Nouvelle Ecriture des Equations du Problème de n Corps

Abdelmajid Ben Hadj Salem

Table des matières

1 Le Problème de n corps

> Le Problème des trois corps a une telle importance pour l'Astronomie, et il est en même temps si difficile, que tous les efforts des géomètres ont été depuis longtemps dirigés de ce côté. Une intégration complète et rigoureuse étant manifestement impossible, c'est aux procédés d'approximation que l'on a dû faire appel.
>
> Henri Poincaré [1] ([1],1892)

Considérons le mouvement de n corps $P_k(k = 1, 2, ..., n)$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Soient (x_k, y_k, z_k) les coordonnées de P_k dans un repère cartésien fixe et m_k sa masse $(m_k > 0)$. Notons r_{kl} la distance entre les points P_k et P_l telle que :

$$r_{kl}^2 = (x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2 \quad (k, l = 1, 2, ..., n) \tag{1}$$

Les corps P_k soumis à l'attraction universelle dans le repère cartésien qu'on note $\mathcal{R}(O, e_1, e_2, e_3)$. Alors la fonction potentiel due à la gravitation est :

$$U = \sum_{k<l} \frac{G.m_k m_l}{r_{kl}} = \sum_{k<l} \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} = \sum_{k<l} U_{kl} \tag{2}$$

avec G la constante universelle de la gravitation et :

$$U_{kl} = \frac{G.m_k m_l}{\sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2}} \tag{3}$$

1. Henri Poincaré (1854-1912) : mathématicien français, parmi les plus grands du XIXème siècle.

Notons par q et m respectivement l'une des composantes et la masse d'un point quelconque P_l, alors on peut écrire les équations du mouvement :

$$m\frac{d^2q}{dt^2} = U_q = \frac{\partial U}{\partial q} \tag{4}$$

Appliquons par exemple la formule précédente pour la composante x d'un point P_k, on obtient :

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = U_{x_k} = \frac{\partial U}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l}{r_{kl}} \tag{5}$$

d'où :

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = \sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3} = \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3} \tag{6}$$

2 Les Intégrales Premières des équations du mouvement

Si on somme les deux membres de l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_k m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = \sum_k\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l(x_l-x_k)}{r_{kl}^3} = 0 \tag{7}$$

Ce qui donne :

$$\sum_k m_k\frac{d^2x_k}{dt^2} = 0 \Longrightarrow \boxed{\sum_k m_k\frac{dx_k}{dt} = a, \quad a = constante} \tag{8}$$

De même, on obtient :

$$\boxed{\sum_k m_k\frac{dy_k}{dt} = b, \quad b = constante} \tag{9}$$

$$\boxed{\sum_k m_k\frac{dz_k}{dt} = c, \quad c = constante} \tag{10}$$

En intégrant une deuxième fois les équations (8-9-10), on obtient :

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_kx_k = at + a_0, \quad a_0 = constante} \tag{11}$$

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_ky_k = bt + b_0, \quad b_0 = constante} \tag{12}$$

$$\boxed{\textstyle\sum_k m_kz_k = ct + c_0, \quad c_0 = constante} \tag{13}$$

A partir de (6), les équations du mouvement s'écrivent sous forme vectorielle comme suit :

$$m_k\frac{d^2\boldsymbol{OP}_k}{dt^2} = \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n}\frac{Gm_km_l(\boldsymbol{OP}_l-\boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} \tag{14}$$

Multiplions vectoriellement les deux membres de l'équation précédente par $\boldsymbol{OP}_k$, on obtient :

$$m_k \frac{d^2 \boldsymbol{OP}_k}{dt^2} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n} \frac{G m_l m_k (\boldsymbol{OP}_l - \boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n} \frac{G m_l m_k (\boldsymbol{OP}_l \wedge \boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} \tag{15}$$

On somme sur l'indice k, d'où :

$$\sum_k m_k \frac{d^2 \boldsymbol{OP}_k}{dt^2} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \sum_k \sum_{l=1;l\neq k}^{l=n} \frac{G m_l m_k (\boldsymbol{OP}_l \wedge \boldsymbol{OP}_k)}{r_{kl}^3} = \boldsymbol{0} \tag{16}$$

L'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_k m_k \frac{d\boldsymbol{OP}_k}{dt} \wedge \boldsymbol{OP}_k \right) = \boldsymbol{0} \tag{17}$$

En intégrant, on trouve :

$$\sum_k m_k \frac{d\boldsymbol{OP}_k}{dt} \wedge \boldsymbol{OP}_k = \boldsymbol{w} = \textit{ vecteur constant} \tag{18}$$

C'est la conservation du moment cinétique. Soit en considérant les composantes du moment cinétique :

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{y}_k z_k - y_k \dot{z}_k) = \alpha \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{z}_k x_k - z_k \dot{x}_k) = \beta \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} m_k(\dot{x}_k y_k - x_k \dot{y}_k) = \gamma \end{array}} \tag{19}$$

en notant $\dot{q}_k = \dfrac{dq_k}{dt}$.

A partir de l'équation (4), on peut écrire en multipliant ses deux membres par $\dfrac{dq}{dt}$:

$$m \frac{d^2 q}{dt^2} . \frac{dq}{dt} = \frac{\partial U}{\partial q} . \frac{dq}{dt} \tag{20}$$

En sommant sur toutes les composantes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i}^{3} d\left(\frac{1}{2} m_k \left(\frac{dq_{ik}}{dt} \right)^2 \right) = \sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial U}{\partial q_k} dq_k \tag{21}$$

En intégrant l'équation précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i}^{3}\left(\frac{1}{2}m_k\left(\frac{dq_{ik}}{dt}\right)^2\right)-U=constante \tag{22}$$

or :

$$v_k^2=\sum_{i}^{3}\left(\frac{dq_{ik}}{dt}\right)^2 \tag{23}$$

Par suite, on écrit :

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_kv_k^2-U=T-U=constante} \tag{24}$$

où :

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}m_kv_k^2 \tag{25}$$

est l'énergie cinétique et U l'energie potentielle.

Les équations (8-9-10) et (11-12-13) et les 3 équations de (19) et (24) constituent les 10 intégrales premières. Le système (4) est formé de $6n$ équations avec les 10 intégrales pour déterminer les $3n$ inconnues.

3 Nouvelle Ecriture des Equations du Problème de n Corps

A partir de l'équation (5) ci-dessus :

$$m_k\frac{d^2x_k}{dt^2}=U_{x_k}=\frac{\partial U}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l}{r_{kl}}$$

on va considérer que t est une fonction des composantes x_k,y_k,z_k. Ecrivons l'équation (5) sous la forme :

$$m_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial x_k}}\right).\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial x_k}}=\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l}{r_{kl}} \tag{26}$$

ou encore :

$$-m_k\frac{\partial^2 t}{\partial x_k^2}.\frac{1}{\left(\frac{\partial t}{\partial x_k}\right)^3}=\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{l\neq k}\frac{Gm_km_l}{r_{kl}} \tag{27}$$

Posons :

$$\frac{\partial t}{\partial x_k}=Z_{1k}^p=Z_{1k}(x_1,y_1,z_1,...,x_k,...,z_n)^p \tag{28}$$

avec $p \in \mathbb{Q}^*$. Alors l'équation (27) devient :

$$-m_k p Z_{1k}^{p-1} \frac{\partial Z_{1k}}{\partial x_k} . \frac{1}{Z_{1k}^{3p}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l \neq k} \frac{G m_k m_l}{r_{kl}} \tag{29}$$

En prenant $p = -\dfrac{1}{2}$, on obtient le système des équations fondamentales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial t}{\partial x_k} = \dfrac{1}{\sqrt{Z_{1k}}} \quad avec \quad Z_{1k} > 0 \\ \\ \dfrac{\partial Z_{1k}}{\partial x_k} = 2 \dfrac{\partial}{\partial x_k} \displaystyle\sum_{l \neq k} \dfrac{G m_l}{r_{kl}} \end{array} \right. \tag{30}$$

En intégrant la deuxième équation du système ci-dessus et en prenant :

$$Z_{1k} = 2 \sum_{l \neq k} \frac{G m_l}{r_{kl}} + \Psi_{1k}(x_l)_{l \neq k} > 0 \tag{31}$$

où Ψ_{1k} est une fonction qui ne dépend pas de x_k telle que $Z_{1k} > 0$.

Soient deux variables quelconques qu'on note ξ_α, ξ_β, on a donc :

$$Z_\alpha = 2 \sum_{l \neq \alpha} \frac{G m_l}{r_{\alpha l}} + \Psi_\alpha(x_l)_{l \neq \alpha} > 0 \tag{32}$$

et :

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial t}{\partial \xi_\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{Z_\alpha}} \quad avec \quad Z_\alpha > 0 \\ \dfrac{\partial t}{\partial \xi_\beta} = \dfrac{1}{\sqrt{Z_\beta}} \quad avec \quad Z_\beta > 0 \end{array}$$

Par suite :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} = \frac{\partial^2 t}{\partial \xi_\beta \partial \xi_\alpha}$$

ce qui donne quand, on fait varier k, la fonction Ψ_{1k} se réduit à une constante qu'on prendra égale à 0. Alors, on a :

$$Z_{1k} = 2 \sum_{l \neq k} \frac{G m_l}{r_{kl}} \tag{33}$$

La première équation de (30) donne :

$$\boxed{dt = \frac{dx_1}{\sqrt{Z_{11}}} = \frac{dy_1}{\sqrt{Z_{12}}} = \frac{dz_1}{\sqrt{Z_{13}}} = \cdots = \frac{dz_n}{\sqrt{Z_{3n}}}} \tag{34}$$

Les équations précédentes constituent la nouvelle écriture du mouvement de n corps.

Références

[1] **Henri Poincaré**. 1892. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*. Tome I. Gauthier Villars et Fils, Imprimeurs-Libraires. Paris. 408p.

Abdelmajid Ben Hadj Salem
6, rue du Nil, Cité Soliman, 8020 Solima,Tunisia.
Email : abenhadjsalem@gmail.com

Août 2017