
Хмельник С.И.

Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне

Оглавление

- 1. Введение
- 2. Решение уравнений Максвелла
- 3. Потоки энергии
- 4. Заключение
- Приложение 1
- Приложение 2
- Таблицы
- Литература

Аннотация

Отмечается, что известное решение для сферической электромагнитной волны в дальней зоне не удовлетворяет закону сохранения энергии (она сохраняется только в среднем), одноименные (по координатам) электрические и магнитные напряженности синфазны, выполняется только одно из системы уравнений Максвелла. Предлагается решение, свободное от этих недостатков.

1. Введение

В [1] рассмотрена цилиндрическая электромагнитная волна. Ниже рассматривается сферическая электромагнитная волна вдали от вибратора – в т.н. дальней зоне, где продольными (направленными вдоль радиуса) электрической и магнитной напряженностями можно пренебречь. Основные недостатки известного решения (см. приложение 1) состоят в том, что

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем (по времени),
2. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
3. в системе уравнений Максвелла в известном решении выполняется только одно уравнение из восьми.

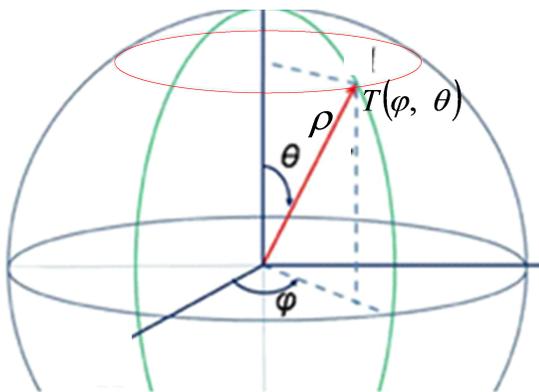


Рис. 1.

2. Решение уравнений Максвелла

На рис. 1 показана система сферических координат (ρ, θ, φ) . В табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора \mathbf{E} в этих координатах [2]. Здесь и далее

E - напряженность электрического поля,

H - напряженность магнитного поля,

μ - абсолютная магнитная проницаемость,

ε - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов имеют вид, приведенный в табл. 2. Далее мы будем искать решение при $E_\rho = 0$, $H_\rho = 0$ и в виде функций E , H , представленных в табл. 3, где функцию $g(\theta)$ и функции вида $E_{\varphi\rho}(\rho)$ предстоит вычислить. Будем полагать, что напряженности E , H не зависят от аргумента φ . При этих условиях преобразуем табл. 1 в табл. 3а. Далее подставим функции E , H из табл. 3 в табл. 3а. Тогда получим табл. 4.

Подставляя выражения для роторов и дивергенций из табл. 4 в уравнения Максвелла (см. табл. 2), дифференцируя по времени и сокращая общие множители, получаем новую форму уравнений Максвелла – см. табл. 5.

Рассмотрим табл. 5. Из строки 2 следует:

$$\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

$$\chi H_{\varphi\rho} + \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} = 0. \quad (3)$$

Следовательно,

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (4)$$

$$H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\theta\rho}, \quad (5)$$

где $h_{\varphi\rho}$ – некоторая константа. Аналогично, из строк 3, 5, 5 следует соответственно:

$$H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (6)$$

$$H_{\theta\rho} = \frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\varphi\rho}, \quad (7)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (8)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\theta\rho}, \quad (9)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (10)$$

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\varphi\rho}. \quad (11)$$

Из (5) следует, что

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\chi c}{\omega\varepsilon} H_{\varphi\rho}, \quad (12)$$

а из сравнения (11) и (12) следует, что

$$\frac{\omega\mu}{\chi c} = \frac{\chi c}{\omega\varepsilon}$$

или

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (13)$$

Эта же формула следует из сравнения (7) и (9).

Из (5, 13) следует, что

$$H_{\varphi\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\theta\rho}, \quad (14)$$

а из (14, 4, 11, 12) следует, что

$$h_{\varphi\rho} = -e_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

Аналогично, из (7, 13) следует, что

$$H_{\theta\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\varphi\rho}, \quad (16)$$

а из (16, 6, 8, 12) следует, что

$$h_{\theta\rho} = -e_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) следует, что

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q, \quad (18)$$

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (19)$$

Далее замечаем, что строки 1, 4, 7 и 8 совпадают, откуда следует, что функция $g(\theta)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0. \quad (20)$$

В приложении 2 показано, что решением этого уравнения является функция

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}, \quad (20a)$$

где A – константа. Заметим, что в известном решении $g(\theta) = \sin(\theta)$ – см. приложение 1. Легко убедиться, что такая функция не удовлетворяет уравнению (20).

Следовательно,

в известном решении не выполняются 4 уравнения Максвелла с выражениями $\operatorname{rot}_\rho(E)$, $\operatorname{rot}_\rho(H)$, $\operatorname{div}(E)$, $\operatorname{div}(H)$.

Итак, решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне имеет вид напряженностей, представленных в табл. 3, где

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho} \quad (21)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu} \quad (\text{см. 13}), \quad g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|} \quad (\text{см. 20a})$$

и константы $h_{\varphi\rho}, h_{\theta\rho}, e_{\varphi\rho}, e_{\theta\rho}$ удовлетворяют условиям

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = q \quad (\text{см. 18}), \quad \frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (\text{см. 19})$$

Из табл. 3 следует, что

одноименные (по координатам φ и θ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.

Это соответствует экспериментальной электротехнике. На рис. 2 показаны векторы напряженностей в сферической системе координат.

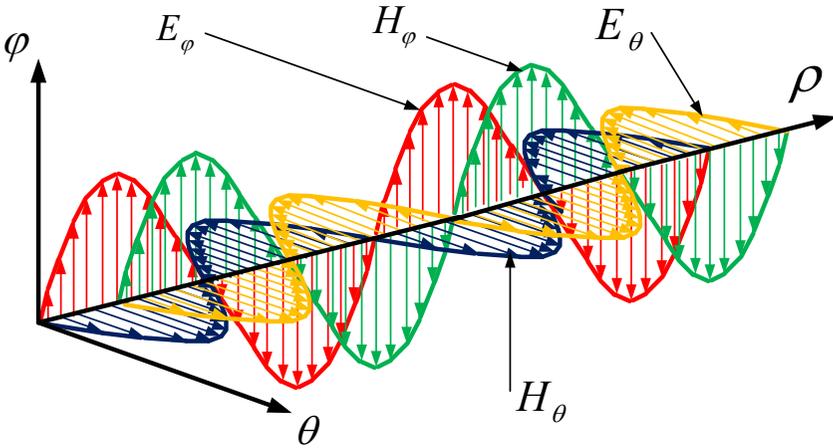


Рис. 2 (4hehe.vsd).

3. Поток энергии

Также, как и в [1], плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В сферических координатах φ, θ, ρ плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты $S_\varphi, S_\theta, S_\rho$, направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отсюда и из табл. 3 следует, что

$$\begin{aligned} S_\varphi &= 0 \\ S_\theta &= 0 \end{aligned}. \quad (5)$$

$$S_\rho = \eta \begin{pmatrix} E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} (g(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t))^2 - \\ - E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} (g(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{pmatrix}$$

Из (2.9, 2.11) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\theta\rho})^2, \quad (6)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\varphi\rho})^2. \quad (7)$$

Далее из (6, 7, 2.4, 2.6) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\theta\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\varphi\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}. \quad (9)$$

Из (5, 8, 9) получаем:

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \frac{\omega\mu}{\chi c} \frac{1}{\rho^2} \left((h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (h_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right). \quad (9)$$

Далее из (9, 2.13, 2.18) следует, что

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\rho^2} \left((h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (qh_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right), \quad (10)$$

где q – ранее неопределенная константа. Если принять

$$q = 1, \quad (10a)$$

то получим

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2}. \quad (11)$$

Заметим еще, что площадь поверхности сферы с радиусом ρ равна $4\pi\rho^2$. Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом ρ равен

$$\overline{S}_\rho = 4\pi\eta\omega \cdot g^2(\theta) h_{\theta\rho}^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

в сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени.

Это строго соответствует закону сохранения энергии.

Из (12) следует, что плотность потока энергии меняется вдоль меридиана по закону $g^2(\theta)$.

4. Заключение

Получено строгое решение уравнений Максвелла для дальней зоны, которое представлено в табл. 3, где

$H_{\varphi\rho}(\rho)$, $H_{\theta\rho}(\rho)$, $E_{\varphi\rho}(\rho)$, $E_{\theta\rho}(\rho)$ - функции,

определенные по (2.21, 2.18, 2.19),

$g(\theta)$ - функция, определяемая по (2.20a),

χ - константа, определяемая по (2.13).

- Одноименные (по координатам φ и θ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.
- В сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени и это строго соответствует закону сохранения энергии.
- Плотность энергии меняется вдоль меридиана по закону $g^2(\theta)$.

Таким образом, получено строгое решение уравнений Максвелла в дальней зоне, свободное от указанных выше недостатков. Вместе с этим следует отметить, что в ближней зоне,

где присутствуют радиальные электрические и магнитные напряженностями, известное решение обладает еще бОльшим перечнем недостатков, в частности [3, 4],

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем,
2. решение неоднородно и практически необходимо разбивать его на отдельные зоны (как правило, ближнюю, среднюю и дальнюю), в которых решения оказываются полностью различными,
3. в ближней зоне отсутствует поток энергии с реальным значением
4. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
5. в ближней зоне решение не является волновым (т.е. расстояние не является аргументом тригонометрической функции),
6. известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (решение, удовлетворяющее одному уравнению системы, нельзя считать решением системы уравнений).

Практически эти недостатки известного решения означают, что они (математические решения) нестрого описывают реальные излучения технических устройств. Более строгое решение, будучи примененным в системах проектирования таких устройств, безусловно, должно повысить их качество.

Решение уравнений Максвелла для сферических координат в общем случае получено и автор ищет для сотрудничества организацию, заинтересованную в практическом применении этого решения.

Приложение 1

Известное решение имеет вид [3, 4]:

$$E_{\theta} = e_{\theta} \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (1)$$

$$H_{\varphi} = h_{\varphi} \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi \rho), \quad (2)$$

где $k_{e\theta} = \frac{\chi^2 l}{4\pi\omega\epsilon\epsilon_0}$, $k_{h\varphi} = \frac{\chi l}{4\pi}$, где l , I - длина и ток вибратора.

Заметим, что

$$\frac{e_{\theta}}{h_{\varphi}} = \frac{\chi}{\omega \varepsilon} \quad (3)$$

Надо отметить, что эти напряженности синфазны, что противоречит практической электротехнике.

Рассмотрим, как соотносятся уравнения (1, 2) с системой уравнений Максвелла – см. табл. 2. Напряженности (1, 2) входят только в уравнение (6) из табл. 2, имеющее вид

$$\operatorname{rot}_{\varphi} E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{E_{\theta}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \rho} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Подставим (1, 2) в (5) и получим:

$$\begin{aligned} & -e_{\theta} \frac{\chi}{\rho} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) - \\ & -h_{\varphi} \frac{\chi \mu}{\rho c} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

или

$$\frac{e_{\theta}}{h_{\varphi}} + \frac{\mu}{c} = 0. \quad (7)$$

Из сравнения (3) и (7) следует, что напряженности (1, 2) удовлетворяют уравнению (4). Остальные 7 уравнений Максвелла нарушаются. В уравнениях (2, 3, 5) из табл. 2 одно из слагаемых отличается от нуля, а другое равно нулю. Нарушение уравнений (1, 4, 7, 8) из табл. 2 показано выше в разделе 2. Итак,

известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла.

Приложение 2

Рассмотрим (2.20):

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial(g(\theta))}{\partial \theta} = -\operatorname{ctg}(\theta) \cdot g(\theta) \quad (2)$$

или

$$\ln(g(\theta)) = - \int_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) \vartheta \theta. \quad (4)$$

Известно, что

$$\int_{\theta} \operatorname{ctg}(\theta) \vartheta \theta = \ln(A \cdot |\sin(\theta)|). \quad (5)$$

где A – константа. Из (4, 5) получаем:

$$\ln(g(\theta)) = - \ln(A \cdot |\sin(\theta)|) \quad (6)$$

или

$$g(\theta) = \frac{1}{A \cdot |\sin(\theta)|}. \quad (8)$$

Таблицы

Таблица 1.

1	2	3
1	$\operatorname{rot}_{\rho}(E)$	$\frac{E_{\varphi}}{\rho \operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \sin(\theta) \vartheta \varphi}$
2	$\operatorname{rot}_{\theta}(E)$	$\frac{\partial E_{\rho}}{\rho \sin(\theta) \vartheta \varphi} - \frac{E_{\varphi}}{\rho} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \rho}$
3	$\operatorname{rot}_{\varphi}(E)$	$\frac{E_{\theta}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{\partial E_{\rho}}{\rho \partial \varphi}$
4	$\operatorname{div}(E)$	$\frac{E_{\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{E_{\theta}}{\rho \operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \sin(\theta) \vartheta \varphi}$

Таблица 2.

1	2
1.	$\text{rot}_\rho H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\rho}{\partial t} = 0$
2.	$\text{rot}_\theta H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\theta}{\partial t} = 0$
3.	$\text{rot}_\varphi H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} = 0$
4.	$\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$
5.	$\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$
6.	$\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$
7.	$\text{div}(E) = 0$
8.	$\text{div}(H) = 0$

Таблица 3.

1	2
	$E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$E_\rho = 0$
	$H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$
	$H_\rho = 0$

Таблица 3а.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 4.

1	2	3
1	$\text{rot}_\rho(E)$	$\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$
2	$\text{rot}_\theta(E)$	$-\left(\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
3	$\text{rot}_\varphi(E)$	$\left(\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
4	$\text{div}(E)$	$\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$
5	$\text{rot}_\rho(H)$	$\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta}$
6	$\text{rot}_\theta(H)$	$-\left(\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \cos(\dots) - \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots)\right) g(\theta)$
7	$\text{rot}_\varphi(H)$	$\left(\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial \rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots)\right) g(\theta)$
8	$\text{div}(H)$	$\frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta}$

Таблица 5.

1	2
1.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
2.	$-\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(\dots) - \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) + \chi H_{\varphi\rho} \sin(\dots) + \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
3.	$\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(\dots) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) + \chi H_{\theta\rho} \cos(\dots) - \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} \cos(\dots) = 0$
4.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
5.	$-\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(\dots) - \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho} \sin(\dots) - \chi E_{\varphi\rho} \cos(\dots) + \frac{\omega\mu}{c} H_{\theta\rho} \sin(\dots) = 0$
6.	$\frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(\dots) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho} \cos(\dots) - \chi E_{\theta\rho} \sin(\dots) - \frac{\omega\mu}{c} H_{\varphi\rho} \sin(\dots) = 0$
7.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$
8.	$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0$

Литература

1. С.И. Хмельник. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. "MiC", Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 p.
2. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
3. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
4. Ближние и дальние зоны электромагнитные поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>