

---

**Хмельник С.И.**

# Новое решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне

## Оглавление

- 1. Введение
- 2. Решение уравнений Максвелла
- 3. Потоки энергии
- Приложение 1
- Таблицы
- Литература

## Аннотация

Отмечается, что известное решение для сферической электромагнитной волны в дальней зоне не удовлетворяет закону сохранения энергии (она сохраняется только в среднем), одноименные (по координатам) электрические и магнитные напряженности синфазны, выполняется только одно из системы уравнений Максвелла. Предлагается решение, свободное от этих недостатков.

## 1. Введение

В [1] рассмотрена цилиндрическая электромагнитная волна. Ниже рассматривается сферическая электромагнитная волна вдали от вибратора — в т.н. дальней зоне, где продольными (направленными вдоль радиуса) электрической и магнитной напряженностями можно пренебречь. Основные недостатки известного решения (см. приложение 1) состоят в том, что

1. закон сохранения энергии выполняется только в среднем (по времени),
2. магнитная и электрическая составляющие синфазны,
3. в системе уравнений Максвелла в известном решении выполняется только одно уравнение из восьми.

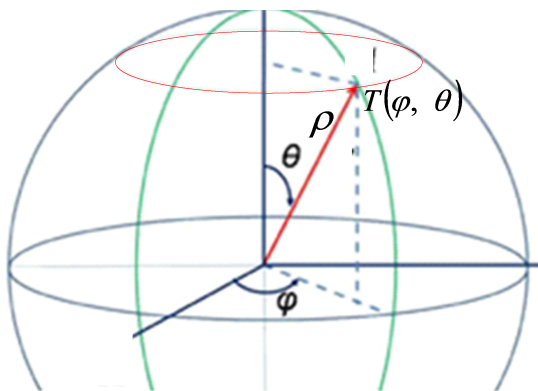


Рис. 1.

## 2. Решение уравнений Максвелла

На рис. 1 показана система сферических координат  $(\rho, \theta, \varphi)$ . В табл. 1 приведены выражения для ротора и дивергенции вектора  $\mathbf{E}$  в этих координатах [2]. Здесь и далее

$E$  - напряженность электрического поля,

$H$  - напряженность магнитного поля,

$\mu$  - абсолютная магнитная проницаемость,

$\varepsilon$  - абсолютная диэлектрическая проницаемость.

Уравнения Максвелла в сферических координатах при отсутствии зарядов и токов имеют вид, приведенный в табл. 2. Далее мы будем искать решение при  $E_\rho = 0$ ,  $H_\rho = 0$  и в виде функций  $E$ ,  $H$ , представленных в табл. 3, где функцию  $g(\theta)$  и функции вида  $E_{\varphi\rho}(\rho)$  предстоит вычислить. Будем полагать, что напряженности  $E$ ,  $H$  не зависят от аргумента  $\varphi$ . При этих условиях преобразуем табл. 1 в табл. 3а. Далее подставим функции  $E$ ,  $H$  из табл. 3 в табл. 3а. Тогда получим табл. 4.

Подставляя выражения для роторов и дивергенций из табл. 4 в уравнения Максвелла (см. табл. 2), дифференцируя по времени и сокращая общие множители, получаем новую форму уравнений Максвелла – см. табл. 5.

Рассмотрим табл. 5. Из строки 2 следует:

---


$$\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} = 0, \quad (2)$$

$$\chi H_{\varphi\rho} + \frac{\omega\varepsilon}{c} E_{\theta\rho} = 0. \quad (3)$$

Следовательно,

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (4)$$

$$H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\theta\rho}, \quad (5)$$

где  $h_{\varphi\rho}$  – некоторая константа. Аналогично, из строк 3, 5, 5 следует соответственно:

$$H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (6)$$

$$H_{\theta\rho} = \frac{\omega\varepsilon}{\chi c} E_{\varphi\rho}, \quad (7)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad (8)$$

$$E_{\varphi\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\theta\rho}, \quad (9)$$

$$E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho}, \quad (10)$$

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} H_{\varphi\rho}. \quad (11)$$

Из (5) следует, что

$$E_{\theta\rho} = -\frac{\chi c}{\omega\varepsilon} H_{\varphi\rho}, \quad (12)$$

а из сравнения (11) и (12) следует, что

$$\frac{\omega\mu}{\chi c} = \frac{\chi c}{\omega\varepsilon}$$

или

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (13)$$

Эта же формула следует из сравнения (7) и (9).

Из (5, 13) следует, что

$$H_{\varphi\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\theta\rho}, \quad (14)$$

а из (14, 4, 11, 12) следует, что

$$h_{\varphi\rho} = -e_{\theta\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad (15)$$

Аналогично, из (7, 13) следует, что

$$H_{\theta\rho} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\varphi\rho}, \quad (16)$$

а из (16, 6, 8, 12) следует, что

$$h_{\theta\rho} = -e_{\varphi\rho} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (17)$$

Из сравнения (15) и (17) следует, что

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q, \quad (18)$$

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (19)$$

Далее замечаем, что строки 1, 4, 7 и 8 совпадают, откуда следует, что функция  $g(\theta)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta} = 0. \quad (20)$$

Заметим, что в известном решении  $g(\theta) = \sin(\theta)$  - см. приложение 1. Легко убедиться, что такая функция не удовлетворяет уравнению (20). Следовательно,

**в известном решении не выполняются 4 уравнения Максвелла с выражениями  $\operatorname{rot}_{\rho}(E)$ ,  $\operatorname{rot}_{\rho}(H)$ ,  $\operatorname{div}(E)$ ,  $\operatorname{div}(H)$ .**

Итак, решение уравнений Максвелла для сферической волны в дальней зоне имеет вид напряженностей, представленных в табл. 3, где

$$H_{\varphi\rho} = \frac{h_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad H_{\theta\rho} = \frac{h_{\theta\rho}}{\rho}, \quad E_{\varphi\rho} = \frac{e_{\varphi\rho}}{\rho}, \quad E_{\theta\rho} = \frac{e_{\theta\rho}}{\rho} \quad (21)$$

$$\chi = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu} \quad (\text{см. 13}), \quad \frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{см. 20})$$

и константы  $h_{\varphi\rho}$ ,  $h_{\theta\rho}$ ,  $e_{\theta\rho}$ ,  $e_{\varphi\rho}$  удовлетворяют условиям

$$\frac{h_{\varphi\rho}}{h_{\theta\rho}} = \frac{e_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = q \quad (\text{см. 18}), \quad \frac{h_{\varphi\rho}}{e_{\theta\rho}} = \frac{h_{\theta\rho}}{e_{\varphi\rho}} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (\text{см. 19})$$

Из табл. 3 следует, что

**одноименные (по координатам  $\varphi$  и  $\theta$ ) электрические и магнитные напряженности сдвинуты по фазе на четверть периода.**

Это соответствует экспериментальной электротехнике. На рис. 2 показаны векторы напряженностей в сферической системе координат.

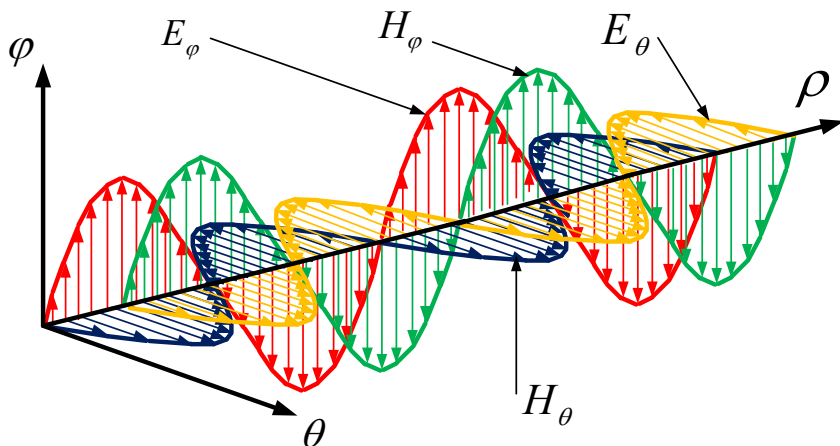


Рис. 2 (4hehe.vsd).

### 3. Потоки энергии

Также, как и в [1], плотность потока электромагнитной энергии – вектор Пойнтинга

$$S = \eta E \times H, \quad (1)$$

где

$$\eta = c/4\pi. \quad (2)$$

В сферических координатах  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\rho$  плотность потока электромагнитной энергии имеет три компоненты  $S_\varphi$ ,  $S_\theta$ ,  $S_\rho$ , направленные вдоль радиуса, по окружности, вдоль оси соответственно. Они определяются по формуле

$$S = \begin{bmatrix} S_\varphi \\ S_\theta \\ S_\rho \end{bmatrix} = \eta(E \times H) = \eta \begin{bmatrix} E_\theta H_\rho - E_\rho H_\theta \\ E_\rho H_\varphi - E_\varphi H_\rho \\ E_\varphi H_\theta - E_\theta H_\varphi \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Отсюда и из табл. 3 следует, что

$$\begin{aligned} S_\varphi &= 0 \\ S_\theta &= 0 \\ S_\rho &= \eta \begin{pmatrix} E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} (g(\theta) \sin(\chi\rho + \omega t))^2 - \\ - E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} (g(\theta) \cos(\chi\rho + \omega t))^2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Из (2.9, 2.11) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\theta\rho})^2, \quad (6)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (H_{\varphi\rho})^2. \quad (7)$$

Далее из (6, 7, 2.4, 2.6) следует, что

$$E_{\varphi\rho} H_{\theta\rho} = \frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\theta\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}, \quad (8)$$

$$E_{\theta\rho} H_{\varphi\rho} = -\frac{\omega\mu}{\chi c} (h_{\varphi\rho})^2 \frac{1}{\rho^2}. \quad (9)$$

Из (5, 8, 9) получаем:

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \frac{\omega\mu}{\chi c} \frac{1}{\rho^2} \left( (h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (h_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right). \quad (9)$$

Далее из (9, 2.13, 2.18) следует, что

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{\rho^2} \left( (h_{\theta\rho})^2 (\sin(\chi\rho + \omega t))^2 + (qh_{\varphi\rho})^2 (\cos(\chi\rho + \omega t))^2 \right), \quad (10)$$

где  $q$  – ранее неопределенная константа. Если принять

$$q = 1, \quad (10a)$$

то получим

$$S_\rho = \eta \cdot g^2(\theta) \omega \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{h_{\theta\rho}^2}{\rho^2}. \quad (11)$$

Заметим еще, что площадь поверхности сферы с радиусом  $\rho$  равна  $4\pi\rho^2$ . Тогда поток энергии, проходящий сквозь сферу с радиусом  $\rho$  равен

$$\overline{S}_\rho = 4\pi\eta\omega \cdot g^2(\theta) h_{\theta\rho}^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (12)$$

Из (12) следует, что

в сферической электромагнитной волне поток энергии, проходящий сквозь сферы по радиусу, остается постоянным с увеличением радиуса и НЕ изменяется во времени.

Это строго соответствует закону сохранения энергии.

Из (12) следует, что плотность потока энергии меняется вдоль меридиана по закону  $g^2(\theta)$ , т.к. функция  $g(\theta)$  не может быть константой – см. уравнение (20). Впрочем, такой же вывод следует и из известного решения, где  $g(\theta) = \sin(\theta)$ .

## Приложение 1

Известное решение имеет вид [3, 4]:

$$E_\theta = e_\theta \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi\rho),$$

$$H_\varphi = h_\varphi \frac{1}{\rho} \sin(\theta) \sin(\omega t - \chi\rho),$$

причем  $k_{e\theta} = \frac{\chi^2 l I}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0}$ ,  $k_{h\varphi} = \frac{\chi l I}{4\pi}$ , где  $l$ ,  $I$  - длина и ток вибратора.

Заметим, что

$$\frac{e_\theta}{h_\varphi} = \frac{\chi}{\omega\varepsilon} \quad (3)$$

Надо отметить, что эти напряженности синфазны, что противоречит практической электротехнике.

Рассмотрим, как соотносятся уравнения (1, 2) с системой уравнений Максвелла – см. табл. 2. Напряженности (1, 2) входят только в уравнение (6) из табл. 2, имеющее вид

$$\operatorname{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

или

$$\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Подставим (1, 2) в (5) и получим:

$$\begin{aligned}
& -e_{\theta} \frac{\chi}{\rho} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) - \\
& -h_{\varphi} \frac{\chi}{\rho} \frac{\mu}{c} \sin(\theta) \cos(\omega t - \chi \rho) = 0
\end{aligned}
\tag{6}$$

или

$$\frac{e_{\theta}}{h_{\varphi}} + \frac{\mu}{c} = 0.
\tag{7}$$

Из сравнения (3) и (7) следует, что напряженности (1, 2) удовлетворяют уравнению (4). Остальные 7 уравнений Максвелла нарушаются. В уравнениях (2, 3, 5) из табл. 2 одно из слагаемых отличается от нуля, а другое равно нулю. Нарушение уравнений (1, 4, 7, 8) из табл. 2 показано выше в разделе 2. Итак,

**известное решение НЕ удовлетворяет системе уравнений Максвелла.**

## Таблицы

Таблица 1.

| 1 | 2                         | 3                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|---------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\text{rot}_{\rho}(E)$    | $\frac{E_{\varphi}}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \partial \theta} - \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$                                                                  |
| 2 | $\text{rot}_{\theta}(E)$  | $\frac{\partial E_{\rho}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi} - \frac{E_{\varphi}}{\rho} - \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial \rho}$                                                                                             |
| 3 | $\text{rot}_{\varphi}(E)$ | $\frac{E_{\theta}}{\rho} + \frac{\partial E_{\theta}}{\partial \rho} - \frac{\partial E_{\rho}}{\rho \partial \varphi}$                                                                                                            |
| 4 | $\text{div}(E)$           | $\frac{E_{\rho}}{\rho} + \frac{\partial E_{\rho}}{\partial \rho} + \frac{E_{\theta}}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_{\theta}}{\rho \partial \theta} + \frac{\partial E_{\varphi}}{\rho \sin(\theta) \partial \varphi}$ |

Таблица 2.

| 1  | 2                                                                                            |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $\text{rot}_{\rho} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\rho}}{\partial t} = 0$       |
| 2. | $\text{rot}_{\theta} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\theta}}{\partial t} = 0$   |
| 3. | $\text{rot}_{\varphi} H - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_{\varphi}}{\partial t} = 0$ |

---

|    |                                                                                  |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|
| 4. | $\text{rot}_\rho E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\rho}{\partial t} = 0$       |
| 5. | $\text{rot}_\theta E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0$   |
| 6. | $\text{rot}_\varphi E + \frac{\mu}{c} \frac{\partial H_\varphi}{\partial t} = 0$ |
| 7. | $\text{div}(E) = 0$                                                              |
| 8. | $\text{div}(H) = 0$                                                              |

Таблица 3.

| 1 | 2                                                                     |
|---|-----------------------------------------------------------------------|
|   | $E_\theta = E_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$   |
|   | $E_\varphi = E_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$ |
|   | $E_\rho = 0$                                                          |
|   | $H_\theta = H_{\theta\rho}(\rho)g(\theta)\sin(\chi\rho + \omega t)$   |
|   | $H_\varphi = H_{\varphi\rho}(\rho)g(\theta)\cos(\chi\rho + \omega t)$ |
|   | $H_\rho = 0$                                                          |

Таблица 3а.

| 1 | 2                       | 3                                                                                    |
|---|-------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\text{rot}_\rho(E)$    | $\frac{E_\varphi}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$ |
| 2 | $\text{rot}_\theta(E)$  | $-\frac{E_\varphi}{\rho} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial \rho}$                 |
| 3 | $\text{rot}_\varphi(E)$ | $\frac{E_\theta}{\rho} + \frac{\partial E_\theta}{\partial \rho}$                    |
| 4 | $\text{div}(E)$         | $\frac{E_\theta}{\rho g(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$   |

Таблица 4.

| 1 | 2                       | 3                                                                                                                                                              |
|---|-------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\text{rot}_\rho(E)$    | $\frac{E_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\varphi}{\rho \partial \theta}$                                                                   |
| 2 | $\text{rot}_\theta(E)$  | $-\left( \frac{E_{\varphi\rho}}{\rho} \sin(...) + \frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \sin(...) + \chi E_{\varphi\rho} \cos(...) \right) g(\theta)$ |
| 3 | $\text{rot}_\varphi(E)$ | $\left( \frac{E_{\theta\rho}}{\rho} \cos(...) + \frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial \rho} \cos(...) - \chi E_{\theta\rho} \sin(...) \right) g(\theta)$     |
| 4 | $\text{div}(E)$         | $\frac{E_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial E_\theta}{\rho \partial \theta}$                                                                     |
| 5 | $\text{rot}_\rho(H)$    | $\frac{H_\varphi}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\varphi}{\rho \partial \theta}$                                                                   |
| 6 | $\text{rot}_\theta(H)$  | $-\left( \frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(...) + \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \cos(...) - \chi H_{\varphi\rho} \sin(...) \right) g(\theta)$ |
| 7 | $\text{rot}_\varphi H$  | $\left( \frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(...) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial \rho} \sin(...) + \chi H_{\theta\rho} \cos(...) \right) g(\theta)$     |
| 8 | $\text{div}(H)$         | $\frac{H_\theta}{\rho \text{tg}(\theta)} + \frac{\partial H_\theta}{\rho \partial \theta}$                                                                     |

Таблица 5.

| 1  | 2                                                                                                                                                                                                 |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $\frac{g(\theta)}{\text{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial \theta} = 0$                                                                                                           |
| 2. | $-\frac{H_{\varphi\rho}}{\rho} \cos(...) - \frac{\partial H_{\varphi\rho}}{\partial \rho} \cos(...) + \chi H_{\varphi\rho} \sin(...) + \frac{\omega \varepsilon}{c} E_{\theta\rho} \sin(...) = 0$ |
| 3. | $\frac{H_{\theta\rho}}{\rho} \sin(...) + \frac{\partial H_{\theta\rho}}{\partial \rho} \sin(...) + \chi H_{\theta\rho} \cos(...) - \frac{\omega \varepsilon}{c} E_{\varphi\rho} \cos(...) = 0$    |
| 4. | $\frac{g(\theta)}{\text{tg}(\theta)} + \frac{\partial(g(\theta))}{\partial \theta} = 0$                                                                                                           |

|    |                                                                                                                                                                                    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. | $-\frac{E_{\varphi\rho}}{\rho}\sin(\dots)-\frac{\partial E_{\varphi\rho}}{\partial\rho}\sin(\dots)-\chi E_{\varphi\rho}\cos(\dots)+\frac{\omega\mu}{c}H_{\theta\rho}\sin(\dots)=0$ |
| 6. | $\frac{E_{\theta\rho}}{\rho}\cos(\dots)+\frac{\partial E_{\theta\rho}}{\partial\rho}\cos(\dots)-\chi E_{\theta\rho}\sin(\dots)-\frac{\omega\mu}{c}H_{\varphi\rho}\sin(\dots)=0$    |
| 7. | $\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)}+\frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta}=0$                                                                                         |
| 8. | $\frac{g(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)}+\frac{\partial(g(\theta))}{\partial\theta}=0$                                                                                         |

## Литература

1. С.И. Хмельник. Непротиворечивое решение уравнений Максвелла, publ. "MiC", Israel, Printed in USA, Lulu Inc., ID 18555552, ISBN 978-1-329-96074-9, 2016, 196 p.
2. Андре Анго. Математика для электро- и радиоинженеров, изд. «Наука», Москва, 1964, 772 с.
3. Пименов Ю.В., Вольман В.И., Муравцов А.Д. Техническая электродинамика. Под редакцией Ю.В. Пименова, Москва, 2002 г., 536 стр.
4. Ближние и дальние зоны электромагнитные поля, <http://lib.izdatelstwo.com/Papers2/BIZ.pdf>