La causalité

Un principe mathématique

Antoine WARNERY

1 rue du château -rebours-77250 VILLEMER- FRANCE

30/09/2017

1 Préambule

L'objet de ce papier est la modélisation mathématique de la causalité en tant que méthode prédictive, consistant en une identification des conditions ayant une conséquence certaine.
L'étude se focalise sur la nature causale de la science, une sorte de physique de la science (L'étymologie de physique vient du $\phi\nu\sigma\iota\chi o\zeta$ "nature") et non en une description de la causalité observée dans la nature.

La causalité n'est pas un objet physique mais une connaissance scientifique cartésienne[1] accessible par la raison. La science est étudiée par sa nature mathématique et non par ses propriétés matérielles.

La proximité des lois scientifiques physiques et économiques ne dépend pas de l'objet décrit mais de la quantification mathématique. Les connaissances sur la matière diffèrent des connaissances sur la science, la connaissance scientifique ayant une nature mathématique, un pur produit de l'esprit humain.
Afin d'apporter des connaissances utiles aux sciences appliquées, nous allons modéliser le processus de prédiction. Avec l'idée que la causalité est simplement une quantification mathématique d'un effet avec une variable temporelle. Cette équation dépendante du temps permet de réaliser une prédiction. Une équation mathématique temporelle quelconque simple et intelligible sera notre modèle prédictif. Ce modèle nous aidera à comprendre les mécanismes de la causalité et voir comment ces mécanismes influencent les sciences.

Nous allons modéliser, la causalité avec les formules d'analyse mathématique (d'autres possibilités existent). Cette équation sera appliquée à un système de particules idéalisé. Nous verrons comment les expressions mathématiques obtenues décrivent des lois fondamentales de la physique.

2 Introduction

La causalité est applicable à la physique et à l'économie car elle utilise un simple théorème mathématique. Les équations utilisées sont connues et ne présentent pas de nouveauté en elle même. Mais la démarche nous permet de comprendre comment les lois physiques sont déduite des mathématiques.

La modélisation que nous poursuivons est très différente des modèles de causalité ayant une base de physique ou quantique.

Il ne s'agit pas non plus d'un traitement de données statistiques ou probabilistes pour déterminer la causalité (ex Judea Pearl causal inference in statistics an overview[2]), ni d'un modèle d'agrégation de données causales venant de la physique (ex Y. Iwasaki H. Simon Causality and model abstraction[3]), même si le présent papier a des similitudes notamment à cause de l'utilisation des différentiels, mais le but de ce papier est de démontrer par les mathématiques des lois et non de les agréger.

L'approche choisie est similaire à la relativité de Poincaré[4], Einstein[5] bien que l'objet soit différent. La relativité modélise les différences d'observations relatives à la position des observateurs alors que la causalité modélise les équivalences dans les fonctions de position (temps, espace). Ces approches ont des interactions certaines.

Afin de bien distinguer, la causalité de la relativité, nous allons écrire les équations sans référentiel (galiléen [6] ou autres). Nous pourrons ainsi développer les équations sans nous soucier de l'influence de la relativité, de la position d'un observateur. La relativité pourra être introduite ultérieurement en introduisant un référentiel d'observation (ce qui ne sera pas fait dans ce papier).

Pour modéliser la causalité nous allons la définir puis la quantifier.
La causalité est : "la vertu par laquelle une cause produit un effet". La cause étant "ce qui fait qu'une chose se produit" à savoir une condition, et l'effet est "ce qui est fait par un agent quelconque", suivant les définitions du Littré [7].

La quantification sera une quantification de l'effet (g) dépendant de la cause (r) mais indépendamment de la nature de l'agent. Nous allons prendre g(r) comme fonction quelconque quantifiant l'effet en fonction de la cause (r). Cette modélisation n'est pas prédictive car elle ne prend pas en compte le paramètre temporel (t).

Nous allons voir comment l'analyse mathématique va nous permettre d'introduire un paramètre temporel, afin de rendre la modélisation prédictive.

2.1 Analyse mathématique de la causalité

Nous avons une fonction $g(r)$ dépendant d'une condition r. Nous allons introduire la notion de variabilité de cette condition (r) dans le temps tel que :

$$r = r(t)$$

Suivant les propriétés mathématiques des intégrales, nous avons la relation :

Équation 1 *Équation de causalité*

$$\int_{r(t_a)}^{r(t_b)} g(r)dr = \int_{t_a}^{t_b} g(r(t)) \cdot r'(t)dt$$

Nous avons donc une équivalence entre un effet g(r), dépendant de r et un effet g($r(t)$) dans le temps. L'intérêt de cette équation est d'être général et d'être temporel permettant de faire des prédictions.

Cette modélisation a de l'intérêt car elle est simple mais elle n'a pas la prétention d'être unique. Cette équation (très proche de l'équation de Euler[8] Lagrange[9]) permet de représenter la causalité en général car elle ne dépend pas d'une fonction (g) effet particulière.

2.2 Représentation de la causalité

Nous illustrons la causalité avec les particules de Cauchy[10], car notre modèle en est très proche. Cauchy a appliqué un modèle physique à ses particules nous allons appliqué un modèle mathématique à ces mêmes particules. Nous prenons uniquement deux particules la 1 et la 2. dont la distance (r) varie au cours du temps.

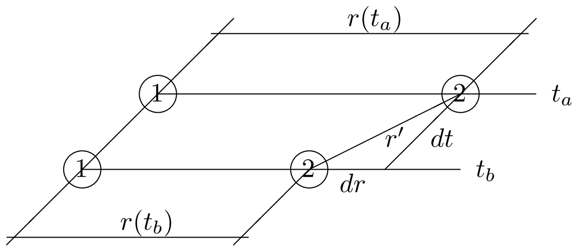

Figure 1 : Relation temps distance.

l'illustration est la représentation physique de deux particules (1 et 2) avec :
- $r(t_a)$ la distance entre les deux particules à l'instant t_a et $r(t_a)$ à l'instant t_b,
- $g(r(t_a)$ l'effet entre les particules à la distance $r(t_a)$, et $g(r(t_b)$ à la distance $r(t_b)$

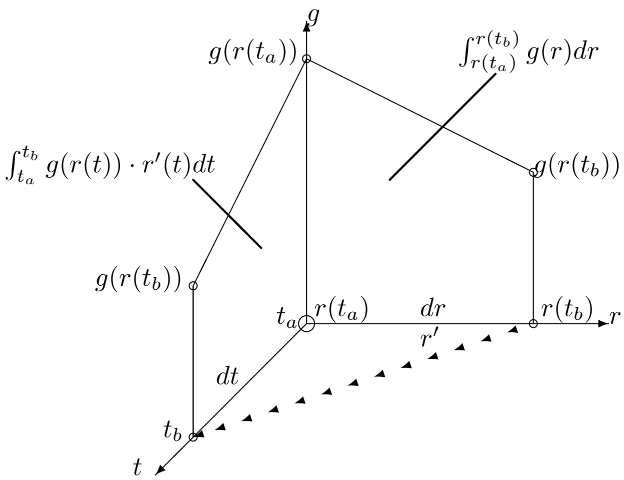

Figure 2 : Équivalence des effets de la causalité.

L'illustration permet de visualiser les relations distances (r), temps (t), différences de distance (dr), et de temps (dt) et la proportionnalité des surfaces effets (g) intégré sur (t) ou (r). Nous pouvons voir aussi que :
- Action, réaction sont équivalentes car exprimées par la même variable effet(g).
- Succession, la variable (r) à l'instant (t_a) est modifiée de (dr) à l'instant (t_b),
- La proximité, l'effet g dépend de la cause (r),
- La proportionnalité, L'effet intégré dans l'espace est proportionnel à l'effet intégré dans le temps (le rapport de proportionnalité étant r').

2.3 Sens du temps

L'équation de causalité est indifférente au signe du temps. Seule la correspondance entre le temps et la distance est importante tel que à l'instant t_a la distance est de $r(t_a)$ et à l'instant t_b la distance est de $r(t_b)$.

Le temps peut être ordonné suivant une référence culturelle occidentale tel que nous progressons dans le temps nous sommes en croissance avec une augmentation $t_b > t_a$, ou chinoise nous descendons dans le temps avec une ordination du temps $t_a > t_b$.

par exemple :
Si $r(t_b) futur > r(t_a)$ passé alors $dr > 0$.
Pour une ordination occidentale $t_b > t_a$ $dt > 0$ d'où $r' = \frac{dr}{dt} > 0$
Pour une ordination à la chinoise $t_b < t_a$ $dt > 0$ d'où $r' = \frac{dr}{dt} < 0$

Pour un ordination occidentale la prédiction dans le futur ($dt > 0$) est tel que $r'(> 0) * dt(> 0) > 0$ et pour une ordination chinoise la prédiction dans le futur ($dt < 0$) est tel que : $r'(< 0) * dt(< 0) > 0$. Quelle que soit l'ordination choisie, les équations de prédictions obtenues ont des résultats identiques.

Contrairement aux équations temporelles de la dynamique, et de la cinématique l'équation de causalité n'est pas dépendante d'une norme sociale.

L'équation de causalité est un moyen mathématique permettant de calculer des équations prédictives. Nous allons voir que ce moyen mathématique va nous permettre de retrouver des équations de la physique, avec la rigueur des mathématiques et sans avoir besoin de recourir à l'expérience !

3 Application en science

L'équation 1 permet de lier un paramètre de condition (r) au temps (t), comme il s'agit d'une formule mathématique elle est toujours applicable à la quantification d'éléments conservatifs, qu'ils soient réels (particule, objet, matière première) ou virtuels (monnaie, information,..).

Nous allons voir comment cette modélisation d'éléments conservatifs nous permet de retrouver des équations de la physique. J'ai choisi des équations de la physique car ces équations ne sont pas soumises a controverses. Les démontrer permet de valider la démarche.

3.1 Physique, Mécanique

En mécanique, il faut comprendre (r) comme une distance entre deux éléments, (t) comme un paramètre temporel, et (g) comme l'effet entre les deux éléments.

3.1.1 Équation de continuité (fluide de densité ρ)

Les conditions d'observation d'un fluide sont particulières. L'effet du fluide est mesuré à l'intérieur d'un volume arbitraire, l'effet g(r) du fluide à l'intérieur de ce volume est susceptible de varier dans le temps et dans l'espace.

D'où si nous dérivons l'équation 1 par dr·dt alors :

$$\frac{\int_{r(t_a)}^{r(t_b)} g(r)dr}{dr \cdot dt} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} g(r(t)) \cdot r'(t)dt}{dr \cdot dt}$$

la dérivée g(r)/dt est non nulle car la densité est susceptible de varier au cours du temps.

Équation 2 *Équation de continuité*

$$\frac{g(r)\,\Big|_{r(t_a)}^{r(t_b)}}{dt} = \frac{g(r(t))\,\Big|_{t_a}^{t_b} \cdot r'(t)}{dr}$$

Nous pouvons comparer cette équation avec l'équation de continuité pour un fluide. Afin de montrer que les deux équations procèdent de la même logique.

Soit pour un fluide la fonction effet g(r) est constante sur r d'où g(r)= ρ , r'= $\vec{U}$, La dérivée $\frac{1}{dt}$ dans un repère orthonormé correspond à div().

$$\frac{\rho}{dt} = div(\rho \cdot \vec{U})$$

Il s'agit de l'équation de continuité (le signe est différent de l'équation classique [11]), la variation du stock dans le temps est égale à la différence de la somme des flux entrant et sortant suivant toutes les directions (ce qui est logique). le signe de la divergence dépend du signe de la différence de vitesse. Cette quantité peut être positive ou négative vis à vis d'un repère orthonormé.

Nous remarquons que le stock peut varier avec le temps pour les fluides compressibles pour les fluides incompressibles $\frac{\rho}{dt} = 0$ d'où l'équation devient basiquement $div(\rho \cdot \vec{U}) = 0$.

Le conservatisme des mathématiques permet de décrire l'équation de continuité. La continuité est un équilibre des flux qui est facilement décrit par les mathématiques.

Nous allons voir si l'équation 1 de causalité peut être employée pour décrire d'autres phénomènes physiques. Nous allons utiliser la même logique et l'appliquer au point matériel.

3.1.2 Équation de la quantité de mouvement (point matériel de masse m)

Les conditions d'observations d'un point matériel sont particulières, en effet la masse (m) du point matériel n'est pas susceptible de varier dans le temps.

Soit l'équation 1 dérivé par le temps 1/dt :

$$\int_{r(t_a)}^{r(t_b)} g(r)\frac{dr}{dt} = \int_{t_a}^{t_b} g(r(t)) \cdot r'(t)\frac{dt}{dt}$$

Nous changeons les variables mathématiques en variables physiques pour une meilleure compréhension, avec l'effet g inertiel représenté par la masse g(r)=m et la vitesse r'=u.

$$\frac{m \cdot (r(t_b) - r(t_a))}{dt} = m \cdot u(t_b) - m \cdot u(t_a)$$
$$0 = m \cdot u(t_b) - m \cdot u(t_a)$$

Équation 3 *Équation de la quantité de mouvement*

$$m \cdot u(t_a) = m \cdot u(t_b)$$

Nous constatons qu'une équation mathématique simple permet de modéliser l'équation classique de la conservation de la quantité de mouvement !

Nous allons voir s'il est possible de déduire d'autres équations scientifiques de l'équation 1.

3.1.3 Équation de l'énergie (point matériel de masse m)

Les conditions d'observations d'un point matériel sont particulières, en effet la masse (m) du point matériel n'est pas susceptible de varier dans le temps.

Nous reprenons l'équation 1 et nous l'intégrons par l'accélération $da = \frac{dr}{dt.dt}$:

$$\frac{\int_{r(t_a)}^{r(t_b)} g(r)dr \cdot dr}{dt \cdot dt} = \frac{\int_{t_a}^{t_b} g(r(t)) \cdot r'(t)dr \cdot dt}{dt \cdot dt}$$

Avec soit l'effet la masse g(r)= m, et r'= u la vitesse, et l'intégration sur la vitesse $\frac{dr}{dt}$=du et l'accélération $\frac{dr}{dt.dt} = da$

$$\int m \cdot r(t_b) - m \cdot r(t_a) \cdot da = \int_{t_a}^{t_b} m \cdot u \cdot du$$

$$-m \cdot r(t_b) \cdot a + m \cdot r(t_a) \cdot a = \frac{1}{2}mu(t_b)^2 - \frac{1}{2}mu(t_a)^2$$

$$\frac{1}{2}m \cdot u(t_a)^2 + m \cdot r(t_a) \cdot a = \frac{1}{2}m \cdot u(t_b)^2 + m \cdot r(t_b) \cdot a$$

Nous remarquons qu'il s'agit du terme de l'énergie cinétique (Ec) et de l'énergie potentielle (Ep) tel que :

$$Ec(t_a) + Ep(t_a) = Ec(t_b) + Ep(t_b) = constante$$

Nous avons obtenu la formule de la conservation de l'énergie mécanique, ainsi que les formules de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. avec une expression de la variable accélération général exprimant la gravité :

Équation 4 *Équation de la conservation de l'énergie mécanique*

$$Em = Ec + Ep$$

La conservation de l'énergie mécanique ne dépend donc pas de la nature de l'objet décrit. L'énergie mécanique est conservée tant que le système a un nombre d'éléments fixes.

La conservation de l'énergie mécanique est un résultat mathématique.

avec les expressions pour l'énergie cinétique :

Équation 5 *Énergie cinétique*

$$Ec = \frac{1}{2} m \cdot u^2$$

Nous retrouvons ici l'expression de l'énergie cinétique écrite par Bernoulli, et pour l'énergie potentielle écrite par Newton avec l'accélération a= g et la condition de distance r=h :

Équation 6 *Énergie potentielle*

$$Ep = m \cdot r \cdot a = m \cdot g \cdot h$$

Il est important de remarquer que la force de gravitation (décrite par Newton) est ici uniquement une accélération ! cette accélération n'a pas été trouvée en déduction d'autres équations physiques mais uniquement grâce aux mathématiques ! Si nous avions voulu être plus précis nous aurions tenu compte de la différence d'effet g(r) en fonction de la distance, mais nous aurions obtenu une expression complexe inutilement éloignée de l'éxpression classique de la gravité.

L'analyse mathématique des effets entre deux éléments matériels permet de trouver des équations fondamentales de la physique telles que : la conservation de l'énergie mécanique, la conservation de la quantité de mouvement, la gravité, etc.

Il est utile de remarquer ici que nous n'avons pas eu besoin que de quelques lignes pour retrouver les lois de la physique nous n'avons utilisé aucun postulat, aucune théorie obscure, invérifiable pour faire nos démonstrations. La gravité a été définie uniquement mathématiquement (par l'accélération), nous n'avons pas eu besoin de recourir à une particule quantique !

4 Conclusions

Ce papier est nouveau car il utilise uniquement l'analyse mathématique pour établir des lois physiques !

Les lois établies ont donc une nature mathématique et non matérielle. Pour des lois telles que la continuité, (une simple conservation de la masse permet de nous en convaincre) la nature mathématique est évidente par contre pour, l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, la gravité, le principe de conservation de l'énergie mécanique ces résultats sont plus inattendus.

Les anciens physiciens (Poincaré [4], Galilée[6], Euler[8], Lagrange[9], Cauchy[10], Bernoulli[12], Newton[13], Aristote[14]) ont cherché avec les mathématiques des lois et principes physiques, ils n'ont pas cherché ces lois dans l'essence des choses, des particules ou dans une autre métaphysique.

Peut être est-ce du au fait qu'ils baignaient dans une culture classique, et savaient que la physique et la métaphysique n'ont pas de lien. Le mot métaphysique a été créé par l'éditeur d'Aristote, Il a placé le livre sur l'essence des choses après le livre sur la physique et l'a appelé métaphysique (méta en grec veut dire après).

Dans la politique de recherche scientifique actuelle, basée sur la nature des particules à savoir l'essence des chose (une approche "métaphysique"), ce résultat va paraitre incongru voir inapproprié. Il sera surement ignoré des physiciens quantiques.

Par contre, cette approche peut être utile aux économistes, notamment à ceux qui utilisent des modèles physiques ou inspirés de la physique. Il peuvent utiliser cette approche mathématique, afin de mieux comprendre comment adapter un modèle physique à leur environnement économique.

4.1 Intérêts

De nombreux articles économiques ont été écrit par des physiciens, car les modèles physiques et les modèles économiques ont des points communs. Des modèles à base physique sont déjà utilisés, souvent ceux-ci prennent appui sur le fait que la monnaie est une quantité conservative. La loi de causalité permet de mieux comprendre, comment appliquer ces lois physiques aux sciences économiques.

Les modèles à base physique sont déjà au cœur des systèmes financiers (banques, assurances agences de notation) notamment à cause de la numérisation de l'économie. L'explosion des données économiques permettant non seulement de vérifier ces modèles avec des données historiques mais aussi de faire tourner ces modèles en continu. Ces modèles ont déjà fait preuve d'une grande efficacité et seront prépondérants dans l'économie numérique de demain.

L'intérêt majeur de la science est la prédiction quantifiée, La prédiction est un élément déterminant pour fonder des choix sur des prévisions politiques ou économiques. Il n'est donc pas étonnant que de nombreux savants aient eu des rôles politiques (Aristote, Cauchy, Lagrange, ...).

4.2 Limite

La causalité se limite à la prédiction de phénomènes compris quantifiables, beaucoup de phénomènes sont non quantifiables ou non prédictibles, leur nature relève du hasard, notre raison ne peut pas en déterminer la cause.

Les tentatives d'unifications des systèmes relevant d'une cause identifiée et des systèmes relevant du hasard échouent. Souvent elles utilisent le hasard comme cause première, pensant que la prédiction est un accident du hasard (par exemple : Démocrite, Schrödinger). Alors que les scientifiques ont une approche beaucoup plus pragmatique, il cherche à établir une prédiction, Le hasard est la constation que nous n'avons pas identifié de mécanisme de prédiction. Pour Aristote (en réponse à Démocrite) le hasard n'est pas une cause première. Pour Einstein" Dieu ne joue pas au dé" même en physique quantique.

L'approche probabiliste permet d'agréger des données sans avoir à distinguer les causes, elle est rapide mais imprécise. L'approche analytique est longue car il est nécessaire de distinguer l'effet de chaque cause.

Les deux approches sont louables mais elles sont différentes et n'ont pas la même utilité. Souvent les approches probabilistes se pensent comme universelles, car le hasard s'applique à tout. Mais cette approche semble peu pertinente, elle a tendance à différencier des groupes de systèmes sans pouvoir identifier la cause fondamentale. phusique

4.3 Développements futurs

Le modèle de la causalité que nous avons développé, bien que performant ne permet pas de modéliser les effets entre plus de deux éléments et donc de représenter des "forces extérieures". Il faudrait faire la somme des interactions entre les éléments, mais aussi que ces interactions soient exprimées dans un nombre limité de variables.

Chaque variable (r_i) entre deux éléments est unique, pour créer un modèle numérique viable, il est nécessaire de limiter le nombre de variable(r_i) au minimum afin de pouvoir agréger les données.

Pour cela, le modèle doit agréger des interactions externes, et sommer ces interactions entre éléments afin de tenir compte des effets externes. Il est aussi nécessaire de tenir compte du rapport de ces effets entre eux. Il est donc nécessaire de positionner les éléments les uns par rapport aux autres.

Tenir compte de ces rapports, c'est spatialiser la condition (r), c'est à dire trouver les rapports géométriques ou trigonométriques de l'agrégation des variables (r_i). Ce qui fera l'objet de développements futurs.

5 Bibliographie

1/ R. Descartes, Discours de la méthode, Ian Maire, Leyde, 1637.

2/ J. Pearl, '"Graphs, causality, and structural models- Sociology methods et research, Sociological Methods and Research", Los Angeles, 1998.

3/ Y. Iwasaki, HA Simon, "Causality and model abstraction, Artificial intelligence", Palo Alto, 1994.

4/ H. Poincaré, L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique, Bulletin des sciences mathématiques, Paris 1904.

5/ A. Einstein, "Über das Relativitätprinzip und die aus demselben gezogene Folgerungen, Jahrbuch der Radioactivität", Berne,1907.

6/ G. Galilée, "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno à due nuové scienze", Leida, 1632.

7/C. Blum et autres, Le Littré, Edition Garnier, Paris, 2007.

8/ L. Euler, "introductio in analysin infinitorum", Marcum Michaelem Bousquet et Socio, Lausanne, 1748.

9/JL Lagrange, Mécanique analytique, Courcier, Paris 1811, 1815.

10/AL Cauchy, Exercises de mathématiques, De bube frères, Paris1828.

11/W. Graf M. Altinakar, Hydrondynamique, Eyrolles, Paris, 1991.

12/ D. Bernouilli, "Hydrodynamica", Johannis Reinholdi Dulseckeri, Strasbourg, 1738. ,

13/ I. Newton, "Philosophia naturalis principia mathematica", Londre, 1686.

14/ Aristote, Physique, Andronicos, Rhode, environ -384 -322.