3. СТРУКТУРА И ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЧИСЕЛ

Из логики следует, что если провести обратный расчет, то должно быть получены числа, из которых при прямом расчете получиться стартовое число. Для подтверждения этого предположения проведем расчеты по формуле

$$N=((6n\mp 1)\cdot 2^q-1)/3\,,\quad \text{где } q=0,1,2,3\,.... \qquad (2)$$

Расчеты по формуле (2) на основе последовательности чисел $6n\mp 1$ показывают, что каждому члену последовательности будут соответствовать бесконечно много чередующихся целых чисел вида: $3t$, $6m+1$, $6m-1$.

Из формулы (2) следует, что целые числа по формуле (2) образуются только в том случае, если из выражения в скобке образуются числа кратные 3. С учетом этого составим следующее уравнение

$$(6n \mp 1) \cdot 2^q - 1 = 3t. \quad (3)$$

Отсюда получим

$$2^q = (3t + 1)/(6m \mp 1). \quad (4)$$

Поскольку левая часть уравнения (4) четное число, а знаменатель правой части нечетное число, то уравнение (4) может иметь натуральные решения только в том случае, если числитель будет четным числом.

Числа вида $3t + 1$ будет четными, если t будет нечетным числом. Как было сказано ранее, нечетные числа могут быть трех видов: $3t,\ 6m + 1$, $6m - 1$, поэтому при расчете по формуле (2) такие числа будут чередоваться.

Это важный результат, поэтому его также оформим в виде теоремы.

Теорема 2. Если на основе каждого члена непрерывной последовательности чисел имеющих вид $6n \mp 1$ *провести расчет по формуле* $((6n \mp 1) \cdot 2^q - 1)/3$, *увеличивая на каждой итерации показатель степени двойки на 1, то каждому числу вида* $6n \pm 1$ *будет соответствовать упорядоченное множество чисел, элементами которого являются чередующийся числа вида* $3t,\ 6m - 1$ *и* $6m + 1$, *где* $t, m, n = 1, 2, 3.$

Таким образом, если провести расчет по формуле (2), то каждый член последовательности чисел вида $6n \mp 1$ образуют множество чисел K_i, состоящих из элементов, соответствующих числам вида $3t,\ 6m + 1$ и $6m - 1$:

$$K_i = \{k |\ k = 6n \mp 1\ , 3t;\ \ n, t \in N\}\ . \quad (5)$$

Другими словами, при обратном расчете числа вида $6n \mp 1$ расщепляются на три числа вида $3t,\ 6m+1$ и $6m-1$. С увеличением степени двойки количество таких комплектов, состоящих из трех целых чисел, также будет увеличиваться, т.е. их бесконечно много.

Схема расщепления числа вида $6n \mp 1$ на три числа вида $3t,\ 6m+1$ и $6m-1$, названная микро графом, показано на рисунке 1.

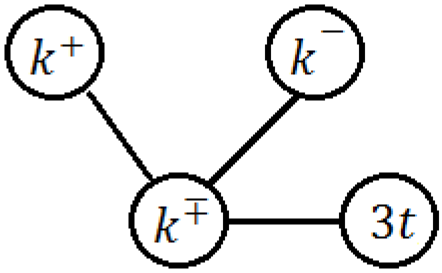

Рисунок 1. Микро граф чисел вида $k^\mp = 6n \mp 1$

Примечание: $k^- = 6m-1,\ k^+ = 6m+1,\ k^\mp = 6n \mp 1.$

Отметим, что на рисунке 1 показано только один комплект трех целых чисел вида $3t,\ 6m+1$ и $6m-1$, образуемых при расщеплении числа вида $6n \mp 1$, а их количество зависит от степени двойки, поэтому, чем больше граничное значение показателя степени двойки, тем больше будет комплектов из трех чисел.

Не сложно понять, что множества, элементами которого являются числа, полученные по формуле (2), соответствующие каждому числу вида $6n \mp 1$, являются непересекающимся множествами, т.е. элементы множества одного числа вида $6n \mp 1$ не будет повторяться во множестве любого другого числа такого же вида. Тем не менее, ниже математически покажем невозможность повтора чисел в разных множествах.

Пусть два числа вида $6m \mp 1$ образованные из двух разных чисел вида $6n \mp 1$ в результате расчета по формуле (2) будут равны, т.е.

$((6n_1 \mp 1) \cdot 2^{q_1} - 1)/3 = ((6n_2 \mp 1) \cdot 2^{q_2} - 1)/3.$

Из этого уравнения после сокращения получим $(6n_1 \mp 1) \cdot 2^{q_1} = (6n_2 \mp 1) \cdot 2^{q_2}$. Отсюда имеем следующее соотношение

$$\frac{(6n_1 \mp 1)}{(6n_2 \mp 1)} = \frac{2^{q_2}}{2^{q_1}}.$$

Очевидно, что вышеприведенное соотношение не имеет решений в натуральных числах, так как левая часть уравнения, если даже она будет целым числом, то будет нечетным, а правая часть уравнения всегда будет четным числом.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ

Так как две вершины микро графа любого числа вида $6n \mp 1$ являются числами вида $6m \mp 1$, а третья вершина соответствует числу кратному 3, то имеется возможность объединить микро графы путем совмещения вершин с равными числами вида $6m \mp 1$ и $6n \mp 1$.

Если объединить микро графы чисел вида $6n \mp 1$ в один граф, с учетом чисел на вершинах микро графов, а также показав направление образования чисел по условию функции Коллатца, то получиться древовидный ориентированный граф, похожий на граф, показанный на рисунке 2.

Древовидный ориентированный граф (рисунок 2), который состоит из всевозможных путей чисел образуемых при расчете функции Коллатца, является классическим примером фрактала.

Отметим, что на рисунке 2 каждый микро граф образован только из одного комплекта трех целых чисел вида $3t,\ 6m + 1$ и $6m - 1$, а если показать другие комплекты трех чисел, то граф получиться многомерным.

Древовидный ориентированный граф, вершины которых соответствуют числам вида $6m \mp 1$, является доказательством верности гипотезы Коллатца, так как любая его вершина связана с конечной вершиной, которая имеет непосредственную связь с единицей.

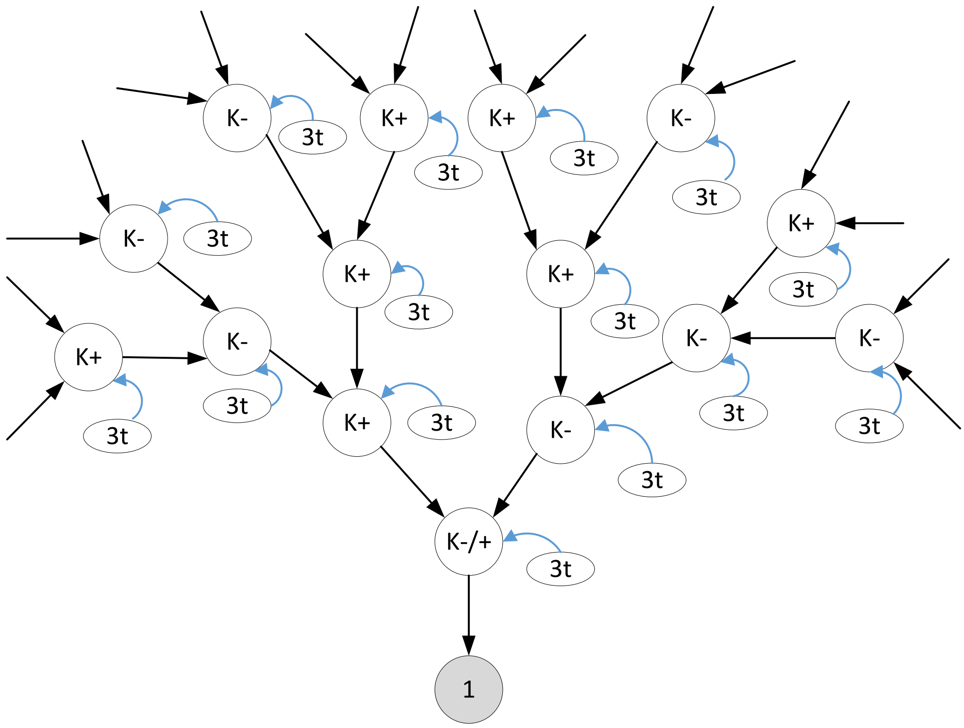

Рисунок 2. Древовидный ориентированный граф

Примечание: $k- = 6m - 1$, $k+ = 6m + 1$, $k\mp = 6n \mp 1$.

Из древовидного фрактального графа, показанного на рисунке 2, следует, что каждая вершина имеет свое число кратное 3, что соответствует теореме 2. Вместе с тем, числа кратные 3, как показано на рисунке 2, не оказывают влияние на формирования структуры графа. Если начать расчет с чисел кратных 3, то путь стыкуются с вершиной, соответствующей числу вида $6m \mp 1$, а далее путь расчета будет продолжена по структуре графа.

Следует подчеркнуть, что числа соответствующие вершинам одного графа не повторяются в других графах, т.е. каждый граф уникален, хотя формы графов одинаковые.

Как видно из рисунка 2, конечная вершина графа, имеющая прямую связь единицей, имеет особое значение, так как она является основой графа. В этой связи возникает следующий вопрос:

Вопрос 2. Какие числа вида $6m \mp 1$ *могут быть конечной вершиной графа и сколько таких чисел существует?*

Чисел вида $6m \mp 1$, которые являются конечной вершиной графа, т.е. нечетных чисел вида $6m \mp 1$ при умножении которых на 3 и прибавлении 1 образуется четное число равное степени двойки, бесконечно много.

Такие числа соответствуют четным показателям степени двойки q (начиная с $q = 4$), за исключением четных показателей степени кратных 3. Таких чисел можно вычислить по формуле

$$6m \mp 1 \ = (2^q - 1)/3, \tag{6}$$

где $q \geq 4$ – четное число, не кратное числу 3.

Например, если числа 5, 85 и 341, которые соответствуют числам вида $6m \mp 1$, умножить на 3 и прибавить 1, то образуются четные числа 16, 256 и 1024, которые являются степенями двойки.

Поскольку чисел вида $6m \mp 1$ соответствующих конечной вершине графа бесконечно много, то количество древовидных графов также бесконечно много, т.е. древовидные графы образуют лес графов.

Таким образом, можно утверждать, что гипотеза Коллатца верна, и она доказана.

Ссылки

[1] L. Collatz, On the motivation and origin of the (3n + 1) – Problem, J. Qufu Normal University, Natural Science Edition, 12(3) (1986) 9–11.

[2] J. C. Lagarias, The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem, American Mathematical Society, 2010.

[3] J. C. Lagarias, The 3x + 1 problem: An annotated bibliography (1963–1999), http://arxiv.org/abs/math/0309224v13.

[4] J. C. Lagarias, The 3x + 1 Problem: An Annotated Bibliography, II (2000–2009), http://arxiv.org/abs/math/0608208v6.

[5] R. E. Crandall, On the “3x+1” Problem, Math. Comp., 32(144) (1978) 1281–1292.

[6] K. Sultan, The proof of the Collatz conjecture, http://vixra.org/abs/1708.0177.