

A Densidade Lagrangeana Para Uma Generalização da Equação de Schroedinger e o Berço de pión

EDIGLES GUEDES

25 de agosto de 2016

RESUMO. Nós derivamos a densidade Lagrangeana para uma generalização da equação de Schroedinger para o átomo com um életron e um núcleo; e concluímos, por meio da equação generalizada, que este átomo seria o berço de pión.

1. INTRODUÇÃO

Em artigo anterior [1, p. 3], por meio de uma experiência imaginária, descobrimos uma equação que generaliza a equação de Schroedinger, como descrito abaixo:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2\mu c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

onde μ é a massa reduzida, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , ∇^2 é o operador Laplaciano, V é a energia potencial e $\Psi := \Psi(x, y, z, t)$ é a função de onda. Nós podemos deduzir, trocando a massa reduzida por massa de repouso, em (1.1), a seguinte equação

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}\left(\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right). \quad (1.2)$$

A nossa principal proposta é derivar a densidade Lagrangeana para esta equação e conectá-la à densidade Lagrangeana da equação de Klein-Gordon e à densidade Lagrangeana da equação tradicional de Schroedinger, usando o formalismo dos 4-vetores [2, pp. 2-4]; e, conseqüentemente, deduzir o que foi elencado no resumo acima. Para conseguir tal intento, partimos do pressuposto que encontramos a equação (1.2) na Natureza e que ela não foi observada como um efeito quântico-relativístico, tal como descrito no artigo anterior [1]; então, como explicaríamos a presença do derradeiro termo na equação supramencionada?

2. O RETORNO PARA SCHROEDINGER E O SISTEMA HELIOCÊNTRICO

O modelo físico inicial, que adotamos frequentemente para derivar a equação clássica de Schroedinger para o átomo de hidrogênio, é o modelo heliocêntrico, em que o sol representa o núcleo atômico e, ao seu redor, gira um planeta chamado elétron. Isto é possível, porque usamos a técnica de massa reduzida, em que substituímos o átomo real por um átomo no qual o núcleo é infinitamente massivo e o elétron tem massa reduzida μ , dada por

$$\mu = \left(\frac{M}{m + M} \right) m,$$

aqui, m é a massa real do elétron e M é a massa real do núcleo. Veja Fig. 2.1, para o sistema real and Fig. 2.2, para o modelo do sistema de Schroedinger.

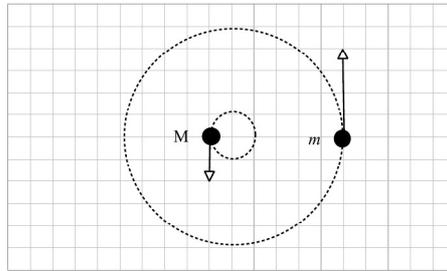


Figura 2.1. Sistema real. Um elétron de massa m e um núcleo de massa M movem-se em torno do centro de massa fixo, ambos em trajetória circular.

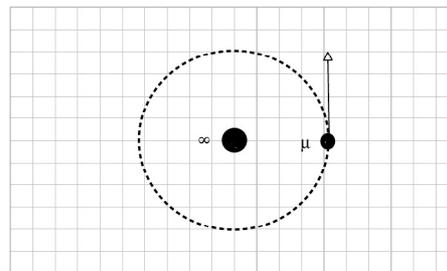


Figura 2.2. Modelo do sistema de massa reduzida de Schroedinger. Neste modelo atômico equivalente, uma partícula de massa reduzida μ move-se em torno do núcleo estacionário de massa infinita, em trajetória circular.

O leitor pode comparar tudo o que foi dito com a Figura 7-1, em [3, p. 302].

Por outro lado, no modelo do sistema proposto por nós, o principal critério, que nos difere do anterior, é a questão da trajetória elíptica do elétron; enquanto nos dois modelos de sistemas anteriores a trajetória era circular. Por isso, dá-se o caso de uma generalização; pois o círculo é um caso particular de elipse, em que os dois focos da elipse encontram-se num único local, isto é, o centro do círculo resultante. Veja Fig. 2.3.

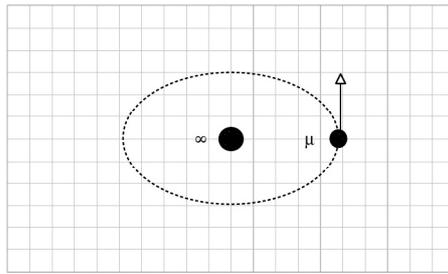


Figura 2.3. Modelo do sistema de massa reduzida de Guedes-Schroedinger. Neste modelo atômico equivalente, uma partícula de massa reduzida μ move-se em torno do núcleo estacionário de massa infinita, em trajetória elíptica.

Eisberg and Resnick [3, p. 302, último parágrafo] deixa bastante claro em seu livro-texto que os resultados de mecânica clássica, no caso do movimento de um planeta em torno do sol ou de outro sistema qualquer envolvendo o movimento de duas partículas, quanto a energia total do modelo do sistema real e o modelo do sistema de massa reduzida do elétron com o núcleo infinitamente massivo, são iguais aos obtidos pela mecânica quântica.

Aproveitando-se deste comentário, nota-se que há certa equivalência entre o modelo do sistema real e o modelo de um planeta ao redor do sol. Pois bem, se aplicarmos essa equivalência ao nosso modelo de sistema proposto com a trajetória elíptica do elétron, podemos considerar que a trajetória elíptica ocorre porque houve alguma “perturbação” no modelo inicial da massa reduzida para dedução da equação clássica de Schroedinger, cuja órbita é circular. Isto é bastante claro, se pensarmos em termos de mecânica clássica, em que um planeta só muda de órbita, se tiver sua órbita inicial “perturbada” pelo encontro de outra órbita de um planeta distinto ao primeiro; inclusive, este princípio é aplicado por astrônomos para descobrir novos planetas em galáxias distantes. Portanto, se considerarmos que houve uma “perturbação” na órbita inicial do elétron, surge a seguinte pergunta: O que estaria provocando tal fenômeno? A princípio, poderíamos pensar, já que estamos em nível quântico, que, no mínimo, uma partícula física estaria por trás desse estranho fenômeno. Aí, surge a indagação: Qual partícula seria capaz de alterar a trajetória do elétron? É esta questão que o artigo procura responder.

3. O CÁLCULO DA DENSIDADE LAGRANGEANA

Primeiramente, reescrevemos a equação (2.1) da seguinte forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2\Psi + V\Psi - i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m_0}\left(-\frac{\hbar^2}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}\right) = 0. \quad (3.1)$$

A essa altura, empregaremos o 4-vetores formalismo, começando pelo operador quatro-momento que é dado por

$$\hat{p}^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (3.2)$$

Ele transforma-se como um 4-vetores contravariante, de tal maneira que

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hbar^2 \nabla^2 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - \hbar^2 \nabla^2, \quad (3.3)$$

veja [2, p. 3, (1.11) and p. 4, (1.12)].

Substitua o lado direito de (3.3) no lado esquerdo de (3.1), e encontre

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi + V\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi - \hbar^2 \nabla^2 \Psi) &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi + V\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ + \frac{1}{2m_0} (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi - m_0^2 c^2 \Psi + m_0^2 c^2 \Psi - \hbar^2 \nabla^2 \Psi) &= 0 \\ \Rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi + V\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2m_0} (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi - m_0^2 c^2 \Psi) \\ - \frac{1}{2m_0} (\hbar^2 \nabla^2 \Psi - m_0^2 c^2 \Psi) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Em (3.4) é fácil identificar a equação de Schroedinger

$$S = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \Psi + V\Psi - i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (3.5)$$

a equação de Klein-Gordon

$$KG = \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \Psi - m_0^2 c^2 \Psi; \quad (3.6)$$

e a equação de Klein-Gordon independente do tempo

$$KG_{it} = \hbar^2 \nabla^2 \Psi - m_0^2 c^2 \Psi, \quad (3.7)$$

com um ligeiro detalhe: a função de onda, Ψ , é dependente do tempo, isto é, $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$, como foi definido anteriormente na introdução.

A densidade Lagrangeana para a equação de Schroedinger é da forma

$$\mathcal{L}_S = -\frac{\hbar^2}{2m_0} (\nabla \Psi^*) (\nabla \Psi) - \frac{\hbar}{2i} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) - \Psi^* V \Psi, \quad (3.8)$$

veja [3, p. 18, (1)].

A densidade Lagrangeana para a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{\hbar^2}{2m_0} \left(g^{\mu\nu} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi \right), \quad (3.9)$$

veja [3, p. 14, (1.54)], onde a constante $\hbar^2 / 2m_0$ é escolhida de tal forma que $\int \mathcal{L}_{KG} d^3x$ tem a dimensão de energia.

A densidade Lagrangeana para a equação de Klein-Gordon independente do tempo é da forma

$$\mathcal{L}_{KG_{it}} = \hbar^2 (\nabla \Psi^*) (\nabla \Psi) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi^* \Psi. \quad (3.10)$$

Daí, então, é fácil observar que a densidade Lagrangeana procurada será dada pela equação abaixo:

$$\mathcal{L}_{GS} = \mathcal{L}_S + \frac{\mathcal{L}_{KG}}{2m_0} - \frac{\mathcal{L}_{KG_{it}}}{2m_0}. \quad (3.11)$$

De (3.4) à (3.11), concluímos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GS} = & \left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}(\nabla\Psi^*)(\nabla\Psi) - \frac{\hbar}{2i}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) - \Psi^*V\Psi \right] \\ & + \frac{1}{2m_0}\left[\frac{\hbar^2}{2m_0}\left(g^{\mu\nu}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi\right) \right] \\ & - \frac{1}{2m_0}\left[\hbar^2(\nabla\Psi^*)(\nabla\Psi) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Psi^*\Psi \right], \end{aligned} \quad (3.12)$$

que se reduz para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GS} = & -\frac{\hbar^2}{m_0}(\nabla\Psi^*)(\nabla\Psi) - \frac{\hbar}{2i}\left(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}\right) - \Psi^*V\Psi \\ & + \frac{\hbar^2}{4m_0^2}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Psi^*}{\partial x^\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^\nu} + \left(\frac{m_0}{\hbar^2} - \frac{1}{2}\right)\frac{c^2}{2}\Psi^*\Psi, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} & g^{02} & g^{03} \\ g^{10} & g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{20} & g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{30} & g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. CONCLUSÃO

Finalmente, de tudo que foi explicado, podemos concluir que, segundo a equação (3.11), evidenciamos uma interação quântico-relativística entre o átomo com um elétron e um núcleo, tal qual originalmente equacionado por Schroedinger, com uma partícula subatômica, denominada pión (π^0 ou π^+ ou π^-) e outra partícula primordial e desconhecida, que possuiria a equação de Klein-Gordon independente do tempo, com o detalhe que sua função de onda, Ψ , é dependente do tempo, isto é, $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$, veja (3.4) e (3.7).

Por isso, podemos aventar que a equação (1.2) dá-nos um forte indício do surgimento de pión por um átomo com um elétron e um núcleo; podemos, então, afirmar que o átomo em questão é o berço de pión, caso encontrássemos a sobredita equação na Natureza e não houvesse explicação relativística para ela, conforme descrito em [1]. Portanto, seria plausível adotar a interpretação acima mencionada da interação entre as três partículas.

Referências

- [1] Guedes, Edigles, *Uma Equação Similar à Equação de Schroedinger Para o Átomo com um Elétron, que se Move, do Ponto de Vista de um Observador*, **viXra:1303.0118**.

- [2] Greiner, Walter, *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*, Third Edition, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2000.
- [3] Eisberg, Robert and Resnick, Robert, *Física Quântica, Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas*, Rio de Janeiro, Elsevier Editora LTDA, 1979.