

# 揭秘量子力学

Lukas A. Saul  
合肥工业大学

Difei Zhang  
University of Paris-Sorbonne

2017年9月

## 摘要

由于社会压力的影响，围绕着各种数学和物理技术的叙述而被熟知的量子力学遇到了挫折。这些理论及其预测能力的不可思议的力量已经变成了一些耸人听闻的故事情节，我们称之为“量子神秘主义”。本文对这些力量进行了三方面的反击。精确的使用准确的术语，用直观的方法描述离散和微观现象的行为，这有效地揭开了量子力学的神秘面纱。我们不会在这里讨论数学细节，以使我们的讨论能够被普通人所理解。在我们揭开了这个学科的神秘性之后，它拥有了不可思议的预测能力，同时又不会吓跑一个理性的思考者。事实上，量子力学是一个完全理性的、直观的、易于理解的学科。这个世界充满了神秘；然而，这门学科致力于对某些特定系统的行为进行量化和合理化，并不是去寻找神秘事物的地方。

## 引言——量子神秘主义的例子

早在我高中的时候，我就开始了，当时我读到约翰·格里宾（John Gribbin）的《寻找薛定谔的猫》[Gribbin,1984]。那时我读到了格里宾的另一个不错的观点，想要了解更多。量子力学概述的很好，我稍后会做证实，不过我现在仍然会受困扰。这本书暗示了量子力学中有一些非常奇特的东西，但是读者并没有能达到这个水平去理解它到底是什么。他描述了 EPR 思想实验，如薛定谔的猫等其他思想实验，以及约翰·贝尔的研究。这些事情引出了艾伦·阿斯佩克特（Alan Aspect）的实验，并被作为证据，我的解释是：“事物是不可思议的”：

“在非常小的世界里，现实中的粒子和波都是同等重要的，事物不以我们从日常生活的经验中所能理解的方式来表现。所有的描述都是假的，我们没有任何物理的相似类比来理解原子内部的情况。原子就像原子一样，不是别的。”

——约翰·格里宾 (John Gribbin)

难道总是没有相似的吗?毕竟这是一种理论,我们可以象征性地或在我们自己之间进行交流。被认为量子力学的这种神秘的叙述并不是从格里宾开始的。事实上,与一些文献相比,他是一个圣人。以下是一些作者写的关于量子力学假定的不可思议的例子:

“我们对量子力学的研究越多,这个世界就变得越陌生;欣赏这个世界的奇异之处,在你现在所认为的现实中,它将成为把你的生活轨迹从平凡到非凡的转变的基础。这是一种将不可思议的宇宙与现实物理混合在一起的道,它将允许你瞬间移动,通过平行的世界来实现你的梦想。”——凯文·米歇尔 (Kevin Michel)

“量子物理学的发现表明意识本身创造了秩序”——琳恩·麦克塔加特 (Lynn McTaggart)

“原子或基本粒子本身并不是真实的;他们形成了一个充满潜力和可能性的世界,而不是事物或事实的世界”——维尔纳·海森堡 (Werner Heisenberg)

“量子力学一直是革命性的,主要是因为它要求引入全新的概念来更好地描述世界”——艾伦·阿斯佩克特 (Alain Aspect)

“对于那些初次发现量子理论时不感到震惊的人来说,是不可能理解它的。”——尼尔斯·波尔 (Niels Bohr)

“如果我们试图将一个客观实体的意义归结为一个单一系统的量子态,那么奇怪的悖论就会出现:量子效应不仅模拟了瞬时的超距作用,而且在这里看到了未来行为对过去事件的影响,即使这些事件已经被不可挽回地记录下来了。”——亚瑟·佩雷斯 (Asher Peres)

当我遇到这种论述时,我认为我没有能力看到这些困难点,因为我没有学习到所需要的高级水平。我并不感到震惊,或许只是因为我还完全没有理解它。在这一点上,我刚刚开始学习微分方程,所以我把它归因于我的经验缺乏和无知,并发誓要更加努力。

当我进入大学教育阶段，我在耶鲁大学物理系和工程系都学了量子力学课程。学到两种不同的方法是很有用的。量子力学通常是对物理学的本科生进行教学，虽然它本质上是一门应用微分方程的课程。这不是件坏事。将电子波函数的薛定谔方程应用到原子的中心电势，能使人们预测光电效应的发射线（发射光的颜色）。这可以说是量子力学中最大的成功。技术应用于工程部门，用于半导体等材料，加上信号工程师的考虑，为该理论提供了有效的应用。

之后我继续攻读物理学的研究生学位，并进一步学习了量子力学。在其他许多人当中，我有幸参加了约亨·海森堡（Jochen Heisenburg）的讲座，我在新罕布什尔大学获得了物理博士学位，艾伦·阿斯佩克特（Alain Aspect）让我在伯尔尼大学做了一场客座演讲，我在那里建博士后工作站，测试以及解析粒子探测器的结果，包括美国宇航局（NASA）的任务。在英国牛津大学两年多的学习之后，我终于决定专注于量子神秘主义的这个单一方向，觉得这是一个容易得到的挂的很低的水果，我写了：“皇帝没有非定域性”（索尔 Saul，2015 年）。

许多量子神秘主义似乎受到了皇帝新衣心理学的影响，人们被告知，如果他们懂数学，他们就会发现这个理论是多么的奇特和不直观。一般人都想要假装看到它，其实这个神秘并不真的存在。事实上，这个理论是实用的且成功的物理学，有时被称为是有史以来最好的测试理论。目前没有必要关注神秘主义的额外市场效应，这阻碍了理解和进一步的发展。

我们可以把大部分的量子神秘主义的争论放在三个方面的攻击中。我们的步骤是用这些细微的调整来影响到量子力学的主体：

- 1) 精确使用“光子”一词；
- 2) “非定域性”的术语或概念的消除；
- 3) 经典与量子力学之间的硬边界的消融。

这三个步骤中的每一个都可能只是一种表面的美容效果，这取决于你之前接触过的文献和物理学。那些熟悉应用量子力学的人不太可能在这里找到新的东西。这三种方法对理论的预测能力和物理能力都没有影响。但是他们可以按照我们的要求进行类似的打磨工作，将那些诋毁受人尊崇部分的过剩东西进行修剪，消除新学生或门外汉可能会踩下的各种错误的道路。

在我们开始之前，要指出的是，我们并不是在试图推广一种完全机械的世界图

景描述，也不是说没有神秘的事物。事实上，世界到处都是神秘的事物。我们的步骤将会给那些想要成为神秘主义者的人带来福音，同时也会给那些想要成为量子力学的人带来福音，因为这将使他们能够避免在错误的地方寻找他们想要的东西。量子力学作为物理学的一门学科，用自洽的模型解决了世界奥秘的一小部分。虽然用量子力学可以预测一个氢原子的电子行为，其准确度惊人，但目前还不能回答很多问题，比如为什么电子有质量、什么是电磁场的位置、为什么电子有三种表现、氢在哪里形成的，这儿只列举了几个例子。我应该不需要指出的是，有许多真正的奥秘存在。

### 1) 精确使用“光子”

在现代物理学中，精确语言的重要性有很多。相对论也许是最有力的例子，在之前的概念中，如“长度”和“同时性”已经变得模糊，因此在某些情况下是不可接受的。物理学家需要非常精确地使用术语，即使在实验室里的同事之间进行了清晰的讨论，外行或学生们可能会在模棱两可的情况下认为那是另一种潜在的含义。这样的读者将被迫接受不同的解释，这可能导致极大的混淆。要清楚的是，并不是物理学家和作者们在使用“光子”这个词时不正确，而是他们不精确。让我们清除一下混淆。

定义：*光子是电磁辐射的量子化发射或吸收。*

请注意，光子被定义为一个事件而不是一个实体。这可能看起来与一些描述是矛盾的，例如，从被激发氖气体中发射光子，进入眼睛。在这种情况下，虽然语言有点儿不精确，但发生了什么是毫无疑问的。氖气体发出的光被电子从一个允许的能量状态转移到另一个——一个量化的发射过程。这些量子化的辐射是光子——这些事件产生的光通过空间传播并进入到眼睛。

这种区别清除了所谓的“波粒二象性”，它有时被认为是量子力学的一个神秘的方面。事实上，这很直观。光的波性质是传播——描述随时间和空间的电磁扰动而演化的定律。像粒子一样的自然是对发射或吸收的量化——自然界要求光发射或吸收是不连续的离散量。这没什么奇怪的。

有很好的类比来描述这种情况。例如，一个拨弦琴演奏的“音符”是量化的声音的发射。我们一点也不奇怪，一个单音可以同时进入多个耳朵，而且我们也不奇怪一个光子在双缝实验中能穿过两个狭缝。当声音被离散地释放和吸收时，有时使用“声子”这个词。光发射或吸收的离散化可以被看作是数学上的，作为一个控制电子行为

的微分方程的特征值（即薛定谔方程）。这和只有某些谐波音符从固定长度的弦上出现的方式非常相似，因为描述运动的微分方程也有一定的量子化状态。几何和状态是完全不同的，但它们都包含了由于物理边界条件而离散化的元素。另一个例子是水珠从壶嘴中落下。在某个特定的系统中，物理过程决定了只有离散和特定大小的水滴才能下落。这是一个量子化，它给了这个理论的名字以及它的预测力。

## 例子：无线电波光子

许多作者都做出了不准确的声明“所有的光都是由光子组成的”。比这个稍好一点的说法是“所有的光都是光子的发射和吸收”。然而，这仍然是不精确的，因为并不是所有的光都是由这种量子化发射产生的。一个有启发意义的例子是，通过无线电台天线的交流电发射无线电波来进行光的发射。我们可以把“广播日”作为光子，事件始于电台开启开始发光，当电台关闭停止后结束。这与我们在某种程度上的定义是一致的，因为它是一种发射事件，然而它并不是以同样的方式量子化的，原子内的电子从一个能级移动到另一个能级被量子化，也不像一个由机械装置所拉出的弦的压力辐射被量子化。导体中的价电子的加速度不像束缚电子的能级那样被量子化。有许多发光的发射机制（通常只有当电荷加速时才会发生），从轫致辐射到同步加速器，它们并没有像我们所说的光子那样被量子化。他们的发射机制不依赖于普朗克公式中的常数。

遗憾的是，将光子描述为小粒子而非发射或吸收现象的不确切性，已经渗透到了物理学教育的许多领域。这个声音的类比在这儿很有用，我们可以做一个类似的陈述：“所有的声音都是音符”。在合适的语境里是正确的，但是单独用的话是不精确的。希尔伯特空间，或者说所有函数的数学空间，可以用正交多项式的系数来量子化描述。在声音的情况下，这意味着我们可以将一个声波信号（传播压力的变化）分解成一组离散频率振幅的正弦和余弦。这样我们就“离散”了一个信号。这是模拟数字转换器所做的，实际上它们对连续信号进行近似量子化（或离散）。从这个意义上，我们也可以说所有的电磁场都是光子，因为我们确实可以取一个任意的时变的场位，并用特定频率的正弦和余弦表示。从这个意义上说，所有的电磁场在数学上都是“光子”，在量子电动力学（QED）中是这样的。然而，这并不符合我们的精确定义。为了避免歧义，将场的数学分解为正交多项式的函数，如不同频率的正弦和余弦，应该被描述为这样，而不是经常给行外人描述 QED 这样令人困惑的简写。费曼图描述电磁场力作为“光子”的交换具有数学效用，但它们不是物理模型。当一个人试图通过虚拟粒子交换来解释两个物体之间的引力时，这点就变得很清楚了。虚拟

交换粒子必须具有与运动方向相反的动量。这样的一个实体，用来描述一个数学模型的组成部分，应该与我们称之为光子的物理量子化发射或吸收事件不同。

把光发射描述成光电效应，以及随后的对原子物理学的理解，引出了“紫外线灾难”的解决方案，并使诸如激光之类的技术得到了更多的应用。我们应该用一个合理的、一致的术语来尊重这个成功。光子是光的量子化发射或吸收，因此对于波粒二象性或光子的性质而言，没有任何神秘的一面，就像振动弦上的声音量子化的本质一样。

## 2) 非定域性的消除

许多作者将量子力学系统的某些行为称为“非定域的”。这种混淆困惑导致了一些奇怪的推断和理论，它们中的大多数在理解物理系统的本质上并没有任何用处。为了找到这个问题的核心，我提出了一个最容易理解的关于这个问题的观点，由于它的简单性，已经被重复发表了好几次。为此，我们必须感谢作者大卫·莫明 (David Mermin)。在他的今日物理的主题文章[Mermin,1985]中，他向读者征集一个解决他思想实验的方法，这个实验涉及到定域的物理学。我想出了一个满足要求的答案[Saul,2015]。

对测量到的和事先被认为的物理数量之间的差异的基本误解，这是问题的核心。举个例子，让我们考虑一下质量。我们可以说一个物体有一个质量  $M$ ，并对它做出一些定义，比如重力，或者对其他加速度的阻力。在这样做的过程中，我们声明物体的质量为  $M$ ，作为我们预测用。接着我们试着测量它的质量。我们的测量是在特定的时刻，用特定的设备、特定的校准下进行的。测量总是会有误差，在一定范围内测量会有一个概率性质。换句话说，我们永远不可能准确地知道（以无限精确）质量  $M$ 。这并不意味着我们不能说物体有质量  $M$ ，只是说明我们理解了测量的限制和有限的精度。在新学生的实验课堂教学中，我们用一个误差条来报告质量，以表示我们的不确定性。

当这种对测量的理解被应用到其他的系统时，差异就更显著了。质量在宏观下是呈连续性的，但是我们现在知道在通常情况下，它不是的。就像在一个给定的磁场中，电子的自旋向上或自旋向下是不完全连续的。向上或向下自旋的检测器没有中间结果可以报告。尽管如此，测量的概率性仍然存在。一些作者像贝尔 Bell [1964]要求一种根据被测量过的物体来精确预测的后测量，发现一个有趣的矛盾。他们把这称为“非定域性”，因为测量的概率可能与远距离测量的另一个物体有关。然而，这种概率的相关性并不是量子力学独有的。事实上，每个人都有在宏观世界中

二元选择测量的经验。最基本的儿童游戏“硬币在哪只手里”就是个例子——当一个人知道一只手中没有硬币时，立刻就明白了另一只手里的情况（有硬币或者没有）。这就是我们所指的非定域性的情形。在很多情况下，概率看起来很奇怪，另一个很好的例子就是蒙提霍尔 Monty Hall 问题，但它对量子力学而言并不是新的或独特的。

更具体的说，我们要更详细的描述自旋向上自旋向下实验，像艾伦·阿斯佩克特 Alan Aspect 团队做过的实验，而不是那些试图让他们听起来很神秘的不精确的描述。简单来说，这被称为 EPR 实验，因为它被描述为爱因斯坦 Einstein、波多尔斯基 Podolsky 和罗森 Rosen 的思想实验。两个旋转互相关联的粒子，因为角动量守恒，我们知道他们的旋转轴相同，但是方向相反。在不知道两个粒子的自旋矢量的情况下，需要一个概率的方法来描述系统的预测测量。测量一个粒子，然后立即知道另一个粒子——即使它们相距极远。

这奇怪吗？一点也不。我们对系统的认识并不是嵌入在系统内来认识，对于我们来说，系统的不同部分之间的相互关联应该是不奇怪的。例如，想象你听到有人来到你的家里，假设他是你的朋友。你听到他在隔壁房间的碗柜里找东西。现在，你向窗外看，看到你的朋友在外面。突然间，你对隔壁房间里那个人的描述立刻改变了。这是一个奇怪的非定域效应吗？不，这是常识。你现在有其他可能性的叠加是谁在隔壁房间里。你打开门，看到那是你的妹妹。“你好，我以为你在工作呢”你说。这是否意味着代表你姐姐工作场所的状态矢量突然变了，尽管它的位置很遥远？是的。这是一个神秘的新物理学揭示了世界吗？没有。量子的非定域性也是同样的行为。可悲的是，对测量到的和事先被认为的物理数量之间的差异的误解，我们对系统的认识 and 系统的实际状态之间的区别，导致了诸如“多重世界”或“平行宇宙”这种无休止的猜测推断。这些可能性，尽管它们本身是有趣的，但并不是量子力学所要求的。费曼 Feynman 的路径积分技术在数学上很有用，但并不是说所有的路径都比一个投资者的情况更重要，凯利标准的分析包含了不同可能的市场结果，假设市场可以同时做两件事。所谓的“波函数坍缩”仅仅是一个声明，观察者已经确定了系统的一些东西，并且系统本身的物理过程无法感知。

大卫·贝尔 David Bell 的启示和各种实验证实了 EPR 理想的预测并不是无用的。它们代表了对光和信号操控的改进实验能力，以及对测量理论的更好理解。然而，它们并没有指出任何物理上的非定域性行为，也没有任何神秘的东西。恰恰相反，它们量化并使某些系统的某些行为变得合理。他们认为测量是一个概率过程，而测量结果永远不会完全由内部状态决定。他们证明了理解粒子探测器具有噪音阈值和假阳性检出率的重要性，以及如何在统计一致的方式上使用一致性检测。事后看来，

这是显而易见的，正如我们从克劳德·香农（Claude Shannon）的通信数学理论中所知道的那样，所有的沟通都是一个概率过程，而测量可以被建模为一种沟通。因此，我们有类似于早期测量光速的情况。今天，这样的实验可能被认为等同于测量米尺的长度，看起来微不足道。然而，当时它们是物理学的一个里程碑。

### 3) 不再强调量子物理学/经典物理学的错误二分法

由于种种原因，人们错误地将量子力学视为与经典物理学完全不同的科学。随着物理学的发展，从一种类型的系统到其它类型的系统的解释和预测，就有必要给这些学科命名。这些名字总是不完美和重叠的。“量子力学”主要是为了解决一系列新方法，特别是那些涉及到化学原子的离散或量子化行为的问题。

随着原子理论的改进，包括许多有用的技术，出现了许多变化。然而，经典物理学与量子物理学之间的二分法是错误的，这个没有必要再去强调，因为我们还要去揭开量子力学的神秘面纱，为了更好的理解和更好的有价值的物理教学，继续我们的探索。

有些人可能把量子力学（和相对论）描述为“非牛顿理论”。从某种意义上说，他们是对的。然而，在同样的意义上，玻尔兹曼的气体动力学理论和麦克斯韦的电磁学理论也是非牛顿的。就像牛顿说的：“如果我看得更远，那只是因为我站在巨人的肩膀上。”在这种情况下，巨人包括牛顿本人，而量子力学的伟大创新者就是站在他肩膀上的人。

通过观察量子力学的符号，可以看出这是正确的。在量子力学中，哈密顿量 Hamiltonian（经典力学中的总能量描述）的重要性是很明显的。经典的物理概念完全是量子力学，除了微积分学之外，还包括动量、角动量、能量、电势、场。库仑定律是描述氢原子电场的关键。

一些作者认为，把电子作为波函数统计来处理是我们看待系统的一种根本改变。然而，数学和我们用来定义流体力学的物理量是一样的。在气体动力学中，物理量，如温度和密度，物理上定义为描述气体的分布函数的积分。这些量在动力学理论中定义为气体中原子的概率分布的一个积分。这就是量子力学描述的物理量，例如，电子位置和波函数的动量。由于考虑到了系统的本质，有些新的物理量出现，最明显的是普朗克常数  $h$ 。

但是，这很难使物理成为一个根本不同的野兽，任何一个你可能想要考虑的新系统的参数也会使它如此。

对于电子的例子来说，它的行为可以被粗略地描述为类似于大气中的风暴系统。虽然我们可以清楚地看到风暴的存在，并描述了它的平均中心的运动，但没有明确的边界，而是一个统计分布。同样，运动中可能存在各种不确定因素。这个类比并不完美，但它展示了波函数的物理原理和量子力学的概率处理与经典力学并没有本质上的不一致。相反，他们建立在经典力学上——而且非常成功。

另一些人可能认为，电子波函数的复杂（甚至狄拉克理论中的更高维度）的性质是一个奇怪的现象。同样，我们在经典物理学中也有类似的例子。虚数在数学和工程上已经有好几个世纪的实际应用了[对于一个伟大的回顾，参见 Nahin, 1998]。工程师很熟悉用复数来描述电流，而等离子体物理学家很熟悉用复数折射率。虚数听起来相当神秘，但实际上它们是很有根据的，可以直观的被想象为一种追踪多个维度的方法。对于电子波函数的例子，马德隆（Madelung）变换提供了进一步的见解，解释了为什么薛定谔方程和复杂的波函数可以被转换成流体方程，类似于经典流体力学的纳维叶 - 斯托克斯（navier-stokes）方程。

同样值得指出的是，我们已经进入 21 世纪了，量子力学本身已经足够古老，可以被称为经典理论。量子形式主义不是新的也不神秘，而是实际上经历了几代人的历史，非常完善的建立，并以实验为基础。如果我们能够精确地用描述和语言来尊重这一遗产，我们将使下一代物理学家取得更大的进步，并帮助所有感兴趣的人更好地了解他们周围的世界。

## 讨论

所谓的哥本哈根解释有时被描述为物理系统在测量之前没有物理属性。这是不真诚的，而如今则是对量子理论的成功预测的不必要的偏离。没有必要断言像质量、自旋、动量和能量等属性的不存在。只有假设这些模型参数的存在，这是世界模型能工作的唯一方法。这种假设是我们在所有尺度上的世界模型的基础。相反，我们可以说他们的测量是不存在的直到他们被测量了为止。这应该不是什么神秘的事。在量子力学的文集中，没有任何证据表明，我们的观点或意识直接影响了物理量的定义。只是我们对这些量的认识受到我们意识的影响而已。

量子隧道有时也会以一种神秘的方式被提及。同样，这个理论是对的，但它的描述是不精确的和具有欺骗性的。例如，考虑一个膨胀的热气球。如果我们知道气

球里气体的温度，我们就能给出内部气体分子的平均能量。我们可以确定，这种能量小于穿透气球的气囊和逃逸所需要的能量。然而，我们发现随着时间的推移，气球慢慢地缩小。这可能被称为隧道。解决的办法是理解平均能量不足以描述整个系统。许多分子的运动速度高于平均水平，并受到碰撞和其他外部效应的影响。因此有些能量可以通过屏障进入隧道。同样，一个粒子在势阱中可能有平均能量，这表明它被困住了。量子力学计算使我们可以通过随机波动确定其加速度的概率，并确定其逃逸的概率。这些随机波动有时被称为颤动，与经典布朗运动相似。

流行文学中的另一个与量子有关的概念是“量子计算”。因为今天的计算通常指的就是离散的运算，所以这个短语最初看起来是有点冗余的。然而，量子计算不是指离散的运算本身，而是指一种计算机，在这种计算机中，构建块（位或量子位）的相关性与软件并没有捆绑在一起，而是直接与它们的构造相关联。这远远超出了本文的范围，但我在这里提到它，是要指出这一领域的进展并没有被我们的结论排除在外。一个功能正常的量子计算机，如果它能被建立，就不需要神秘的非定域的系统行为。它只需要物理的位，可以直接以一种特定的方式进行耦合，而不是像传统的基于晶体管的计算机那样，通过电子传输和交换来实现。

人类学家可能有兴趣进一步探究为什么量子力学的学科在某些叙述中看到了这种侵蚀或神秘化。答案再次超出了本文的范围，但我们在许多学科中都看到了混淆和哗众取宠的倾向。有时因为各种原因，这些被认为是有益的。在量子力学的例子中，如果这些原因是有效的，那现在已经超过了它们的精华。

当孩子们在很小的时候，他们就发现了我们周围世界的模型都有限制，这很快就会被反复问“为什么”？量子力学也一样。这一理论的任何方面都能很快地通过一对“为什么”的问题进入到未知世界。为什么普朗克常数是常数？为什么有电磁场？为什么有颤动？这些是留给将来的物理学家回答的很好的问题。当然，任何其它理论也是如此。对目前已有的和经过良好测试的量子力学在它适用性范围内的强调，只会对这个强大的久经试验的理论的价值产生某些微妙的削弱。我们应该感谢这些理论的创始人和他们的见解，将帮助未来的物理学家们，让他们从这种消极的论述中解脱。

## 致谢

感谢保罗·马多尔 (Paul Madore) 的纠正和注释。感谢在# #物理 irc 频道和物理新闻组的参与者的讨论和鼓励。

## 参考文献

- 1) "In search of Schrödinger's Cat, Quantum Physics and Reality", John Gribbin, Bantam Books, 1984
- 2) "Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory", David Mermin, Physics Today, Page 38, April 1985
- 3) "The emperor has no non-locality", Lukas Saul, Physics Essays, Volume 28: Pages 561-566, 2015
- 4) "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", J.S. Bell, Physics Vol. 1 No.3, Page 195, 1964
- 5) "An Imaginary Tale", Paul J. Nahin, Princeton Univ. Press, 1998